_ _ الاشتقاقية _ _

الاشتقاقيــة

❶ قابلية اشتقاق دالة :

العدد المشتـق - الدالة المشتـقة :

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد من D_f .

القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل نهاية حقيقية ℓ لما يؤول h إلى 0

وَ نكتب : $\ell = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ، يسمى ℓ العدد المشتق للدالة f عند x_0 وَ نرمز له بـ : $f'(x_0)$.

ملاحظات : ⬅ النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تسمى نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 وَ x_0+h .

⬅ بوضع $x = x_0+h$ الكتابة $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تكتب $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

⬅ إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من D_f نقول أنها تقبل الاشتقاق على D_f

وَ نسمي الدالة : $f' : x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

تطبيق 01

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^2 - 3$

1/ أكتب نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1 وَ $1+h$.

2/ أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 وَ استنتج $f'(1)$.

الحل

1/ كتابة نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1 وَ $1+h$:

لدينا من أجل كل $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\left[2(1+h)^2-3\right]-\left[2(1)^2-3\right]}{h} = \frac{2(1+2h+h^2)-2}{h} = \frac{4h+2h^2}{h} = \frac{(4+h)\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4+h$$

2/ إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1:

بما أن : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(4+h) = 4$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 وَ $f'(1) = 4$.

قابلية الاشتقاق من اليمين وَ من اليسار :

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد من D_f .

القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين وَ على يسار العدد x_0 أي:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$ مع $\ell \in \mathbb{R}$.

تطبيق 02

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x)=\frac{|x|\,x^2}{x+2}$

1/ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$.

الحل

1/ كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $|x|=\begin{cases}+x & ; x\geq 0\\ -x & ; x<0\end{cases}$ إذن : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{x+2} & ; x\in[0;+\infty[\\ \frac{-x^3}{x+2} & ; x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0[\end{cases}$.

2/ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$:

أولاً دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^3}{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^3}{x+2}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2}{x+2}=\frac{0}{2}=0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$.

ثانياً دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=0$

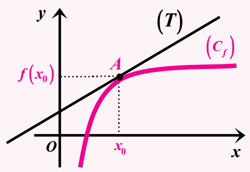
$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{-x^3}{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{-x^3}{x+2}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x^2}{x+2}=\frac{0}{2}=0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0=0$.

النتيجة : بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين و على يسار $x_0=0$ و لهما نفس النهاية فإن f دالة قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.

مماس منحنى عند نقطة منه:

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً (T) معامل توجيهه العدد المشتق $f'(x_0)$ و معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



ملاحظة : ليكن منحنى الدالة f يقبل مماساً (T) عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
و (Δ) مستقيم الذي معادلته : $y=a\,x+b$.

- إذا كان : $f'(x_0)=a$ فإن المستقيمان (T) و (Δ) متوازيان .
- إذا كان : $f'(x_0)\times a=-1$ فإن المستقيمان (T) و (Δ) متعامدان .
- إذا كان : $f(x_0)=x_0\times f'(x_0)$ فإن المماس (T) يشمل النقطة $O(0;0)$ مبدأ المعلم .
- إذا كان : $f'(x_0)=0$ فإن المماس (T) يوازي محور الفواصل .

تطبيق 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x-1$ وَ (Δ) مستقيم الذي معادلته : $y=-3x+5$ . .

1/ أكتب معادلة لـ (T) مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ وَ يوازي المستقيم (Δ).

2/ أكتب معادلة لـ (T') مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_1=1$ وَ الموازي لمحور الفواصل .

3/ أكتب معادلة لـ (T'') مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_2=-1$ وَ عمودي على المستقيم (T).

الحل

1/ كتابة معادلة المماس (T):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ منه : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

بما أن (T) وَ (Δ) متوازيان فإن : $f'(0)=-3$ وَ $f(0)=0^3-3(0)-1=-1$

معادلة المماس تصبح : $y=-3(x-0)-1$ وَ بالتالي : $(T):y=-3x-1$.

2/ كتابة معادلة المماس (T'):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$ منه : $(T'):y=f'(1)(x-1)+f(1)$

بما أن (T') يوازي محور الفواصل فإن : $f'(1)=0$ وَ $f(1)=1^3-3(1)-1=-3$

معادلة المماس تصبح : $y=0(x-1)-3$ وَ بالتالي : $(T'):y=-3$.

3/ كتابة معادلة المماس (T''):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)$ منه : $(T''):y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

بما أن (T'') وَ (T) متعامدان فإن : $f'(-1)\times(-3)=-1$ منه : $f'(-1)=\frac{1}{3}$ وَ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)-1=1$

معادلة المماس تصبح : $y=\frac{1}{3}(x+1)+1$ منه: $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+1$ وَ بالتالي : $(T''):y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

الاشتقاقية وَ الاستمرارية :

مبرهنة : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0 .

ملاحظة : عكس هذه المبرهنة ليس بالضرورة صحيحة.

تطبيق 04

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x-3|$

1/ برر لماذا الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$ ، ماذا تلاحظ ؟

$\lim_{x\to 3^+}|x-3|=\lim_{x\to 3^+}(x-3)$

$\lim_{x\to 3^-}|x-3|=\lim_{x\to 3^-}-(x-3)$

الحل

1/ استمرارية الدالة f عند $x_0=3$:

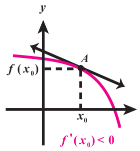
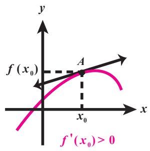
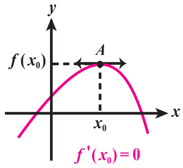
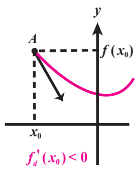
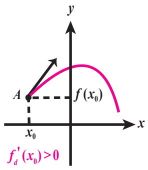
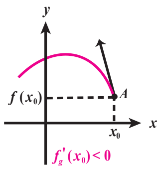
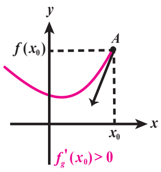
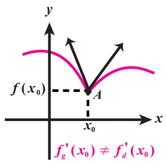
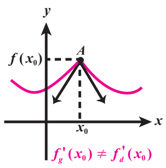
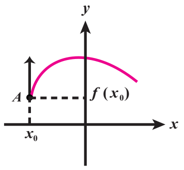
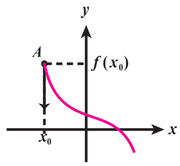
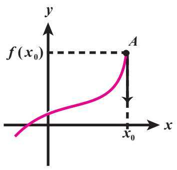
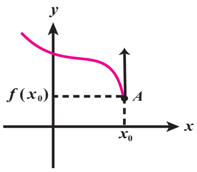
بما أن $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$ فإن الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

2/ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$:

لدينا: $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3}\frac{x-3}{x-3}=1$ وَ $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$

بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين و على يسار $x_0=3$ و ليس لهما نفس النهاية فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=3$.

التفسيرات الهندسية للاشتقاقية :

النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y=f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية .  
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 

❷ عمليات على الدوال المشتقة :

مشتقات الدوال المألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
a حيث $a\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

المشتقات وَ العمليات على الدوال :

لتكن u وَ v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I وَ a عدد حقيقي .

الدالة	$u\pm v$	$a\,u$	$u\times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	$a\,u'$	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

ملاحظات :

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجال محتوى في مجموعة تعريفها.
- نرمز: $f^{(1)}=f'$ ، $f^{(2)}=f''$ ، $f^{(3)}=f'''$ وَ هكذا إلى غاية $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة n مع $n\in\mathbb{N}^*$.

تطبيق 05

– عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى في كل حالة :

1/ $f(x)=-4x^5+2x^4-x^3+6$ ، $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ ، $I=\mathbb{R}-\{1\}$

3/ $f(x)=\sin x\times\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\frac{x^2+x-3}{x^2}$ ، $I=\mathbb{R}-\{0\}$

5/ $f(x)=\frac{|x|+x-1}{2x-1}$ ، $I=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

6/ $f(x)=\left(x^2-3x\right)^{2017}$ ، $I=\mathbb{R}$

7/ $f(x)=\cos(-3x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$

8/ $f(x)=\cos(\sin x)$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل

1/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=-4\left(x^5\right)'+2\left(x^4\right)'-\left(x^3\right)'+\left(6\right)'$ منه: $f'(x)=-20x^4+8x^3-3x^2$.

2/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ إذن: $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)'$ منه: $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x+1\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+1}}=\dfrac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x+1}}$

أي: $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$.

3/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(2x-1)'\sin x+(\sin x)'(2x-1)$

منه: $f'(x)=2\sin x+(\cos x)(2x-1)$.

4/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ إذن: $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+x-3\right)'\left(x^2\right)-\left(x^2\right)'\left(x^2+x-3\right)}{\left(x^2\right)^2}$

منه: $f'(x)=\dfrac{(2x+1)x^2-2x\left(x^2+x-3\right)}{x^4}=\dfrac{\cancel{2x^3}+x^2\cancel{-2x^3}-2x^2+6x}{x^4}=\dfrac{-x^2+6x}{x^4}$

و بالتالي: $f'(x)=\dfrac{-x+6}{x^3}$.

5/ أولاً نكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

لدينا: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2x-1}=1 & ; x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\\ \dfrac{-1}{2x-1} & ; x\in\left]-\infty;0\right[\end{cases}$ منه : $f'(x)=\begin{cases}0 & ; x\in\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\\ \dfrac{2}{(2x-1)^2} & ; x\in\left]-\infty;0\right[\end{cases}$.

6/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=2017\left(x^2-3x\right)^{2017-1}\times\left(x^2-3x\right)'$

منه: $f'(x)=2017\left(x^2-3x\right)^{2016}\times(2x-3)$.

