المعاصر

محمد قداري

هذا الكتاب مرفق بقرص تعليمي

سلسلة الرياضيات بالفيديو

المغني في الرياضيات

السنة الثالثة ثانوي علوم تجريبية

- أنشطة وتطبيقات محلولة بالفيديو .
- ملخصات هامة للدروس .
- 412 تمرين ومسألة محلولة .
- وضعيات إدماجية متنوعة و هادفة .
- تمارين ومسائل من بكالوريات أجنبية .
- الحلول المفصلة لمواضيع البكالوريا (المنهاج الجديد) .

BAC

وفق – البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

– التوزيع السنوي المعتمد وطنيا

المحور الأول

النهايات

ما يجب أن يعرف

تتمات على النهايات

1. نهايات بعض الدوال المرجعية:

* n عدد طبيعي غير معدوم ، $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ ، $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty & ; n \text{ زوجي} \\ \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty & ; n \text{ فردي} \end{cases}$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ * $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ * $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

2. العمليات على النهايات:

f و g دالتان . a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات عدم التعيين "(ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

قواعد إجرائية :

- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

نهاية دالة مركبة

مبرهنة : a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f = v\ ou$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و إذا كانت $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة1 (مبرهنة الحصر) : f ، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x) \le f(x) \le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

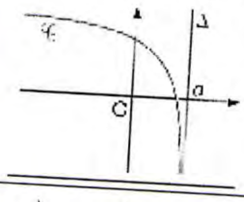
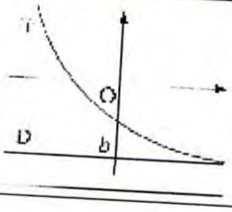
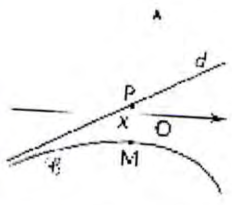
مبرهنة2: f، g دالتان . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

مبرهنة3: f، g دالتان . إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

المستقيمات المقاربة

1 . تذكير: a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و $\mathscr{C}$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	المستقيم Δ ذو المعادلة $x = a$ والموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني $\mathscr{C}$.	
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	المستقيم D ذو المعادلة $y = b$ والموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني $\mathscr{C}$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	
$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	المستقيم d ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $\mathscr{C}$ عند $+\infty$ أو عند $-\infty$.	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

مع $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ $(-\infty)$.

2 . الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب المائل:

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x) - (ax+b)]$.

- إذا كان $f(x) - (ax+b) < 0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.
- إذا كان $f(x) - (ax+b) > 0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.
- إذا قبلت المعادلة $f(x) - (ax+b) = 0$ حلولا على مجموعة تعريف الدالة f، فإن المستقيم المقارب المائل يقطع المنحنى (C) في نقط فواصلها هي حلول المعادلة.

تمارين محلولة

تمرين 01

أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $f(x) = -x^3 + 2x - 2$ ، $D_f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 3x^2 + x - 3$ ، $D_f = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$ ، $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

الحل

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{\cancel{x}^2}{-\cancel{x}}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\cancel{x}^2}{-\cancel{x}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل

1. لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 2 نجد:

x	$-\infty$ -2 1 $+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} \dfrac{2x+3}{x^2+x-2} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} \dfrac{2x+3}{x^2+x-2} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} \dfrac{2x+3}{x^2+x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$.

تمرين 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2}$

أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.مبينا المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم .

الحل

لدينا: $\mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ و $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2+3x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 2x+3+\dfrac{1}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

1. بين أن المستقيم $(D): y = 2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

الحل

1. لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

ومنه المستقيم $(D): y=2x+3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ملاحظة: يمكن أن نعبر عن النهايتين السابقتين معا كما يلي :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

2. لدينا: $\left[f(x)-(2x+3)\right]=\frac{1}{x}$ ومنه:

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]>0$، لأن $\frac{1}{x}>0$.

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) في المجال $]0;+\infty[$.

- من أجل كل x من $]-\infty;0[$ يكون $\left[f(x)-(2x+3)\right]<0$. لأن $\frac{1}{x}<0$.

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) في المجال $]-\infty;0[$.

تمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

الحل

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ فإن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\frac{3}{x^2}$ وبما أن $\frac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم المقارب (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

تمرين 06

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$.

أدرس نهاية الدالة f عند 0.

الحل

لدينا: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2 & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{2|x|}{x}=\dfrac{2(-\cancel{x})}{\cancel{x}}=-2 & ;x<0 \\ f(0)=2 \end{cases}$. لكون: $\begin{cases} |x|=x & ;x>0 \\ |x|=-x & ;x<0 \end{cases}$.

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=2$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=-2$.

بما أن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$، فإن الدالة f ليست لها نهاية عند 0.

تمرين 07

أحسب النهايتين التاليتين:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$.

الحل

بتطبيق قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

1. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$.

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$.

2. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi\cancel{x}}{2\cancel{x}}=\dfrac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)=1$.

تمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \sin x$.

أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

الحل

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \le \sin x \le 1$ و منه فإن:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$.

*بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

*بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} (x + 1) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تمرين 09

أحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(يهمنا x بجوار 0 و $x > 0$)

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ فإن: $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

بضرب طرفي المتباينة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $-\sqrt{x} \le \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le \sqrt{x}$

أي $-\sqrt{x} \le f(x) \le \sqrt{x}$ ، وبما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} = 0 = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left(-\sqrt{x}\right)$. فإن $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 0$

إذن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

تمرين 10 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;1\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$

أحسب نهاية الدالة f عند -2 .

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + x + 2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = 0$

و: $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + x - 2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$ ، إذن حالة عدم تعين من الشكل: $\left(\frac{0}{0}\right)$.

إزالة حالة عدم التعيين:

نستشف مما سبق أن العدد -2 جذر لكثيري الحدود x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2.

إذن كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 يقبل القسمة على $x+2$.

بإجراء القسمة الإقليدية نجد هكذا :

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+x+2 & x+2 \\ \hline -x^3-2x^2 & x^2+1 \\ x+2 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2+x-2 & x+2 \\ \hline -x^2-2x & x-1 \\ -x-2 & \\ 0 & \end{array}$$

ومنه: $x^3+2x^2+x+2=(x+2)(x^2+1)$ و $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$.

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}=\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\frac{x^2+1}{x-1}$$ ومنه:

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(-2)^2+1}{(-2)-1}=-\frac{5}{3}$$ ، إذن: $\lim_{x\to-2}f(x)=-\frac{5}{3}$.

تمرين 11 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=-x+\frac{x^3+x+1}{x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن حالة عدم تعيين من الشكل: $(+\infty-\infty)$.

إزالة حالة عدم التعيين:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$:

$$-x+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{(-x)(x-2)}{x-2}+\frac{x^3+x+1}{x-2}=\frac{-x^2+2x+x^3+x+1}{x-2}$$
$$=\frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}$$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

تمرين 12 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

لدينا من أجل $x\geq 0$ ، باستعمال $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ مرافق $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ نجد :

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين 13 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$.

أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-2}=+\infty$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-2)=+\infty$.

وبالتالي حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

لدينا من أجل $x\geq 1$:

$$f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=2x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=2x+1-|x|\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=2x+1-x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

لأن $|x|=x$ من أجل $x\geq 1$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$ ، $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=1$ إذ أن $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)=1$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=2-1=1$

و بالتالي: $\lim_{x\to+\infty}x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)=+\infty$. إذن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكن حساب هذه النهاية باستعمال طريقة استخدام المرافق.

تمرين 14 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

نعلم النهاية الشهيرة التالية: $\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1$. سنستعمل طريقة تبديل المتغير ،

نضع: $u=3x$ ، ومنه: $x=\frac{u}{3}$. ولدينا: $x\to0$ يكافئ $u\to0$.

وبالتالي: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{\frac{u}{3}}=\lim_{u\to0}3\frac{\sin u}{u}=3\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=3\times1=3$.

إذن: $\lim_{x\to0}f(x)=3$.

تمرين 15 (إزالة حالة عدم تعيين)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$

أحسب نهاية الدالة f عند 0 .

الحل

1) لدينا: $\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=\frac{\cos(x)-1}{x}$ ، إذن نستعمل الدالة $g:x\mapsto\cos(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=-\sin(x)$. ومنه:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=g'(0)=-\sin(0)=0$$

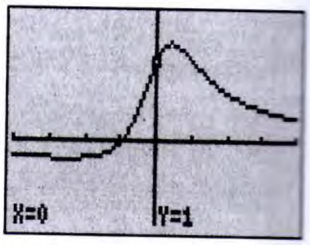
إذن: $\lim_{x\to0}f(x)=0$

تمرين 16

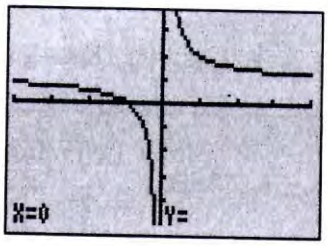
علما أن: أ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. ب) $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$

جـ) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = +\infty$

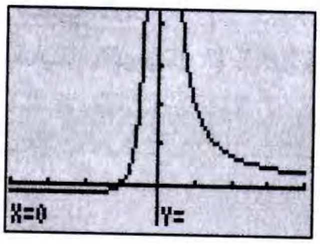
أرفق كل دالة من الدوال f ، g و h بتمثيلها البياني من بين التمثيلات التالية:



(1)



(2)



(3)

الحل

- المنحني (1) يمثل الدالة g . (بالفعل $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$)
- المنحني (2) يمثل الدالة h . (بالفعل $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = +\infty$)
- المنحني (3) يمثل الدالة f . (بالفعل $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$)

تمرين 17

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 11}{x - 2}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عبارة أخرى لـ $f(x)$ هي: $f(x) = -2x + 3 - \dfrac{5}{x-2}$.
2. يقبل المنحني (C) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x = 2$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

الحل

1 . صحيح، لأن: من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا:

$$-2x+3-\frac{5}{x-2}=\frac{(-2x+3)(x-2)}{x-2}-\frac{5}{x-2}=\frac{-2x^2+4x+3x-6-5}{x-2}$$
$$=\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=f(x)$$

* **طريقة أخرى**: يمكنك إجراء القسمة الإقليدية لـ $-2x^2+7x-11$ على $x-2$.

2 . **صحيح**، لأن:

عند حساب النهاية $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$ نجد هكذا :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 2}}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\frac{-5}{0^+}=-\infty .$$

3 . **خطأ**، لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+7x-11}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x}^2}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty .$$

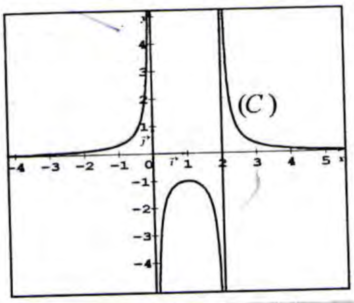
4 . **صحيح**، لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x-2}=0 .$$

(استعملنا العبارة $f(x)=-2x+3-\frac{5}{x-2}$)

تمرين 18

f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل. بقراءة بيانية:



1 . عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 . عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3 . عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

الحل

بقراءة بيانية نجد:

1 . $D=\mathbb{R}-\{0;2\}=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$.

2 . $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3 . المستقيمات المقاربة لـ (C) :

* المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) عند $-\infty$ و $+\infty$ لأن:

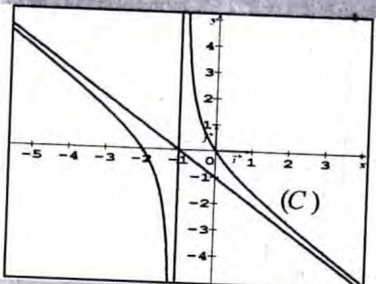
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

* المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور التراتيب) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ لأن:

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = +\infty$.

* المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = +\infty$.

تمرين 19 1^1



f دالة و (C) تمثيلها البياني المبين في الشكل المقابل . بقراءة بيانية :

1 . عين D مجموعة تعريف الدالة f .

2 . عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

3 . عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

4 . استعمل البيان السابق لتحديد إشارة : $f(x) + x + 1$.

الحل

1 . $D = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2 . $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3 . المستقيمات المقاربة لـ (C) :

* المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = +\infty$.

* المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ، لنعين معادلة له .

إن (Δ) يمر من النقطتين $A(-1;0)$ ، $B(0;-1)$ ومعادلته المختصرة من الشكل $y = ax + b$.

تعيين a : لدينا $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$ ، إذن $a = -1$.

تعيين b :لدينا $(\Delta): y = -x + b$ و $A(-1;0)$ مثلا نقطة من (Δ) إذن: $0 = -(-1) + b$

أي $b = -1$. إذن : $(\Delta): y = -x - 1$.

4 . تحديد إشارة: $f(x) + x + 1$

لدينا: $f(x) + x + 1 = f(x) - (-x - 1)$ ، إذن نستغل الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

بقراءة بيانية نجد هكذا:

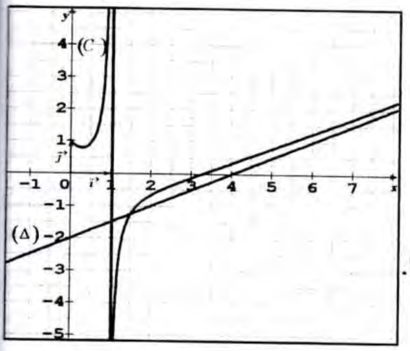
• على المجال $]-\infty; -1[$: (C) يقع تحت (Δ) وبالتالي: $f(x) + x + 1 < 0$.

• على المجال $]-1;+\infty[$ (C) يقع فوق (Δ) و بالتالي: $f(x)+x+1>0$.

تمرين 20

في الشكل أدناه لدينا الرسم البياني (C) لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$.

كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$



و المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل حالة :

1. بقراءة بيانية:

ج 1) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C)

ج 2) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C)

ج 3) (C) لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا و لا عموديا.

2. بالحساب:

من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x^2-1)}$

ج 1) $a=-2$ ، $b=4$ ، $c=-6$.

ج 2) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$.

ج 3) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$.

3. بالحساب:

(C) يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

ج 1) $y=\dfrac{1}{2}x+1$. ج 2) $y=\dfrac{1}{2}x+2$. ج 3) $y=\dfrac{1}{2}x-2$.

الحل

1 .الجواب ج 2) لأن: بقراءة بيانية نلاحظ أن : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=-\infty$.

2 . الجواب ج 1) لأن بالحساب نجد هكذا:

$$\frac{1}{2}x+a+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}=\frac{\left(\frac{1}{2}x+a\right)\left(2(x^2-1)\right)}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3-x+2ax^2-2a}{2(x^2-1)}+\frac{bx+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2ax^2-x+bx-2a+c}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c}{2(x^2-1)}$$

وبما أن: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$

نجد: $\dfrac{x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c}{2(x^2-1)}=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$

أي: $x^3+2ax^2+(b-1)x-2a+c=x^3-4x^2+3x-2$ ، فبالمطابقة نجد:

$\begin{cases}1=1\\2a=-4\\b-1=3\\-2a+c=-2\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1=1\\a=-2\\b=4\\-2(-2)+c=-2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}1=1\\a=-2\\b=4\\c=-6\end{cases}$

3. الجواب ج 3):

لدينا $f(x)=\dfrac{1}{2}x-2+\dfrac{4x-6}{2(x^2-1)}=\dfrac{1}{2}x-2+\dfrac{2x-3}{x^2-1}$ من السؤال 2 .

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

تمرين 21

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2;3\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5

عين المستقيمات المقاربة لـ (C) منحنى الدالة f ثم استنتج الوضع النسبي لهذه المستقيمات مع (C).

الحل

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$، فإن المستقيم (D_1) ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي لـ (C) عند $-\infty$.

وبما أن من أجل كل x من المجال $]-\infty;2[$ لدينا: $f(x)>2$ ، فإن (C) يقع فوق (D_1) .

- بما أن $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=+\infty$، فإن المستقيم (D_2) ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي لـ (C)

بجوار $+\infty$. وإذا كان $x < 2$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_2). وإذا كان $x > 2$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_2).

- بما أن $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، فإن المستقيم (D_3) ذا المعادلة $x = 3$ مقارب عمودي لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$. وإذا كان $x < 3$ ، فإن (C) يقع على يسار (D_3). وإذا كان $x > 3$ ، فإن (C) يقع على يمين (D_3).
- بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ ، فإن المستقيم (D_4) ذا المعادلة $y = 5$ مقارب أفقي لـ (C) عند $+\infty$

وبما أن من أجل كل x من المجال $]3; +\infty[$ $f(x) > 5$ ، فإن (C) يقع فوق (D_4) .

تمرين 22

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 5$. 2) $f(x) = -2x^2 + x - 4$. 3) $f(x) = 2x^3 + x + 1$.

4) $f(x) = -3x^3 - 4x + 5$. 5) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$. 6) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{-x + 2}$.

7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 1}$. 8) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 1}$. 9) $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x}$.

10) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - x}$.

الحل

1) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 - x + 5\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$

2) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x^2 + x - 4\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2) = -\infty$

3) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^3 + x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3) = +\infty$

4) $D = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. ومنه:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3-4x+5\right) = \lim_{x\to-\infty}(-3x^3) = +\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3-4x+5\right) = \lim_{x\to+\infty}(-3x^3) = -\infty$ *

5) $D = \mathbb{R}-\{3\} =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$. ومنه:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = 2$ *

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x} = 2$ *

$\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{0^-} = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to3\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\>}}\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{0^+} = +\infty$ *

لأن إشارة المقام $x-3$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

6) $D = \mathbb{R}-\{2\} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$. ومنه:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{-x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x} = -3$ *

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{-x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{-x} = -3$ *

$\lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\<}}\frac{3x+1}{-x+2} = \frac{7}{0^+} = +\infty$ و $\lim_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\>}}\frac{3x+1}{-x+2} = \frac{7}{0^-} = -\infty$ *

لأن إشارة المقام $-x+2$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	

7) $D = \mathbb{R}-\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. ومنه:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ *

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ *

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^3-3x+1}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ *

$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^3-3x+1}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ *

لأن إشارة المقام $x-1$ هي كما في الجدول :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

8) $D=\mathbb{R}$ لأن $x^2+1>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

9) $D=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+3+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+3+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

* $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\left(2x+3+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\left(2x+3+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ ، لأن $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}(2x+3)=3$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

10) $D=\mathbb{R}-\{0;1\}=]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن المقام $x^2-x=x(x-1)$ ينعدم عند 0 و 1 ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

- لحساب النهايات $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام x^2-x الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

* $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\dfrac{x+3}{x^2-x}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

* $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\dfrac{x+3}{x^2-x}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$ *

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$ *

تمرين 23

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D (يطلب تعيينها) في كل حالة:

1) $f(x)=2+\sqrt{x}$. 2) $f(x)=(1-x)(1+\sqrt{x})$. 3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

4) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+3}$. 5) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. 6) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}$.

الحل

1) $D=[0;+\infty[$. ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\sqrt{x})=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

2) $D=[0;+\infty[$. ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

3) $D=[0;+\infty[$. لأن $x\geq 0$ و $x+1\geq 0$ تعني $x\geq 0$ و $x\geq -1$ أي $x\geq 0$. ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4) $D=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$. لأن $2x^2-x+3>0$ إذ أن مميز كثير الحدود $2x^2-x+3$ هو $\Delta=-5<0$ ومعامل x^2 هو $2>0$ ومنه:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X})=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+3}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+3)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X})=+\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+3}=+\infty$ إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

5) $D=]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ لأن f معرفة معناه: $\frac{x+1}{x-1}\geq 0$ و $x-1\neq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

إذن سندرس النهايات $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ و $\lim_{X\to1}\sqrt{X}=1$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ومنه: $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$.

6) . $D=[0;4[\cup]4;+\infty[$ لأن f معرفة معناه: $x\geq0$ و $\sqrt{x}-2\neq0$

أي: $x\geq0$ و $\sqrt{x}\neq2$ أي: $x\geq0$ و $x\neq4$ وعليه $D=[0;4[\cup]4;+\infty[$.

إذن سندرس النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x\to4\\<}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x\to4\\>}} f(x)$. لدينا:

* $\lim_{\substack{x\to4\\<}}(x-2)=2>0$ و $\lim_{\substack{x\to4\\<}}(\sqrt{x}-2)=0$ و $\sqrt{x}<2$ من أجل $x<4$.

إذن: $\lim_{\substack{x\to4\\<}} f(x)=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

* $\lim_{\substack{x\to4\\>}}(x-2)=2>0$ و $\lim_{\substack{x\to4\\>}}(\sqrt{x}-2)=0$ و $\sqrt{x}>2$ من أجل $x>4$.

إذن: $\lim_{\substack{x\to4\\>}} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-2\right)=+\infty$. ومنه: حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

إزالة حالة عدم التعيين :

لدينا من أجل كل x من D :

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}=\frac{x-2}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}=\frac{x\sqrt{x}+2x-2\sqrt{x}-4}{x-4}\ .$$

$$=\frac{(x-2)\sqrt{x}+2x-4}{x-4}=\left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x}+\frac{2x-4}{x-4}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x-4}\right)=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-4}{x-4}\right)=2$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-2}{x-4}\right)\sqrt{x}+\frac{2x-4}{x-4}\right)=+\infty$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 24

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايتين :

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$. 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

الحل

1) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ، إذن نستعمل الدالة "الجذر التربيعي" $f : x \mapsto \sqrt{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ومنه: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{1}{4}$

2) لدينا: $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0} = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، إذن نستعمل الدالة $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و لدينا: $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

*** تذكير:**

مشتقة الدالة: $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ على المجال $\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$ هي الدالة:

$x \mapsto \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ حيث $a \neq 0$ ومنه:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{0+1}}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

إذن: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x > 1$ فإن: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

الحل

1) لدينا: $x > 1$ و من أجل كل x فإن: $x \geq x$، بجمع المتباينتين طرفا بطرف نجد: $x + x > x + 1$ أي $2x > x + 1$، ولكون العددان $2x$ و $x + 1$ موجبان فبالمرور إلى الجذر التربيعي نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$ ثم إلى المقلوب نجد: $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2) لدينا: $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ وبضرب طرفي هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نجد:

$\frac{2x}{\sqrt{2x}} < \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$، أي $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$، لكن:

$$\frac{2x}{\sqrt{2x}} = \frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} = \frac{2x\sqrt{2x}}{2x} = \sqrt{2x}$$

إذن $f(x) > \sqrt{2x}$، وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$ فحسب مبرهنة النهايات بالمقارنة نستنتج أن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تمرين 26

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

2) استنتج النهايتين التاليتين: أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

الحل

1) نقارن بين $\frac{x}{x+1}$ و 1 ثم بين $\frac{x}{x+1}$ و $\frac{1}{2}$ من أجل $x \geq 1$.

لدينا: $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-(x+1)}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - 1 \leq 0$

أي: $\frac{x}{x+1} \leq 1$.

ولدينا من جهة: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x-(x+1)}{2(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$، وبما أن $x + 1 > 0$ و $x - 1 \geq 0$

نستنتج أن: $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ ، أي: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$.

خلاصة ما سبق: من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ لدينا: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$.

2) استنتاج النهايتين : أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ لدينا: $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ، بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\sqrt{x}$ نجد: $\frac{1}{2}\sqrt{x}\leq\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$ ، وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x}=+\infty$ نستنتج حسب مبرهنة النهايات بالمقارنة أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}=+\infty$.

ب) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$: $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ،بضرب طرفي المتباينة المضاعفة الأخيرة في العدد الموجب تماما $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نجد: $\frac{1}{2\sqrt{x}}\leq\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$ ، نستنتج حسب مبرهنة الحصر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}=0$.

تمرين 27

أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D في كل حالة .

1) $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$. 2) $f(x)=\frac{x^2+3}{|x-1|}$. 3) $f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ،

لأن $x^2-1\neq 0$ تعني $x\neq 1$ و $x\neq -1$. سنكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة على D .

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ ، أي: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x^2-1} & ;x\in]1;+\infty[\\ \frac{-x+1}{x^2-1} & ;x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\end{cases}$. إذن:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

لحساب النهايات: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}f(x)$ نستعمل عبارة f المناسبة كما عمدنا في حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وإشارة المقام x^2-1 الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 1 $\quad +\infty$
x^2-1	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

لدينا:

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}\frac{|x-1|}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}\frac{-1}{(x+1)}=-\frac{1}{2}$.

* $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$.

2) $D=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

لأن f معرفة تعني $|x-1|\neq0$ أي $x-1\neq0$ أي $x\neq1$.

لدينا: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x-1>0\\ -(x-1) & ;x-1<0\end{cases}$ أي، $|x-1|=\begin{cases}x-1 & ;x>1\\ -x+1 & ;x<1\end{cases}$ ، ومنه:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3}{x-1} & ;x>1\\ \frac{x^2+3}{-x+1} & ;x<1\end{cases}$. إذن:

* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}^2}{-\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3}{|x-1|}=\frac{4}{0^+}=+\infty$. لأن $|x-1|>0$ من أجل كل $x\neq1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$

3) $D=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ لأن f معرفة تعني $x+1\neq0$ أي $x\neq-1$.

إذن سندرس النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)$.

لدينا باستعمال نهاية دالة مركبة ، وباستعمال إشارة $x+1$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0 $+$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim\limits_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$ و $\lim\limits_{X\to1}|X|=1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x)=+\infty$.

* $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty}|X|=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x)=+\infty$.

تمرين 28

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث : (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ و مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$.

الحل

f معرفة معناه $x+d\neq0$ أي $x\neq-d$ و المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C) ،

إذن: $-d=1$ ، أي $d=-1$.

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{c}{x+d}=0$ ، أي المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. و بما أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$. نستنتج أن: $ax+b=2x+3$ ،

بالمطابقة نجد: $a=2$ ، $b=3$.

لدينا إذن: $f(x)=2x+3+\dfrac{c}{x-1}$ ، و بما أن (C) يشمل النقطة $A(0;4)$ ،

فإن: $f(0)=4$ ومنه : $4=2\times0+3+\dfrac{c}{0-1}$ ، أي $-c=1$ ، إذن: $c=-1$.

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$.

تمرين 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b، بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$ يكون $f(x)=a+\dfrac{b}{x+2}$.

2) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D.

3) استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C) المنحني الممثل للدالة f.

4) عين مركز تناظر المنحني (C).

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq -2$:

$$a+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)}{x+2}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+b}{x+2}=f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$$

إذن: $\dfrac{ax+2a+b}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x+2}$ ، ومنه: $ax+2a+b=2x+3$ ، بالمطابقة نجد:

$a=2$ و $2a+b=3$ أي $2\times 2+b=3$ أي $b=-1$ ، إذن: $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$.

2) لدينا: $D=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. ومنه:

* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$.

* $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}}\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

لأن إشارة المقام $x+2$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

<u>ملاحظة</u> :يمكن استعمال العبارة $f(x)=2-\dfrac{1}{x+2}$ لحساب النهايات السابقة.

3) المستقيمات المقاربة لـ (C):

* لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=2$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C)

- موازي لمحور الفواصل- عند $+\infty$ و $-\infty$.

* لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مقارب لـ (C) ـ موازي لمحور التراتيب ـ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

4) مركز تناظر المنحني (C) هو النقطة $A(-2;3)$ ، نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين .

تمرين 30

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 10}{x - 4}$.

1) بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 4}.$$

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للمستوي عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D) .

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$:

$$ax + b + \frac{c}{x-4} = \frac{ax^2 - 4ax + bx - 4b + c}{x - 4} = \frac{ax^2 + (b - 4a)x - 4b + c}{x - 4} = \frac{x^2 - x - 10}{x - 4}$$

ومنه: $ax^2 + (-4a + b)x - 4b + c = x^2 - x - 10$ وحسب تساوي كثيري حدود،

نجد هكذا: $\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -1 \\ -4b + c = -10 \end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4a - 1 = 3 \\ c = 4b - 10 = 2 \end{cases}$ ، إذن: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

نستخلص أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 4$: $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{x - 4}$.

2) لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 4) = +\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x - 4} = 0$

وهذا يعني أنه لدينا : $f(x) = x + 3 + h(x)$ حيث $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ (مع $h(x) = \dfrac{2}{x - 4}$)

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

وبالمثل، ولكون $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 4} = 0$ نستنتج أن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

3) لدراسة الوضع النسبي لـ (C) بالنسبة إلى (D) ،ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 3)$، أي

إشارة $h(x)=\dfrac{2}{x-4}$ ، لدينا:

- على المجال $]-\infty;4[$ أي $x<4$ ، لدينا $x-4<0$ ومنه $h(x)<0$ ، وبالتالي (C) يقع تحت (D).
- على المجال $]4;+\infty[$ أي $x>4$ ، لدينا $x-4>0$ ومنه $h(x)>0$ ، وبالتالي (C) يقع فوق (D).

تمرين 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$.

ليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم:

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها مبينا المستقيم المقارب لـ (C).

2) أ• عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ يكون $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$.

ب • استنتج أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ • أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

الحل

1) $D=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. ولدينا:

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}$. ومنه:

* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$. ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

2) أ• لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$:

$$ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{(ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b)+cx+d}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

ومنه: $\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

ومنه: $ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d=x^3+3x^2+6x+3$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\2a+b=3\\a+2b+c=6\\b+d=3\end{cases}$ وهذا يعني أن: $\begin{cases}a=1\\b=3-2a=1\\c=6-a-2b=3\\d=3-b=2\end{cases}$ ، ومنه : $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\\d=2\end{cases}$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ لدينا: $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

ب• لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ ومنه:

* $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

* $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y=x+1$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

جـ• ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ أي إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

إن إشارة $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ هي من إشارة البسط $3x+2$ لأن المقام $(x+1)^2>0$ من أجل $x\neq -1$.

إشارة البسط $3x+2$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $-\frac{2}{3}$ $\quad$ $+\infty$
$3x+2$	$-$ $\quad$ ‖ $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

ومنه: * (C) يقع تحت (Δ) على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

* (C) يقع فوق (Δ) على المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

* (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{2}{3}$ ، للحصول على ترتيبها نعوض في معادلة (Δ) نجد: $\left(-\frac{2}{3}\right)+1=\frac{1}{3}$. (كذلك يكون ترتيبها $f\left(-\frac{2}{3}\right)$)

إذن : (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الاحداثيين: $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

تمرين 32

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم للمستوي.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) حدد النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$.

3) استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

4) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

الحل

1) باستعمال قاعدة حساب نهاية دالة مركبة نجد:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ،

وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) • لدينا في حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ حالة عدم تعيين ، نستعمل عبارة مختصرة للعبارة $\sqrt{x^2+x+1}-x$.

لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

ولدينا من جهة: $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1=2$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$ أي $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\frac{1}{2}$.

• وبالمثل لدينا: $f(x)+x=\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

من أجل $x<0$: $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ ومنه:

$$f(x)+x=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}$$

وبالتالي حسب مبرهنة نهاية دالة مركبة و مبرهنات العمليات نجد $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=-\frac{1}{2}$

3) نستنتج من السؤال 2 و حسب مبرهنات العمليات أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x-\frac{1}{2}=0$

وأن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x+\frac{1}{2}=0$. وهذا يعني أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

وأن المستقيم (Δ') الذي معادلة له: $y=-x-\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

4) *وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا ،من أجل $x>0$: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن $x>0$ فإن $\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}>0$ ، أي $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>0$.

* وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ') :

لدينا ،من أجل $x<0$: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

بإمكاننا تحديد إشارة العبارة: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$ دون اللجوء إلى مرافقها.

لدينا:من أجل $x<0$: $x^2+x+1>x^2+x+\frac{1}{4}$ ، أي $x^2+x+1>\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ ،

ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}>\left|x+\frac{1}{2}\right|$ ، أي $\sqrt{x^2+x+1}>-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ، لأن:

$\left|x+\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & ;x\geq-\frac{1}{2}\\ -\left(x+\frac{1}{2}\right) & ;x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

ومنه: $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.وبالتالي (C) يقع فوق (Δ') من أجل $x<0$.

المحور الثاني

الاستمرارية

ما يجب أن يعرف

مفهوم الاستمرارية

1 . استمرارية دالة عند قيمة- استمرارية دالة على مجال:

تعريف: f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

(f مستمرة عند a) معناه ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$)

ملاحظات:

- شرط الاستمرارية يكتب كذلك: $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. وذلك بوضع $h = x - a$.

- القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون دالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).

2 . الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار:

تعاريف: - القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليمين معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$.

- القول أن الدالة f مستمرة عند a من اليسار معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$.

نتيجة: - تكون دالة f مستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليمين ومن اليسار عند a. لدينا: f مستمرة عند a معناه $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$.

نتائج:

1 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند a من اليمين و مستمرة عند b من اليسار.

2 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a;b[$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند a من اليمين.

3 . تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a;b]$ إذا وفقط إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a;b[$ و مستمرة عند b من اليسار.

3 . خواص :

نقبل دون برهان أن : مجموع ، جداء ، حاصل قسمة و مركب دوال مألوفة ومستمرة هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج:

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

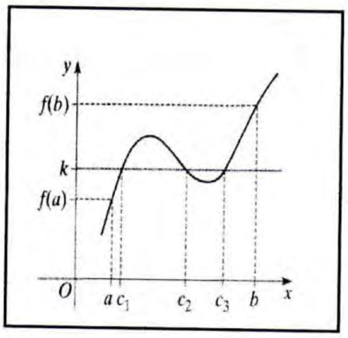
مبرهنة القيم المتوسطة

1. مبرهنة القيم المتوسطة :

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

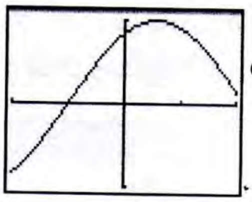
التفسير البياني:



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.

(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$) فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ ، أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

2. المعادلة : $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة كخوارزمية التنصيف ، المسح ، ...

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1 . صورة مجال بواسطة دالة مستمرة:

مبرهنة: بفرض f دالة كيفية ،مستمرة و رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ نحصل على :

$I =$	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
	صورة I بالدالة f هو المجال	
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x);f(a)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x);\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x);\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)\right[$

ملاحظة : تمدد المبرهنة السابقة إلى حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I غير محدود.

2 . الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال: $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

نتيجة: إذا كانت دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ وإذا كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$. وبيانيا، في معلم، منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]a;b[$.

ملاحظات و نتائج: 1 .إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a		x_0		b
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$f(b)$

x	a		x_0		b
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	k	$\searrow$	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

2 . تمدد المبرهنة السابقة إلى حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

تمارين محلولة

تمرين 01

أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة a في كل ما يأتي:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $a=0$.
2. $f(x)=x^2$ ، $a=2$.
3. $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=0$.
4. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;x\in[-1;2[\\ x-1 & ;x\in[2;5[\end{cases}$ ، $a=2$.

الحل

1 . الدالة f غير معرفة عند 0 ، ومنه f غير مستمرة عند 0 . (لا يمكن حساب $f(0)$).

2 . $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=2^2=4$ و $f(2)=2^2=4$. إذن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

و بالتالي f مستمرة عند 2 .

3 . $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x}=\sqrt{0}=0$ و $f(0)=\sqrt{0}=0$. إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=f(0)$.

و بالتالي f مستمرة عند 0 من اليمين .

4 . لدينا: $f(2)=2-1=1$.

و: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} x^2=4\neq f(2)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}(x-1)=1=f(2)$.

إذن: f مستمرة عند 2 من اليمين . وغير مستمرة عند 2 من اليسار . نستنتج عندئذ أن f غير مستمرة عند 2 .

تمرين 02

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)\sin x$.

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل

الدالتان $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto x+1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 03

برهن أن المعادلة $x^3-x=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

الحل

نعتبر ، مثلا ، f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-x$ (يمكن اختيار دالة أخرى)

لدينا: $x^3-x=-3$ تكافئ $f(x)=-3$. الدالة f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مستمرة على المجال $[-2;-1]$. لدينا: $f(-2)=-6$ و $f(-1)=0$.

ومنه العدد -3 محصور بين العددين: $f(-2)$ و $f(-1)$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$. أي المعادلة $x^3-x=-3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

تمرين 04

بين أن المعادلة $x^5+x^3-1=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

الحل

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^5+x^3-1$.

f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(0)=-1$ و $f(1)=1$، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

أي المعادلة $x^5+x^3-1=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين 05

يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	$-\infty$ ↗	0 ↘	2 ‖ ↗	$+\infty$
$f(x)$	1	2	$-\infty$ ‖ $-\infty$	1

عين بالدالة f صور المجالات التالية:

$]-\infty;0]$ ، $[0;2[$ ، $]-\infty;2[$ ، $]2;+\infty[$.

الحل

- صورة المجال $]-\infty;0]$ هو المجال $]1;2]$.
- صورة المجال $[0;2[$ هو المجال $]-\infty;2]$.
- صورة المجال $]-\infty;2[$ هو المجال $]-\infty;2]$.
- صورة المجال $]2;+\infty[$ هو المجال $]-\infty;1[$.

تمرين 06

يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ برر.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$ ؟ برر.

الحل

1) • على المجال $]-\infty;-1]$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $0\in]-\infty;2]$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

• على المجال $[-1;1]$ ، الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و $0\in[-1;2]$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_2 من المجال $[-1;1]$.

• على المجال $[1;+\infty[$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $0\in[-1;+\infty[$. إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_3 من المجال $[1;+\infty[$.

خلاصة ماسبق:

المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول α_1 ، α_2 ، α_3 تنتمي على الترتيب إلى المجالات $]-\infty;-1]$ ، $[-1;1]$ ، $[1;+\infty[$. بيانيا :منحى f يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب α_1 ، α_2 ، α_3 تنتمي إلى المجالات $]-\infty;-1]$ ، $[-1;1]$ ، $[1;+\infty[$.

2) • على المجال $]-\infty;-1]$ ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و $-5\in]-\infty;2]$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

• على المجال $[-1;1]$ ، $-5\notin[-1;2]$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلولا في المجال $[-1;1]$.

• على المجال $[1;+\infty[$ ، $-5\notin[-1;+\infty[$. إذن المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلولا في المجال $[1;+\infty[$.

خلاصة ماسبق:

المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β_1 من المجال $]-\infty;-1]$ ، بيانيا :منحى f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=-5$ في نقطة وحيدة فاصلتها β_1 من المجال $]-\infty;-1]$.

تمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$

الحل

1) الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=3x^2-10x+3$

إشارة $f'(x)$: $3x^2-10x+3$ كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta=64$ يقبل جذرين متمايزين هما $\frac{1}{3}$ و 3. و بالتالي إشارة $3x^2-10x+3$ هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3x$		+	0	-	0	+	

و يكون جدول تغيرات f كما يلي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

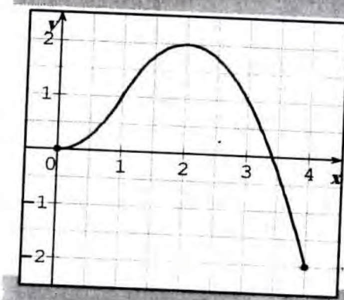
حيث: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) المجال $[1;2]$ محتوى في المجال $\left[\frac{1}{3};3\right]$. إذن الدالة f متناقصة تماما على $[1;2]$ ولدينا:

$f(1)=1^3-5\times1^2+3\times1+4=3>0$ و $f(2)=2^3-5\times2^2+3\times2+4=-2<0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

تمرين 08



الشكل التالي يمثل المنحني البياني لدالة f معرفة على $[0;4]$

1) عين صورة المجال $[0;4]$ بالدالة f .

2) على المجال $[0;4]$ ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ ؟

3) بقراءة بيانية أعط حصرا (طوله $0,5$) لكل حل من هذه الحلول (أو الحل).

الحل

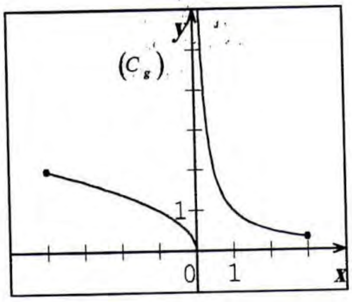
1) صورة المجال $[0;4]$ بالدالة f هو المجال $[-2;2]$.

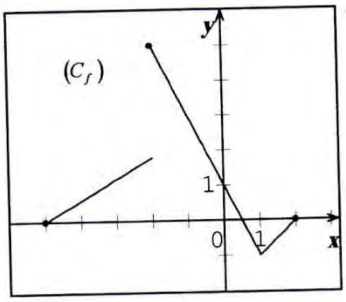
2) على المجال $[0;4]$: المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ تقبل حلين مختلفين α و β (حيث $\alpha < \beta$)، لأن المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{3}{2}$ يقطع منحنى الدالة f في نقطتين مختلفتين فاصلتاهما α و β .

3) بقراءة بيانية نجد: $1 < \alpha < 1,5$ و $2,5 < \beta < 3$.

تمرين 09

f و g دالتان معرفتان على $[-5;2]$ و $[-4;3]$ على الترتيب ، الشكل التالي هو التمثيل البياني لهما في معلم .





1) هل الدالة f مستمرة على $[-5;2]$ ؟

2) هل الدالة g مستمرة على $[-4;3]$ ؟

3) اذكر مجالات تكون عليها الدالة f مستمرة.

4) اذكر مجالات تكون عليها الدالة g مستمرة.

الحل

1) الدالة f ليست مستمرة على $[-5;2]$ لأن منحناها مرسوم برفع القلم (اليد).
يظهر أن الدالة f ليست مستمرة عند العدد -2 .

2) الدالة g ليست مستمرة على $[-4;3]$ لأن منحناها مرسوم برفع القلم (اليد).
يظهر أن الدالة g ليست مستمرة عند العدد 0 .

3) مجالات تكون عليها الدالة f مستمرة :
f مستمرة على كل من المجالين : $[-5;-2[$ و $[-2;2]$.

4) مجالات تكون عليها الدالة g مستمرة :
g مستمرة على كل من المجالين : $[-4;0]$ و $]0;3]$.

تمرين 10

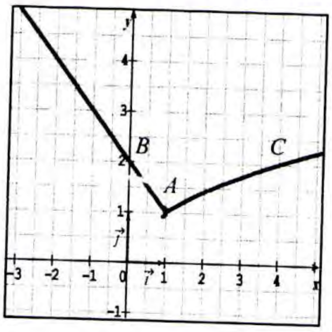
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+2 \ ; \ x\in\left]-\infty;1\right] \\ f(x)=\sqrt{x} \quad ; x\in\left]1;+\infty\right[\end{cases}$$

1) أرسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا ؟

الحل



1) • على المجال $]-\infty;1]$ ، f هي عبارة عن دالة تآلفية يكون منحناها البياني عبارة عن نصف مستقيم مغلق مبدؤه النقطة $A(1;1)$ ويشمل نقطة أخرى مثلا $B(0;2)$

• على المجال $]1;+\infty[$ ، f هي الدالة الجذرالتربيعي يكون منحناها البياني مفتوحا عند $A(1;1)$ ويشمل نقطة أخرى مثلا $C(4;2)$.

2) الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $]1;+\infty[$

لندرس استمرارية f عند 1 . لدينا:

$f(1)=-1+2=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(-x+2)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\sqrt{x}=1$.

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=f(1)$. وبالتالي f مستمرة عند 1 .

نستخلص مما سبق ، لكون الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $]1;+\infty[$ و مستمرة عند 1 . فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 11

f دالة معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq1$ و $f(1)=3$

1) أدرس استمرارية f عند 1 .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

الحل

1) <u>دراسة استمرارية f عند 1</u> : لدينا: $f(1)=3$ وعند حساب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

نجد حالة عدم التعيين ، إذ أن : $\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ ، أي من الشكل $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين:</u>

يمكن أن نستعمل طريقة الاختزال أو طريقة العدد المشتق ، نستعمل مثلا طريقة العدد المشتق . الدالة $g:x\mapsto x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي الدالة $g':x\mapsto 3x^2$

ومنه: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)=g'(1)=3\times1^2=3$

إذن: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. وبالتالي f مستمرة عند 1 .

2) الدالة f دالة ناطقة ، فهي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ وبما أنها مستمرة عند 1. فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{|x|}{x}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

- أدرس استمرارية الدالة f عند العدد 0 .

الحل

لدينا: $\begin{cases} |x|=x & ;x>0 \\ |x|=-x & ;x<0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(x)=x^2+1\ ;\ x>0 \\ f(x)=x^2-1\ ;\ x<0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

لدينا: $f(0)=1$. و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}(x^2+1)=1$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}}(x^2-1)=-1$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} f(x)$. إذن f لا تقبل نهاية عند 0 . و بالتالي f غير مستمرة عند 0.

تمرين 13

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$(m\in\mathbb{R})\ \begin{cases} f(x)=3x+m\ ;\ x\in]-\infty;1[\\ f(x)=x^2+1\ ;\ x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

1) هل الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$ ؟ على $]-\infty;1[$ ؟

2) كيف تختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

3) أرسم (C) المنحني الممثل للدالة f .

الحل

1) الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$. لأنها على هذا المجال دالة كثير حدود، و f مستمرة على $]-\infty;1[$ لأنها على هذا المجال دالة تآلفية .

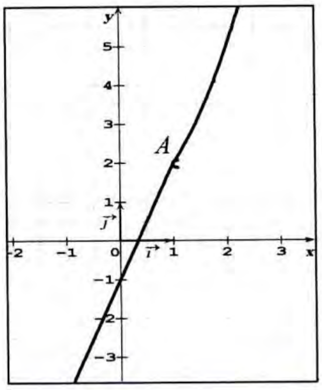
2) اختيار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ مشروط بـ:

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{<\\x\to 1}} f(x)=f(1)$.

لدينا: $f(1)=1^2+1=2$.

و : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}(3x+m)=3+m$ ، $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}(x^2+1)=2$

لدينا: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=f(1)$ تكافئ $3+m=2$. أي $m=-1$.



لدينا عندئذ: $\begin{cases} f(x)=3x-1\ ; & x\in]-\infty;1[\\ f(x)=x^2+1\ ; & x\in[1;+\infty[\end{cases}$

3) **رسم** (C) **منحني** f :

• على $]-\infty;1[$ يكون (C) عبارة عن نصف مستقيم مفتوح مبدؤه النقطة $A(1;2)$.

• على $[1;+\infty[$ يكون (C) عبارة عن جزء من القطع المكافئ صورة القطع المكافئ الممثل للدالة مربع بانسحاب شعاعه $\vec{j}$ ويشمل النقطة $A(1;2)$.

تمرين 14

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2+x-3\ ; & x\in[1;+\infty[\\ f(x)=.....\ ; & x\in]-\infty;1[\end{cases}$

اقترح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل

لدينا: $f(1)=1^2+1-3=-1$ ، إذن $f(1)=-1$. و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}(x^2+x-3)=-1$.

إذن اقتراح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ مشروط بشرطين هما:

• $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=f(1)=-1$ حتى تكون f مستمرة عند 1 من اليسار.

• f مستمرة على المجال $]-\infty;1[$.

نقترح مثلا : $f(x)=x-2$. إن هذا الاقتراح يلبي مطلبينا إذ أن :

• الدالة : $x\to x-2$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على المجال $]-\infty;1[$.

• $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}(x-2)=-1$.

إذن ، مثلا : $\begin{cases} f(x)=x^2+x-3\ ; & x\in[1;+\infty[\\ f(x)=x-2\ ; & x\in]-\infty;1[\end{cases}$

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

أدرس استمرارية f.

الحل

الدالة: $x \mapsto \cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$. و الدالة: $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ مستمرة كذلك على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة معرفة على $\mathbb{R}$، إذ أن $1+x^2 \neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

إذن الدالة f هي عبارة عن حاصل دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$، فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 16

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	1	5	11	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+ ‖ +	0	-
$f(x)$	3 ↘	-1	↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	7	↘ $-\infty$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة. على المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$ المعادلة:

1) $f(x)=2$ تقبل على الأكثر ثلاثة حلول.
2) $f(x)=-1$ تقبل بالضبط حلا واحدا.
3) $f(x)=-5$ تقبل حلين مختلفين.
4) $f(x)=2011$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

الحل

بالتمعن جيدا في الجدول المعطى وبالخصوص السطر الثالث فيه، بالاستعانة بمبرهنة القيم المتوسطة يكون لدينا:

1) **خطأ**، لأن:

- على المجال $]-\infty;1[$ الدالة f متناقصة تماما و $2\in]-1;3[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;1[$.
- على المجال $]1;5[$ الدالة f متزايدة تماما و $2\in]-1;+\infty[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;5[$.
- على المجال $]5;11[$ الدالة f متزايدة تماما و $2\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]5;11[$.

- على المجال $]11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $2\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=2$

تقبل حلا وحيدا في المجال $]11;+\infty[$.

خلاصة ماسبق: المعادلة $f(x)=2$ تقبل أربعة حلول.

2) **خطأ** ، لأن :

• على المجال $]-\infty;5[$ العدد 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=-1$. (لاحظ أن $f(1)=-1$)

• على المجال $[5;11[$ الدالة f متزايدة تماما و $-1\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[5;11[$.

• على المجال $]11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $-1\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]11;+\infty[$.

خلاصة ماسبق: المعادلة $f(x)=-1$ تقبل ثلاثة حلول.

3) **صحيح** ، لأن :

• على المجال $]-\infty;5[$ ، لدينا : $-5\notin[-1;+\infty[$. فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ لا تقبل حلا.

• على المجال $[5;11[$ الدالة f متزايدة تماما و $-5\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[5;11[$.

• على المجال $]11;+\infty[$ الدالة f متناقصة تماما و $-5\in]-\infty;7[$ فبالتالي المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]11;+\infty[$.

خلاصة ماسبق: المعادلة $f(x)=-5$ تقبل حلين α و β حيث $\alpha\in[5;11[$ و $\beta\in[11;+\infty[$.

واضح أن $\alpha\neq\beta$. لأنه لو كان $\alpha=\beta$ ، لكان $\alpha=\beta=11$. لكن 11 ليس حل للمعادلة $f(x)=-5$. إذ أن $f(11)=7$.

4) **صحيح** ، لأن :

بمراقبة السطر الثالث للجدول نجد أن العدد 2011 ينتمي فقط إلى المجال $[-1;+\infty[$.

و الدالة f على المجال $]1;5[$ متزايدة تماما فبالتالي المعادلة $f(x)=2011$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

تمرين 17

لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ و جدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما.

الحل

نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين على المجال $]-3;+\infty[$. لدينا:

- على المجال $]-3;0]$ ، الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $0\in[-2;+\infty[$. فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-3;0]$.
- على المجال $[0;2]$ ، الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما و $0\in[-2;4]$. فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $\beta\in[0;2]$.
- على المجال $[2;+\infty[$ ، لدينا $0\notin]2;4]$. ومنه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلولا .

خلاصة ما سبق: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين مختلفين α و β . لأن:

$\alpha\in]-3;0]$ و $\beta\in[0;2]$ فيكون : $\alpha\neq\beta$

ملحوظة:

لا يمكن أن يكون: $\alpha=\beta=0$ ، لأن $f(0)=-2\neq 0$. أي 0 ليس حل للمعادلة $f(x)=0$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-6x^2+7$

1) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) • بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

• عين حصرا للعدد α طوله 0,5

• استنتج إشارة $f(x)$ على $[1;2]$.

الحل

1) الدالة f دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.ولدينا:

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$. إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x(x-4)$ الذي يقبل جذرين متمايزين هما 0 و 4 ولدينا:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو كما يلي:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

2) • نبين أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[1;2\right]$.

على المجال $\left[1;2\right]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما لكون $\left[1;2\right]\subset\left[0;4\right]$. و لدينا:

$f\left(1\right)=2>0$ و $f\left(2\right)=-9<0$.فبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[1;2\right]$.

• لنعين حصرا للعدد α طوله $0,5$ باستخدام طريقة التنصيف مثلا .

مركز المجال $\left[1;2\right]$ هو $\frac{1+2}{2}$ أي $\frac{3}{2}$. بما أن $f\left(\frac{3}{2}\right)=-3,125<0$ و لكون $f\left(1\right)=2>0$

نستنتج أن $\alpha\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$. أي $\alpha\in\left[1;1,5\right]$. طول المجال $\left[1;1,5\right]$ هو $0,5$

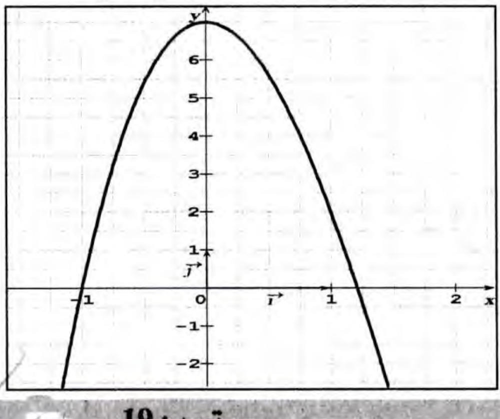
• استنتاج إشارة $f\left(x\right)$ على $\left[1;2\right]$:

مما سبق α هو الحل الوحيد للمعادلة $f\left(x\right)=0$ على $\left[1;2\right]$ ومنه إشارة $f\left(x\right)$ هي كما في الجدول التالي:

x	1	α	2
$f\left(x\right)$	$+$	0	$-$

و هذا لكون الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[1;2\right]$.

توضيح بياني:



تمرين 19

f هي الدالة المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $f\left(x\right)=x+\sqrt{x}$

1) برر لماذا الدالة f مستمرة على $\left[0;+\infty\right[$ ؟

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $f\left(3\right)$ و $f\left(4\right)$.

استنتج أن المعادلة $f\left(x\right)=5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[3;4\right]$.