7/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(-3x+2)'\cos'(-3x+2)$ منه: $f'(x)=(-3)\left[-\sin(-3x+2)\right]$

أي: $f'(x)=3\sin(-3x+2)$.

8/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(\sin x)'\cos'(\sin x)$ منه: $f'(x)=\cos x\left[-\sin(\sin x)\right]$

أي: $f'(x)=-\cos x\times\sin(\sin x)$.

③ اتجاه تغير دالة :

المشتقة واتجاه التغير :

مبرهنة : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

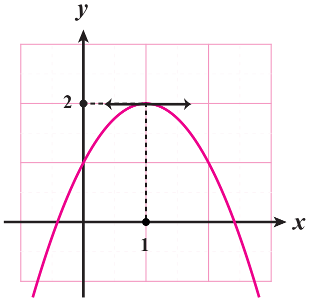
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على D_f .

ملاحظة : نقول أن الدالة f رتيبة تماماً على المجال D_f ، إذا كانت متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على المجال D_f .

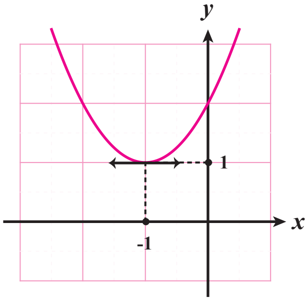
القيم الحدية المحلية :

تعاريف : f دالة معرفة على D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من D_f .

- نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f وَ يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I يكون : $f(x) \leq f(x_0)$.
- نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f وَ يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I يكون : $f(x) \geq f(x_0)$.



$f(1)=2$ قيمة حدية محلية عظمى



$f(-1)=1$ قيمة حدية محلية صغرى

ملاحظة : f دالة معرفة وَ قابلة للاشتقاق مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من I .

تكون $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f إذا انعدمت الدالة المشتقة f' وَ مغيرة إشارتها بجوار x_0 .

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

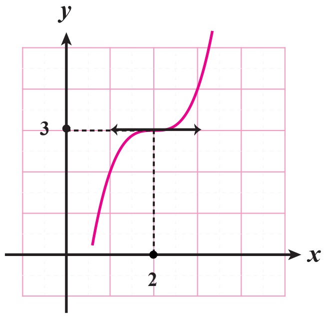
x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

نقطة الانعطاف :

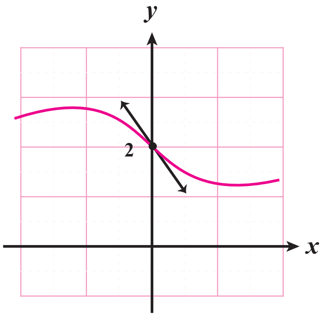
تعريف ① : نقطة انعطاف دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها المماس يخترق هذا المنحنى .

تعريف ② : إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مع تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 .

تعريف ③ : إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 دون تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 .



$(2;3)$ تمثل نقطة انعطاف



$(0;2)$ تمثل نقطة انعطاف

تطبيق 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ - أثبت أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ثم احسب $f'(x)$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم عين القيم الحدية للدالة f مستنتجا نوعها.
- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3/ هل للدالة f نقطة انعطاف ؟ في حالة نعم أكتب معادلة المماس في هذه النقطة.

الحل

1/ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ أخذنا نهاية الحد أكبر أس (درجة).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$ أخذنا نهاية الحد أكبر أس (درجة).

2/ إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

بما أن f دالة كثير الحدود فهي معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ منه: $f'(x)=6x^2+6x-12$.

- استنتاج اتجاه تغير الدالة :

لمعرفة اتجاه تغير الدالة f نقوم بدراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $f'(x)=6x^2+6x-12$ تكافئ: $f'(x)=6(x^2+x-2)$ تكافئ: $f'(x)=(x-1)(x+2)$

الجدول المقابل يبين إشارة: $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

- الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ و $[1;+\infty[$.
- الدالة f متناقصة تماماً على المجال $[-2;1]$.

- تعيين القيم الحدية للدالة f:

بما أن المشتقة الأولى f' تنعدم و تغير من إشارتها عند : $x=-2$ و $x=1$ فإن للدالة f قيمتين حديتين الأولى عظمى و هي $f(-2)=21$ و الثانية صغرى و هي $f(1)=-6$.

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)=21$	↘	$f(1)=-6$	↗	$+\infty$

2/ هل للدالة f نقطة انعطاف ؟

الدالة f تقبل نقطة انعطاف إذا كانت المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها.

لدينا: $f'(x)=6x^2+6x-12$ منه: $f''(x)=12x+6$ أي: $f''(x)=6(2x+1)$

إذن: $f''(x)=0$ تكافئ : $2x+1=0$ تكافئ : $x=\dfrac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها عند الفاصلة $x_0=\dfrac{-1}{2}$

إذن للدالة f نقطة انعطاف و هي: $\left(\dfrac{-1}{2};f\left(\dfrac{-1}{2}\right)\right)$ حيث : $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$.

– معادلة المماس عند الفاصلة: $x_0 = \frac{-1}{2}$

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

منه: $y = f'\left(\frac{-1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{-1}{2}\right)$ حيث : $f'\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-27}{2}$ وَ $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{15}{2}$

معادلة المماس تصبح : $y = \frac{-27}{2}x - \frac{27}{4} + \frac{15}{2}$ تكافئ : $y = \frac{-27}{2}x + \frac{3}{4}$ و هي معادلة المماس المطلوبة .

❹ التقريب التآلفي :

تعريف : إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 فإن :

- التقريب التآلفي للدالة f من أجل x قريب من x_0 هو: $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- التقريب التآلفي للدالة f من أجل h قريب من 0 هو: $f(x_0 + h) \simeq f'(x_0) \times h + f(x_0)$ حيث : $h = x - x_0$.

تطبيق 07

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$.

1/ عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

2/ أوجد أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 ، ثم استنتج قيمة مقربة للعدد $f(0,000001)$.

الحل

1/ تعيين معادلة المماس (T):

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ منه: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- حساب $f(0)$: لدينا $f(0) = -2$.
- حساب $f'(0)$: لدينا $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(2h^2 + 5h - 2) - (-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^2 + 5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(2h+5)\cancel{h}}{\cancel{h}}$

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}(2h + 5) = 5$

إذن معادلة المماس تصبح: $y = 5(x - 0) - 2$ وَ بالتالي: $(T): y = 5x - 2$.

2/ إيجاد أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 :

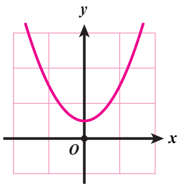
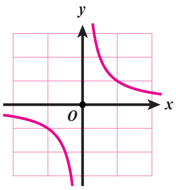
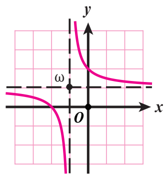
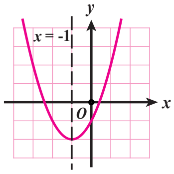
أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 هي الدالة: $x \mapsto 5x - 2$ وَ نكتب : $f(x) \approx 5x - 2$ لما x قريب من 0 .

بما أن العدد $0,000001$ قريب من 0 فإن: $f(0,000001) \approx 5 \times 0,000001 - 2$ منه: $f(0,000001) \approx 0,000005 - 2$

إذن: $f(0,000001) \approx -1,999995$.

5 الدالة الزوجية-الدالة الفردية-مركز تناظر-محور تناظر :

لتكن f دالة عددية وَ (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

	التعريف	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=f(x)$ إذا كانت f دالة زوجية فإن بيانها (C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .	
الدالة الفردية	f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=-f(x)$ إذا كانت f دالة فردية فإن بيانها (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر .	
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل: $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x)\in D_f$ فإن: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$	
محور تناظر	$x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل: $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x)\in D_f$ فإن: $f(2\alpha-x)=f(x)$	

تطبيق 08

لتكن f دالة عددية حيث جزء من جدول تغيراتها كما يلي :

x	0		2		5		9
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1	↗	0

1/ تمم جدول تغيرات الدالة f في كل من الحالتين التاليتين :

أ- الدالة f زوجية . ب- الدالة f فردية .

2/ نضع $(C)=(C_1)\cup(C_2)$ منحنى الدالة f في المستوي وَ $y=x^3-x+2$ معادلة المنحنى (C_1) على المجال $[0;+\infty[$

- عين معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ في كلا الحالتين : أ- الدالة f زوجية . ب- الدالة f فردية .

الحل

1/ ⊂ جدول التغيرات في حالة f دالة زوجية :

x	-9		-5		-2		0		2		5		9
$f(x)$	0	↘	-1	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	0

⊂ جدول التغيرات في حالة f دالة فردية :

x	-9		-5		-2		0		2		5		9
$f(x)$	0	↗	1	↘	-3	↗	2 ‖ -2	↗	3	↘	-1	↗	0

2/ تعيين معادلة المنحنى (C_2):

⊂ لما f دالة زوجية فإنها تحقق $f(-x)=f(x)$ منه معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ هي : $y=-x^3+x+2$.

⊂ لما f دالة فردية فإنها تحقق $f(-x)=-f(x)$ منه معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ هي : $y=x^3-x-2$.

تطبيق 09

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ بالشكل: $f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$

– أثبت أن النقطة $\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f .

الحل

$\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان : $f(1-x)+f(x)=2$

$$f(1-x)+f(x)=\frac{(1-x)^2-3(1-x)-1}{(1-x)^2-(1-x)-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{1-2x+x^2-3+3x-1}{1-2x+x^2-1+x-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{x^2+x-3}{x^2-x-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{2x^2-2x-4}{x^2-x-2}=$$
$$=\frac{2(x^2-x-2)}{x^2-x-2}$$
$$=2$$

إذن النقطة $\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f .

تطبيق 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=x^2-2x+2$

– أثبت أن بيان الدالة f يقبل محور تناظر يطلب تعين معادلته .

الحل

إذا كان $x=\alpha$ محور تناظر فإن: $f(2\alpha-x)=f(x)$ تكافئ : $(2\alpha-x)^2-2(2\alpha-x)+2=x^2-2x+2$

تكافئ: $4\alpha^2-4\alpha x+x^2-4\alpha+2x+2=x^2-2x+2$ تكافئ: $4\alpha^2-4\alpha x-4\alpha+4x=0$

تكافئ: $(-4\alpha+4).x+4\alpha^2-4\alpha=0$ تكافئ: $\begin{cases}-4\alpha+4=0\\4\alpha^2-4\alpha=0\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}-4(\alpha-1)=0\\4\alpha(\alpha-1)=0\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=1 \text{ أو } \alpha=0\end{cases}$ منه: $\alpha=1$

إذن المستقيم $x=1$ محور تناظر لبيان الدالة f .

تمارين وَ مسائل محلولة بالتفصيل

تمارين متنوعة ♥ قابلية الإشتقاق،معادلة المماس ♥

التمرين 01

لتكن f دالة معرفة على المجال $[2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x-2}$

1/ احسب النسبة: $\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}$ تعطى الشروط على العدد h .

2/ بين أنه إذا كان $h\in[-5;0[\cup]0;+\infty[$ فإن: $\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$.

3/ استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 7 وَ عين $f'(7)$.

التمرين 02

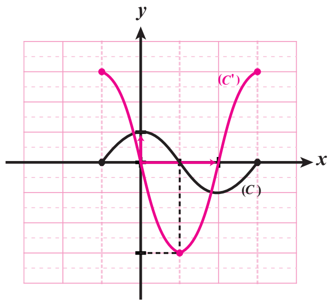
لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x+|x^2-4|$

1/ تحقق من أن الدالة f مستمرة عند -2 .

2/ برهن أنه من أجل $h\in\left]\dfrac{-1}{2};0\right[\cup\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ فإن: $\dfrac{f(-2+h)+6}{h}=3+\dfrac{|h|}{h}(4-h)$.

3/ هل f تقبل الاشتقاق عند -2 ؟ فسر النتيجة هندسياً .

التمرين 03



الشكل المقابل يمثل المنحنى (C) للدالة f وَ (C') منحنى الدالة المشتقة f' .

1/ أوجد قيمة كل من $f(0)$ ، $f(0,5)$ وَ $f(1)$.

2/ أوجد قيمة كل من $f'(0)$ ، $f'(0,5)$ وَ $f'(1)$.

3/ أوجد معادلة المماسات للمنحنى (C) في النقاط التي فواصلها 0 ، 0,5 وَ 1 .

4/ أوجد معادلة المماس للمنحنى (C') في النقطة التي فاصلتها 0,5 .

التمرين 04

1/ أكتب معادلة (T) لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(2;4)$ وَ الذي يوازي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=3x+5$.

2/ أكتب معادلة (T) لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $B(-1;3)$ وَ الذي يعامد المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=-2x+1$.

3/ أكتب معادلة (T) لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $C(-2;1)$ وَ الذي شعاع توجيهه $\vec{i}$.

التمرين 05

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-5x+5$ وَ (C) تمثيلها البياني.

1/ برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $f'(x)=2x-5$.

2/ اكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;5)$.

3/ هل توجد نقطة B من (C_f) يكون مماسه عندها يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=3x$ ؟

4/ هل توجد نقطة C من (C_f) يكون مماسه عندها عمودي على المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ ؟

5/ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين كل منهما يشمل المبدأ .

التمرين 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\cos x$

1/ عين الدوال المشتقة المتتابعة f' ، f'' ، f''' ، $f^{(4)}$ وَ $f^{(5)}$.

2/ خمن حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$ المشتقة ذات المرتبة n .

التمرين 07

n عدد طبيعي غير معدوم وَ x عدد حقيقي يختلف عن 1 .

1/ بسط المجموع التالي : $1+x+x^2+....+x^n$.

2/ استنتج تبسيطاً للعبارة : $1+2x+3x^2+....+n\,x^{n-1}$.

التمرين 08

جسم يتحرك على المحور (Ox)، نضع $x(t)$ فاصلة الجسم عند اللحظة t ، القانون الزمني للحركة يعطى بالعلاقة :

$x(t)=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$.

1/ أكتب $v(t)$ المعادلة الزمنية للسرعة .

2/ برهن أن التسارع متناسب مع الفاصلة .

التمرين 09

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{a\,x^2+b\,x+1}{x-1}$ مع a وَ b عددان حقيقيان.

الهدف من التمرين هو إيجاد إن أمكن a وَ b حيث $f(-1)$ قيمة حدية محلية عظمى معدومة.

1/ لماذا $f'(-1)=0$ وَ $f(-1)=0$ ؟

2/ أوجد إذن a وَ b ثم اكتب عبارة $f(x)$.

التمرين 10

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} & ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ وَ $(1-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

2/ بين أن الدالة f مستمرة عند 0 .

3/ أ - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ثم استنتج أن $f'(0)=\frac{1}{2}$.

ب- هل الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟

♥ تمارين متنوعة ♥ اتجاه تغير ، التقريب التآلفي ♥

التمرين 11

f دالة معرفة على المجال $]4;9]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-4}$

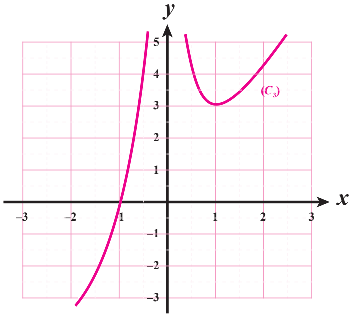
1/ أدرس اتجاه تغير الدالة f .

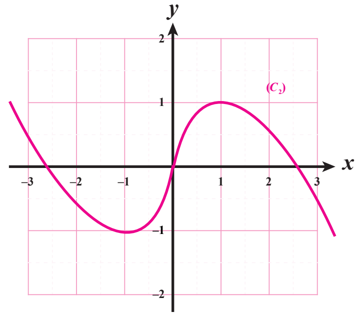
2/ باستعمال مشتق مركب دالتين أحسب الدالة المشتقة للدالة g المعرفة بـ : $g(x)=f(x^2)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيراتها .

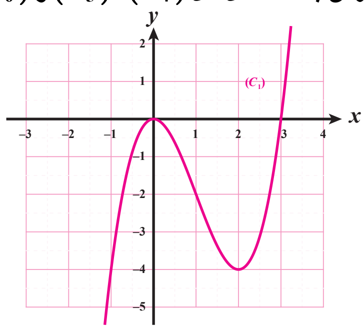
التمرين 12

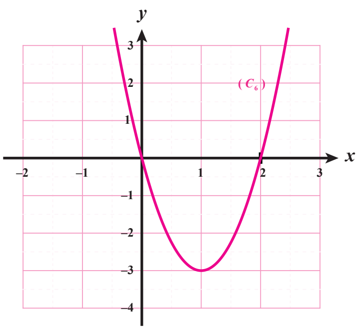
نعتبر (C_1)، (C_2) وَ (C_3) تمثيلات بيانية للدوال f، g و h على الترتيب،دوالها المشتقة ممثلة بالمنحنيات الموجودة في السطر الثاني

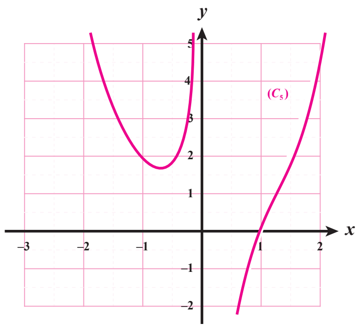
– أرفق بكل منحنى من (C_4)، (C_5) وَ (C_6) بمنحنى الدالة المشتقة المناسبة .

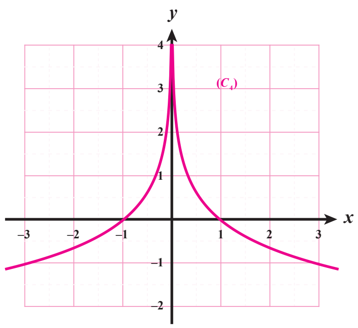












التمرين 13

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[-4;4]$ وَ جدول تغيراتها كما يلي:

x	-4		2		4
$u'(x)$		+		+	
$u(x)$	-3	↗		↗	5

1/ عين حسب قيم x من المجال $[-4;4]$ إشارة $u(x)$.

2/ عين العنصر الحاد من الأعلى وَ العنصر الحاد من الأسفل للدالة u على المجال $[-4;4]$.

3/ نعتبر الدوال f ، g وَ h المعرفة كما يلي: $f=u^2$ ، $g=\sqrt{u}$ وَ $h=\dfrac{1}{u}$.

أ– عين مجموعة تعريف كل من الدوال f، g وَ h .

ب– أحسب كل من $f'(x)$، $g'(x)$ وَ $h'(x)$ بدلالة $u'(x)$ وَ $u(x)$.

ج– استنتج اتجاه تغير الدوال f، g و h .

التمرين 14

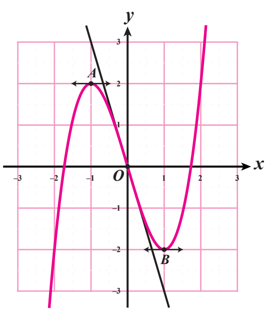
نعتبر الدالة f_m المعرفة كما يلي : $f_m(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x-2}{x-m-1}$ حيث m وسيط حقيقي.