الحل

1) الدالة f هي عبارة عن مجموع الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المستمرتين على $[0;+\infty[$ فهي مستمرة على $[0;+\infty[$.

2) الدالة f هي عبارة عن مجموع الدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ القابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$.

إذن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

حيث $f(0) = 0 + \sqrt{0} = 0$.

3) • لدينا: $f(3) = 3 + \sqrt{3} < 5$ و $f(4) = 4 + \sqrt{4} = 6 > 5$

• الدالة f متزايدة تماما على المجال $[3;4]$ لكونها متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

وبما أن 5 محصور بين $f(3)$ و $f(4)$ نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[3;4]$.

تمرين 20

لتكن f دالة مستمرة على $[0;1]$ و تأخذ قيمها في $[0;1]$.

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[0;1]$.

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $g(x) = f(x) - x$.

لنحقق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g على المجال $[0;1]$. لدينا:

• واضح أن الدالة g مستمرة على $[0;1]$ إذ أنها عبارة عن مجموع الدالتين :

f المستمرة فرضا على $[0;1]$ و الدالة: $x \mapsto -x$ المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[0;1]$.

• $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ لأن $f(0) \in [0;1]$.

و $g(1) = f(1) - 1 < 0$. لأن $f(1) \in [0;1]$ و بالتالي $f(1) - 1 < 0$.

إذن: $g(0) \times g(1) < 0$ و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$. المعادلة $g(x) = 0$ تكافئ المعادلة $f(x) - x = 0$

أي تكافئ المعادلة $f(x) = x$.

إذن: المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[0;1]$.

تمرين 21

f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ: $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$.

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$.

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;\pi]$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

لنحقق مبرهنة القيم المتوسطة على الدالة g على المجال $[0;\pi]$. لدينا:

- واضح أن الدالة g مستمرة على $[0;\pi]$ إذ أنها عبارة عن مجموع الدالتين: f المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[0;\pi]$ و الدالة: $x \mapsto -x$ المستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[0;\pi]$.
- $g(0)=f(0)-0=2+\frac{1}{2}\sin(0)-0=2>0$،

و $g(\pi)=f(\pi)-\pi=2+\frac{1}{2}\sin(\pi)-\pi=2-\frac{1}{2}-\pi=\frac{3}{2}-\pi<0$.

إذن: $g(0)\times g(\pi)<0$.

- الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0;\pi[$ لأنها عبارة عن مجموع الدالتين السابقتين، القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهما قابلتين للاشتقاق على $]0;\pi[$ ولدينا:

$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{1}{2}\cos(x)-1$. لنعين إشارة $g'(x)$ أي إشارة $\frac{1}{2}\cos(x)-1$.

لدينا من أجل عدد حقيقي x: $-1\le \cos x\le 1$ ومنه: $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$، ومنه:

$-\frac{1}{2}-1\le\frac{1}{2}\cos(x)-1\le\frac{1}{2}-1$. أي: $-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}\cos(x)-1\le-\frac{1}{2}$. و بالتالي:

$g'(x)<0$. إذن g متناقصة تماما على المجال $]0;\pi[$ ويكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0		π
$g'(x)$		-	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}-\pi$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;\pi]$ أي $g(\alpha)=0$.

لدينا: $g(\alpha)=0$ تكافئ $f(\alpha)-\alpha=0$. أي تكافئ $f(\alpha)=\alpha$.

إذن: يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$.

تمرين 22

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) ناقش ، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

الحل

1) f دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=3x^2+2x-1$.

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x^2+2x-1$ الذي يقبل جذرين متمايزين -1 و $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

فيكون جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{22}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(-1)=2$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

2) نتمعن جيدا في السطر الأخير من جدول التغيرات ، فنجد:

- إذا كان $m<\frac{22}{27}$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا .
- إذا كان $m=\frac{22}{27}$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين أحدهما $\frac{1}{3}$.
- إذا كان $\frac{22}{27}<m<2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة .
- إذا كان $m=2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين مختلفين احدهما -1 .
- إذا كان $m>2$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا.

تمرين 23

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$.

بين أن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α محصورة بين 0 و 1 .

الحل

إن فواصل نقاط تقاطع (C_f) و (C_g) ،إن وجدت ،هي حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

$f(x)=g(x)$ تكافئ $\frac{1}{x}=x^2-x+2$ أي $\frac{x^3-x^2+2x-1}{x}=0$ أي:

$x^3-x^2+2x-1=0$.

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x^3-x^2+2x-1$ ، ولنبين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ محصورا بين 0 و 1. باستخدام مبرهنة القيم المتوسطة.

h دالة كثير حدود تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $h'(x)=3x^2-2x+2$.

إشارة $h'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $3x^2-2x+2$ الذي لا يقبل جذورا في $\mathbb{R}$ (مميزه $\Delta=-20<0$).

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	+

فيكون جدول تغيرات f كما يلي :

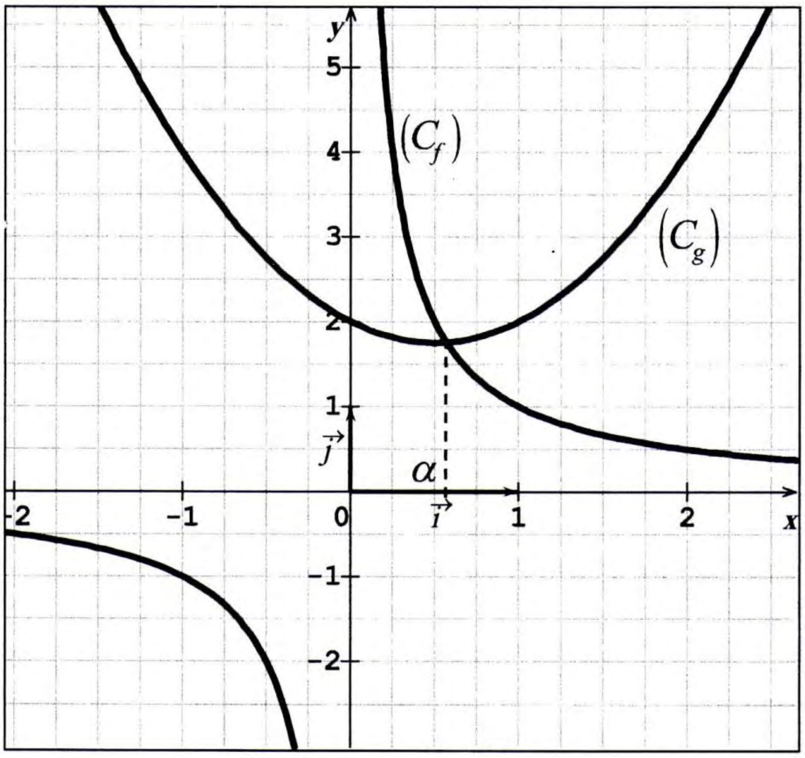
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	+
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

حيث: $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

بما أن h متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. لإثبات أن α محور بين 0 و 1 يكفي أن نتحقق من أن $h(0)\times h(1)<0$. لدينا بالفعل : $h(0)=-1<0$ و $h(1)=1>0$.

ومنه $h(0)\times h(1)<0$.

توضيح بياني:



المحور الثالث

الاشتقاقية

ما يجب أن يعرف

الإشتقاقية (تذكير)

1 . العدد المشتق – الدالة المشتقة :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى 0. تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ملاحظات :

1- بوضع $x=a+h$ الكتابة $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تكتب : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2- إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I وتسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

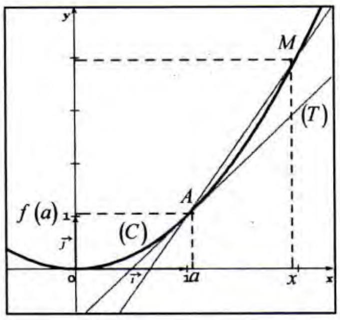
3- يمكن كتابة $f'(x)=\frac{df}{dx}$ وتسمى الكتابة التفاضلية لـ f' .

2 . مماس منحني دالة:

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن (C) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

ملاحظات:



1 . المماس (T) للمنحني (C) هو المستقيم **الوضع النهائي** للقاطع (AM) لما x يؤول إلى a ، حيث M نقطة متغيرة من (C) فاصلتها x .

2 . العدد المشتق $f'(a)$ هو **معامل توجيه** المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$.

3 . العدد المشتق من اليمين – العدد المشتق من اليسار :

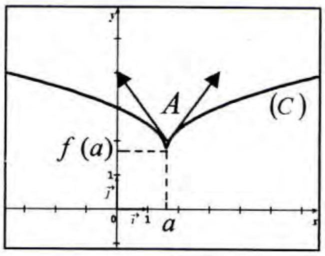
f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، و a عدد حقيقي من I .

تعريف01: نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a من اليمين إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى a بقيم أكبر .تسمى هذه النهاية العدد المشتق من اليمين للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f_d^{/}(a)$. لدينا: $f_d^{/}(a)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

تعريف02: نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a من اليسار إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية محدودة لما يؤول x إلى a بقيم أصغر .تسمى هذه النهاية العدد المشتق من اليسار للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f_g^{/}(a)$. لدينا: $f_g^{/}(a)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

نتائج: 1) تكون f قابلة للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا كان عددها المشتق من اليمين و عددها المشتق من اليسار عند a متساويان ، أي : $f_d^{/}(a)=f_g^{/}(a)=f'(a)$.

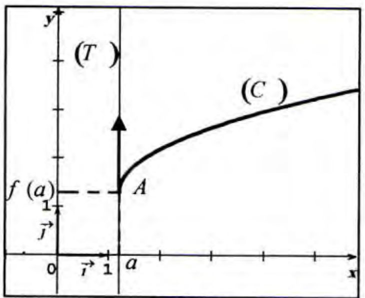
2) إذا كان $f_d^{/}(a)\neq f_g^{/}(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a .



التفسير البياني: التمثيل البياني للدالة f يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ نصف مماس من اليمين معامل توجيهه $f_d^{/}(a)$، و يقبل أيضا نصف مماس من اليسار معامل توجيهه $f_g^{/}(a)$.

تدعى النقطة $A(a;f(a))$ **نقطة زاوية** .

ملاحظة هامة:



إذا كانت نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لما يؤول x إلى a غير منتهية ، بمعنى :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$

أو $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

فإن المنحني (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x=a$.

4 . الإشتقاقية و الإستمرارية :

مبرهنة : إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال .

ملاحظة: عكس هذه المبرهنة ليس صحيحا في الحالة العامة .

المشتقات و العمليات – المشتقات المتتابعة

1. مشتقات دوال مألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$)	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال :

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

نتائج: - الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$ ، u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I .

الدالة $f: x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x) = a \times u'(ax+b)$

4 . المشتقات المتتابعة :

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة

$(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال :

f' ، f'' ، f''' ،...، $f^{(n)}$ ،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

ملاحظة :في الفيزياء (في علم الحركة) إذا كانت $f(t)$ تمثل المسافة المقطوعة من طرف متحرك ، يتحرك حركة مستقيمة ،من لحظة ابتدائية حتى اللحظة t فإن العددين $f'(t)$ و $f''(t)$ يمثلان على الترتيب السرعة اللحظية $v(t)$ و التسارع اللحظي $a(t)$ لهذا المتحرك في اللحظة t حيث: $v(t)=f'(t)=\frac{df}{dt}$ و $a(t)=f''(t)=\frac{d^2f}{dt^2}$.

اتجاه تغير دالة

1. المشتقة واتجاه التغير:

مبرهنة : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

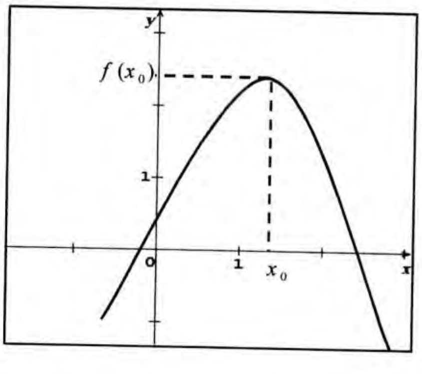
* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I .
* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I .
* إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I .

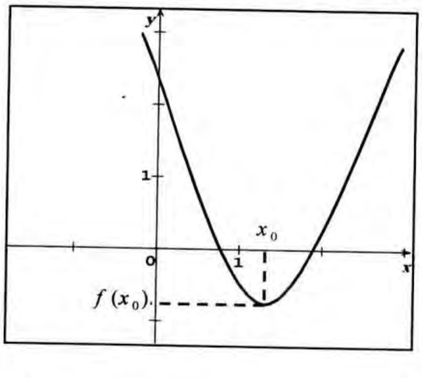
ملاحظة : إذا انعدمت f' عند عدد منته من القيم من المجال I ولا تغير إشارتها على I فإن الدالة f تحافظ على اتجاه تغيرها.

2. القيم الحدية المحلية:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x)\le f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f(x)\ge f(x_0)$.
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أوصغرى



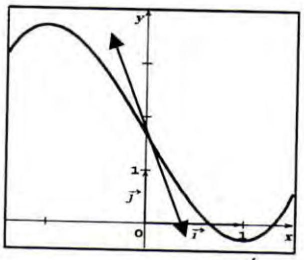


مبرهنة : f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .
إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ $f(x_0)$ ↘

x	x_0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↘ $f(x_0)$ ↗

ملاحظة: المماس لمنحني دالة عند **النقطة الحدية** (النقطة ذات الإحداثيين $(x_0;f(x_0))$) يكون موازيا لمحور الفواصل.



3. نقطة الإنعطاف:

تعريف: نقطة إنعطاف منحني دالة هي النقطة التي يخترق فيها المماس منحني الدالة .

مبرهنة : f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I . إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(x_0;f(x_0))$.

x	x_0
$f''(x)$	+ 0 -

أو

x	x_0
$f''(x)$	- 0 +

ملاحظة: إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 ولم تغير إشارتها بجوار x_0 فإن المنحني الممثل للدالة f يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $(x_0;f(x_0))$.

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 +

أو

x	x_0
$f'(x)$	- 0 -

اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة : $v o u$

مبرهنة : إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v o u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(v o u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]$$

2. نتـــائــج :

• **مشتقة الدالة** : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• **مشتقة الدالة** : $x \mapsto \left[u(x)\right]^n$ (n **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(u^n\right)' = n\,u'u^{n-1}$.

• **مشتقة الدالة** : $x \mapsto \dfrac{1}{\left[u(x)\right]^n}$ (n **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

التقريب التآلفي – طريقة أولر

1. التقريب التآلفي:

مبرهنة : f دالة معرفة على مجال مفتوح I. إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I لدينا:

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0 ، المرفق بالدالة f.

الكتابة التفاضلية:

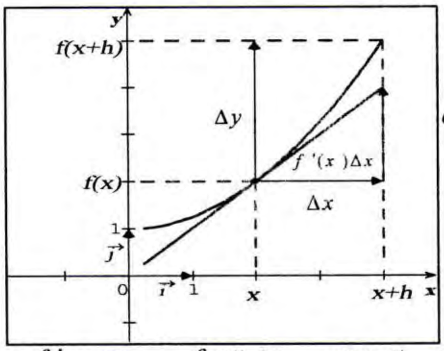
بوضع: $\Delta x = (x+h) - x$ و $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ تكتب المساواة $f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varepsilon(h)$ كما يلي: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$.

بذلك ،عندما يكون Δx بجوار 0 يكون $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ بخطأ مهمل بالنسبة للعدد Δx .

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ أو $dy = f'(x)dx$.

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية .

و بصفة عامة نكتب: $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من f' و $\dfrac{d^2f}{dx^2}$



بدلا من f'' وهكذا $\frac{d^n f}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

<u>نتيجة</u> :باستخدام مفهوم التقريبات يمكن استعمال الكتابة $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ للحصول على بعض القيم التقريبية لقيم يتعذر حسابها مباشرة أو لتقريب بعض الحلول للمعادلات التفاضلية .

2. <u>طريقة أولر</u>: طريقة أولر تسمح بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة بـ: f' و $y_0 = f(x_0)$. تعتمد هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$. ـ أنظر التمرين رقم 32 .

الدالة "ظل"

<u>تعريف</u>: الدالة "ظل" و التي نرمز إليها بالرمز "tan" معرفة بـ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k \in \mathbb{Z})$.

<u>خواص</u>: * من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2} + k\pi$:

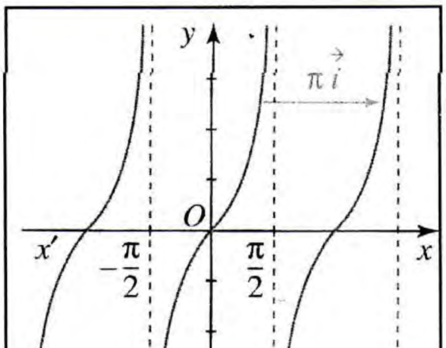
$\tan(x+\pi) = \tan x$ و $\tan(-x) = -\tan x$.

<u>دراسة الدالة "ظل"</u>: * من أجل كل عدد حقيقي x المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا: $(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$

• لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	+
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$



تمارين محلولة

تمرين 01

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-4$.

أثبت أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند العدد $a=3$ معينا عددها المشتق عنده.

الحل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(3+h)-3\right]\left[(3+h)+3\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند العدد 3 وعددها المشتق عند 3 هو 6. لدينا: $f'(3)=6$.

تمرين 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x^2$.

1) أثبت أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند كل عدد حقيقي a.

2) استنتج الدالة المشتقة للدالة f.

3) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C) منحني الدالة f في معلم عند النقطة ذات الفاصلة 1.

الحل

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)^2-3a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(a+h)^2-a^2\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(a+h)-a\right]\left[(a+h)+a\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h(h+2a)}{h}=\lim_{h\to 0}3(h+2a)=6a$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند كل عدد حقيقي a وعددها المشتق عند a هو $6a$.

لدينا: $f'(a)=6a$.

2) الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ أي الدالة $f':x\mapsto 6x$.

3) وجدنا أن الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x

$f'(x)=6x$. بالتالي معادلة (T) هي من الشكل: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

أي $y=6(x-1)+3$. إذن: $(T):y=6x-3$.

تمرين 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x|x-2|$.

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 2 .

2) فسر ، بيانيا، النتيجة المحصل عليها .

الحل

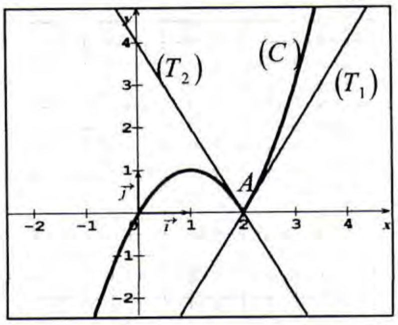
1) لدينا : $f(x)=\begin{cases} x(x-2) & ;x>2 \\ x(-x+2) & ;x<2 \\ f(2)=0 \end{cases}$. ومنه :

• $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} \dfrac{x(x-2)-0}{x-2}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} x=2$ ، ومنه f تقبل الإشتقاق عند 2 من اليمين وعددها المشتق من اليمين هو : $f_d^{/}(2)=2$.

• $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} \dfrac{x(-x+2)-0}{x-2}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} \dfrac{-x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}}(-x)=-2$ ،

ومنه f تقبل الإشتقاق عند 2 من اليسار وعددها المشتق من اليسار هو : $f_g^{/}(2)=-2$.

بما أن : $f_d^{/}(2)\neq f_g^{/}(2)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 2 .



2) التفسير البياني:

ـ التمثيل البياني للدالة f يقبل نصف مماس (T_1) من اليمين عند النقطة $A(2;0)$ معامل توجيهه $f_d^{/}(2)=2$ ، معادلته: $y=f_d^{/}(2)(x-2)+f(2)$ أي $(T_1): y=2x-4$ ، ويقبل نصف مماس (T_2) من اليسار عند النقطة $A(2;0)$ معامل توجيهه $f_g^{/}(2)=-2$ معادلته: $y=f_g^{/}(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $(T_2): y=-2x+4$.

ـ النقطة $A(2;0)$ نقطة زاوية .

تمرين 04

لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x-1}$.

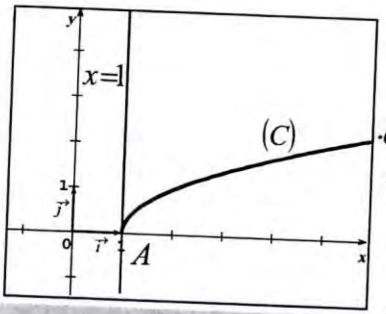
1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1.

2) فسر ، بيانيا، النتيجة المحصل عليها .

الحل

1) سندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 1 من اليمين ، لدينا :

$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{(x-1)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$$



$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين.

2) التمثيل البياني للدالة f يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=1$.

تمرين 05

في كل حالة ،أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة a، وفسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ، $a=1$. (من اليمين)

2) $f(x)=x^2-1+|x-2|$ ، $a=2$ . .

3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ ، $a=0$.

الحل

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ، $a=1$.

لدينامن أجل $x\neq 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{1^2-1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-x}\times\sqrt{x^2-x}}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\frac{x^2-x}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}=\frac{x(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$$

ومنه: $\lim_{\substack{> \\ x \to 1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{> \\ x \to 1}}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

إذ ن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1 من اليمين .

بيانيا :المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا عموديا عند النقطة ذات الإحداثيين $(1;0)$ ، معادلته $x=1$.

2) $f(x)=x^2-1+|x-2|$ ، $a=2$.

لدينا: $\begin{cases} |x-2|=x-2 & ;x\geq 2 \\ |x-2|=-x+2 & ;x\leq 2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} f(x)=x^2+x-3 & ;x\geq 2 \\ f(x)=x^2-x+1 & ;x\leq 2 \end{cases}$

لدينا من أجل $x>2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2+x-3-3}{x-2}=\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=x+3$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}}(x+3)=5$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 2 من اليمين و $f_d'(2)=5$.

و لدينا من أجل $x<2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x^2-x+1-3}{x-2}=\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$$

ومنه: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}}(x+1)=3$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 2 من اليسار و $f_g'(2)=5$.

نلاحظ أن $f_d'(2)\neq f_g'(2)$. إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2 .

بيانيا :المنحني الممثل للدالة f يقبل نصفي مماسين (T_1) ، (T_2) عند النقطة ذات الإحداثيين $(2;3)$ A التي هي نقطة زاوية .

معادلة (T_1) هي : $y=f_d'(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $y=5x-7$.

معادلة (T_2) هي : $y=f_g'(2)(x-2)+f(2)$ ، أي $y=3x-3$.

3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ ، $a=0$.

لدينا من أجل $x\neq 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ ، لأن $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و منه :

$-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ و لكون : $\lim\limits_{x\to 0}(-x)=\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ نجد حسب مبرهنة الحصر :

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ ، إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 0 ، و $f'(0)=0$.

بيانيا :المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا عند النقطة $O(0;0)$ معادلته:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي $y=0$.

تمرين 06

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1) إذا كان $f'(3)=1$ فإن : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=1$.

2) إذا كان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{4}$ فإن : $f'(2)=0$.

3) إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ نهاية عندما يؤول h إلى 0 فإن f تقبل الاشتقاق عند -3 .

4) f دالة معرفة من أجل كل $h\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ بـ : $f(1+h)=2+3h+4\sin h$.

أ • f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=3$.

ب • نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ عندما يؤول x إلى 1 هي 4 .

جـ • f ليست مستمرة عند 1 .

الحل

1) صحيح ، حسب تعريف الاشتقاق .

2) خطأ ، إذ أن : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=-\dfrac{1}{4}$ تعني : $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$.

3) خطأ ، يجب أن تكون نهاية النسبة $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ عدد حقيقي .

4)

أ • صحيح ، لأن: $f(1)=f(1+0)=2+3\times 0+4\sin 0=2$

و $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{2+3h+4h\sin h-2}{h}=3+4\sin h$

و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3+4\sin h)=3=f'(1)$

إذن f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1)=3$.

ب • خطأ ، لأن نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ عندما يؤول x إلى 1 هي 3 . (حسب أ .)

جـ • خطأ ، لأن f قابلة للاشتقاق عند 1 فهي مستمرة عند 1 .

تمرين 07

f دالة قابلة للاشتقاق عند -1 حيث $f'(-1)=2$

علما أن المنحني الممثل في معلم ، للدالة f ، يمر بالنقطة $A(-1;-3)$.

أكتب معادلة لمماس هذا المنحني عند النقطة A .

الحل

لدينا $f'(-1)=2$ فرضا و $f(-1)=-3$ لأن منحنى f يمر بالنقطة $A(-1;-3)$.

ومنه معادلة المماس عند A هي : $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$ ، بالتعويض نجد:

$y=2x-1$.

تمرين 08

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .

المستقيم (T) ذو المعادلة $y=2-3x$ ، هو المماس للمنحني (C) عند النقطة $A(0;2)$.

1) حدد $f(0)$ و $f'(0)$.

2) فسر هندسيا العدد $\dfrac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq 0$.

3) برر وجود $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}$.

الحل

1) لدينا: $f(0)=2$ لأن $A(0;2)$ نقطة من (C) و $f'(0)=-3$ لأن معامل توجيه المماس (T) هو -3 .

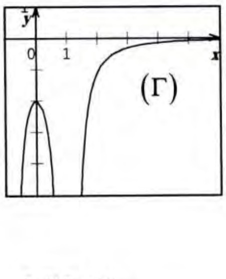
2) من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $\dfrac{f(x)-2}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

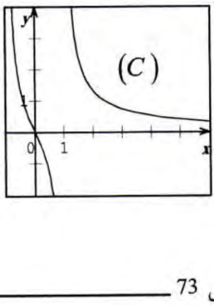
النسبة $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ هي معامل توجيه المستقيم (AM) حيث M نقطة كيفية من (C) فاصلتها $x\neq 0$.

3) لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-0}=f'(0)=-3$. لأن f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0)=-3$.

تمرين 09

الشكل المقابل يمثل المنحني (C) الممثل لدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$ و المنحني (Γ) الممثل لدالتها المشتقة f' .





1) ما هو معامل توجيه المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 ؟

2) أكتب معادلة لهذا المماس .

الحل

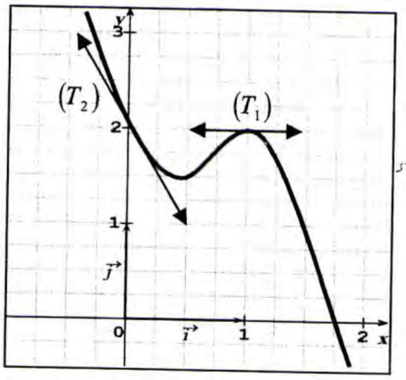
1) معامل توجيه المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هو $f'(0)$.

من المنحني (Γ) نقرأ : $f'(0) = -2$.

2) معادلة (Γ) هي : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$. حيث: من المنحني (C) نقرأ 0 $f(0) = 0$.

ومنه: $y = -2(x-0)+0$ ، أي $(T): y = -2x$.