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f_m .

2/ أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m اتجاه تغير الدالة f_m .

التمرين 15

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل المقابل.



1/– عين بيانيا القيم $f'(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$.

– اكتب معادلة ديكارتية لكل من المماسات عند النقط A ، B ، O .

2/ حل بيانيا المتراجحات التالية: $f(x)>0$ ، $f'(x)>0$ ، $f'(x)\leq 0$.

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

التمرين 16

قطعة أرض دائرية الشكل قطرها $\sqrt{20}\ m$ ، أراد صاحبها أن يبني عليها منزلاً قاعدته مستطيلة الشكل ، نضع طول المستطيل $AB = x$.

1/ أحسب مساحة قاعدة هذا المنزل بدلالة x .

2/ عين قيمة x بحيث تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن .

التمرين 17

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2+3}$

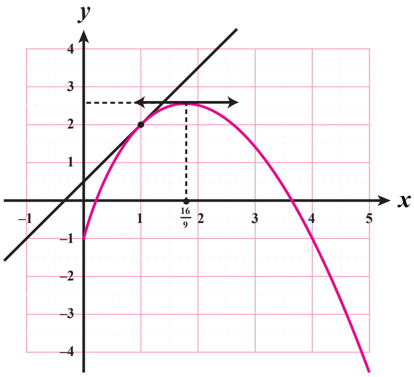
1/ تحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون : $\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

2/ استنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 محدداً $f'(1)$.

3/ عين أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند 1 .

4/ احسب $f'(x)$ ثم بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x) = (x^2+3)f''(x) + x f'(x)$.

التمرين 18



الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;5]$.

المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.

1/ بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2/ حل بيانيا في المجال $[0;5]$ المتراجحات : $f(x) \le 0$ ، $f'(x) \ge 0$ ، $f(x) > 2$.

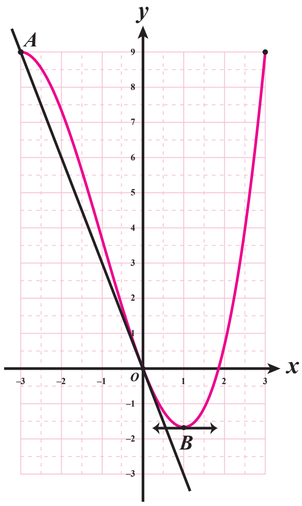
3/ نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;5]$: $f(x) = a + bx(2-\sqrt{x})$

حيث a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;5]$: $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال الأول عين a و b .

التمرين 19



(C) التمثيل البياني للدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

المنحنى (C) يحقق الشروط التالية : يمر بمبدأ المعلم O و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماساً أفقياً و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .

1/ ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟

2/ نفرض أن الدالة f معرفة على المجال $[-3;3]$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

أ- بين أن : $a = \frac{1}{3}$ ، $b = 1$ ، $c = -3$ و $d = 0$.

ب- حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

التمرين 20

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3x^2 - 1$

1/ أحسب العدد المشتق للدالة f عند 1 .

2/ أعط أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(1+h)$ عند 1 ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(0,9999)$.

3/ ما هو الخطأ المرتكب عند حساب العدد $f\left(0,9999\right)$.

4/ بين أنه إذا كان $\left|h\right| \leq 10^{-k}$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإن: $0 \leq f\left(1+h\right)-\left(6h+2\right) \leq 3\times 10^{-2k}$.

5/ أعط حصراً للعدد $f\left(0,9999\right)$ بتقريب 3×10^{-6} ثم استنتج حصراً للعدد $\left(0,9999\right)^2$.

التمرين 21

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f\left(x\right)=a+\sqrt{b\,x+c}$

حيث a، b و c أعداد حقيقية وَ $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f .

1/ عين الأعداد a، b و c بحيث المنحنى $\left(C_f\right)$ يشمل النقطة $A\left(1;-1\right)$ وَ مبدأ المعلم O وَ يكون معامل توجيه مماس $\left(C_f\right)$ عند النقطة O مساوياً إلى $-\dfrac{3}{4}$.

2/ لتكن الدالة f المعرفة على $\left]-\infty;1\right]$ كما يلي: $f\left(x\right)=-2+\sqrt{-3x+4}$

أ – اوجد التقريب التآلفي للدالة f عند 0 .

ب – استنتج قيمة مقربة لكل من: $-2+\sqrt{3,97}$ وَ $\sqrt{4,003}$.

تمارين متنوعة ♥ استعد للبكالوريا ♥

التمرين 22

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

1/ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f، ثم احسب النهايات على أطراف D_f .

2/ ادرس الفروع اللانهائية وَ المستقيمات المقاربة لـ $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f .

3/ – احسب $f'\left(x\right)$ ثم ادرس إشارتها ، استنتج عندئذ اتجاه تغير الدالة f .

– شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ بين أن النقطة $\omega\left(1;1\right)$ مركز تناظر لـ $\left(C_f\right)$.

5/ أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد وَ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

6/ ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وَ إشارة حلول المعادلة التالية: $x^2-\left(1+m\right)x+1+m=0$

التمرين 23

I– نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+a\,x+b}{x^2+1}$، $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني .

– عين العددان الحقيقيان a وَ b حتى $\left(C_f\right)$ يمر بالنقطة $A\left(0;3\right)$ وَ يقبل في هذه النقطة مماساً معامل توجيهه 4 .

II– باستعمال النتائج السابقة يمكن كتابة : $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$

1/ عين العددين الحقيقيان α وَ β بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f\left(x\right)=\alpha+\dfrac{\beta\,x}{x^2+1}$.

2/ ادرس تغيرات الدالة f .

3/ ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد وَمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ مع المستقيم $\left(\Delta\right): y=4x+3$.

4/ أثبت أن $\left(C_f\right)$ يقبل ثلاث نقاط انعطاف يطلب تعينها .

5/ بين أن النقطة $A\left(0;3\right)$ مركز تناظر لـ $\left(C_f\right)$.

6/ أثبت أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسان معامل توجيههما 2 .

7/ أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$.

8/ ناقش بيانيا ًحسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة : $f\left(x\right)=4x+m$

التمرين 24

I – لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g\left(x\right)=x^3-3x-4$

1/ ادرس تغيرات الدالة g .

2/ بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha\in\left]2,19\ ;\ 2,20\right[$.

3/ استنتج إشارة $g\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$.

II– لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بالعبارة التالية : $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}-2$ وَ $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني.

1/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا: $f'\left(x\right)=\dfrac{x\,g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

2/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ بين أن : $f\left(\alpha\right)=\dfrac{3(\alpha+2)}{\alpha^2-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$ بالتقريب 10^{-1} .

4/ أ– بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ وَ $-\infty$.

ب– ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$.

5/ أ– ارسم $\left(\Delta\right)$ وَ $\left(C_f\right)$.

ب– استنتج في نفس المعلم السابق $\left(C_h\right)$ منحنى الدالة h حيث: $h\left(x\right)=f\left(\left|x\right|\right)$.

التمرين 25

لتكن f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x وَ المعرفة بـ : $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\dfrac{x}{x^2-1}$ وَ $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني .

1/ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

2/ أ– اكتب $f\left(x\right)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب– احسب الدالة المشتقة $f'\left(x\right)$ وَ ادرس إشارتها.

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ أ– بين أن المستقيمين : $\left(\Delta\right):y=x+1$ وَ $\left(\Delta'\right):y=-x-1$ مقاربين للمنحنى $\left(C_f\right)$.

ب– ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيمين $\left(\Delta\right)$ وَ $\left(\Delta'\right)$.

5/ بين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $\left]-1\ ;\ 1\right[$ ، و أعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

6/ أنشئ كل من $\left(\Delta\right)$، $\left(\Delta'\right)$ وَ $\left(C_f\right)$.

7/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة التالية : $\left(x^2-1\right)\left(\left|x+1\right|-m\right)+x=0$.

التمرين 26

I– ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وَمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث :

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x-1}{1-2x} & ;\ x\le 0\\[2mm] 2x-\dfrac{1}{(x+1)^2} & ;\ x>0\end{cases}$$

1/ أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- ادرس استمرارية وَ قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً .

2/ ادرس تغيرات الدالة f .

3/ بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين .

4/ بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $x_1 = -1$ و x_2 حيث $0 < x_2 < 1$.

5/ ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$.

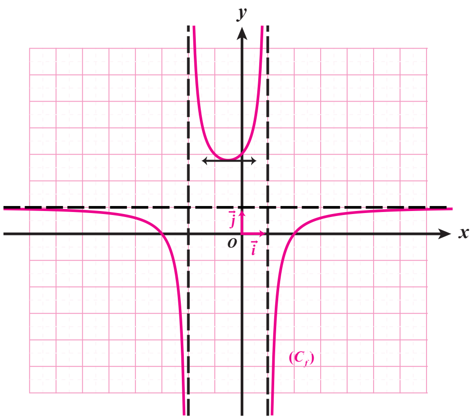
II- لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$

1/ بين أن g دالة زوجية .

2/ باستعمال الدراسة السابقة ، أنشئ $\left(C_g\right)$ بيان الدالة g في معلم آخر .

3/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $3x^2 - 2m|x| - m = 0$.

التمرين 27



نعتبر الدالة f المعرفة وَ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-2;1\}$

كما يلي : $f(x) = a + \dfrac{b}{x^2 + x - 2}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

تمثيلها البياني $\left(C_f\right)$ موضح في الشكل المقابل يعطى : $\dfrac{25}{9} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

1/ أ- عين إشارة كل من $f(x)$ وَ $f'(x)$.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2/ أ- أوجد بيانياً كل من: $f(0)$ ، $f(2)$ وَ $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

ب- استنتج قيمة كل من العددين a وَ b .