تمرين 10



إليك التمثيل البياني لدالة f ، (T_1) و (T_2) مماسان له.

1) حدد القيم التالية : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$.

2) أكتب معادلة لكل من المماسين (T_1) و (T_2).

الحل

1) لدينا : $f(0) = 2$ ، $f(1) = 2$.

$f'(1) = 0$ لأن (T_1) يوازي محور الفواصل.

<u>تعيين</u> $f'(0)$:

$f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T_2) . نلاحظ أن (T_2) يمر من النقطتين ذات الإحداثيين

$(0;2)$ و $\left(\frac{1}{2};1\right)$. ومنه: $f'(0) = \dfrac{2-1}{0-\frac{1}{2}} = -2$ ، إذن $f'(0) = -2$.

2) معادلة (T_1) هي : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي $y = 2$.

معادلة (T_2) هي : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي $y = -2x+2$.

تمرين 11

عين مشتقة كل دالة من الدوال الآتية المعرفة على المجال $I =]0;+\infty[$.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$. 2) $g(x) = (x-1)\sin x$. 3) $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

الحل

1) الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود فهي تقبل الإشتقاق على I ولدينا:

. $f'(x) = 6x^2 - 2x + 4$

2) الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي تقبل الإشتقاق على I و لدينا:

. $g'(x) = (x-1)'\sin x + (x-1)(\sin x)' = \sin x + (x-1)\cos x$

2) الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن حاصل قسمة دالتين قابلتين للإشتقاق على I وبما أن المقام لا ينعدم على I فهي تقبل الإشتقاق على I ولدينا:

$$h'(x) = \frac{(x+1)'\sqrt{x} - (x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x-(x+1)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

تمرين 12

في كل حالة ،أكتب معادلة لمماس المنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها a .

1) $f(x) = -3x^3 + x - 4$ ، $a = 0$.

2) $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$ ، $a = -2$.

3) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{x-1}$ ، $a = 3$.

4) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ، $a = 1$.

5) $f(x) = x\cos x$ ، $a = \frac{\pi}{4}$.

الحل

1) $f(x) = -3x^3 + x - 4$ ، $a = 0$.

لدينا: $f(0) = -4$ ، و $f'(x) = -9x^2 + 1$ ومنه: $f'(0) = 1$. إذن معادلة المماس هي :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، أي $y = x - 4$.

2) $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$ ، $a = -2$.

لدينا: $f(-2) = 11$ ، و $f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$ ومنه: $f'(-2) = 7$. إذن معادلة المماس هي :

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$ ، أي $y = 7x + 25$.

3) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{x-1}$ ، $a = 3$.

لدينا: $f(3) = 3$ ، و $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x-1)^2}$ ومنه: $f'(3) = \frac{3}{4}$. إذن معادلة المماس هي :

$y = f'(3)(x-3)+f(3)$ ، أي $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

4) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ، $a = 1$.

لدينا: $f(1) = 1$ ، و $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$ ومنه: $f'(1) = \frac{5}{2}$. إذن معادلة المماس هي

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي $y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$.

5) $f(x) = x\cos x$ ، $a = \frac{\pi}{2}$.

لدينا: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ، و $f'(x) = \cos x - x\sin x$ ومنه: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$. إذن معادلة

المماس هي: $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ، أي $y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}$.

تمرين 13

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني (C) الممثل للدالة

f والمماس (T) عند النقطة A التي فاصلتها 0 .

(C)

1) عين معادلة للمماس (T).

2) خمن على الشاشة وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

$T)$

3) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) - (3x+3) = x^2(x+3)$

4) أدرس إشارة $f(x) - (3x+3)$ ثم استنتج وضعية (C) بالنسبة لـ (T).

الحل

1) المماس (T) يمر من النقطتين $A(0;3)$ ، $B(-1;0)$ حيث A هي نقطة التماس.

إذن معادلة المماس (T) هي: $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

حيث: $f(0) = 3$ ، و $f'(0) = \frac{3-0}{0-(-1)} = 3$. ومنه: $(T): y = 3x + 3$

2) يظهر أن (C) يقع فوق (T) على الشاشة.

3) من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x) - (3x+3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3 - (3x+3) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$$

4) إشارة $f(x) - (3x+3)$ هي من إشارة $x^2(x+3)$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2(x+3)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

إذن: - (T) يقطع (C) في نقطة فاصلتها -3 و يمسه في النقطة A .

- (C) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;-3[$.

- (C) يقع فوق (T) على المجال $]-3;+\infty[$.

تمرين 14

أحسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى D في كل حالة :

1) $f(x)=2x^2-5x+3$ ، $D=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{-3x^3+2x+1}{3}$ ، $D=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{x}$ ، $D=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$ ، $D=]0;+\infty[$.

5) $f(x)=x(x^2+2)-1$ ، $D=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=(x+1)(x^3-1)$ ، $D=\mathbb{R}$.

7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\left(1+\sqrt{x}\right)$ ، $D=]1;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$ ، $D=]-\infty;2[$

9) $f(x)=\dfrac{-3x^2+x-2}{x^2+1}$ ، $D=\mathbb{R}$

10) $f(x)=2x-\dfrac{1}{1-x}$ ، $D=]1;+\infty[$

11) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}-\sqrt{x}$ ، $D=]1;+\infty[$

الحل

1) $f'(x)=4x-5$.

2) $f(x)=-x^3+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ ، ومنه: $f'(x)=-3x^2+\dfrac{2}{3}$.

3) $f'(x)=2x^3-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=2x^3+\dfrac{1}{x^2}$.

4) $f'(x)=2x-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) $f'(x)=1\times(x^2+2)+x\times 2x-0=3x^2+2$. (يمكن تبسيط $f(x)$ بالنشر ثم حساب $f'(x)$)

6) $f'(x)=1\times(x^3-1)+(x+1)(3x^2-1)=4x^3-3x^2-x-2$.

(يمكن تبسيط $f(x)$ بالنشر ثم حساب $f'(x)$)

7) $f'(x)=\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)+\left(\frac{1}{x-1}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-(1+\sqrt{x})}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}$.

8) $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-1\times(x^2+x+1)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

9) $f'(x)=\frac{-3x^2+x-2}{x^2+1}=\frac{(-6x+1)(x^2+1)-2x(-3x^2+x-2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

10) $f'(x)=2-\left(-\frac{-1}{(1-x)^2}\right)=2-\frac{1}{(1-x)^2}$

11) $f'(x)=\frac{-2}{x^2}-\left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>تنبيه</u>: تبسيط بعض العبارات السابقة متروك لك ...

تمرين 15

في كل من الحالات التالية أدرس اتجاه تغير الدالة f.

1) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$.

2) $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$.

3) $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$.

4) $f(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$.

5) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$.

الحل

1) $f(x)=x^3+x^2+5x+2$. $D_f=\mathbb{R}$

f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=3x^2+2x+5$

مميز كثير الحدود $3x^2+2x+5$ هو $\Delta=-56<0$ ومعامل x^2 هو $3>0$ بالتالي $f'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ، إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$. $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]-1;+\infty[$ و لدينا:

$f'(x)=\dfrac{2\times1-3\times1}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{(x+1)^2}<0$ ، إذن f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ ، $]-1;+\infty[$.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$. $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;1[$ ، $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(1)(x^2-2x+5)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة x^2-2x-3 الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
x^2-2x-3	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad \Vert \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

إذن f متناقصة تماما على كل من المجالين $[-1;1[$ ، $]1;3]$ ومتزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ ، $[3;+\infty[$.

4) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$. $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}=]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$

لأن f معرفة معناه $x^2+2x-3\neq0$. كثير الحدود x^2+2x-3 يقبل جذرين متمايزين هما -3 و 1.

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالات $]-\infty;-3[$ ، $]-3;1[$ ، $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x-3)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $-2x^2-4x-10$ الذي مميزه $\Delta=-64<0$.

بما أن معامل x^2 هو $-2<0$ فإن $-2x^2-4x-10<0$ على D_f . إذن f متناقصة على كل من المجالات $]-\infty;-3[$ ، $]-3;1[$ ، $]1;+\infty[$.

5) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$. $D_f=[0;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2\sqrt{x}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2x-1$ على $]0;+\infty[$ ، كما هو في الجدول :

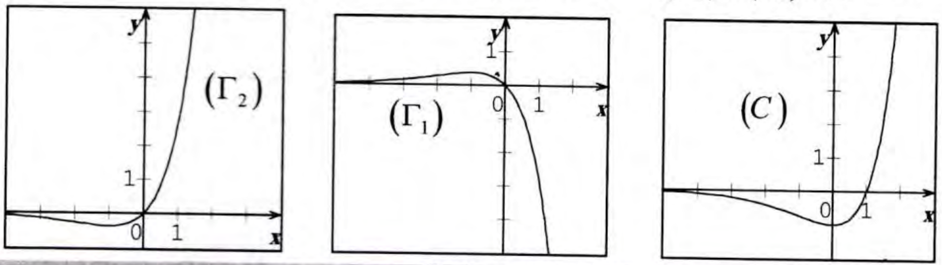
x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2x-1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

إذن f متناقصة تماما على $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

تمرين 16

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث (C) هو تمثيلها البياني أدناه .

أحد المنحنيين (Γ_1) و (Γ_2) أدناه هو المنحني الممثل للدالة f' ، ما هو؟ برر.



الحل

من المنحني (C) نلاحظ أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.إذن $f'(x)\le 0$ على المجال $]-\infty;0]$ و $f'(x)\ge 0$ على المجال $[0;+\infty[$.

ومنه (Γ_2) هو المنحني الممثل للدالة f' .

تمرين 17

لتكن f الدالة المعرفة بـ: $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

عين مجال قابلية اشتقاق الدالة f ثم عين دالتها المشتقة .

الحل

f معرفة معناه $2x-1\ge 0$ ، أي $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. نلاحظ أن $f(x)=u(2x-1)$ ، حيث:

$u(x)=\sqrt{x}$ مع $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال المفتوح $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و

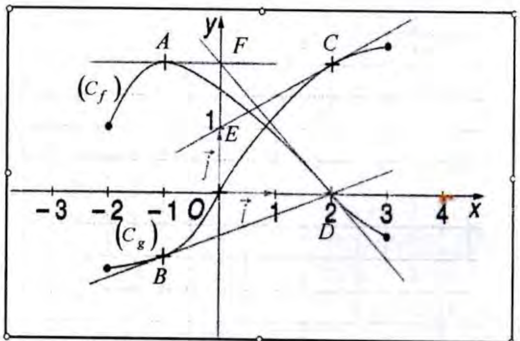
لدينا: $f'(x)=2\times u'(2x-1)=2\times\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

تمرين 18

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g

معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما في النقاط

المبينة في الشكل المقابل.



1) أحسب الأعداد المشتقة التالية:

* $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$
* $(g)'(2)$ * $(f+g)'(-1)$
* $(fg)'(2)$ * $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

2) من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$. أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

الحل

1) * $(f)'(-1)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C_f) عند النقطة A وبما أنه يوازي محور الفواصل فإن معامل توجيهه يكون معدوما. إذن $(f)'(-1)=0$.

* $(g)'(-1)$ هو معامل توجيه المماس (BD) لـ (C_g) عند النقطة B وبما أن $B(-1;-1)$ و $D(2;0)$ فإن: $(g)'(-1)=\dfrac{-1-0}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$. إذن $(g)'(-1)=\dfrac{1}{3}$.

* $(f)'(2)$ هو معامل توجيه المماس (DF) لـ (C_f) عند النقطة D وبما أن $D(2;0)$ و $F(0;2)$ فإن: $(f)'(2)=\dfrac{0-2}{2-0}=-1$. إذن $(f)'(2)=-1$.

* $(g)'(2)$ هو معامل توجيه المماس (CE) لـ (C_g) عند النقطة C وبما أن $C(2;2)$ و $E(0;1)$ فإن: $(g)'(2)=\dfrac{2-1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$. إذن $(g)'(2)=\dfrac{1}{2}$.

* $(f+g)'(-1)=(f)'(-1)+(g)'(-1)=0+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$. إذن $(f+g)'(-1)=\dfrac{1}{3}$.

* $(fg)'(2)=(f)'(2)\times(g)(2)+(f)(2)\times(g)'(2)=(-1)\times 2+0\times\dfrac{1}{2}=-2$

* $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(-1)=-\dfrac{(f)'(-1)}{(f)^2(-1)}=\dfrac{0}{2^2}=0$.

* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)=\dfrac{(f)'(2)\times(g)(2)-(f)(2)\times(g)'(2)}{(g)^2(2)}=\dfrac{(-1)\times 2-0\times\dfrac{1}{2}}{2^2}=-\dfrac{1}{2}$

2) من أجل كل x من المجال $[0;2]$ لدينا: $h'(x)=2f'(2x-1)$.

ومنه: $h'(0)=2f'(2\times 0-1)=2f'(-1)=2\times 0=0$. إذن: $h'(0)=0$

و $h'\left(\frac{3}{2}\right)=2f'\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)=2f'(2)=2\times(-1)=-2$. إذن: $h'\left(\frac{3}{2}\right)=-2$

تمرين 19

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sin x$.

1) عين الدوال المشتقة المتتابعة f' ، f'' ، f''' و $f^{(4)}$ للدالة f.

2) ضع ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، تخمينا حول عبارة $f^{(n)}(x)$.

الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$f'(x)=\cos x$ ، $f''(x)=-\sin x$ ، $f'''(x)=-\cos x$ و $f^{(4)}(x)=\sin x$.

2) __التخمين__: من أجل كل عدد طبيعي k :

- إذا كان $n=2k+1$ فإن: $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$.
- إذا كان $n=2k+2$ فإن: $f^{(2k+2)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$.

تمرين 20

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) أدرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج القيم الحدية للدالة f على الجدول.

الحل

1) الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

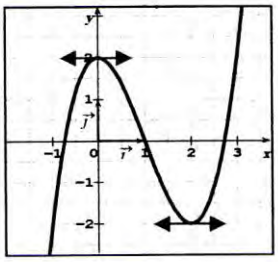
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ ، $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و 2 و

بالتالي فإشارته هي كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

ويكون جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$



حيث: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $f(0)=2$ ، $f(2)=-2$.

2) • $f(0)=2$ هي قيمة حدية محلية عظمى للدالة f مثلا على المجال $[-1;1]$.
($0\in[-1;1]$).

• $f(2)=-2$ هي قيمة حدية محلية صغرى للدالة f مثلا على المجال $[1;3]$. ($2\in[1;3]$).

تمرين 21

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x^2+2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

-بين أن المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

الحل

الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين ولدينا: $f'(x)=3x^2-6x$.

و $f''(x)=6x-6=6(x-1)$.

إشارة $f''(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أن $f''(x)$ ينعدم عند 1 ويغير من إشارته بجوار 1 ، إذن النقطة $A(1;f(1))$ أي $A(1;0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C).

تمرين 22

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3$ و (C) تمثيلها البياني في معلم.

-بين أن المنحني (C) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياها.

الحل

الدالة f دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=3x^2$.

إشارة $f'(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

نلاحظ أن $f'(x)$ ينعدم عند 0 ولا يغير من إشارته بجوار 0 ، إذن النقطة ذات الإحداثيين $(0;f(0))$ أي $O(0;0)$ مبدأ المعلم هي نقطة إنعطاف للمنحني (C).

تمرين 23

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

الحل

نلاحظ أن $f=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-9$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن f قابلة للاشتقاق على $]3;+\infty[$ ولدينا $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

ومنه من أجل كل x من $]3;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

تمرين 24

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)^3$.

الحل 25

نلاحظ أن $f=u^3$ مع $u(x)=x^2-2x+1$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $u'(x)=2x-2$. إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'=3u'u^2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=3(2x-2)\left(x^2-2x+1\right)^2$.

تمرين 26

عين مشتقة الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}$.

الحل

نلاحظ أن $f=\dfrac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا $u'(x)=2x$. إذن f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $f'=-\dfrac{3u'}{u^4}$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\dfrac{3(2x)}{\left(x^2-1\right)^4}=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^4}$.

تمرين 27

أحسب الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى I في كل حالة :

1) $f(x)=\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^3$ و $I=]1;+\infty[$.

2) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ و $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\sin\left(1-x^2\right)$ و $I=\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^3$ و $I=\mathbb{R}$.

5) $f(\theta)=\sqrt{\cos\theta}$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

6) $f(t)=\tan^3 t$ و $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

الحل

1) $f'(x)=3\times\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)'\times\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2=3\times\dfrac{1}{(x-1)^2}\times\dfrac{x^2-4x+4}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-12x+12}{(x-1)^4}$

2) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+3\right)'}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

3) $f'(x)=\left(1-x^2\right)'\sin'\left(1-x^2\right)=\left(-2x\right)\cos x\left(1-x^2\right)$

4) $f'(x)=3\times\left(x^2+2x-3\right)'\times\left(x^2+2x-3\right)^2=3\left(2x+2\right)\left(x^2+2x-3\right)^2$

5) $f'(\theta)=\left(\cos\theta\right)'\times\dfrac{1}{2\sqrt{\cos\theta}}=\dfrac{-sin\theta}{2\sqrt{\cos\theta}}$

6) $f'(t)=3\times\tan' t\times\tan^2 t=3\times\dfrac{1}{\cos^2 t}\times\tan^2 t=\dfrac{3\tan^2 t}{\cos^2 t}$

تمرين 28

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-2}$.

1) شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) استنتج جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ بـ: $g(x)=f(x^2)$.

الحل

1) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{x-2}=2$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to2}}\dfrac{2x+2}{x-2}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$

و $f'(x)=\dfrac{-6}{(x-2)^2}<0$ ، إذن f متناقصة تماما على $]2;+\infty[$ ، جدول تغيرات f هو:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2

لدينا: $g(x)=f(x^2)$ ، ومنه:

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}f(X)=2$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$.
- بما أن $\lim\limits_{\substack{>\\x\to\sqrt{2}}}x^2=2$ و $\lim\limits_{\substack{>\\X\to2}}f(X)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{>\\x\to\sqrt{2}}}g(x)=+\infty$.
- ولدينا: $g'(x)=\left(x^2\right)'f'(x^2)=\left(2x\right)\times\left(\dfrac{-6}{\left(x^2-2\right)^2}\right)=\dfrac{-12x}{\left(x^2-2\right)^2}$

على المجال $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$: $\dfrac{-12x}{\left(x^2-2\right)^2}<0$ ، ومنه $g'(x)<0$ ، إذن g متناقصة تماما

على $\left]\sqrt{2};+\infty\right[$ ، جدول تغيرات g هو:

x	$\sqrt{2}$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$+\infty \searrow 2$

تمرين 29

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على المجال $[-2;3]$

x	-2		1		3
$u'(x)$		$+$		$+$	
$u(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4

1) عين إشارة $u(x)$.

2) نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة كما يلي : $f=u^2$ ؛ $g=\dfrac{1}{u}$ ؛ $h=\sqrt{u}$

أ- عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال f، g و h.

ب- عبّر عن كل من $f'(x)$ ، $g'(x)$ و $h'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

جـ- استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f، g و h.

الحل

1) من جدول التغيرات نجد هكذا :

x	-2		1		3
$u(x)$		-	0	$+$	

2) أ • $f=u^2$: الدالة f معرفة على المجال $[-2;3]$.

• $g=\dfrac{1}{u}$: الدالة g معرفة معناه : $u(x)\neq 0$ على المجال $[-2;3]$ ، إذن :

g معرفة على $[-2;1[\cup]1;3]$.

• $h=\sqrt{u}$: الدالة h معرفة معناه : $u(x)\geq 0$ على المجال $[-2;3]$ ، إذن :

h معرفة على $[1;3]$.

ب • $f=u^2$ ومنه : $f'=2u'u$ ، إذن من أجل كل x من $[-2;3]$:

$f'(x)=2u'(x)u(x)$.

• $g=\dfrac{1}{u}$ ومنه: $g'=\dfrac{-u'}{u^2}$ ، إذن من أجل كل x من $[-2;1[\cup]1;3]$: $g'(x)=\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$

• $h=\sqrt{u}$ ومنه: $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، إذن من أجل كل x من $]1;3]$: $h'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

جـ- **جدول تغيرات** f :

x	-2		1		3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	16

التبرير :

$f(-2)=u^2(-2)=(-1)^2=1$. $f(1)=u^2(1)=(0)^2=0$.

$f(3)=u^2(3)=(4)^2=16$

$f'(x)=2u'(x)u(x)$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $u(x)$ لأن $u'(x)\geq 0$.

جدول تغيرات g :

x	-2		1		3
$g'(x)$		-	‖	-	
$g(x)$	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\dfrac{1}{4}$

التبرير :

$g(-2)=\dfrac{1}{u(-2)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ ، $g(3)=\dfrac{1}{u(3)}=\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} u(x)=0^-$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} u(x)=0^+$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x)=+\infty$.

$g'(x)=\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $u'(x)$ على كل من المجالين $[-2;1[$ ، $]1;3]$.

جدول تغيرات h :

x	$1 \qquad\qquad\qquad 3$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$0 \nearrow 2$

التبرير :

$h(1)=\sqrt{u(1)}=\sqrt{0}=0$. $h(3)=\sqrt{u(3)}=\sqrt{4}=2$.

$h'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفسها إشارة $u'(x)$ على المجال $]1;3[$.

تمرين 30

باستخدام مفهوم التقريبات ، عين قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{100,2}$.

الحل

نعتبر الدالة f "الدالة الجذر التربيعي" (يمكن اختيار دالة أخرى) المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\sqrt{x}$. الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

من أجل $h>0$ وقريب من 0 نجد : $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$ أي :

$\sqrt{x+h}\approx\sqrt{x}+\dfrac{h}{2\sqrt{x}}$. بوضع $x=100$ و $h=0,2$ في العلاقة الأخيرة نحصل على :

$$\sqrt{100,2}=\sqrt{100+0,2}\approx\sqrt{100}+\frac{0,2}{2\sqrt{100}}=10+\frac{0,2}{2\times10}=10+0,01=10,01$$

إذن: $\sqrt{100,2}\approx 10,01$

ملاحظة : تعطي الآلة الحاسبة النتيجة 10,009995004

تمرين 31

1) برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

أ) $(3+h)^4\approx 81+108h$. ب) $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{h}{2}$. جـ) $\dfrac{1}{1+h}\approx 1-h$. د) $\sinh\approx h$.

2) استنتج قيمة مقربة لكل من الأعداد: $(3,012)^4$ ، $\sqrt{3,948}$ ، $\dfrac{1}{1,977}$.

الحل

أ – الدالة $f: x\mapsto x^4$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=4x^3$

إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $f(3+h) \approx f(3) + f'(3) \times h$

ومنه: $(3+h)^4 \approx 81 + 108h$.

ب- الدالة $g : x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $g(1+h) \approx g(1) + g'(1) \times h$

ومنه: $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.

جـ- الدالة $k : x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ولدينا

$k'(x) = -\frac{1}{x^2}$. إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $k(1+h) \approx k(1) + k'(1) \times h$

ومنه: $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

د- الدالة $\varphi : x \mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $\varphi'(x) = \cos x$. إذن من أجل h قريب من 0 يكون لدينا : $\varphi(0+h) \approx \varphi(0) + \varphi'(0) \times h$ ومنه: $\sin h \approx h$.

2) باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع أ- نجد :

$$(3,012)^4 \approx (3+0,012)^4 \approx 81 + 108 \times 0,012 \approx 82,296$$

باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع ب- نجد :

$$\sqrt{3,948} = \sqrt{3+0,948} \approx 1 + \frac{0,948}{2} \approx 1,4740$$

باستعمال نتيجة السؤال 1 الفرع جـ- نجد :

$$\frac{1}{1,977} = \frac{1}{1+0,977} \approx 1 - 0,977 \approx 0,0230$$

تمرين 32

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;1[$ ، بحيث: $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$.

باستعمال طريقة أولر، و بخطوة قدرها 0,2 . أنشئ تمثيلا بيانيا تقريبيا لـ (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$.

الحل

باستعمال العلاقة $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$ ، نشكل جدولا يتضمن القيم التقريبية للدالة f المجال $[0;1]$ مبتدئين في الإنطلاقة من كون $f(0) = 1$ و بخطوة h قدرها 0,2 . هذه الخطوة تسمح بتقسيم المجال $[0;1]$ إلى خمس مجالات متساوية الطول، طول كل مجال 0,2 .

نجد هكذا :

$f\ (0,2) \approx f\ (0) + 0,2 \times f\ '(0) \approx 1,20$

$f\ (0,4) \approx f\ (0,2) + 0,2 \times f\ '(0,2) \approx 1,40$

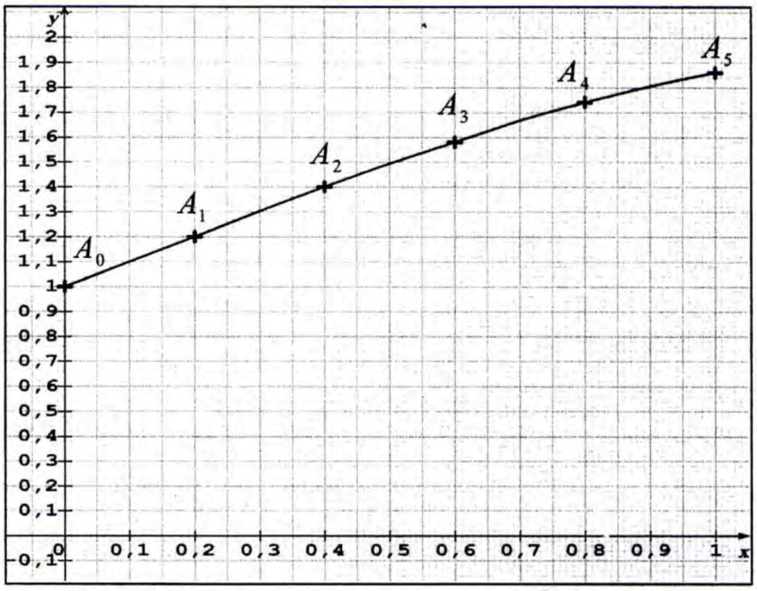
$f\ (0,6) \approx f\ (0,4) + 0,2 \times f\ '(0,4) \approx 1,58$

$f\ (0,8) \approx f\ (0,6) + 0,2 \times f\ '(0,6) \approx 1,74$

$f\ (1) \approx f\ (0,8) + 0,2 \times f\ '(0,8) \approx 1,86$

x	$f\ (x)$
0	1
0,2	1,20
0,4	1,40
0,6	1,58
0,8	1,74
1	1,86

نصل بين النقاط : $A_0(0;1)$ ، $A_1(0,2;1,20)$ ، $A_2(0,4;1,40)$ ، $A_3(0,6;1,58)$ ، $A_4(0,8;1,74)$ ، $A_5(1;1,86)$. نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$.



تمرين 33

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث يعطى جدول تغيراتها .

x	0		1		$+\infty$
$f\ '(x)$		$+$	0	$-$	
$f\ (x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

ميز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة مبرزا ذلك.