3/ أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $x = -\dfrac{1}{2}$ محور تناظر لـ $\left(C_f\right)$.

4/ ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $f(x) = k$.

5/ نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي: $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}}$

أ- عين مجموعة تعريف الدالة g .

ب- أحسب $g'(x)$ بدلالة $f'(x)$ وَ $f(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

6/ نعتبر من أجل كل عدد حقيقي m الدالة f_m حيث : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + mx - 6}{x^2 + mx - 2}$ وَ $\left(C_m\right)$ تمثيلها البياني .

أ- عين مجموعة تعريف الدالة f_m .

ب- أحسب $f_m'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f_m .

ج- بين أن جميع المنحنيات $\left(C_m\right)$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

التمرين 28

f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f_m(x) = \dfrac{mx^2 - 8}{x - m}$ حيث $m \in \mathbb{R}$ وَ $\left(C_m\right)$ المنحنى الممثل للدالة f_m .

I- 1/ عين D_m مجموعة تعريف f_m ، ثم أحسب $f_m'(x)$.

2/ عين مجموعة قيم m بحيث لا تقبل الدالة f_m أية قيمة حدية .

3/ عين مجموعة قيم m بحيث (C_m) يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة 2 معامل توجيهه 3 .

4/ بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعينها.

II- نضع في هذه الحالة $m=1$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f_1 .

2/أ- عين الأعداد الحقيقية a، b وَ c بحيث: $f_1(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_1) يقبل خط مقارب مائل (Δ) يطلب تعينه ثم أدرس وضعيته بالنسبة إلى (C_1).

ج- أثبت أن النقطة ω تقاطع الخطين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى (C_1).

3/ أنشئ (Δ) ثم المنحنى (C_1).

4/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $y=x+\alpha$.

III- لتكن الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $g(x)=\dfrac{x^2-8}{|x|-1}$

1/ ادرس اشتقاق الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً .

2/ بين أن g دالة زوجية ، ماذا تستنتج ؟

3/ اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) للدالة g باستعمال المنحنى (C_1)، ثم أنشئ (γ).

التمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في معلم للمستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ بين أن (C_f) يقبل محور تناظر ، ثم عين نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وَ $-\infty$.

2/ - تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

- استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة (Δ).

3/ أنشئ المنحنى (C_f).

4/ ليكن (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-f(x)$ وَ ليكن $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_g)$.

- بين أن معادلة (Γ) هي: $y^2-x^2=1$.

5/ نعتبر معلما جديدا $(O;\vec{u};\vec{v})$ حيث : $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ وَ $\vec{v}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

نرمز بـ $(x;y)$ لإحداثيتي النقطة M في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ وَ بـ $(x';y')$ إحداثياتها في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

أ- عبر عن x وَ y بدلالة x' وَ y' .

ب- عين معادلة (Γ) في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

التمرين 30

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ وَ (C_f) المنحنى البياني للدالة f في معلم للمستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ اثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $\sqrt{x^2+1}-x>0$ ، $\sqrt{x^2+1}+x>0$ ، $2\sqrt{x^2+1}-x>0$.

2/أ- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f)؟

ب- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f)؟

ج- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيمين (d) الذي معادلته : $y=x$ وَ (d') الذي معادلته : $y=-3x$.

3/ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$

أ - اثبت أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$ ، ثم عين إشارة حسب قيم x إشارة $g(x)$.

4/ أ- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بين أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

5/ ارسم المستقيمين (d) وَ (d') وَ المنحنى (C_f).

التمرين 31

نعتبر f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x\sqrt{|x^2-4|}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني .

1/ احسب : $f(-x)+f(x)$ ، وَ استنتج خاصة مميزة للمنحنى (C_f) .

2/ احسب: $\lim \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ لما x يؤول إلى 2 ، ثم ماذا تستنتج ؟

3/ ادرس تغيرات الدالة f وَ الفروع اللانهائية لـ (C_f) .

4/ اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $(x_0;\sqrt{3})$.

5/ اثبت أن (C_f) يقبل ثلاث نقاط انعطاف يطلب تعينها .

6/ ارسم المماس ثم المنحنى (C_f) .

7/ ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة: $y=-2x-m$.

8/ لتكن g دالة عددية حيث: $g(x)=|f(x)|$ وَ (C_g) تمثيلها البياني.

- بين أن g دالة زوجية ، ماذا تستنتج ؟

- استنتج مما سبق رسم المنحنى (C_g) في نفس المعلم (مع الشرح من فظلكم) .

التمرين 32

f دالة عددية معرفة في المجال $]-\pi\,;\pi[$ حيث : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\ ; & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أثبت أن الدالة f مستمرة عند $x_0=0$.

2/ هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟

3/ بين أن f دالة فردية ثم أثبت أن: $f(x+2\pi)=f(x)$ ماذا تستنتج؟

4/ ادرس تغيرات الدالة f .

5/ اثبت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعينها.

6/ عين إحداثيي النقطة A التي يكون فيها المماس لـ (C_f) موازياً للمنصف الأول.

7/ نعرف في المجال $]0;\pi[$ الدالة g حيث : $g(x)=f(x)-x$

- اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $\left]\dfrac{7\pi}{8};\dfrac{3\pi}{4}\right[$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

8/ ارسم بدقة البيان (C_f) .

حلول التمارين بالتفصيل

قابلية الإشتقاق،معادلة المماس

حل التمرين 01

1/ حساب النسبة: $\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}$

لدينا: $\dfrac{\sqrt{h+5}-\sqrt{5}}{h}=\dfrac{\sqrt{7+h-2}-\sqrt{5}}{h}=\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}$ مع: $(h\geq -5$ وَ $h\neq 0)$ أي: $h\in[-5;0[\cup]0;+\infty[$.

2/ لنبين أن: $\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$

لدينا من أجل $h\in[-5;0[\cup]0;+\infty[$:

$$\frac{f(7+h)-f(7)}{h}=\frac{\left(\sqrt{h+5}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}\right)}{h\left(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{h+5}^2-\sqrt{5}^2}{h\left(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{h+5}+\sqrt{5}}$$

3/ استنتاج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 7:

بما أن: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(7+h)-f(7)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h+5}+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 7 وَ $f'(7)=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

حل التمرين 02

1/ لنتحقق أن الدالة f مستمرة عند -2 :

كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ ، إذن عند كتابة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة فهي كثير الحدود إذن f دالة مستمرة عند -2 .

2/ لنبرهن صحة المساواة :

$$\frac{f(-2+h)+6}{h}=\frac{3(-2+h)+\left|(-2+h)^2-4\right|+6}{h}=\frac{3h+\left|-4h+h^2\right|}{h}=\frac{3h+|h|\times|-4+h|}{h}$$

بما أن: $h\in\left]\dfrac{-1}{2};0\right[\cup\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ فإن: $\dfrac{f(-2+h)+6}{h}=3+\dfrac{|h|}{h}(4-h)$.

3/ هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند -2 ؟

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+6}{h}=\lim_{h\to 0}\left[3+\frac{|h|}{h}(4-h)\right]=\begin{cases}\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\left[3+(4-h)\right]=7\\ \lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\left[3-(4-h)\right]=-1\end{cases}$$

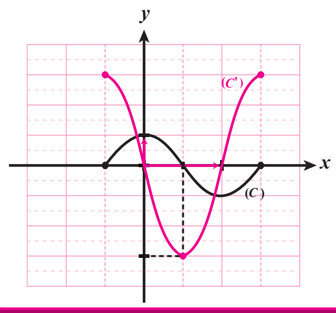
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$

نلاحظ أن f تقبل الاشتقاق على يمين وَ يسار $2-$ لكنها غير قابلة للاشتقاق عند $2-$ لأن النهايتين غير متساويتين .

– التفسير الهندسي: منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(-2;f(-2))$ نصفي مماسين حيث $A(-2;-6)$ تسمى نقطة زاوية .

حل التمرين 03



1/ إيجاد قيمة كل من: $f(0)$ ، $f(0,5)$ وَ $f(1)$

من المنحنى (C) نجد: $f(0)=1$ ، $f(0,5)=0$ وَ $f(1)=-1$.

2/ إيجاد قيمة كل من: $f'(0)$ ، $f'(0,5)$ وَ $f'(1)$

من المنحنى (C') نجد: $f'(0)=0$ ، $f'(0,5)=-3$ وَ $f'(1)=0$.

3/ إيجاد معادلة المماسات للمنحنى (C) في النقاط التي فواصلها 0 ، 0,5 وَ 1 :

- معادلة المماس عند الفاصلة 0 هي من الشكل : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ منه: $y=1$.
- معادلة المماس عند الفاصلة 1 هي من الشكل : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ منه: $y=-1$.
- معادلة المماس عند الفاصلة 0.5 هي من الشكل : $y = f'(0,5)(x-0,5)+f(0,5)$ أي : $y=-3(x-0,5)$

منه : $y=-3x+1,5$.

4/ إيجاد معادلة المماس للمنحنى (C') في النقطة التي فاصلتها 0,5 :

من المنحنى (C') الدالة f' تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x=0,5$ معناه : $f''(0,5)=0$ وَ $f'(0,5)=-3$

وَ لدينا معادلة المماس عند الفاصلة 0.5 هي من الشكل : $y = f''(0,5)(x-0,5)+f'(0,5)$ منه : $y=-3$.