1) من أجل كل $x \in]0;1]$ ، $f(x) \leq 1$.

2) المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مماس لمنحني الدالة f.

3) إذا كان $a \geq 1$ ، فإن $f(a) \geq 1$.

4) يكون مماس منحني الدالة f عند نقطته ذات الفاصلة 1 موازيا لحامل محور الفواصل .

الحل

1) **صحيح** ، لأن الدالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ وبالتالي إذا كان $x \in]0;1]$ ، فإن $x \leq 1$ ومنه $f(x) \leq f(1)$ ، لكن $f(1) = 1$ إذن : $f(x) \leq 1$.

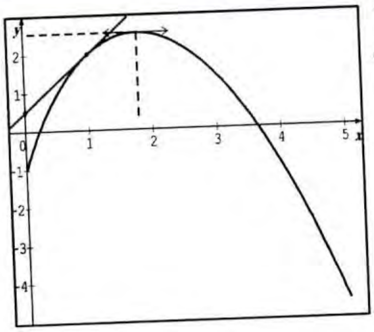
2) **خطأ** ، المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب لمنحني الدالة f بجوار $-\infty$.

3) **خطأ** ، لأن الدالة f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ وبالتالي إذا كان $a \in [1;+\infty[$ ، فإن $a \geq 1$ ومنه $f(a) \leq f(1)$ ، لكن $f(1) = 1$ إذن : $f(a) \leq 1$.

4) **صحيح** ،لأن $f'(x)$ ينعدم عند 1 و يغير من إشارته بجوار 1 .

تمرين 34

الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;5]$ ،المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$.



1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2) حل بيانيا في المجال $[0;5]$ المتراجحات التالية :

(القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-2})

أ) $f(x) \geq 0$ ، ب) $f'(x) \geq 0$ ، ج) $f(x) \geq 1$.

3) نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5]$: $f(x) = a + bx\left(2 - \sqrt{x}\right)$

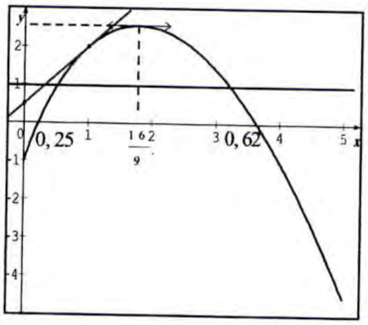
a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما.

أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;5]$ ، $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عين a و b .

الحل

1) بقراءة بيانية نجد $f(1) = 2$ و $f'(1)$ هو معامل توجيه المستقيم المار من النقطتين ذواتا الإحداثيين $(1;2)$ و $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. ومنه : $f'(1) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{3}{2}$ ، إذن : $f'(1) = \frac{3}{2}$.



2) بيانيا في المجال $]0;5[$:

- $f(x) \geq 0$ إذا كان $x \in [0,25;0,62]$.
- $f'(x) \geq 0$ إذا كان $x \in \left]0;\frac{16}{9}\right]$.
- $f(x) \geq 1$ إذا كان $x \in [0,5;3,25]$.

أ ـ 3) من أجل كل x من $]0;5[$:

$$f'(x) = b\left(2-\sqrt{x}\right) - bx\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{bx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}}.$$

$$= b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{bx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = b\left(2-\sqrt{x}\right) - \frac{b\sqrt{x}}{2} = b\left(2-\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

إذن : $f'(x) = b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$.

ب ـ لدينا: $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{3}{2}$ ومنه : $\begin{cases} a+b=2 \\ \frac{b}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$.

إذن: $f(x) = -1+3x\left(2-\sqrt{x}\right)$.

تمرين 35

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 .

2) ـ بين أنه من أجل كل $x \neq -2$ يمكن كتابة : $f(x) = ax+b+\frac{c}{2x+4}$ ، حيث a ، b ، c ثلاثة أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

ـ استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

ـ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

5) أرسم (C) و المستقيمات المقاربة .

الحل

1) لدينا: $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. بنفس الكيفية نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لحساب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام $2x+4$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	-	0	+

ومنه: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=\frac{8}{0^-}=-\infty$. إذن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x)=-\infty$.

و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}}\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}=\frac{8}{0^+}=+\infty$. إذن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x)=+\infty$.

2)- لدينا من أجل كل $x\neq-2$:

$$ax+b+\frac{c}{2x+4}=\frac{(ax+b)(2x+4)}{(2x+4)}+\frac{c}{2x+4}=\frac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}\text{ ،}$$

ومنه: $f(x)=\frac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}$ تعني:

$\frac{2ax^2+(4a+2b)x+4b+c}{2x+4}=\frac{2x^2+5x+10}{2x+4}$ أي :

$2ax^2+(4a+2b)x+4b+c=2x^2+5x+10$ ، بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}2a=2\\4a+2b=5\\4b+c=10\end{cases}\text{ ومنه: }\begin{cases}a=1\\4\times1+2b=5\\4b+c=10\end{cases}\text{ ومنه: }\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\\4\times\frac{1}{2}+c=10\end{cases}\text{ ومنه: }\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\\c=8\end{cases}$$

لدينا إذن: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{8}{2x+4}$. أي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{4}{x+2}$.

-لدينا: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{4}{x+2}$ ، ومنه: $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{x+2}$. بما أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x+2}=0$. نستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلة له: $y=x+\dfrac{1}{2}$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

- لدراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ أي إشارة $\dfrac{4}{x+2}$

• إذا كان $x<-2$ فإن $x+2<0$ ومنه $\dfrac{4}{x+2}<0$. بالتالي (C) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty;-2[$.

• إذا كان $x>-2$ فإن $x+2>0$ ومنه $\dfrac{4}{x+2}>0$. بالتالي (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]-2;+\infty[$.

3) الدالة f تقبل الإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^2+5x+10\right)'(2x+4)-(2x+4)'\left(2x^2+5x+10\right)}{(2x+4)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

إذن: $f'(x)=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$. إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $x(x+4)$ المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$x(x+4)$		+	0	-	‖	-	0	+	

بالتالي: الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-4]$ ، $[0;+\infty[$. ومتناقصة تماما على كل من المجالين $[-4;-2[$ ، $]-2;0]$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-4)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

حيث: $f(0)=\dfrac{5}{2}=2,5$ و $f(-4)=-\dfrac{11}{2}=-5,5$.

4) إثبات أن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C):

تذكير:

f دالة مجموعة تعريفها D. و (C) تمثيلها البياني في معلم.

لإثبات أن النقطة $A(a;b)$ هي مركز تناظر لـ (C) يمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

* لكل x من D يكون $2a-x$ من D و: $f(2a-x)+f(x)=2b$.
* لكل x من D يكون $a-x$ و $a+x$ من D و: $f(a-x)+f(a+x)=2b$.
* نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع: $\begin{cases} x=X+a \\ y=Y+b \end{cases}$.

تصبح $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X+a)-b$. هذه الأخيرة تعرف دالة g.

نبرهن أن g دالة فردية.

نستعمل هنا الطريقة الأولى:

لكل x من D_f يكون $2(-2)-x$ من D_f و:

$$f(2(-2)-x)+f(x)=f(-4-x)+f(x)=\left(-4-x+\frac{1}{2}+\frac{4}{-4-x+2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}+\frac{4}{x+2}\right)$$

$$=-3-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{x+2}=-3=2\left(\frac{-3}{2}\right)$$

إذن النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

5) **الرسم**:

المستقيمات المقاربة:

* $(\Delta): y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.
* $(d): x=-2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$. لأن: $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x)=+\infty$

النقاط الحدية:

من جدول التغيرات النقطتان $A_1(-4;-5,5)$ ، $A_2(0;2,5)$ نقطتان حديتان في المنحني (C)،

المماسان لـ (C) عندهما موازيين لمحور الفواصل.

عناصر تناظر المنحني (C):

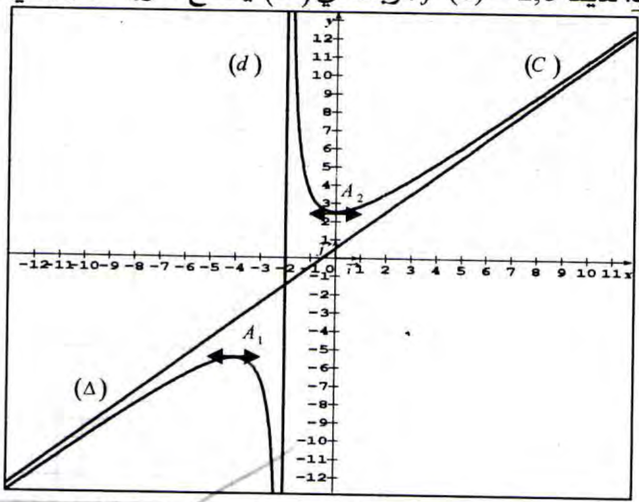
النقطة $\Omega\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

* مع محور الفواصل: من جدول التغيرات نلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلولا ، وبالتالي

(C) لا يقطع محور الفواصل .

• مع محور التراتيب: لدينا $f(0)=2,5$ ، وبالتالي (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $A_2(0;2,5)$.



تمرين 36

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}$.

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ- برز أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$ ، هو مقارب مائل للمنحني (C) . أدرس الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة لمستقيمه المقارب المائل .

ب- أرسم (d) ثم (C) .

3) أ- باستعمال (C) ، عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^2+(1-m)x+2m=0$.

4) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $g(x)=\left|\dfrac{x(x+1)}{x-2}\right|$.

أ- أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x .

ب- أرسم (γ) منحنى الدالة g اعتمادا على (C) .

5) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$.

أ- بين أن h دالة زوجية.

ب – أرسم (Γ) منحنى الدالة h اعتمادا على (C) .

الحل

1) **دراسة تغيرات الدالة** f :

* **مجموعة التعريف:** $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

* **النهايات:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

لحساب النهايتين $\lim_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x)$ ، $\lim_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x)$ نستعين بإشارة المقام $(x-2)$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		-	0	+	

ومنه:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 2}} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{6}{0^+} = +\infty \text{ و } \lim_{\substack{< \\ x \to 2}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 2}} \frac{x(x+1)}{x-2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

نستنتج عندئذ ، أن المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

* **اتجاه التغير:**

الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; 2[$ ، $]2; +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - x(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$$

إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود $x^2 - 4x - 2$ الذي يقبل جذرين متمايزين هما $2+\sqrt{6}$ و $2-\sqrt{6}$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-4x-2		+	0	-	0	+	

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$5-2\sqrt{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$5+2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

حيث: $f(2-\sqrt{6})=5-2\sqrt{6}$ و $f(2+\sqrt{6})=5+2\sqrt{6}$

2) أ-اثبات أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$، هو مقارب مائل للمنحني (C) .

لدينا: $f(x)-(x+3)=\dfrac{x(x+1)}{x-2}-(x+3)=\dfrac{6}{x-2}$. ولدينا:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x-2}=0$

إذن: المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$، هو مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (d) ، ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+3)$ أي $\dfrac{6}{x-2}$

الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(x+3)$	-	‖	+

- إذا كان $x<2$ فإن (C) يقع تحت (d).
- إذا كان $x>2$ فإن (C) يقع فوق (d).

ب-رسم (d)

x	0	1
y	3	4

-رسم (C)

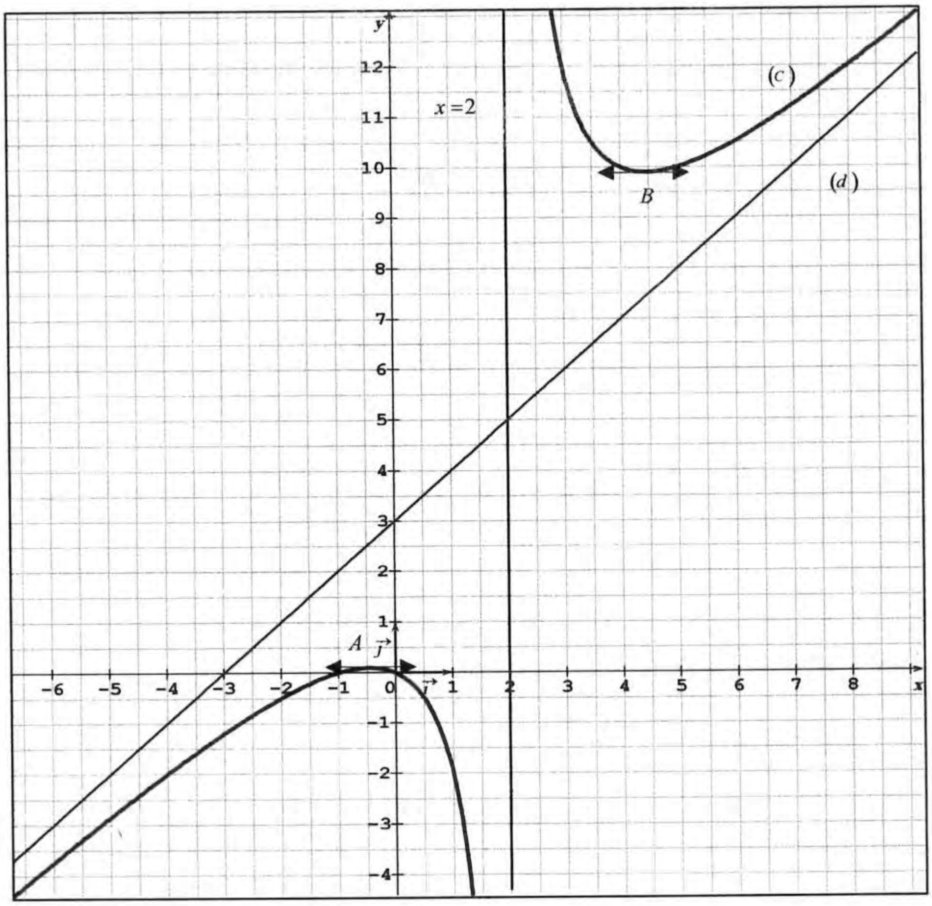
* النقاط الحدية: من جدول التغيرات (C) يقبل نقطتان حديتان هما $A(2-\sqrt{6};5-2\sqrt{6})$ و $B(2+\sqrt{6};5+2\sqrt{6})$. المماسان لـ(C) عند A و B موازيان لمحور الفواصل.

* نقاط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور الفواصل: $f(x)=0$ تعني $\dfrac{x(x+1)}{x-2}=0$ ومنه: $x(x+1)=0$ ، أي :

$x=0$ أو $x=-1$. ومنه (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $O(0;0)$ ، $C(-1;0)$.

- مع محور التراتيب: $f(0)=\dfrac{0(0+1)}{0-2}=0$ ، ومنه (C) يقطع محور التراتيب في $O(0;0)$.



3) أ–لدينا: $x^2+(1-m)x+2m=0...(1)$ تكافئ $x^2+x=m(x-2)$ أي

$\frac{x(x+1)}{x-2}=m$ ، إذن $x^2+(1-m)x+2m=0$ تكافئ $f(x)=m$.

بالتالي حلول المعادلة (1) ، إن وجدت ، هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم الذي معادلته $y=m$ ، الموازي دوما لمحور الفواصل . بقراءة بيانية نجد هكذا :

- إذا كان $m<0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين مختلفين في الإشارة .
- إذا كان $m=0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما : 0 و -1 .
- إذا كان $0<m<5-2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين .
- إذا كان $m=5-2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا سالبا هو $2-\sqrt{6}$.
- إذا كان $5-2\sqrt{6}<m<5+2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولا.

- إذا كان $m = 5+2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا موجبا هو $2+\sqrt{6}$.
- إذا كان $m > 5+2\sqrt{6}$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين موجبين.

4) أ- كتابة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x.

نلاحظ أن: $g(x)=|f(x)|$. ومنه: $g(x)=\begin{cases} f(x) & ; f(x)\geq 0 \\ -f(x) & ; f(x)\leq 0 \end{cases}$

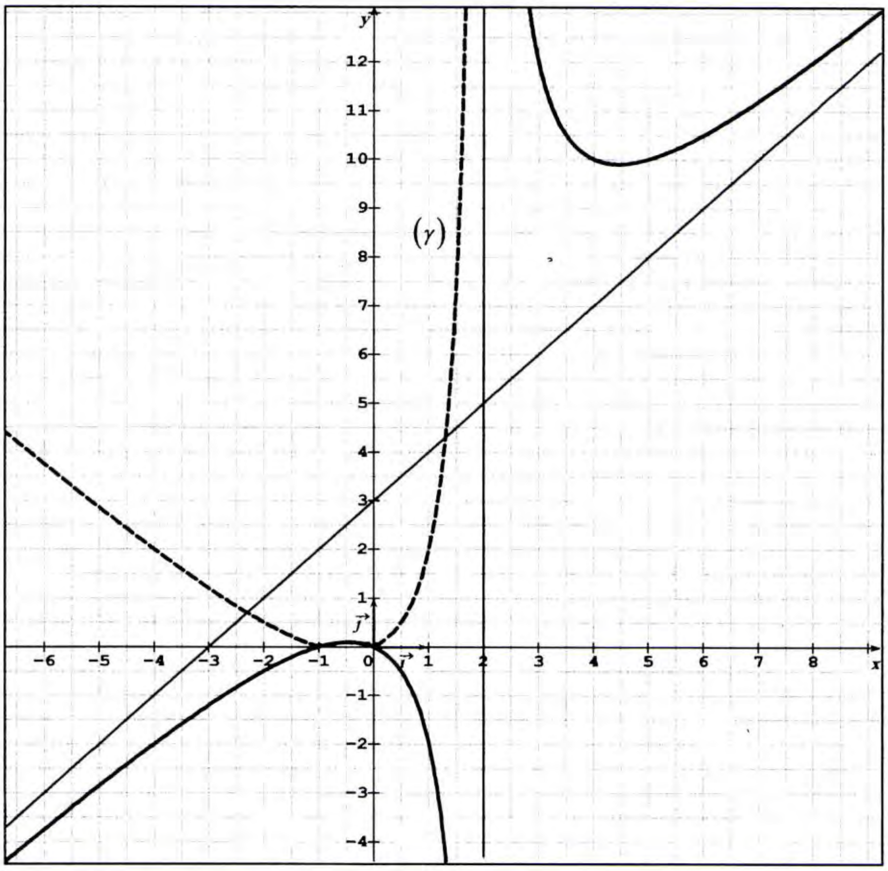
لدينا مما سبق، وباستعمال المنحني (C):

$f(x)\geq 0$ على $[-1;0]\cup]2;+\infty[$ و $f(x)\leq 0$ على $]-\infty;-1]\cup[0;2[$. إذن:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\in[-1;0]\cup]2;+\infty[\\ -f(x) & ; x\in]-\infty;-1]\cup[0;2[\end{cases}.$$

ب- نستنتج عندئذ أن: - المنحنى (γ) ينطبق على (C) من أجل $x\in[-1;0]\cup]2;+\infty[$.

- المنحنى (γ) هو نظير (C) بالنسبة إلى محور الفواصل من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[0;2[$.



5) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$.

أ– إثبات أن h دالة زوجية :

لدينا : $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و:

$$h(-x)=\frac{|-x|(|-x|+1)}{|-x|-2}=\frac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}=h(x)$$.

نستنتج عندئذ أن (Γ) منحنى h يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب .

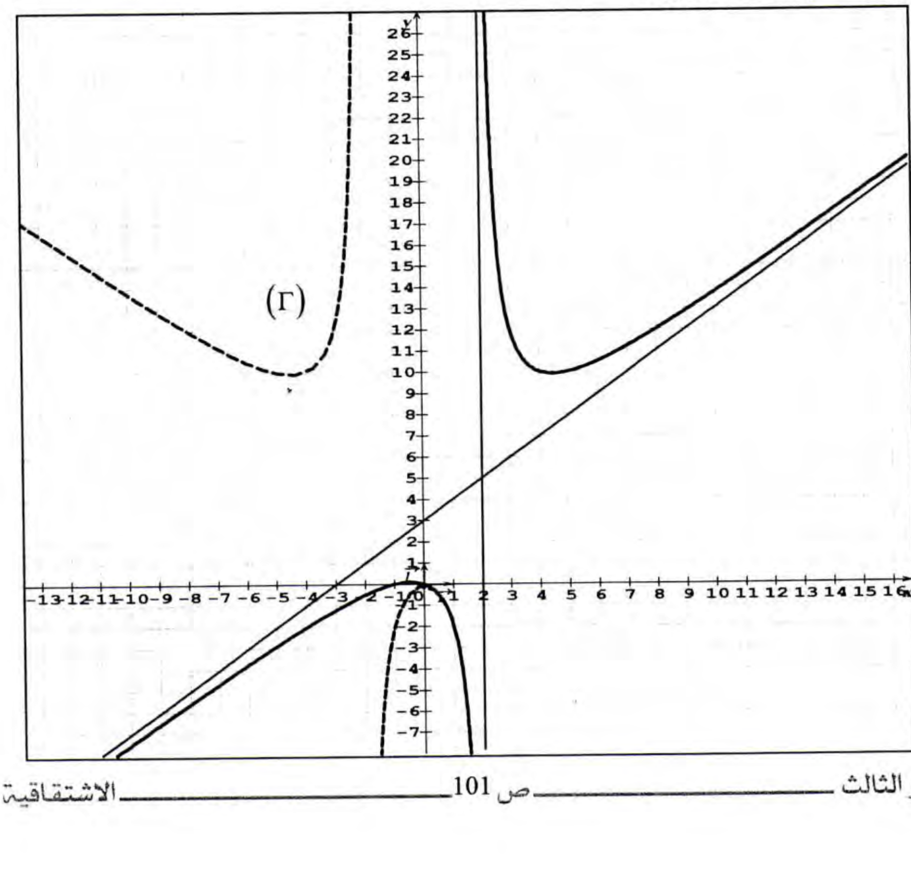
ب– رسم (Γ) اعتمادا على (C) .

نلاحظ أن : $h(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & ;x\in[0;2[\cup]2;+\infty[\\ f(-x) & ;x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0] \end{cases}$

– نستنتج عندئذ أن :

- المنحنى (Γ) ينطبق على (C) من أجل $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$.

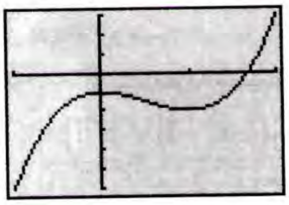
- نتم رسم (Γ) من أجل $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لكون h دالة زوجية .



تمرين 37

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x^3-3x^2-1$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.



1) لاحظ (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية ثم ضع تخمينا حول إشارة $g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $1,6$ و $1,7$.

4) استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة: $4cm$).

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.

2) بين أنه من كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+1[$: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.

6) بعد دراسة إشارة $f(x)-(-x+1)$ استنتج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ). ماذا تستنتج ؟

7) نأخذ $\alpha \approx 1,64$

أ ـ عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب ـ أرسم (C_f) و (Δ).

الحل

I) 1) نلاحظ أن (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α محصورة بين 1 و 2. التخمين حول إشارة $g(x)$ موضوع في الجدول التالي:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

2) دراسة تغيرات الدالة g :

* مجموعة التعريف : $D_g =]-1;+\infty[$

* النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} g(x) = -6$.

* اتجاه التغير : $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ ، إشارة $g'(x)$ موضحة في الجدول:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة g كما يلي:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $g(0) = -1$ و $g(1) = -2$.

3) من جدول التغيرات ، نلاحظ أنه على المجال $[1,6;1,7]$ الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما .
و $g(1,6) \approx -0,48 < 0$ و $g(1,7) \approx 0,15 > 0$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $1,6$ و $1,7$.

4) من السؤال الثالث ، تكون إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

- إذا كان $-1 < x < \alpha$ فإن $g(x) < 0$.
- $g(\alpha) = 0$.
- إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) > 0$.

لدينا إذن:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

وهذا يوافق التخمين الموضوع آنفا .

(II

1) لدينا:

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \frac{1-x}{x^3+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$. ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$. ومنه المستقيم ذا المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

2) لدينا: $f'(x) = \frac{(-1)(x^3+1) - 3x^2(1-x)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) لكون $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ ، نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$. لدينا إذن :

x	-1 α $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +

بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1 α $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ 0

4) معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي من الشكل :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، حيث : $f(0) = \frac{1-0}{0^3+1} = 1$ و $f'(0) = \frac{g(0)}{(0^3+1)^2} = -1$:

إذن : $(\Delta): y = -x + 1$.

5) لدينا: من أجل كل x من $]-1;+1[$:

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{x^3+1} - (-x+1) = \frac{1-x}{x^3+1} - (1-x) = (1-x)\left(\frac{1}{x^3+1} - 1\right)$$
$$= (1-x)\left(\frac{-x^3}{x^3+1}\right) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$$

- يمكن إثبات صحة هذه المساواة بطرق أخرى ...

6) إشارة $f(x) - (-x+1)$ هي من إشارة $\frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.

ولدينا من جهة : $\frac{x^2 \times x(x-1)}{x^3+1} = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ ، إذن إشارة $f(x)-(-x+1)$ هي من إشارة

$x(x-1)$ على المجال $]-1;1[$ ، لأن $\frac{x^2}{x^3+1} > 0$ على المجال $]-1;1[$.

x	-1		0		1
x		-	0	+	
$x-1$		-		-	
$x(x-1)$		+	0	-	

إذن :

- إذا كان $x \in]-1;0[$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ) .
- إذا كان $x \in]0;1[$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ) .
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 ، أي في النقطة $A(0;-0+1)$ ، $A(0;1)$

نلاحظ أن (Δ) يخترق المنحني (C_f) في النقطة $A(0;1)$ ، إذن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

7) نأخذ $\alpha \approx 1,64$

أ - تعين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} :

لدينا : $\alpha \approx 1,64$ و $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha^3+1} \approx -0,118$

بالتدوير إلى 10^{-2} يكون $f(\alpha) \approx -0,12$.

ب - رسم (C_f) و (Δ) .