حل التمرين 04

– **كتابة معادلة المماس في كل حالة :**

1/ لدينا معادلة المماس (T) عند النقطة $A(2;4)$ من الشكل: $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ مع $f(2)=4$

و بما أن المستقيمان (T) وَ (Δ) متوازيان فلهما نفس معامل التوجيه أي: $f'(2)=3$.

إذن معادلة المماس تصبح: $y=3(x-2)+4$ منه: $y=3x-6+4$ وَ بالتالي: $(T): y=3x-2$.

2/ لدينا معادلة المماس (T) عند النقطة $B(-1;3)$ من الشكل: $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ مع $f(-1)=3$

و بما أن المستقيمان (T) وَ (Δ) متعامدان فإن جداء ميليهما يساوي -1 أي: $-2\times f'(-1)=-1$ منه: $f'(-1)=\dfrac{1}{2}$

إذن معادلة المماس تصبح: $y=\dfrac{1}{2}(x+1)+3$ منه: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+3$ وَ بالتالي: $(T): y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$.

3/ لدينا معادلة المماس (T) عند النقطة $C(-2;1)$ من الشكل: $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ مع $f(-2)=1$

و بما أن المماس (T) يقبل الشعاع $\vec{i}$ كشعاع توجيه له فإن المماس (T) يوازي محور الفواصل منه: $f'(-2)=0$

إذن معادلة المماس تصبح: $y=0(x+2)+1$ وَ بالتالي: $(T): y=1$.

حل التمرين 05

1/ لنبرهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{\left[(a+h)^2-5(a+h)+5\right]-\left[a^2-5a+5\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{\left[\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{5a}-5h+\cancel{5}\right]-\left[\cancel{a^2}-\cancel{5a}+\cancel{5}\right]}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2-5h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2a+h-5)\cancel{h}}{\cancel{h}}\\ &= \lim_{h\to0}(2a+h-5)=2a-5\end{aligned}$$

إذن f دالة قابلة الاشتقاق عند كل عدد حقيقي a وَ عددها المشتق عند a هو: $f'(a)=2a-5$ وَبالتالي: $f'(x)=2x-5$.

2/ كتابة معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;5)$:

لدينا معادلة المماس (T) عند النقطة $A(0;5)$ من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ مع $f(0)=5$ وَ $f'(0)=-5$

إذن معادلة المماس تصبح: $y=-5(x-0)+5$ وَ بالتالي: $y=-5x+5$.

3/ هل توجد نقطة B من (C_f) يكون مماسه عندها يوازي المستقيم ذي المعادلة : $y=\dfrac{1}{2}x$ ؟

إذا كان المماس لـ (C_f) عند النقطة $B(x_0;y_0)$ يوازي المستقيم ذي المعادلة $y=3x$ فإن: $f'(x_0)=3$

تكافئ : $2x_0-5=3$ تكافئ: $2x_0=8$ أي $x_0=4$ ، إذن النقطة B موجودة و وحيدة إحداثييها $B(4;f(4))$ أي: $B(4;1)$.

4/ هل توجد نقطة C من (C_f) يكون مماسه عندها عمودي للمستقيم ذي المعادلة: $y=-x+1$ ؟

إذا كان المماس لـ (C_f) عند النقطة $C(x_0;y_0)$ عمودي على المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ فإن: $(-1)\times f'(x_0)=-1$

تكافئ: $2x_0-5=1$ تكافئ: $2x_0=6$ أي: $x_0=3$ ، إذن النقطة C موجودة و وحيدة إحداثييها $C(3;f(3))$ أي: $C(3;-1)$.

5/ إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين كل منهما يشمل المبدأ :

إذا كان المماس يشمل المبدأ فإن معادلة المماس عند النقطة $M(x_0;y_0)$ تكتب كما يلي: $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

تكافئ : $(2x_0-5)(-x_0)+x_0^2-5x_0+5=0$ تكافئ : $-2x_0^2+\cancel{5x_0}+x_0^2-\cancel{5x_0}+5=0$ تكافئ : $-x_0^2+5=0$

تكافئ : $x_0^2=5$ أي: ($x_0=\sqrt{5}$ أو $x_0=-\sqrt{5}$)

هذا يعني أنه يوجد مماسين في النقطتين : $D(\sqrt{5};f(\sqrt{5}))$ و $E(-\sqrt{5};f(-\sqrt{5}))$ كل منهما يشمل المبدأ .

حل التمرين 06

1/ تعيين الدوال المشتقة المتتابعة :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)=-\sin x$ ، $f''(x)=-\cos x$ ، $f'''(x)=\sin x$ ، $f^{(4)}(x)=\cos x$ و $f^{(5)}(x)=-\sin x$.

2/ تخمين حسب قيم العدد الطبيعي n عبارة $f^{(n)}(x)$:

- من أجل $n=2k+1$ نجد: $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$ حيث $k\in\mathbb{N}$.
- من أجل $n=2k+2$ نجد : $f^{(2k+2)}(x)=(-1)^{k+1}\cos x$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 07

1/ المجموع عبارة عن $n+1$ حد لمتتالية هندسية أساسها x و حدها الأول 1 إذن : $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

2/ لدينا : $1+x+x^2+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ نشتق الطرفين نجد :

$$1+2x+3x^2+...+n\,x^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{x-1}$$

إذن: $1+2x+3x^2+...+n\,x^{n-1}=\dfrac{n.x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x-1}$

مجموع متتالية هندسية $u_0+u_1+...+u_n=u_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

حل التمرين 08

1/ لدينا: $v(t)=[x(t)]'$ منه: $v(t)=-6\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2/ لدينا: $a(t)=[v(t)]'=-12\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ منه: $a(t)=-4x(t)$ إذن التسارع متناسب مع الفاصلة .

حل التمرين 09

1/ لماذا $f'(-1)=0$ و $f(-1)=0$ ؟

بما أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عند $x=-1$ فإن: $f'(-1)=0$ و هذه القيمة الحدية المحلية معدومة فإن: $f(-1)=0$.

2/ إيجاد a و b :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ منه: $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$ إذن: $f'(x)=\dfrac{ax^2+-2ax-b-1}{(x-1)^2}$

- لدينا: $f'(-1)=0$ منه: $\dfrac{3a-b-1}{4}=0$ تكافئ: $3a-b-1=0\ ...(1)$

و لدينا : $f(-1)=0$ منه : $\dfrac{a-b+1}{-2}=0$ تكافئ : $a-b+1=0$ ...(2)

إذن من العلاقتين (1) و (2) نحصل على الجملة : $\begin{cases}3a-b-1=0\\a-b+1=0\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ و بالتالي: $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

حل التمرين 10

1/ لنبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

نعلم أن: $1=\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ و $\cos x=\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$ إذن: $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

و أيضاً نعلم أن: $1=\cos^2 x+\sin^2 x$ تكافئ: $1^2-\cos^2 x=\sin^2 x$ إذن: $(1-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

2/ لنبين أن الدالة f مستمرة عند 0 :

الاستمرارية $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{0}\times\underbrace{\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}_{1}=0$

بما أن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ فإن f دالة مستمرة عند 0 .

3/ أ – لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1}\frac{1}{1+\underbrace{\cos x}_{1}}=\frac{1}{2}$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق عند 0 و أن: $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

ب – هل الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و معرفة على $\mathbb{R}$ فإن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

♥ اتجاه تغير دالة.التقريب التآلفي ♥

حل التمرين 11

1/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]4;9]$ حيث :

$$f(x)=\frac{(3x-2)'(x-4)-(x-4)'(3x-2)}{(x-4)^2}=\frac{3(x-4)-1(3x-2)}{(x-4)^2}=\frac{\cancel{3x}-12-\cancel{3x}+2}{(x-4)^2}=\frac{-10}{(x-4)^2}<0$$

منه f دالة متناقصة تماماً على المجال $]4;9]$.

2/ حساب الدالة المشتقة للدالة g :

الدالة g معرفة إذا كان: $x^2\in]4;9]$ أي: $x\in[-3;-2[\cup]2;3]$.

$[u(v)]'=v'u'(v)$

لدينا: $g(x)=f(x^2)$ منه: $g'(x)=(x^2)'\times f'(x^2)$ أي: $g'(x)=2x\dfrac{-10}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-20x}{(x^2-4)^2}$.

– استنتاج اتجاه تغير الدالة g:

- إذا كان $x \in]-3;-2]$ فإن: $-20x > 0$ أي: $g'(x) > 0$ و بالتالي g دالة متزايدة تماماً .
- إذا كان $x \in [2;3[$ فإن: $-20x < 0$ أي: $g'(x) < 0$ و بالتالي g دالة متناقصة تماماً .

حل التمرين 12

- من المنحنى (C_1) نلاحظ أن الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty;0]$ و على المجال $[2;+\infty[$ معناه: $f'(x) \geq 0$ و متناقصة تماماً على المجال $[0;2]$ معناه $f'(x) \leq 0$ ، إذن (C_6) هو المنحنى الممثل للدالة f' .
- من المنحنى (C_2) نلاحظ أن الدالة g متناقصة تماماً على $]-\infty;-1]$ و على المجال $[1;+\infty[$ معناه: $g'(x) \leq 0$ و متزايدة تماماً على المجال $[-1;1]$ معناه $g'(x) \geq 0$ ، إذن (C_4) هو المنحنى الممثل للدالة g' .
- من المنحنى (C_3) نلاحظ أن الدالة h متزايدة تماماً على $]-\infty;0]$ و على المجال $[1;+\infty[$ معناه: $h'(x) \geq 0$ و متناقصة تماماً على المجال $[0;1]$ معناه $h'(x) \leq 0$ ، إذن (C_5) هو المنحنى الممثل للدالة h' .