- رسم (Δ)

x	0	1
y	1	0

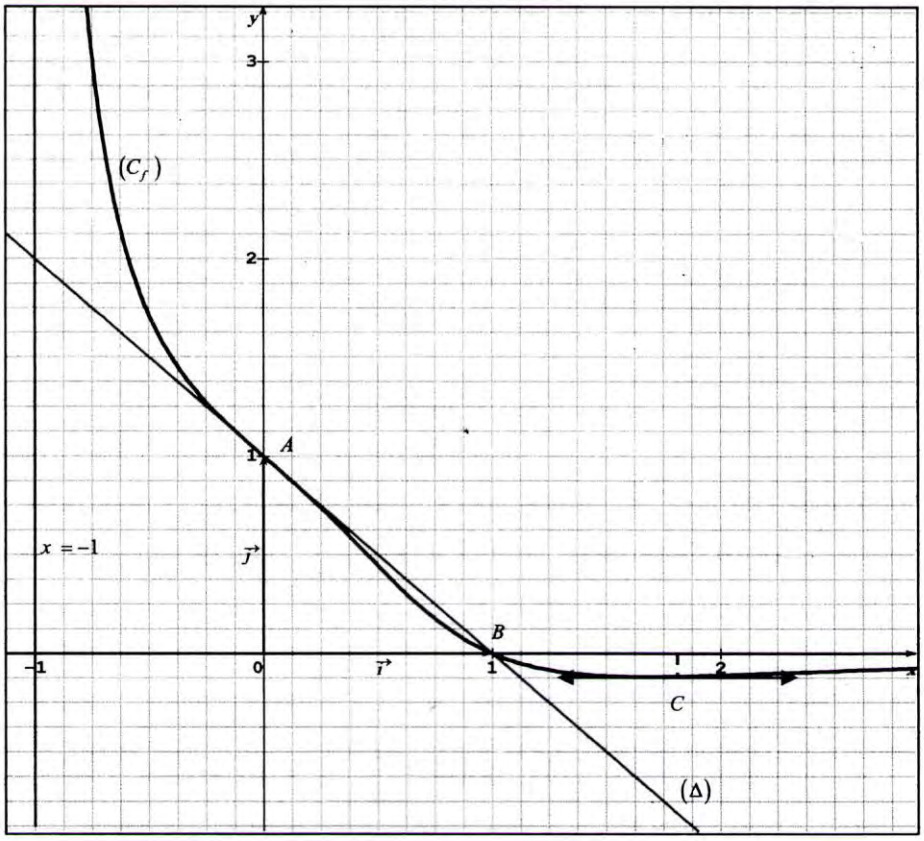
- رسم (C_f) : لنعين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

$f(x)=0$ يكافئ $1-x=0$ يكافئ $x=1$ ، ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $B(1;0)$.

$f(0)=1$ ومنه (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $A(0;1)$ نقطة الانعطاف .

النقطة $C(\alpha;f(\alpha))$ هي نقطة حدية حيث: $\alpha \approx 1,64$ و $f(\alpha) \approx -0,12$

يكون المماس لـ (C_f) عند $C(\alpha;f(\alpha))$ موازيا لمحور الفواصل .



f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي $f(x)=|x-3|+\dfrac{2}{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 3 مفسرا ذلك بيانيا.

3) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجالات مجموعة التعريف .

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) بين أن المستقيمين $(\Delta): y=x-3$ و $(\Delta'): y=-x+3$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

6) حدد وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ').

7) أرسم (C) ، (Δ) و (Δ') في نفس المعلم.

الحل

1) بما أن $x \neq 1$ يكون لدينا :
$$f(x)=\begin{cases} x-3+\dfrac{2}{x-1} & ;x\in[3;+\infty[\\ -x+3+\dfrac{2}{x-1} & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;3] \end{cases}$$

2) لدينا : $f(3)=1$ و :

$$\lim_{\substack{< \\ x\to3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{< \\ x\to3}}\frac{-x+3+\dfrac{2}{x-1}-1}{x-3}=\lim_{\substack{< \\ x\to3}}\left(-1+\frac{\dfrac{-2(x-3)}{2(x-1)}}{x-3}\right)=\lim_{\substack{< \\ x\to3}}\left(-1-\frac{1}{x-1}\right)=-\frac{3}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 3 من اليسار وعددها المشتق من اليسار عند 3 هو $f_g'(3)=-\dfrac{3}{2}$.

$$\lim_{\substack{> \\ x\to3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{> \\ x\to3}}\frac{x-3+\dfrac{2}{x-1}-1}{x-3}=\lim_{\substack{> \\ x\to3}}\left(1+\frac{\dfrac{-2(x-3)}{2(x-1)}}{x-3}\right)=\lim_{\substack{> \\ x\to3}}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 3 من اليمين وعددها المشتق من اليمين عند 3 هو $f_d'(3)=\dfrac{1}{2}$. لدينا : $f_g'(3)\neq f_d'(3)$ ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

بيانيا :

عند النقطة $A(3;1)$ يقبل المنحني (C) نصف مماس من اليمين معامل توجيهه $f_d'(3)=\dfrac{1}{2}$

ونصف مماس من اليسار معامل توجيهه $f_g'(3)=-\dfrac{3}{2}$ ، النقطة $A(3;1)$ هي نقطة زاوية .

3) * $\lim_{\substack{< \\ x\to1}}f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left(|x-3|+\dfrac{2}{x-1}\right)=2+\dfrac{2}{0^-}=-\infty$ ، إذن : $\lim_{\substack{< \\ x\to1}}f(x)=-\infty$.

* $\lim_{\substack{> \\ x\to1}}f(x)=\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left(|x-3|+\dfrac{2}{x-1}\right)=2+\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ ، إذن : $\lim_{\substack{> \\ x\to1}}f(x)=+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3+\dfrac{2}{x-1}\right)=+\infty$ ، لأن :

$\lim_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)=0$. إذن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x+3+\frac{2}{x-1}\right) = +\infty$ ، لأن :

$\lim_{x\to-\infty}(-x-3) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right) = 0$. إذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(4 $$f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{2}{(x-1)^2} & ;x\in[3;+\infty[\\ -1-\dfrac{2}{(x-1)^2} & ;x\in]-\infty;1[\cup]1;3] \end{cases}$$

- من أجل $x\in]-\infty;1[\cup]1;3[$ واضح أن $f'(x)<0$. ($f'(x)$ مجموع عبارتين سالبتين)

- من أجل $x\in]3;+\infty[$ ، لدينا :

$f'(x)=0$ معناه $1-\frac{2}{(x-1)^2}=0$ ، أي $(x-1)^2=2$ ومنه : $x=1-\sqrt{2}$ أو $x=1+\sqrt{2}$

القيمتا ن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ مرفوضتان (لا تنتميان إلى المجال $]3;+\infty[$) وبما أن معامل x^2 في المعادلة $(x-1)^2=2$ موجب تماما ، نستنتج أن $f'(x)>0$ على المجال $]3;+\infty[$.

نستخلص مما سبق ، أن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1[$ ، $]1;3[$ ومتزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$. فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$		$\nearrow +\infty$

تنبيه : وضعنا خط مزدوج في السطر الثاني عند 3 لأن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

5) المستقيم $(\Delta): y=x-3$ عند $+\infty$

- من أجل $x\in[3;+\infty[$ ، لدينا : $f(x)=x-3+\frac{2}{x-1}$ ، بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$ فإن المستقيم $(\Delta): y=x-3$ هو مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

- من أجل $x\in]-\infty;1[\cup]1;3]$ ، لدينا : $f(x)=-x+3+\frac{2}{x-1}$ ، بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0$ فإن المستقيم $(\Delta'): y=-x+3$ هو مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

6) *وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا $f(x)-(x-3)=\dfrac{2}{x-1}>0$ ، لأن $x>3$ ومنه (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>3$.

* وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ')

لدينا $f(x)-(-x+3)=\dfrac{2}{x-1}$ ، إن إشارة $\dfrac{2}{x-1}$ هي من إشارة المقام $x-1$ على $]-\infty;1[\cup]1;3]$ كما يبينه الجدول التالي :

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 3
$x-1$	$-$ $\quad$ || $\quad$ $+$

ومنه : (C) يقع تحت (Δ') على المجال $]-\infty;1[$ ، و (C) يقع فوق (Δ') على المجال $]1;3]$.

7) رسم (C) ، (Δ) و (Δ') :

(Δ) :

x	3	0
y	0	-3

(Δ') :

x	0	3
y	3	0

- رسم (C) : لنعين نقاط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات

من جدول التغيرات نلاحظ أن المنحني (C) لا يقطع محور الفواصل على المجال $]1;+\infty[$ و يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة على المجال $]-\infty;1[$.

من أجل $x<1$ ، لدينا : $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x-1}$

$f(x)=0$ يكافئ $-x+3+\dfrac{2}{x-1}=0$ يكافئ $\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}=0$ ، ومنه

$x^2-4x+1=0$ ، هذه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

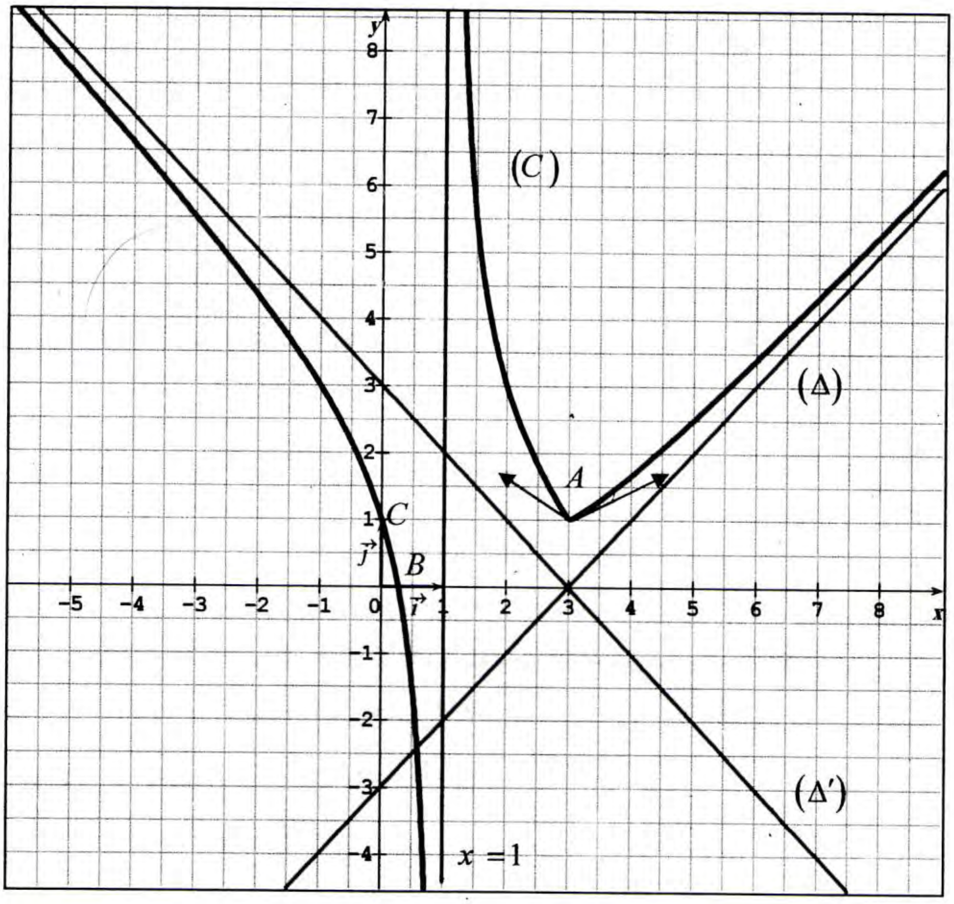
$x_1=2-\sqrt{3}\in]-\infty;1[$ و $x_2=2+\sqrt{3}\notin]-\infty;1[$ ، إذن الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $]-\infty;1[$ هو $2-\sqrt{3}$. إذن (C) يقطع محور الفواصل في النقطة $B(2-\sqrt{3};0)$

$f(0)=|0-3|+\dfrac{2}{0-1}=1$ ومنه (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $C(0;1)$

النقطة $A(3;1)$ هي نقطة زاوية في المنحني (C) .

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ لأن :

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=+\infty$



تمرين 40

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$، و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

و أن المستقيم (Δ') الذي معادلة له: $y=-x-\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

- أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\dfrac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

5) أرسم (C)، (Δ)، (Δ') و (d) في نفس المعلم السابق.

الحل

1) $D_f=\mathbb{R}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$،

وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) • لدينا:

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=0$، إذن: $(\Delta): y=x+\dfrac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.

2) • ولدينا:

$$f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{1}{2}\right)=+\infty$ فإن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2}}=0$

إذن : $(\Delta'):y=-x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

- وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا ،من أجل $x>0$:

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+x+1-\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

بما أن $x>0$ فإن $\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}>0$ ، أي $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)>0$.

وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) من أجل $x>0$.

*وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ'):

لدينا ،من أجل $x<0$: $f(x)-\left(-x-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$

بإمكاننا تحديد إشارة العبارة: $\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\frac{1}{2}\right)$ دون اللجوء إلى مرافقها.

لدينا: من أجل $x < 0$: $x^2 + x + 1 > x^2 + x + \frac{1}{4}$ ، أي $x^2 + x + 1 > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ ، ومنه:

$\sqrt{x^2 + x + 1} > \left|x + \frac{1}{2}\right|$ ، أي $\sqrt{x^2 + x + 1} > -\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ، لأن:

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right) & ; x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$ ، ومنه: $\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$.

ومنه: $f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$.وبالتالي (C) يقع فوق (Δ') من أجل $x < 0$.

3) الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = \frac{\left(x^2 + x + 1\right)'}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة البسط $(2x + 1)$ المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(2x+1)$		-	0	+	

بالتالي: الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$.

4) إثبات أن المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

تذكير:

f دالة مجموعة تعريفها D. و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

لإثبات أن المستقيم $x=a$: (d) هي محور تناظر لـ (C) يمكن اتباع إحدى الطرق التالية:

* لكل x من D يكون $2a-x$ من D و: $f(2a-x)=f(x)$.
* لكل x من D يكون $a-x$ و $a+x$ من D و: $f(a-x)=f(a+x)$.
* نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع: $\begin{cases} x=X+a \\ y=Y \end{cases}$.

تصبح $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X+a)$. هذه الأخيرة تعرف دالة g.

نبرهن أن g دالة زوجية.

نستعمل هنا الطريقة الأولى:

لكل x من D_f يكون $2(-2)-x$ من D_f و:

$$f\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right)=f(-1-x)=\sqrt{(-1-x)^2+(-1-x)+1}=\sqrt{(1+x)^2-x}=\sqrt{x^2+2x+1}=f(x)$$

إذن: المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

5) **الرسم:**

المستقيمات المقاربة:

* $y=x+\frac{1}{2}$: (Δ) مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$.
* $y=-x-\frac{1}{2}$: (Δ') مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$.

النقاط الحدية:

من جدول التغيرات النقطة $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، نقطة حدية في المنحني (C).

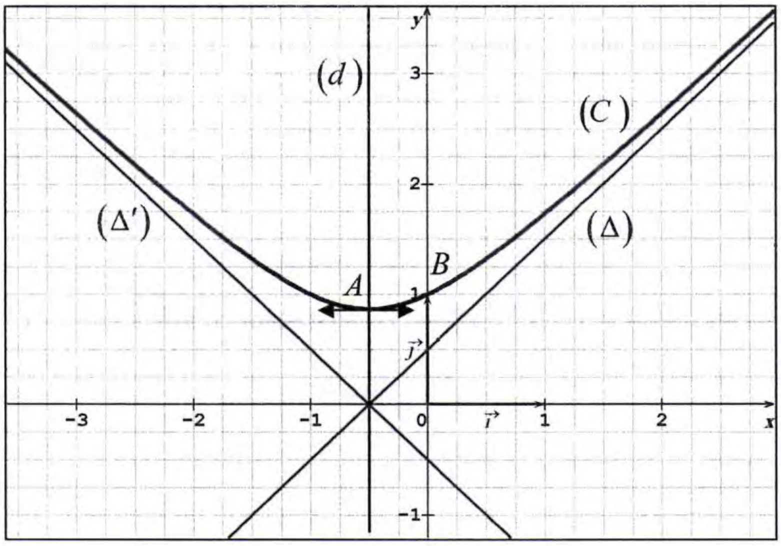
عناصر تناظر المنحني (C):

المستقيم (d) الذي معادلة له $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر لـ (C).

نقاط التقاطع مع محوري الإحداثيات:

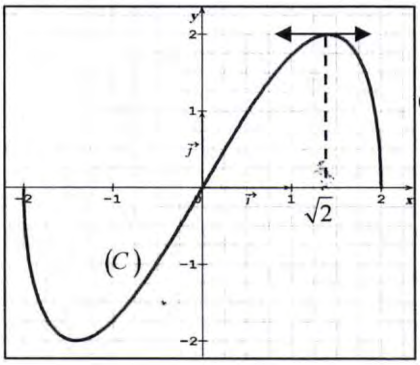
• مع محور الفواصل: من جدول التغيرات نلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ لاتقبل حلولا ، وبالتالي (C) لا يقطع محور الفواصل.

• <u>مع محور التراتيب</u>: لدينا $f(0)=1$ ، وبالتالي (C) يقطع محور التراتيب في النقطة $B(0;1)$



تمرين 41

f الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$



(C) التمثيل البياني للدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل)

1) بين أن f دالة فردية.

2) شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) المنحنى (Γ) صورة المنحنى (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

- أوجد معادلة (Γ) ثم أنشئ (Γ).

الحل

1) لدينا ، المجال $[-2;2]$ متناظر بالنسبة إلى 0 و :

$f(-x)=(-x)\sqrt{4-(-x)^2}=-x\sqrt{4-x^2}=-f(x)$.

2) جدول تغيرات الدالة f.

x	-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	‖	-	0	+	‖	+	0	-	‖
$f(x)$	0	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0

حيث : $f(-2)=f(2)=0$ ، $f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$ ، $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

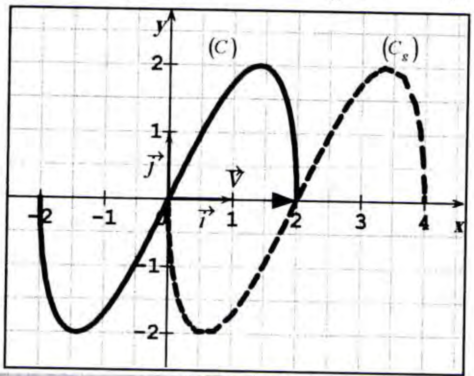
3) لتكن $M(x;y)$ نقطة كيفية من (C) ولتكن $N(X;Y)$ نقطة كيفية من (Γ) . N صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ معناه :

$\begin{cases}X=x+2\\Y=y+0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=X-2\\y=Y\end{cases}$.

ومنه : $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X-2)$ أي : $Y=(X-2)\sqrt{4-(X-2)^2}$

أي : $Y=(X-2)\sqrt{-X^2+4X}$ وهي معادلة المنحني (Γ) .

إنشاء المنحني (Γ) :



تمرين 42

لتكن الدالة f المعرفة على المجال : $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ : $f(x)=2\sin x+\tan x-3x$.

1) بين أنه بوضع $X=\cos x$ يكون : $f'(x)=\frac{P(X)}{X^2}$ ، حيث $P(X)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة يطلب تعيينه .

2) عين إشارة $P(X)$ على المجال $[0;1]$.

3) استنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) استنتج متراجحة Huygens التالية :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $2\sin x+\tan x\geq 3x$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ولدينا :

$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3$ ، وبوضع $X=\cos x$ نجد هكذا:

$f'(x)=2X+\frac{1}{X^2}-3=\frac{2X^3-3X^2+1}{X^2}=\frac{P(X)}{X^2}$ ، حيث :

$P(X)=2X^3-3X^2+1$

2) لتعيين إشارة $P(X)$ على المجال $[0;1]$ يمكن اتباع إحدى الطريقتين :

<u>طريقة 1</u> : نحلل $P(X)$ إلى جداء كثيري حدود أحدهما من الدرجة الثانية و الآخر من الدرجة الأولى و ذلك بملاحظة أن العدد 1 جذر لـ $P(X)$ ، إذ أن : $P(1)=2-3+1=0$

<u>طريقة 2</u> : ندرس اتجاه تغير الدالة P على المجال $[0;1]$.

نتبع مثلا الطريقة الثانية ، الدالة P تقبل الاشتقاق على المجال $[0;1]$ ولدينا :

$P'(X)=6X^2-6X=6X(X-1)$ ، إشارة $P'(X)$ هي كما يلي :

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6X(X-1)$		+	0	-	0	+	

إذن الدالة P متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ ، فيكون جدول تغيراتها كما يلي :

X	0	1
$P'(X)$	-	
$P(X)$	1 ↘	0

حيث : $P(0)=1$ و $P(1)=0$.

نلاحظ أنه من أجل كل X من المجال $[0;1]$: $P(X)\geq 0$

3) استنتاج جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

لدينا: $f'(x)=\frac{P(X)}{X^2}$ ، وبما أن $P(X)\geq 0$ فإن $P(\cos x)\geq 0$ وبالتالي $f'(x)\geq 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

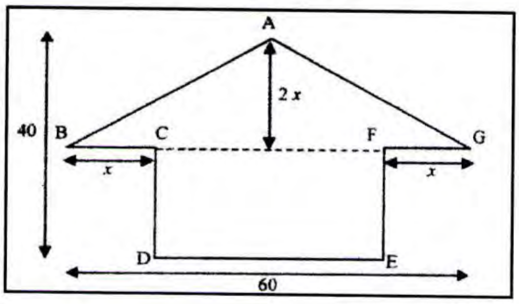
4) استنتاج متراجحة Huygens التالية :

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ يكون : $f(x)\geq 0$ أي $2\sin x+\tan x-3x\geq 0$ إذن :

$2\sin x+\tan x\geq 3x$.

تمرين 43

تريد إحدى المؤسسات صنع "رمز" لها له الشكل و الأبعاد أدناه. وحدة الأطوال هي السنتيمتر cm .
و قصد التقليص من التكاليف، نبحث عن قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أدناه أصغر ما يمكن.



1) أحسب $S(x)$ مساحة الشكل .

2) عين قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن . ثم حدد هذه المساحة .

الحل

1) لدينا : $S(x)=S_1(x)+S_2(x)$ ، حيث $S_1(x)$ هي مساحة المستطيل $CDEF$

و $S_2(x)$ هي مساحة المثلث ABG . لدينا :

$S_1(x)=(60-2x)(40-2x)$ و $S_2(x)=\frac{60\times 2x}{2}$. ومنه :

$S(x)=4x^2-140x+2400$. مع ملاحظة أن : $x\in[0;20]$.

2) الدالة S تقبل الاشتقاق على المجال $[0;20]$ و لدينا : $S'(x)=8x-140$.

إشارة $S'(x)$ موضحة في الجدول التالي :

x	0 $\qquad$ $\frac{35}{2}$ $\qquad$ 20
$S'(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

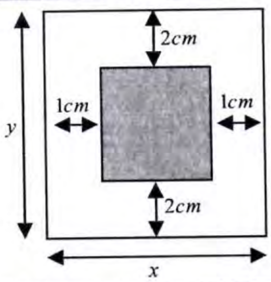
وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

x	0 $\qquad$ $\frac{35}{2}$ $\qquad$ 20
$S'(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$
$S(x)$	$\searrow$ $\quad S\left(\frac{35}{2}\right)$ $\quad \nearrow$

إذن قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل أصغر ما يمكن هي $\frac{35}{2} = 17,5cm$

وقيمة هذه المساحة هي $S\left(\frac{35}{2}\right) = 1175cm^2$.

تمرين 44



الشكل المقابل هو لورقة مستطيلة الشكل مساحتها $529cm^2$ وبعداها x و y بالسنتمترات ، الهوامش هي كما تظهر في الشكل . أراد ناشر ان يطبع نصا على هذه الورقة .

- عين بعدي الورقة التي من اجلها تكون مساحة الجزء المخصص للنص (الملون) أكبر ما يمكن .

الحل

بعدا المستطيل الذي يوافق الجزء المخصص للنص هما :

$x-2$ و $y-4$ حيث: $x>2$ و $y>4$.

لتكن $S(x)$ مساحة المستطيل الذي يوافق الجزء المخصص للنص ، لدينا:

$S(x)=(x-2)(y-4)$ ، وعما أن مساحة الورقة هي $529cm^2$ فإن $xy=529$

ومنه $y=\frac{529}{x}$. بالتالي: $S(x)=(x-2)\left(\frac{529}{x}-4\right)$. أي : $S(x)=-4x-\frac{1058}{x}+537$

الدالة S تقبل الاشتقاق على $]2;+\infty[$ ولدينا: $S'(x)=-4+\frac{1058}{x^2}=\frac{-4x^2+1058}{x^2}$

إشارة $S'(x)$ هي من إشارة $-4x^2+1058$ على $]2;+\infty[$ الموضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$-\frac{23\sqrt{2}}{2}$		2		$\frac{23\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+1058$		-	0	+	‖	+	0	-	

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

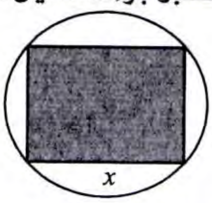
x	2		$\frac{23\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$	‖	+	0	-	
$S(x)$		↗	$S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)$	↘	

تكون $S(x)$ أكبر ما يمكن من أجل $x=\frac{23\sqrt{2}}{2}$ و $y=\frac{529}{\frac{23\sqrt{2}}{2}}=23\sqrt{2}$.

و تكون : $S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)=-4\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1058}{\frac{23\sqrt{2}}{2}}+537=537-92\sqrt{2}$ ، بتدوير النتائج السابقة إلى 10^{-1} نجد: $x=16,3cm$ ، $y=32,5$ ، $S\left(\frac{23\sqrt{2}}{2}\right)=406,9cm^2$

تمرين 45

بستان دائري الشكل ،نصف قطره $20m$ ، يريد صاحبه تخصيص أكبر جزء مستطيل منه لزراعة مختلف الورود . (أنظر الشكل المقابل)



1) أحسب بدلالة x بعدي هذا الجزء .

2) ما هي أكبر مساحة مخصصة لهذا الجزء ؟ عين عندئذ بعدا المستطيل.

الحل

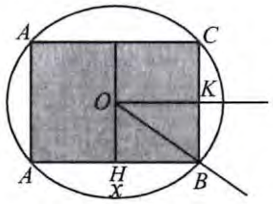
1) نسمي O مركز الدائرة ، و $ABCD$ الجزء المستطيل .

لتكن H المسقط العمودي لـ Oعلى (AB) ، ولتكن K المسقط العمودي لـ Oعلى (BC) . بما أن الرباعي مستطيل فإن H و K منتصفا القطعتين $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب .

لدينا x طول المستطيل $ABCD$ ، ليكن y عرضه.

واضح أن $0 < x < 20$.

- تعيين y بدلالة x :



لدينا: $AB = x$ و $BC = y$ ومنه : $HB = \frac{x}{2}$ و $OH = \frac{y}{2}$.

بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث OHB القائم في H نجد:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \text{ ، ومنه : } 20^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ ، ومنه: } y^2 + x^2 = 1600$$

ومنه: $y = \sqrt{1600 - x^2}$ أو $y = -\sqrt{1600 - x^2}$ ، لكن $y > 0$. إذن: $y = \sqrt{1600 - x^2}$.

إذن بعدا المستطيل $ABCD$ هما x و $\sqrt{1600 - x^2}$.

2) نسمي $S(x)$ مساحة المستطيل $ABCD$ ، لدينا : $S(x) = xy = x\sqrt{1600 - x^2}$.

إذن في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الدالة S معرفة على المجال $]0;20[$ بـ: $S(x) = x\sqrt{1600 - x^2}$.

الدالة S قابلة للاشتقاق على المجال $]0;20[$ ولدينا :

$$S'(x) = 1 \times \sqrt{1600 - x^2} + x \times \frac{-2x}{\sqrt{1600 - x^2}} = \frac{-2x^2 + 1600}{\sqrt{1600 - x^2}} .$$

إشارة $S'(x)$ هي نفسها إشارة البسط $-2x^2 + 1600$ على المجال $]0;20[$.

الموضحة في الجدول التالي:

x	$-20\sqrt{2}$		0		$20\sqrt{2}$		20
$-2x^2 + 1600$	-	0		+	0	-	

وعليه يكون جدول تغيرات الدالة S كما يلي :

x	0		$20\sqrt{2}$		20
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		$\nearrow$	$S\left(20\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	

إذن أكبر مساحة للجزء المخصص لزراعة الورود هي:

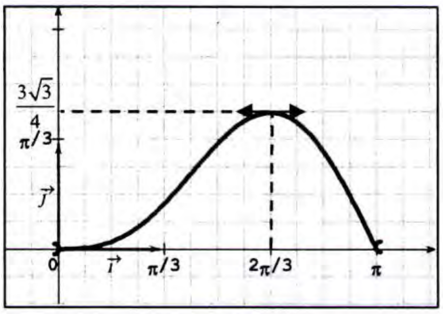
$$S\left(20\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{2}\sqrt{1600 - \left(20\sqrt{2}\right)^2} = 800m^2 \text{ ، } S\left(20\sqrt{2}\right) = 800m^2$$

ويكون بعدا المستطيل $x = 20\sqrt{2}m$ و $y = \sqrt{1600 - \left(20\sqrt{2}\right)^2} = 20\sqrt{2}m$.

نلاحظ أن $x = y$ ، إذن تكون مساحة الجزء المخصص لزراعة الورود أكبر ما يمكن عندما

يكون المستطيل $ABCD$ مربعا طول ضلعه $20\sqrt{2}m$.

تمرين 46



الجزء الأول :

التمثيل البياني المقابل هو لدالة f معرفة على المجال $]0;\pi[$ بـ : $f(\theta)=a\sin\theta+b\sin 2\theta$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) عين قيمة كل من a و b .

الجزء الثاني :

أراد شخص بناء خزان ماء على شكل موشور قاعدته شبه منحرف $ABCD$ حيث $AB=BC=CD=1$ ، وارتفاعه ثابت يساوي 3 (الوحدة المتر).

1) عين قيسا θ للزاوية $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ الذي من أجله يكون حجم الخزان أكبر ما يمكن.

($0<\theta<\pi$) . أحسب هذا الحجم عندئذ.

الحل

الجزء الأول :

1) جدول تغيرات الدالة f :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

2) تعيين قيمة كل من a و b :

لدينا: $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ و $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$.

• $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ تكافئ $a\sin\frac{2\pi}{3}+b\sin 2\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ، أي :

$a\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+b\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ أي : $a\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

لأن $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. ومنه المعادلة :

$a\frac{\sqrt{3}}{2}-b\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ، أي : $a-b=\frac{3}{2}$.

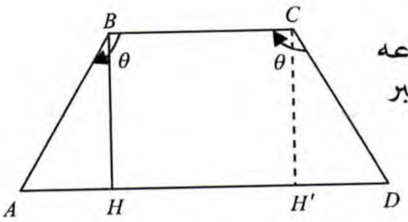
• $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$ تكافئ $a\cos\frac{2\pi}{3}+2b\cos 2\frac{2\pi}{3}=0$ ، لأن :

$f'(\theta)=a\cos\theta+2b\cos 2\theta$ ، ومنه : $a\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+2b\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)=0$

أي : $a\left(-\frac{1}{2}\right)+2b\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ ، أي : $a+2b=0$ بحل الجملة : $\begin{cases} a-b=\frac{3}{2} \\ a+2b=0 \end{cases}$ ، نجد أن :

$a=1$ و $b=-\frac{1}{2}$.إذن : $f(\theta)=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$

الجزء الثاني :



نعلم أن حجم موشور يساوي جداء مساحة قاعدته و ارتفاعه وبما أن ارتفاع هذا الموشور ثابت ، فإن حجمه يكون أكبر ما يمكن إذا كانت مساحة قاعدته أكبر ما يمكن.

نسمي $S(\theta)$ مساحة القاعدة ، لدينا :

$S(\theta)=\frac{(AD+BC)BH}{2}=\frac{(2BC+2AH)BH}{2}=(BC+AH)BH$.

حيث : $BC=1$ ، $BH=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$ ، $AH=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$.

ومنه : $S(\theta)=(1-\cos\theta)\sin\theta$.

بما أن : $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ، يمكننا كتابة :

$$S(\theta)=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

إذن : $S(\theta)=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta$.

نلاحظ أن الدالة S هي نفسها الدالة f .

إذن من جدول التغيرات المحصل عليه في الجزء الأول نجد أن قيمة θ التي يكون من أجلها حجم الخزان أكبر ما يمكن هي $\frac{2\pi}{3}$ ، ويكون حجم الخزان عندئذ هو $\frac{3\sqrt{3}}{4}m^3$.

المحور الرابع

الدوال الأسية

ما يجب أن يعرف

عموميات

مبرهنة وتعريف: توجد دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.
نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" ونسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp'(x)=\exp(x)$.

خواص

1. خواص:

• الدالة "exp" التي تحقق (1) $\exp'=\exp$ و (2) $\exp(0)=1$ وحيدة.

• من أجل كل عددين حقيقيين x، y ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(3) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$. (4) $\exp(x)\neq 0$

(5) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$. (6) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

(7) $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$

2. العدد e والترميز e^x :

• العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$.

تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.

ملاحظة: العدد e غير ناطق.

• من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\left[\exp(1)\right]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp(x)=e^x$. تقرأ e^x : "أسية x".

قواعد الحساب:

من أجل كل عددين حقيقيين x، y ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

• $e^0=1$ • $\exp'(x)=e^x$ • $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

• $e^{x+y}=e^x e^y$ • $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ • $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

دراسة الدالة الأسية النيبيرية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية :

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x>0$.

نتيجة : الدالة الأسية دالة موجبة تماما .

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نتائج:

1) من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

إشارة e^x-1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

ملاحظة : بيانيا ، النتيجة 2 تعني أن منحنى الدالة الأسية يقع تحت المستقيم $(D):y=1$ من أجل $x<0$ ، ويقع فوق المستقيم (D) من أجل $x>0$.

2 . النهايات:

مبرهنة: (1) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ، (2) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

3. جدول تغيرات ـ التمثيل البياني

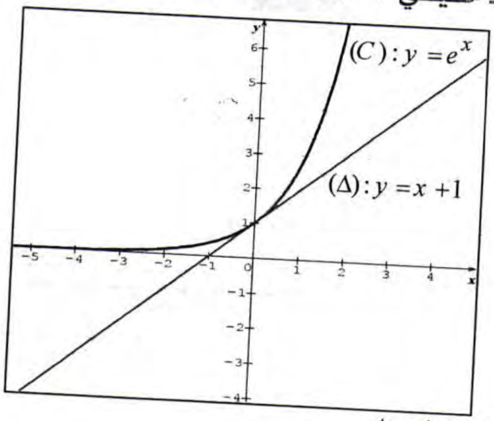
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

• بما أن $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ فإن المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب عند $-\infty$.

• لنشكل معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، معادلة (Δ) هي من الشكل : $y = \exp'(0)(x-0)+\exp(0)$ ، أي : $y = e^0(x-0)+e^0$

إذن : $(\Delta): y = x+1$

• إن من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x+1$ ، بالتالي (C) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$.



• من تعريف العدد المشتق لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = 1 = \exp'(0)$$. إذن : $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 .

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1+x$

4. حل معادلات و متراجحات بأشكال أسية :

نتائج : من اتجاه تغير الدالة الأسية نستنتج القواعد التالية :

• $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) = v(x)$.

• $e^{u(x)} > e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) > v(x)$.

• $e^{u(x)} \geq 1$ تكافئ $u(x) \geq 0$.

• $0 < e^{u(x)} \leq 1$ تكافئ $u(x) \leq 0$.

دراسة الدالة $\exp ou$

تمهيد:

بما أن الدالة الأسية معرفة على $\mathbb{R}$ فإن مجموعة تعريف الدالة $\exp ou$ هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u . من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة u لدينا :

$$\exp ou(x) = e^{u(x)}$$

1. النهايات :

لدراسة نهاية دالة $\exp \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة . بمعنى ،

لحساب النهاية : $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)}$ نتبع ما يلي :

إذا كان $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و $\lim\limits_{X\to b} e^{X}=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)}=c$.

حيث : a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

2 . اتجاه التغيرات :

مبرهنة: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

3 . المشتقة :

مبرهنة : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I : $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

1. المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$:

مبرهنة : a عدد حقيقي غير معدوم .

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

2 . المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$:

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم .

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

خاصية : من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0;y_0)$ ، المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0)=y_0$.

تمارين محلولة

تمرين 01

بسط العبارات التالية : $A=e^{-3}\times\left(e^{2}\right)^{4}$ ، $B=\left(e^{-x}\right)\times\left(e^{x}\right)^{3}$ ، $C=e^{2x}\times e^{-2x}$ ،

$D=\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ ، $E=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}$

الحل

لدينا:

- $A=e^{-3}\times\left(e^{2}\right)^{4}=e^{-3}\times\left(e^{2\times4}\right)=e^{-3}\times e^{8}=e^{-3+8}=e^{5}$
- $B=\left(e^{-x}\right)\times\left(e^{x}\right)^{3}=\left(e^{-x}\right)\times\left(e^{3x}\right)=e^{-x+3x}=e^{2x}=\left(e^{x}\right)^{2}$
- $C=e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^{0}=1$
- $D=\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}\times\left(1+e^{-x}\right)-e^{-2x}\times\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+1\right)\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{e^{-x}+e^{-x}\times e^{-x}-e^{-2x}\times e^{x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{x}\times e^{-x}+1+e^{-x}}$

$=\dfrac{e^{-x}+e^{-2x}-e^{-x}-e^{-2x}}{e^{x}+1+1+e^{-x}}=\dfrac{0}{2+e^{x}+e^{-x}}=0$

- $E=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)-\left(\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)$

$=\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)-\left(\left(e^{x}\right)^{2}-2+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)=\left(e^{x}\right)^{2}+2+\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}\right)^{2}+2-\left(e^{-x}\right)^{2}$

$=4$

تمرين 02

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$.

تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}$ و $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^{x}+1}$.

الحل

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$x+1-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}=x+\left(1-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right)=x+\left(\frac{\left(e^{x}+1\right)-2e^{x}}{e^{x}+1}\right)=x+\left(\frac{-e^{x}+1}{e^{x}+1}\right)$$

$$=x-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=f(x)$$

• من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن :

$$x-1+\frac{2}{e^x+1}=x+\left(-1+\frac{2e}{e^x+1}\right)=x+\left(\frac{-\left(e^x+1\right)+2}{e^x+1}\right)=x+\left(\frac{-e^x+1}{e^x+1}\right)$$

$$=x-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=f(x)$$

تمرين 03

أدرس شفعية الدالتين f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

الحل

• $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و :

$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$. إذن f دالة زوجية .

• $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و :

$g(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=-g(x)$. إذن g دالة فردية .

تمرين 04

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم .

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=1$. فسر بيانيا هذه النتيجة .

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، ومنه :

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^{-x}\left(1+e^x\right)+e^x\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)\left(1+e^x\right)}=\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{1+e^x+e^{-x}+1}$$

$$=\frac{e^{-x}+1+e^x+1}{1+e^x+e^{-x}+1}=\frac{e^x+e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}+2}=1$$

إذن :من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=1$.

تفسر النتيجة $f(-x)+f(x)=1$ بيانيا:

إن : $f(-x)+f(x)=1$ تكافئ $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}$

وهذا معناه أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

تمرين 05

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^x)$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+2}\right)$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3e^x-1}{2e^x+4}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^x)$. 5) $\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}}\frac{e^x}{e^x-1}$. 6) $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{e^x}{e^x-1}$.

الحل

1) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+e^x)=-\infty$.

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+2}\right)=0$.

3) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x+4)=+\infty$. إذن لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين :</u>

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نستطيع أن نكتب : $\frac{3e^x-1}{2e^x+4}=\frac{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\frac{4}{e^x}\right)}=\frac{3-\frac{1}{e^x}}{2+\frac{4}{e^x}}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x}=0$ ، ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-1}{2e^x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{e^x}}{2+\frac{4}{e^x}}=\frac{3}{2}.$$

4) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. إذن لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

إزالة حالة عدم التعيين :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نستطيع أن نكتب : $e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-1\right)=+\infty$ ، فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-1\right)=+\infty$.

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^{x})=+\infty$.

5) لدينا : $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} e^{x}=1>0$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\left(e^{x}-1\right)=0$ مع $e^{x}-1<0$ لأن $x<0$.

ومنه: $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{0^{-}}=-\infty$

6) لدينا : $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} e^{x}=1>0$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\left(e^{x}-1\right)=0$ مع $e^{x}-1>0$ لأن $x>0$.

ومنه: $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{0^{+}}=+\infty$.

تمرين 06

أدرس اتجاه تغير الدالة f في كل حالة :

1) $f(x)=x+1+e^{x}$. على $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}-1}$. على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

3) $f(x)=\left(x^{2}-3\right)e^{x}$. على $\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x-1}$. على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن مجموع الدالتين : $x\mapsto x+1$ و $x\mapsto e^{x}$ القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=1+e^{x}$.

إن : $f'(x)>0$ على $\mathbb{R}$ ، لأن من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}>0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$. لأنها عبارة عن حاصل قسمة الدالتين : $x\mapsto e^{x}+2$ و $x\mapsto e^{x}-1$ القابلتين للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ مع الدالة $x\mapsto e^{x}-1$ لا تنعدم على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$. لكون $e^{x}-1=0$ تعني $x=0$. ولدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+2\right)'\left(e^x-1\right)-\left(e^x-1\right)'\left(e^x+2\right)}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+2\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left[\left(e^x-1\right)-\left(e^x+2\right)\right]}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

3) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن جداء الدالتين : $x \mapsto x^2-3$ و $x \mapsto e^x$ القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=\left(x^2-3\right)'e^x+\left(x^2-3\right)\left(e^x\right)'=2xe^x+\left(x^2-3\right)e^x$$

$$=e^x\left(2x+x^2-3\right)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$$

إذن : $f'(x)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$.

إن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة x^2+2x-3 لكون $e^x>0$ على $\mathbb{R}$.

كثير الحدود x^2+2x-3 مميزه $\Delta=16$ يقبل جذرين متمايزين هما: 1 و -3 ، إشارته موضحة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-3]$ ، $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-3;1]$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$. لأنها عبارة عن حاصل قسمة الدالتين : $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x-1$ القابلتين للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ مع الدالة $x \mapsto x-1$ لا تنعدم على كل من المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$. لكون $x-1=0$ تعني $x=1$. ولدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'(x-1)-(x-1)'e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

بما أن $\frac{e^x}{(x-1)^2}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة : $x-2$ على $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		-	‖	-	0	+	

إذن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]-\infty;1[$ ، $]1;2]$ ومتزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

تمرين 07

1) حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلات التالية :

• $\left(e^{x}\right)^{3}-e^{2x+1}=0$ ، • $e^{x^{2}}-e=0$ ، • $e^{2x}+e^{x}-2=0$.

2) حل، في $\mathbb{R}$ ، المتراجحات التالية : ،

• $e^{x-x^{2}}\geq 1$ ، • $2xe^{-2x}-e^{-2x}>0$ ، • $\left(x^{2}+x-2\right)e^{-x}\leq 0$ ،

• $e^{5-4x}\leq e^{x^{2}}$ ، • $e^{2x-5}\leq -1$.

الحل

1) • المعادلة $\left(e^{x}\right)^{3}-e^{2x+1}=0$ تكافئ $e^{3x}-e^{2x+1}=0$ أي: $e^{3x}=e^{2x+1}$

أي: $3x=2x+1$ ، أي : $x=1$.

• المعادلة $e^{x^{2}}-e=0$ تكافئ $e^{x^{2}}=e$ أي $e^{x^{2}}=e^{1}$ ، أي $x^{2}=1$ ،

أي : $x=1$ أو $x=-1$.

• لحل المعادلة: $e^{2x}+e^{x}-2=0$ نستعمل مجهولا مساعدا. نضع: $y=e^{x}$ مع $y>0$.

ومنه : $e^{2x}+e^{x}-2=0$ تكافئ $y^{2}+y-2=0$ وهذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=9>0$ تقبل حلين متمايزين هما: $y=1$ أو $y=-2$ (مرفوض).

$y=1$ تكافئ $e^{x}=1$ ، إذن: $x=0$.

2) • المتراجحة $e^{x-x^{2}}\geq 1$ تكافئ $e^{x-x^{2}}\geq e^{0}$ ، أي $x-x^{2}\geq 0$.

إشارة كثير الحدود $x-x^{2}$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^{2}$		-	0	+	0	-	

ومنه $x-x^{2}\geq 0$ تكافئ $x\in[0;1]$.

• المتراجحة $2xe^{-2x}-e^{-2x}>0$ تكافئ $e^{-2x}\left(2x-1\right)>0$ ، ومنه $2x-1>0$ لأن $e^{-2x}>0$. ومنه: $2x-1>0$ تكافئ $x>\frac{1}{2}$ ، أي $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

• المتراجحة $\left(x^{2}+x-2\right)e^{-x}\leq 0$ تكافئ $x^{2}+x-2\leq 0$ لأن $e^{-x}>0$.

كثير الحدود x^2+x-2 مميزه $\Delta=9>0$ ويقبل جذرين متمايزين هما 1 و -2 إشارته مبينة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	-	0	+	

إذن $x^2+x-2\le 0$ تكافئ $x\in[-2;1]$.

• المتراجحة $e^{5-4x}\le e^{x^2}$ تكافئ $5-4x\le x^2$ أي $-x^2-4x+5\le 0$

كثير الحدود $-x^2-4x+5$ مميزه $\Delta=36>0$ ويقبل جذرين متمايزين هما 1 و -5 إشارته مبينة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2-4x+5$		-	0	+	0	-	

إذن $-x^2-4x+5\le 0$ تكافئ $x\in]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$.

• المتراجحة $e^{2x-5}\le -1$ مستحيلة الحل لأن $e^{2x-5}>0$ على $\mathbb{R}$.

تمرين 08

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}$. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+2x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{3x+1}{x-5}}$. 5) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}} e^{\frac{1}{x-1}}$. 6) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}} e^{\frac{1}{x-1}}$.

الحل

1) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}=0$.

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{X\to0} e^{X}=1$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

3) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+2x-1}=+\infty$.

4) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x-5}=3$ و $\lim\limits_{X\to3} e^{X}=e^3$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{3x+1}{x-5}}=e^3$.

5) لدينا : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ و $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}} e^{\frac{1}{x-1}}=0$.

6) لدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

تمرين 09

عين اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2}$.

الحل

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة "مربع" المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

تمرين 10

(دراسة الدوال $x\mapsto e^{-\lambda x}$ ، حيث $\lambda>0$).

ملحوظة : هذا النوع من الدوال له مآرب كثيرة في الإحتمالات.

(الإحتمالات المستمرة ، القانون الأسي) . أنظر محور الإحتمالات المستمرة ،

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما λ ، نعتبر الدوال f_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$$

نرمز بـ (C_λ) إلى المنحنيات الممثلة للدوال f_λ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f_λ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة الثانية .

2) أدرس اتجاه تغير الدوال f_λ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن كل المنحنيات (C_λ) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

4) أرسم تمثيلا لـ (C_λ) من أجل : $\lambda=1$ ، $\lambda=2$ ، $\lambda=3$.

الحل

1) • $\lim\limits_{x\to-\infty}f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-\lambda x}=+\infty$. و $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\lambda(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}=0$ لأن $\lambda>0$.

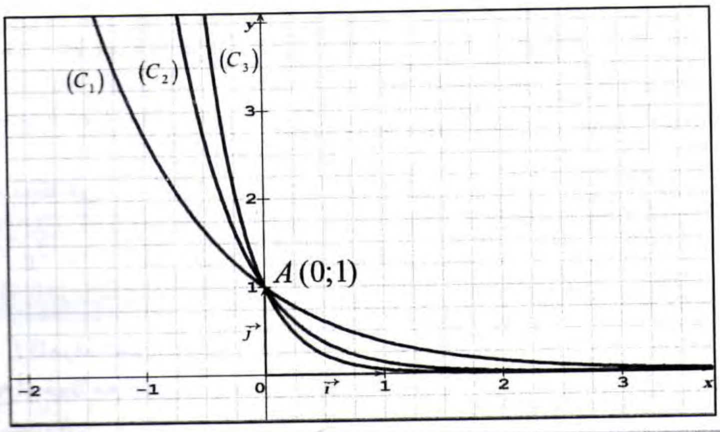
ومنه (C_λ) يقبل محور الفواصل $(y=0)$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x : $f_\lambda'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}<0$ لأن $\lambda>0$ ، ومنه الدالة f_λ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. جدول تغيرات الدالة f_λ هو كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_\lambda'(x)$	$-$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$ ↘	0

3) من أجل كل عدد حقيقي $\lambda > 0$ لدينا :

$f_\lambda(0) = e^{-\lambda 0} = 1$ ، ومنه كل المنحنيات (C_λ) تمر من النقطة $A(0;1)$.



تمرين 11

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y' - 2y = 0$.

الحل

لدينا : $3y' - 2y = 0$ تكافئ $y' = \frac{2}{3}y$. $\left(a = \frac{2}{3}\right)$

إذن : الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y = 0$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{\frac{2}{3}x}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تمرين 12

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y' - 2y = 3$.

الحل

لدينا : $y' - 2y = 3$ تكافئ $y' = 2y + 3$. $(a = 2)$ و $(b = 3)$

إذن : الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y = 0$ هي الدوال $x \mapsto Ce^{2x} - \frac{3}{2}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تمرين 13

نعتبر المعادلة التفاضلية (1)... $2y' + y = 1$

1) حل المعادلة (1).

2) عين الحل f للمعادلة (1) بحيث منحناها يمر من النقطة ذات الإحداثيين $(-1;2)$.

الحل

1) لدينا (1) تكافئ $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ ، ومنه: الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية (1)

هي الدوال $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

2) لدينا : $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$ و $f(-1) = 2$.

$f(-1) = 2$ تكافئ $2 = Ce^{\frac{1}{2}} + 1$ ، أي $C = e^{-\frac{1}{2}}$.

إذن : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} + 1$ ، أي : $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(1+x)} + 1$.

تمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-x+3)e^x$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1) من أجل كل $x > 0$: $f(x) \geq -x+3$.

2) الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عظمى وحيدة .

3) منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطتين بالضبط .

الحل

1) **خطأ** ، بأخذ مثلا $x = 4$ نجد $f(4) = (-4+3)e^4 = -e^4$ و $-4+3 = -1$

لدينا : $f(4) < -4+3$.

2) **صحيح**، لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = -e^x + (-x+3)(e^x)' = -e^x + (-x+3)e^x = e^x(-1-x+3) = e^x(-x+2)$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $-x+2$ على $\mathbb{R}$ لأن $e^x > 0$ على $\mathbb{R}$. جدول تغيرات الدالة f هو :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^2	$\searrow$	

حيث : $f(2) = (-2+3)e^2 = e^2$

إذن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية عظمى وحيدة هي e^2 عند القيمة 2 للمتغير .

3) **خطأ** ، $f(x) = 0$ تكافئ $(-x+3)e^x = 0$ ، ومنه $-x+3 = 0$ لأن $e^x \neq 0$ على $\mathbb{R}$.

$-x+3 = 0$ تكافئ $x = 3$ ، أي أن منحنى f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها3

تمرين 15

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -1 + e^{-x+2}$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1) الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3) منحني الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y=-1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

4) الدالة f سالبة تماما على $]2,+\infty[$ و موجبة تماما على $]-\infty;2[$.

5) الدالة $x \mapsto e^{f(x)}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

الحل

1) **صحيح**، لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:
$f'(x) = 0+(-x+2)'e^{-x+2} = -e^{-x+2}$. بما أن $e^{-x+2} > 0$ على $\mathbb{R}$ فإن $f'(x) < 0$ على $\mathbb{R}$ وبالتالي f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2) **خطأ**، لأن $\lim_{x\to+\infty}(-x+2) = -\infty$ و $\lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2} = 0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

3) **صحيح**،من 2) وجدنا أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ وهذا مايدل أن منحني الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y=-1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

4) **صحيح**، لأن :

- $f(x) < 0$ تكافئ $-1+e^{-x+2} < 0$ أي $e^{-x+2} < 1$، أي $e^{-x+2} < e^{0}$ ، أي $-x+2 < 0$
ومنه : $x > 2$. إذن : الدالة f سالبة تماما على $]2,+\infty[$.
- $f(x) > 0$ تكافئ $-1+e^{-x+2} > 0$ أي $e^{-x+2} > 1$، أي $e^{-x+2} > e^{0}$ ، أي $-x+2 > 0$
ومنه : $x < 2$. إذن : الدالة f موجبة تماما على $]-\infty;2[$.

5) **خطأ**، لأن الدالة $x \mapsto e^{f(x)}$ والدالة f من نفس اتجاه التغير ، وحسب 1) الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.إذن الدالة $x \mapsto e^{f(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

تمرين 16

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة المقترحة لكل سؤال، معللا اختيارك :

1) المعادلة $e^{2x} - e^{x} = 0$ في $\mathbb{R}$:
ج1) ليس لها حلولا . ج2) تقبل حلا واحدا . ج3) تقبل حلين مختلفين .

2) العبارة $-e^{-x}$:
ج1) سالبة إذا كان x موجب . ج2) سالبة دائما . ج3) سالبة إذا كان x سالب .

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2} =$: ج1) $-\frac{1}{2}$ ج2) $+\infty$ ج3) 2

4) المعادلة التفاضلية $y=2y'-1$ تقبل كمجموعة حلول:

ج1) $x\mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث $C\in\mathbb{R}$. ج2) $x\mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}+1$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

ج3) $x\mapsto Ce^{2x}-1$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

الحل

1) ج2) تقبل حلا واحدا ، التبرير :

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{2x}-e^{x}=0$.

$e^{2x}-e^{x}=0$ تكافئ $e^{x}\left(e^{x}-1\right)=0$ ، ومنه $e^{x}-1=0$ لأن $e^{x}\neq 0$ على $\mathbb{R}$.

$e^{x}-1=0$ تكافئ $e^{x}=1$ ، أي $e^{x}=e^{0}$ ، أي $x=0$.

2) ج2) سالبة دائما ، التبرير :

لدينا: $e^{x}>0$ على $\mathbb{R}$ ، ومنه $-e^{-x}<0$ على $\mathbb{R}$.

3) ج3) 2 ، التبرير :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(2-\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{e^{x}}\right)}{\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}=\frac{2}{1}=2$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0$.