حل التمرين 13

1/ تعيين إشارة $u(x)$:

x	-4		2		4
$u'(x)$		+		+	
$u(x)$	-3	↗	0	↗	5

من جدول تغيرات الدالة u على المجال $[-4;4]$ يتبين أنه :

- إذا كان $x \in [-4;2]$ فإن: $-3 \leq u(x) \leq 0$ و بالتالي $u(x)$ سالبة .
- إذا كان $x \in [2;4]$ فإن: $0 \leq u(x) \leq 5$ و بالتالي $u(x)$ موجبة .

2/ تعيين العناصر الحادة :

من جدول تغيرات الدالة u على المجال $[-4;4]$ يتبين أنه : $-3 \leq u(x) \leq 5$

أي العدد -3 عنصر حاد من الأسفل أما العدد 5 عنصر حاد من الأعلى .

3/ أ– تعيين مجموعة تعريف كل من الدوال f، g و h :

- لدينا: $f = u^2$ منه الدالة f معرفة على المجال $[-4;4]$.
- لدينا: $g = \sqrt{u}$ منه الدالة g معرفة إذا كان: $u(x) \geq 0$ أي: $x \in [2;4]$ ، إذن الدالة معرفة g على المجال $[2;4]$.
- لدينا: $h = \frac{1}{u}$ منه الدالة h معرفة إذا كان: $u(x) \neq 0$ أي: $x \neq 2$ ، إذن الدالة معرفة h على المجال $[-4;2[\cup]2;4]$.

ب– حساب كل من $f'(x)$، $g'(x)$ و $h'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$:

$(u^2)' = 2u'u$

$\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\frac{1}{u}' = -\frac{u'}{u^2}$

- لدينا: $f = u^2$ منه من أجل كل $x \in [-4;4]$ يكون: $f'(x) = 2u(x)u'(x)$.
- لدينا: $g = \sqrt{u}$ منه من أجل كل $x \in [2;4]$ يكون: $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- لدينا: $h = \frac{1}{u}$ منه من أجل كل $x \in [-4;2[\cup]2;4]$ يكون: $h'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$.

ج– استنتاج اتجاه تغير الدوال f ، g و h :

- لدينا: $f'(x) = 2u(x)u'(x)$ منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $u(x)$ على المجال $[-4;4]$ لأن : $u'(x) > 0$
  - لما $x \in [-4;2]$ ، لدينا $u(x) \leq 0$ و بالتالي: $f'(x) \leq 0$ ، إذن f دالة متناقصة تماماً .
  - لما $x \in [2;4]$ ، لدينا $u(x) \geq 0$ و بالتالي: $f'(x) \geq 0$ ، إذن f دالة متزايدة تماماً .
- لدينا: $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $u(x)$ على المجال $[2;4]$ لأن: $2\sqrt{u(x)} > 0$
  - لما $x \in [2;4]$ ، لدينا $u'(x) > 0$ و بالتالي: $g'(x) \geq 0$ ، إذن g دالة متزايدة تماماً.

- لدينا: $h'(x)=\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ منه إشارة $h'(x)$ هي عكس إشارة $u'(x)$ على المجال $[-4;2[\cup]2;4]$ لأن: $u^2(x)>0$
- لما $[-4;2[\cup]2;4]$، لدينا $u'(x)>0$ وَ بالتالي: $h'(x)<0$، إذن h دالة متناقصة .

حل التمرين 14

1/ تعيين مجموعة تعريف الدالة f_m :

الدالة f_m معرفة إذا كان: $x-m-1\neq 0$ أي: $x\neq m+1$ إذن: $D_{f_m}=\mathbb{R}-\{m+1\}$.

2/ دراسة حسب قيم الوسيط الحقيقي m اتجاه تغير الدالة f_m :

f_m دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :
$$f_m'(x)=\frac{\left(x^2+(m+1)x-2\right)'(x-m-1)-(x-m-1)'\left(x^2+(m+1)x-2\right)}{(x-m-1)^2}$$
$$=\frac{(2x+m+1)(x-m-1)-(1)\left(x^2+(m+1)x-2\right)}{(x-m-1)^2}=\frac{x^2-2(m+1)x-m^2-2m+1}{(x-m-1)^2}$$

- إشارة $f_m'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $\left[x^2-2(m+1)x-m^2-2m+1\right]$ لأن المقام دوماً موجب .
- حل المعادلة : $x^2-2(m+1)x-m^2-2m+1=0$

المميز المختصر للمعادلة هو: $\Delta'=b'^2-ac=(m+1)^2-\left(-m^2-2m+1\right)=2m^2+4m=2m(m+2)$

- المناقشة : الجدول المقابل يبين إشارة المميز المختصر .

m	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$2m$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

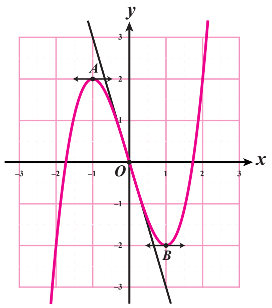
- إذا كان: $m\in[-2;0]$ فإن $\Delta'\leq 0$ منه $f_m'(x)\geq 0$ وَ بالتالي f_m متزايدة تماماً.
- إذا كان: $m\in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ فإن $\Delta'>0$ منه المعادلة $f_m'(x)=0$

تقبل حلان x_1 وَ x_2 (نفرض أن $x_1<x_2$)

- إذا كان: $x\in[x_1;x_2]$ فإن $f_m'(x)\leq 0$ وَ بالتالي f_m متناقصة تماماً .
- إذا كان: $x\in]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$ فإن $f_m'(x)\geq 0$ وَ بالتالي f_m متزايدة .

حل التمرين 15

1/ تعيين بيانيا القيم $f'(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$:



- بما أن المنحنى البياني للدالة f قيمة حدية محلية صغرى عند $x=1$ فإن: $f'(1)=0$
- بما أن المنحنى البياني للدالة f قيمة حدية محلية عظمى عند $x=-1$ فإن: $f'(-1)=0$

$f'(0)$ يمثل معامل توجيه المماس لمنحنى الدالة f عند مبدأ المعلم وَ المار بالنقطة $(1;-3)$

إذن: $f'(0)=\dfrac{-3-0}{1-0}=\dfrac{-3}{1}=-3$

- معادلة المماس عند النقطة A : $y=2$
- معادلة المماس عند النقطة B : $y=-2$
- معادلة المماس عند النقطة O : لدينا : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ منه : $y=-3x$

2/ حل بيانيا المتراجحات التالية :

- تكون : $f(x)>0$ إذا كان البيان يقع فوق محور الفواصل إذن : $x\in]-1,75;0[\cup]1,75;+\infty[$
- تكون : $f'(x)>0$ إذا كانت الدالة f متزايدة إذن : $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
- تكون : $f'(x)\leq 0$ إذا كانت الدالة f متناقصة إذن : $x\in[-1;1]$

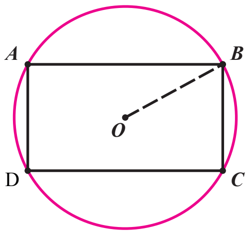
3/ جدول تغيرات الدالة f :

$f(-1)=2$ وَ $f(1)=-2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)=2$	↘	$f(1)=-2$	↗	$+\infty$

حل التمرين 16

1/ حساب مساحة قاعدة المنزل بدلالة x:



لتكن $S(x)$ مساحة قاعدة المنزل حيث: $S(x)=AB\times AD$ ...(1)

بما أن المثلث ADB قائم في A فإن حسب نظرية فيثاغورث لدينا : $AB^2+AD^2=DB^2$

منه: $x^2+AD^2=20$ و بالتالي: $AD^2=20-x^2$ إذن: $AD=\sqrt{20-x^2}$

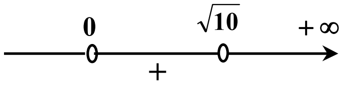
(1) تكافئ: $S(x)=x\sqrt{20-x^2}$.

2/ تعيين قيمة x حتى تكون مساحة القاعدة أعظمية :

الدالة S تقبل قيمة أعظمية معناه تقبل قيمة حدية عظمى و لهذا يجب حساب الدالة المشتقة

أولا : الدالة S معرفة إذا كان: $20-x^2\geq 0$ تكافئ: $x^2\leq 20$ أي: $-\sqrt{20}\leq x\leq\sqrt{20}$ و بما أن x موجب فإن: $0\leq x\leq 2\sqrt{5}$

ثانيا: $S'(x)=\sqrt{20-x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{20-x^2}}x=\dfrac{20-x^2-x^2}{\sqrt{20-x^2}}=\dfrac{20-2x^2}{\sqrt{20-x^2}}$



لدينا: $S'(x)=0$ تكافئ: $20-2x^2=0$ تكافئ: $x^2=10$ أي $x=\sqrt{10}$

إذن تكون مساحة القاعدة أعظمية إذا كانت $x=\sqrt{10}$ و قيمتها: $S(\sqrt{10})=10\,m^2$.

حل التمرين 17

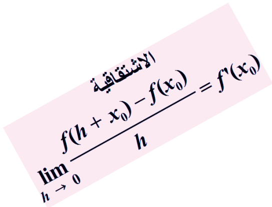
1/ لنتحقق من صحة المساواة :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-2}{h}=\frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}=\frac{h^2+2h}{h.(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

بما أن h غير معدوم فإن: $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$.

2/ استنتاج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{0+2}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$



بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق عند 1 حيث: $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

3/ تعيين أحسن تقريب تالفي عند 1 :

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ وَ $f(1)=2$

منه: $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+2$ تكافئ: $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ ،إذن أحسن تقريب تالفي للدالة f عند 1 هي الدالة : $x\mapsto\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$.

4/ حساب الدالة المشتقة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ منه: $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}}$ إذن: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

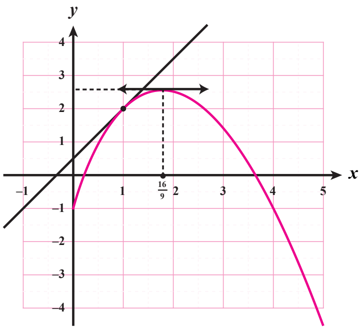
لدينا: $\dfrac{xf(x)}{x^2+3}=\dfrac{x\sqrt{x^2+3}}{x^2+3}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}=f'(x)$ منه: $xf(x)=(x^2+3)f'(x)$ نشتق الطرفين

نجد: $2xf'(x)+(x^2+3)f''(x)=f(x)+xf'(x)$

إذن: $(x^2+3)f''(x)+xf'(x)=f(x)$.

حل التمرين 18

1/ تعيين بيانيا القيم $f(1)$ و $f'(1)$:



لدينا: $f(1)=2$ و $f'(1)$ يمثل معامل توجيه المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(1;2)$

نلاحظ أن المماس يقطع محور التراتيب عند $\frac{1}{2}$، منه : $f'(1)=\dfrac{\frac{1}{2}-2}{0-1}=\dfrac{\frac{-3}{2}}{-1}$ إذن: $f'(1)=\frac{3}{2}$.

2/ حل بيانيا المتراجحات التالية :

- تكون: $f(x)\le 0$ إذا كان البيان يقع تحت محور الفواصل إذن: $x\in\left]0;0,25\right]\cup\left[3;6,5\right]$.
- تكون: $f'(x)\ge 0$ إذا كانت الدالة f متزايدة إذن: $x\in\left]0;\frac{16}{9}\right]$.
- تكون: $f(x)>2$ إذا كان البيان يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=2$ إذن: $x\in\left]1;2,6\right[$.

3/ أ- حساب $f'(x)$:

$f'(x)=b\left(2-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}bx=b\left(2-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}b\sqrt{x}=b\left(2-\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)$ إذن: $f'(x)=b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب- تعيين a و b :

لدينا: $\begin{cases}f(1)=2\\ f'(1)=\frac{3}{2}\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}a+b=2\\ \frac{b}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$ إذن: $f(x)=-1+3x\left(2-\sqrt{x}\right)$.

حل التمرين 19

1/ تعيين معامل توجيه المستقيم (OA):

معامل توجيه المستقيم (OA) هي النسبة: $\dfrac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\dfrac{9-0}{-3-0}=-3$

2/ أ- حساب المعاملات a، b، c و d :

- المنحنى (C) يمر بمبدأ المعلم معناه: $f(0)=0$ إذن : $d=0$
- المنحنى (C) يشمل النقطة $A(-3;9)$ معناه: $f(-3)=9$ إذن: $-27a+9b-3c=9$ تكافئ: $-9a+3b-c=3$ ...(1)
- المنحنى (C) يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماساً أفقيا معناه: $f'(1)=0$

– حساب $f'(x)$: لدينا: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ و $f'(1)=0$ منه: $3a+2b+c=0$ ...(2)

المنحنى (C) يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O إذن حسب السؤال الأول: $f'(0)=-3$ منه: $c=-3$

إذن من العلاقتين (1) و (2) نحصل على الجملة : $\begin{cases}-9a+3b=0\\ 3a+2b-3=0\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$ و في الأخير: $a=\frac{1}{3}$، $b=1$، $c=-3$ و $d=0$.

ب- تحليل $f'(x)$ و استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ منه: $f'(x)=x^2+2x-3$

$f'(x)=0$ تكافئ: $x^2+2x-3=0$ مميز المعادلة هو $\Delta=16$ منه: $x=1$ أو $x=-3$ إذن: $f'(x)=(x-1)(x+3)$.

- إذا كان: $x\in[-3;1]$ فإن : $f'(x)\le 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة .
- إذا كان: $x\in[1;3]$ فإن : $f'(x)\ge 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة .

حل التمرين 20

1/ حساب العدد المشتق للدالة f عند 1:

لدينا الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x)=6x$ منه: $f'(1)=6$.

2/ أحسن تقريب تآلفي للعدد $f(1+h)$ عند 1 :

نعلم أن التقريب التآلفي للدالة f من أجل h قريب من 0 هو: $f(x+h)\approx f'(x)\times h+f(x)$

وَ بوضع $x=1$ نجد: $f(1+h)\approx f'(1)\times h+f(1)$ منه : $f(1+h)\approx 6h+2$.

– استنتاج قيمة تقريبية للعدد $f(0{,}9999)$:

بوضع $h=-0{,}0001$ نجد: $f(1-0{,}0001)\approx 6(-0{,}0001)+2$ منه: $f(0{,}9999)\approx -0{,}0006+2$ أي: $f(0{,}9999)\approx 1{,}9994$

3/ تعيين الخطأ المرتكب عند حساب العدد $f(0{,}9999)$:

لدينا القيمة الحقيقية للعدد $f(0{,}9999)$ هي $3(0{,}9999)^2-1$ وَ باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $f(0{,}9999)=1{,}99940003$

إذن الخطأ المرتكب وَ ليكن d هو الفرق بين القيمة الحقيقية و القيمة التقريبية أي : $d=1{,}99940003-1{,}9994=3\times10^{-8}$.

4/ لنبين أنه إذا كان $|h|\le 10^{-k}$ حيث $k\in\mathbb{N}$ فإن: $0\le f(1+h)-(6h+2)\le 3\times10^{-2k}+1$

لدينا: $f(1+h)-(6h+2)=3(1+h)^2-(6h+2)=3(1+2h+h^2)-(6h+2)=3+\cancel{6h}+3h^2-\cancel{6h}-2=3h^2+1$

وَ لدينا: $|h|\le10^{-k}$ بالتربيع الطرفين نجد: $0\le h^2\le 10^{-2k}$ نضرب الطرفين بالعدد 3 نجد: $0\le 3h^2\le 3\times10^{-2k}$

نضيف العدد 1 نجد: $1\le 3h^2+1\le 3\times10^{-2k}+1$ وَ بالتالي $0\le f(1+h)-(6h+2)\le 3\times10^{-2k}+1$.

5/ إعطاء حصراً للعدد $f(0{,}9999)$ بتقريب 3×10^{-6} :

إذا كان: $h=-0{,}0001$ فإن: $h=-10^{-4}$ منه: $|h|=10^{-4}$ أي: $|h|\le10^{-3}$ بالتربيع الطرفين نجد: $0\le h^2\le10^{-6}$

نضرب الطرفين بالعدد 3 نجد: $0\le 3h^2\le 3\times10^{-6}$ نضيف العدد 1 نجد: $0\le 3h^2+1\le 3\times10^{-6}+1$

أي: $0\le f(1+h)-(6h+2)\le 3\times10^{-6}+1$ منه: $6h+2\le f(1+h)\le 3\times10^{-6}+6h+2$

نعوض $h=-0{,}0001$ فنجد: $-0{,}0006+2\le f(0{,}9999)\le 3\times10^{-6}-0{,}0006+2$

وَ بالتالي: $1{,}999400\le f(0{,}9999)\le 1{,}999403$.

– استنتاج حصراً للعدد $(0{,}9999)^2$:

لدينا: $1{,}999400\le f(0{,}9999)\le 1{,}999403$ تكافئ: $1{,}999400\le 3(0{,}9999)^2-1\le 1{,}999403$

تكافئ : $2{,}999400\le 3(0{,}9999)^2\le 2{,}999403$ إذن: $0{,}999800\le(0{,}9999)^2\le 0{,}999801$.

حل التمرين 21

1/ تعيين الأعداد a ، b و c :

- المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(1;-1)$ معناه: $f(1)=-1$ تكافئ : $a+\sqrt{b+c}=-1$ أي: $\sqrt{b+c}+1=-a$ ...(1)
- وَ المنحنى (C_f) يشمل مبدأ المعلم $O(0;0)$ معناه: $f(0)=0$ تكافئ : $a+\sqrt{c}=0$ أي: $\sqrt{c}=-a$ ...(2)

من (1) وَ (2) نجد: $\sqrt{b+c}+1=\sqrt{c}$ تكافئ: $\sqrt{b+c}=\sqrt{c}-1$ بالتربيع الطرفين نحصل على: $b=1-2\sqrt{c}$ ...(3)

- المنحنى (C_f) يقبل في النقطة $O(0;0)$ مماساً معامل توجيهه $-\frac{3}{4}$ معناه: $f'(0)=-\frac{3}{4}$

– حساب $f'(x)$: لدينا $f'(x)=\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}$ وَ $f'(0)=-\frac{3}{4}$ منه: $\frac{b}{2\sqrt{c}}=-\frac{3}{4}$ تكافئ: $4b=-6\sqrt{c}$ تكافئ: $2b=-3\sqrt{c}$ ...(4)

بالتعويض (3) في (4) نجد: $2(1-2\sqrt{c})=-3\sqrt{c}$ تكافئ : $\sqrt{c}=2$ منه: $c=4$ بالتعويض في (2) نجد: $a=-2$ وَ في (3) نجد: $b=-3$

و في الأخير: $a=-2$ ، $b=-3$ وَ $c=4$ و عليه: $f(x)=-2+\sqrt{-3x+4}$.

2/ أ– إيجاد التقريب التالفي للدالة f عند 0 :

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ حيث $f'(0)=-\frac{3}{4}$ وَ $f(0)=0$ منه : $y=-\frac{3}{4}x$

إذن التقريب التآلفي للدالة f عند 0 هي : $f(x)\approx-\frac{3}{4}x$.