4) ج1) $x\mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث $C\in\mathbb{R}$ ، التبرير :

المعادلة $y=2y'-1$ تكافئ $y'=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ وهي من الشكل $y'=ay+b$ ، حيث $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$. نعلم أن الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة $y'=ay+b$ هي الدوال: $x\mapsto Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث $C\in\mathbb{R}$ ، لدينا $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ ومنه الدوال :

$x\mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}-1$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

كل سؤال يتضمن إجابة واحدة صحيحة حدد هذه الإجابة ، معللا اختيارك :

1. العدد e^{4+2x} يكتب على الشكل:

أ) $\left(e^{2}\right)^{2}\times\frac{1}{e^{2x}}$ ب) $\left(e^{x+2}\right)^{2}$ جـ) $e^{4}+e^{2x}$

2. المتراجحة $e^{-3x+1}\leq e^{-2x+3}$ تقبل كمجموعة حلول:

أ) $]-\infty;-2]$ ب) $]-\infty;-2[$ جـ) $[e^{-2};+\infty[$

3. إذا كان $0<a<b$ فإن:

أ) $\frac{e^a}{e^b}<1$ ب) $e^{-a}<e^{-b}$ جـ) $e^{\frac{a}{b}}<1$

4. لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2e^{-x}+x+5$.
في معلم معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 معادلته:

أ) $y=-x+7$ ب) $y=3x+7$ جـ) $y=7x-1$

5. نعتبر دالة g جدول تغيراتها أدناه، ونضع : $h(x)=e^{g(x)}$.

x	5	7
$g(x)$	-3 ↗	1

أ) h ليست معرفة على $[5;7]$ ب) h متناقصة تماما على $[5;7]$

جـ) h متزايدة تماما على $[5;7]$

الحل

1. الجواب ب) $\left(e^{x+2}\right)^2$ ، التبرير : $e^{4+2x}=e^{2(2+x)}=\left(e^{x+2}\right)^2$.

2. الجواب أ) $[-2;+\infty[$ ، التبرير :
$e^{-3x+1}\le e^{-2x+3}$ تكافئ $-3x+1\le-2x+3$ ، أي $-x\le 2$ ، ومنه $x\ge-2$.
إذن : $x\in[-2;+\infty[$

3. الجواب أ) $\frac{e^a}{e^b}<1$ ، التبرير :
إذا كان $0<a<b$ فإن: $e^a<e^b$ ، ومنه : $\frac{e^a}{e^b}<\frac{e^b}{e^b}$ ، أي : $\frac{e^a}{e^b}<1$.

4. الجواب أ) $y=-x+7$ ، التبرير :
معادلة مماس منحني الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي من الشكل :
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$.
لدينا : $f(0)=2e^{-0}+0+5=7$.
$f'(x)=-2e^{-x}+1$ ومنه : $f'(0)=-2e^{-0}+1=-1$ ، بالتعويض في معادلة المماس نجد :
$y=-(x-0)+7$ ، أي : $y=-x+7$.

5. الجواب جـ) h متزايدة تماما على $[5;7]$ ، التبرير :
بما أن : $h(x)=e^{g(x)}$ فإن للدالتين g و h نفس اتجاه التغير .
g متزايدة تماما على $[5;7]$ ومنه h متزايدة تماما على $[5;7]$.

تمرين 18

1) أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحني (C) الممثل للدالة $f : x \mapsto e^x$.

2) استنتج رسم منحنيات الدوال التالية ، ثم أنشئها في نفس المعلم السابق:

أ) $f_1 : x \mapsto e^x + 1$ ب) $f_2 : x \mapsto -e^x$ جـ) $f_3 : x \mapsto e^{x-1}$

الحل

1) أنظر الرسم أدناه:

2) نسمي (C_1) ، (C_2) ، (C_3) ،التمثيلات البيانية للدوال f_1 ، f_2 ، f_3 ،على الترتيب

أ) $f_1 : x \mapsto e^x + 1$

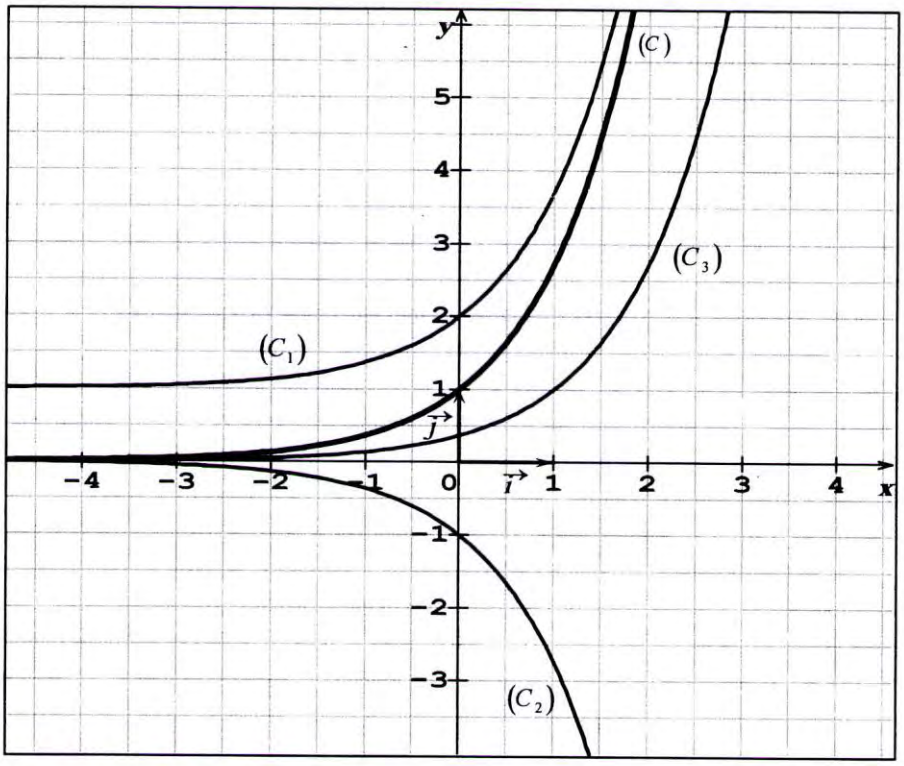
لدينا: $f_1(x) = f(x) + 1$ ومنه (C_1) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$

ب) $f_2 : x \mapsto -e^x$

لدينا : $f_2(x) = -f(x)$ ومنه (C_2) هو نظير (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

جـ) $f_3 : x \mapsto e^{x-1}$

لدينا: $f_3(x) = f(x-1)$ ومنه (C_3) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$



تمرين 19

جدول التغيرات الناقص أدناه هو لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حيث : $f(x)=e^{x}(e^{x}+a)+b$ ، مع a و b عددان حقيقيان .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-3	↘		↗	

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a .

2) باستعمال المعلومات الواردة في الجدول السابق ، عين a و b .

3) أحسب $f(0)$ ثم نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\left(e^{x}\right)'(e^{x}+a)+e^{x}(e^{x}+a)'+0=e^{x}(e^{x}+a)+e^{x}e^{x}=e^{x}(2e^{x}+a)$$

إذن : $f'(x)=e^{x}(2e^{x}+a)$.

2) لدينا : $f(x)=e^{x}(e^{x}+a)+b$ و $f'(x)=e^{x}(2e^{x}+a)$ ومن جدول التغيرات لدينا :

$f'(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$.

• $f'(0)=0$ تكافئ $e^{0}(2e^{0}+a)=0$ ، ومنه : $a=-2$ ، إذن : $f(x)=e^{x}(e^{x}-2)+b$.

• لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}-2\right)=-2$ ، بالتالي :

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}\left(e^{x}-2\right)=0$. بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$ فإن : $b=-3$.

إذن : $f(x)=e^{x}(e^{x}-2)-3$.

3) • لدينا : $f(0)=e^{0}(e^{0}-2)-3=-4$.

• لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-2\right)=+\infty$ ، بالتالي :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left(e^{x}-2\right)=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x}(e^{x}-2)-3\right]=+\infty$.

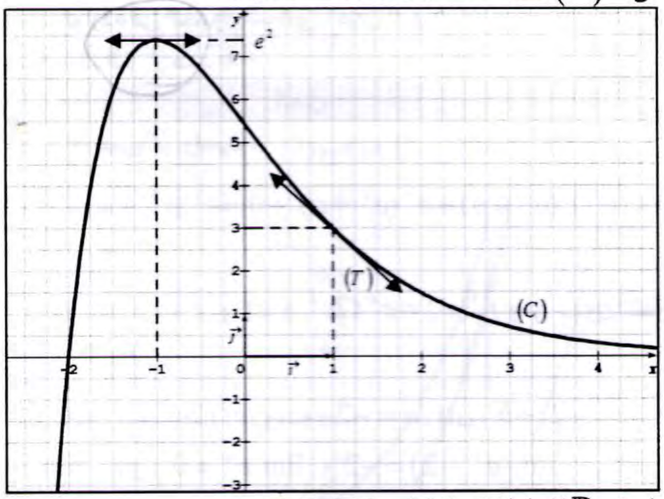
<u>خلاصة</u>: $f(x)=e^{x}(e^{x}-2)-3$ وجدول تغيرات الدالة f هو كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين 20

المنحني (C) أدناه هو لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+2)e^{-x+1}$

(T) هو المماس لـ (C) عند النقطة ذات A الفاصلة 1 .



1) حل ، بيانيا ، في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

أ/ $f(x)=0$. ب/ $f(x)>0$. جـ/ $f(x)<0$

د/ $f'(x)=0$. هـ/ $f'(x)>0$. و/ $f'(x)<0$.

2) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) • عين التقريب التآلفي للدالة f بجوار العدد 1 .

• دون استعمال الحاسبة ، عين قيمة مقربة لكل من $f(1,1)$ و $f(0,8)$.

الحل

1) أ/ $f(x)=0$ تكافئ $x=-2$ ، لأن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها -2 .

ب/ $f(x)>0$ تكافئ $x>-2$ ، لأن (C) يقع فوق محور الفواصل من أجل $x>-2$.

جـ / $f(x)<0$ تكافئ $x<-2$ ، لأن (C) يقع تحت محور الفواصل من أجل $x<-2$.

د / $f'(x)=0$ تكافئ $x=-1$ لأنه يوجد مماس وحيد لـ (C) يوازي محور الفواصل ، هذا المماس يمس (C) في النقطة ذات الفاصلة -1 .

هـ / $f'(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[$ ، لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$.

و / $f'(x)<0$ تكافئ $x\in]-1;+\infty[$ ، لأن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

2) جدول تغيرات الدالة f هو كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	0

3) • تعيين التقريب التآلفي للدالة f بجوار العدد 1 :

نعين التقريب التآلفي للدالة f بجوار العدد 1من معادلة (T) المماس لـ (C) عند النقطة ذات A الفاصلة 1 . معادلة (T) هي من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا : $f(1)=3$.

$f(x)=(x+2)e^{-x+1}$ ومنه :

$$f'(x)=(x+2)'e^{-x+1}+(x+2)\left(e^{-x+1}\right)'=e^{-x+1}-(x+2)e^{-x+1}$$
$$=e^{-x+1}(1-x-2)=(-x-1)e^{-x+1}$$

إذن : $f'(x)=(-x-1)e^{-x+1}$ ، ومنه : $f'(1)=(-1-1)e^{-1+1}=-2$

إذن : معادلة (T) هي من الشكل : $y=-2(x-1)+3$ ، أي : $y=-2x+5$.

الدالة : $x\mapsto -2x+5$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار العدد 1 .

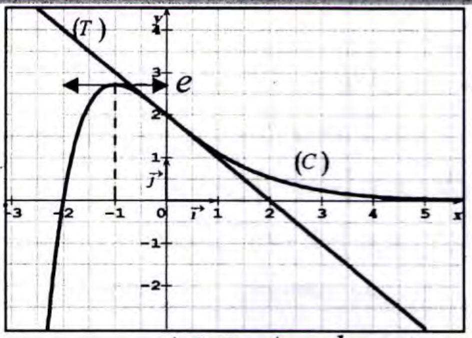
إذن : بجوار العدد 1 لدينا : $f(x)\approx -2x+5$ أي : $(x+2)e^{-x+1}\approx -2x+5$

• باستعمال النتيجة الأخيرة $f(x)\approx -2x+5$ وبما أن كل من 1,1 و 0,8 هو بجوار العدد 1 نجد هكذا :

$f(1,1)\approx(-2)\times(1,1)+5$ ، أي $f(1,1)\approx 2,8$.

$f(0,8)\approx(-2)\times(0,8)+5$ ، أي $f(0,8)\approx 3,4$.

تمرين 21



المنحني (C) المقابل هو لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. (T) هو المماس لـ (C) عند النقطة ذات A الفاصلة 0 .

1) أ• بقراءة بيانية ، أحسب ما يلي :
$f(-1)$ ، $f'(-1)$ ، $f(0)$ ، $f'(0)$.

ب• عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

جـ• شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) الدالة f معرفة بـ: $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

أ• باستعمال نتائج السؤال 1) عين a و b .

ب• أثبت أن النقطة A هي نقطة انعطاف للمنحني (C) .

الحل

1) أ• $f(-1)=e$ ، $f'(-1)=0$ ، $f(0)=2$ ، $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T) .

المماس (T) يمر من النقطتين ذات الإحداثيين $(0;2)$ ، $(2;0)$ ومنه: $f'(0)=\dfrac{2-0}{0-2}=-1$

إذن : $f'(0)=-1$.

ب• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

جـ• جدول تغيرات الدالة f هو كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2) $f(x)=(ax+b)e^{-x}$.

أ• تعيين a و b :

لدينا: $f(-1)=e$ ومنه : $(a(-1)+b)e^{-(-1)}=e$ ، ومنه : $-a+b=1$ ، ومن جهة : $f(0)=2$ ومنه : $(a(0)+b)e^{-0}=2$ ، ومنه : $b=2$ ، وبتعويض $b=2$ في المعادلة $-a+b=1$ نجد : $a=1$. إذن : $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

ب• نبين أن $f''(x)$ ينعدم عند العدد 0 ويغير من إشارته بجوار العدد 0 .

لدينا : الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين ولدينا :

$f'(x)=(x+2)'e^{-x}+(x+2)\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=e^{-x}(-x-1)$.

و : $f''(x)=\left(e^{-x}\right)'(-x-1)-e^{-x}=-e^{-x}(-x-1)-e^{-x}=-e^{-x}(-x-1+1)=xe^{-x}$

إذن : $f''(x)=xe^{-x}$. إن إشارة $f''(x)$ هي من إشارة x لأن $e^{-x}>0$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

نلاحظ أن $f''(x)$ ينعدم عند العدد 0 ويغير من إشارته بجوار العدد 0 . بالتالي النقطة $A(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) .

تمرين 22

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+1$ ، و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2) أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ مفسرا النهاية عند $-\infty$ بيانيا .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) عين نقاط تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات .

5) أحسب $f(-1)$ و $f(1)$ ثم أنشئ (C) .

6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-f(x)$.

اعتمادا على المنحني (C) ، أنشئ (γ) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق .

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}=2e^{x}(e^{x}-1)$.

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $e^{x}-1$ ، لأن $2e^{x}>0$ على $\mathbb{R}$.

• $e^{x}-1=0$ يكافئ $e^{x}=1$ ، أي $e^{x}=e^{0}$ ، أي $x=0$.

• $e^{x}-1<0$ يكافئ $e^{x}<1$ ، أي $e^{x}<e^{0}$ ، أي $x<0$.ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.

• $e^{x}-1>0$ يكافئ $e^{x}>1$ ، أي $e^{x}>e^{0}$ ، أي $x>0$.ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

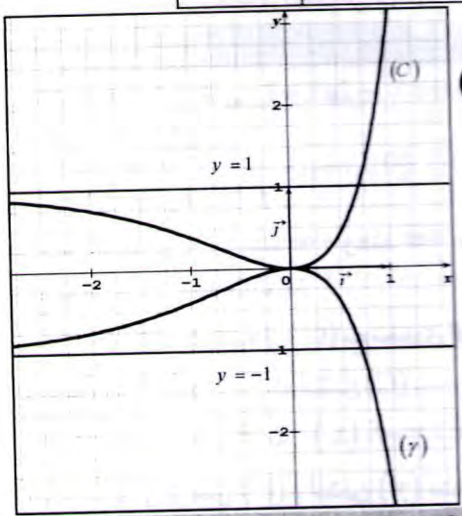
2) • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)=0-2\times0+1=1$ ، نستنتج أن المستقيم الذي معادلة له $y=1$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}(e^{x}-2)+1\right)=+\infty$.

3) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

حيث : $f(0)=e^{2\times0}-2e^{0}+1=0$



4) من خلال جدول التغيرات نلاحظ أن المنحني (C) يمر من المبدأ $O(0;0)$.

5) بحاسبة نجد $f(-1)\approx0,4$ و $f(1)\approx2,9$.

6) $g(x)=-f(x)$ تعني أن المنحنى (γ) هو نظير المنحني (C) بالنسبة إلى محور الفواصل .

نظير المستقيم المقارب $y=1$ لـ (C) عند $-\infty$ هو المستقيم المقارب $y=-1$ لـ (γ) عند $-\infty$

تمرين 23

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+e^{x}$ ، و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامدومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2) أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3) أحسب $f(0)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

6) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة O .

7) أنشئ (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم.

8) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=2x+m$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=1+e^{x}>0$. إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) • لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

• لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ ، ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3) $f(0)=0-1+e^{0}=-1+1=0$.

بما أن $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

فإن إشارة $f(x)$ هي كما في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

4) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) لدينا : $f(x)-y=(x-1)+e^{x}-(x-1)=e^{x}$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)-y=e^{x}>0$. ومنه (C) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$.

6) معادلة لـ (T) هي من الشكل : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=1+e^{0}=2$ ، ومنه بالتعويض نجد : $(T):y=2x$.

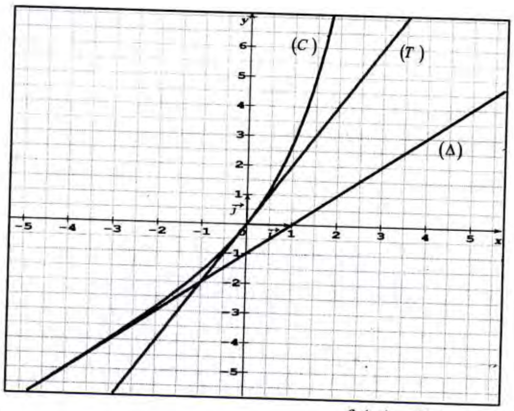
7) إنشاء : (Δ) ، (T) و (C) في نفس المعلم.

(Δ) :

x	1	0
y	0	-1

(T) :

x	0	1
y	0	2



8) حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ ،

إن وجدت ،هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي معادلته : $y=2x+m$.

هذا المستقيم يوازي المستقيم $(T): y=2x$ لأن لهما نفس معامل التوجيه الذي يساوي 2 .

ومنه :

- إذا كان $m<0$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . هنا المستقيم هو نفسه المماس (T).
- إذا كان $m>0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

تمرين 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(-x)+f(x)=-1$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المنحني (C_f) .

3) أرسم (C_f) .

4) g دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x)=|f(x)|$.

أ/ اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x .

ب/ أرسم في نفس المعلم (C_g) التمثيل البياني للدالة g اعتمادا على (C_f) .

الحل

1) دراسة تغيرات الدالة f:

• مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

• النهايات:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} = \dfrac{0+2}{0-1} = -2$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=-2$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

* لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^x+2\right)=2>0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^x-1\right)=0^-$ لأن من أجل $x<0$ يكون $e^x-1<0$. ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = -\infty$.

* لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^x+2\right)=2>0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^x-1\right)=0^+$ لأن من أجل $x>0$ يكون $e^x-1>0$. ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$.

من النهايتين الأخيرتين نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

• اتجاه التغير: الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(e^x+2\right)'\left(e^x-1\right)-\left(e^x-1\right)'\left(e^x+2\right)}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2} < 0$$

إذن: f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

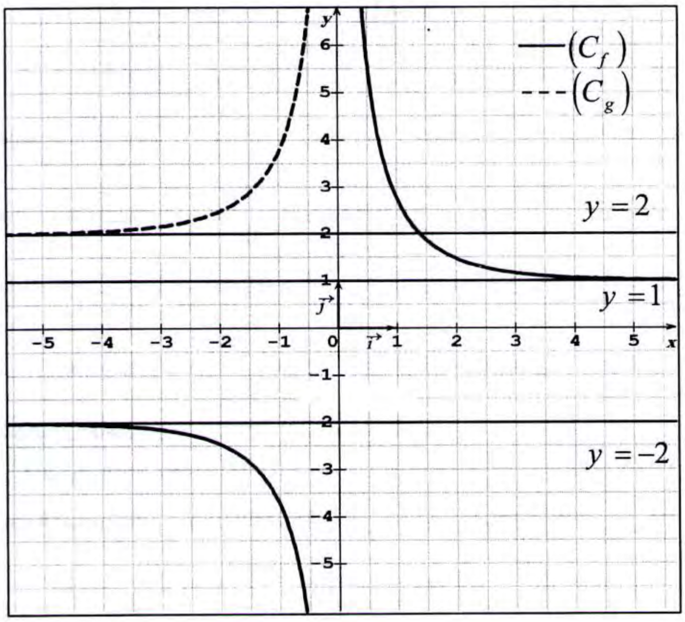
$$\frac{e^{-x}+2}{e^{-x}-1}+\frac{e^{x}+2}{e^{x}-1}=\frac{\left(e^{-x}+2\right)\left(e^{x}-1\right)-\left(e^{x}+2\right)\left(e^{-x}-1\right)}{\left(e^{-x}-1\right)\left(e^{x}-1\right)}=\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{-e^{-x}-e^{x}+2}$$

$$=\frac{e^{-x}+e^{x}-2}{-e^{-x}-e^{x}+2}=\frac{-(-e^{-x}-e^{x}+2)}{-e^{-x}-e^{x}+2}=-1$$

لدينا : $f(-x)+f(x)=-1$ تكافئ $f(2\times0-x)+f(x)=2\times\left(\frac{-1}{2}\right)$

وهذا معناه أن المنحني (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $A\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

3) رسم (C_f) :



4) أ/ $g(x)=|f(x)|$ تكافئ $g(x)=\begin{cases}f(x) & ;f(x)>0\\ -f(x) & ;f(x)<0\end{cases}$ ، أي :

$g(x)=\begin{cases}f(x) & ;x>0\\ -f(x) & ;x<0\end{cases}$. وبالتالي :

- (C_g) ينطبق على (C_f) من أجل $x>0$.

• (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل من أجل $x < 0$.

• نظير المستقيم المقارب $y = -2$ لـ (C_f) عند $-\infty$ هو المستقيم المقارب $y = 2$ لـ (C_g) عند $-\infty$.

تمرين 25

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

و (C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f.

ب/ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر النتائج بيانيا.

جـ/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C) .

3) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة A.

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2} - f(x)$

أ/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

جـ/ استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم (T) .

ما ذا تمثل النقطة A في المنحني (C) ؟

5) أرسم (T) و (C) .

الحل

1) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f:

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) • النهايات :

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{0}{1} = 0$. إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = 1$. إذن :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

جـ/ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

2) نبين أن : $f(2\times 0-x)+f(x) = 2\times\frac{1}{2} = 1$. لدينا:

$$f(2\times 0-x)+f(x) = f(-x)+f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^{-x}\left(1+e^x\right)+e^x\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)\left(1+e^x\right)} = \frac{e^x+e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}+2} = 1$$

إذن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C) .

3) معادلة المماس (T) هي من الشكل : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

لدينا: $f(0) = \frac{1}{2}$ و $f'(0) = \frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2} = \frac{1}{4}$. ومنه : $y = \frac{1}{4}(x-0)+\frac{1}{2}$

إذن : $(T): y = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

4) $g(x) = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$

أ/ إثبات أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)'-f'(x) = \frac{1}{4}-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{\left(1+e^x\right)^2-4e^x}{4\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}+1}{4\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{4(1+e^{x})^{2}}$$

ب / لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)\geq 0$. مع ملاحظة أن :

$g'(x)=0$ تكافئ $\frac{(e^{x}-1)^{2}}{4(1+e^{x})^{2}}=0$. ومنه: $(e^{x}-1)^{2}=0$ ومنه : $e^{x}-1=0$ أي: $x=0$

<u>جدول تغيرات الدالة g</u> :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

حيث :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right)=-\infty$.

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right)=+\infty$.

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

- $g(0)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{2}-f(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$.

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$ الموضحة في الجدول التالي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$		$-$	0	$+$	

جـ / من جدول الإشارة الأخير نستنتج أن :

- إذا كان $x\in\left]-\infty;0\right[$ فإن $g(x)<0$ ، أي $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)<0$ ومنه : (T) يقع تحت (C) على المجال $\left]-\infty;0\right[$.

- إذا كان $x\in\left]0;+\infty\right[$ فإن $g(x)>0$ ، أي $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)>0$ ومنه : (T) يقع

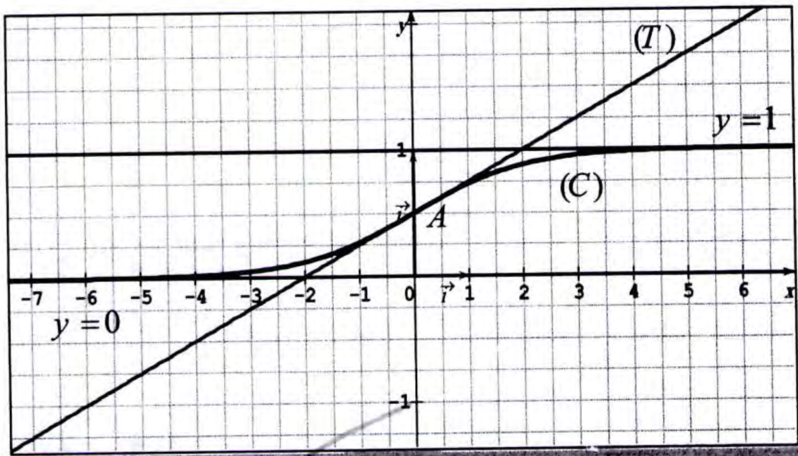
فوق (C) على المجال $]-\infty;0[$.

- (T) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 أي النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

- نلاحظ أن المماس (T) يخترق المنحني (C) في نقطة التماس $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ، إذن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) .

5) رسم (T) و (C) . (T) :

x	2	0
y	1	$\frac{1}{2}$



تمرين 26

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

و ليكن (C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة f فردية .

2) أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) أ• أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1} \quad \text{و} \quad f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

ب• استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

جـ• استنتج أن المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$
ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ').

4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5) أرسم (Δ) ، (Δ') و (C) في نفس المعلم.

الحل

1) لدينا $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -x - \frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1} = -x - \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$= -x - \frac{1-e^x}{1+e^x} = -x + \frac{e^x-1}{e^x+1} = -\left(x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = -f(x)$$

إذن الدالة f فردية ، وبالتالي يكفي اقتصار دراسة f على المجال $]0;+\infty[$ أو المجال $]-\infty;0]$.

المنحني (C) يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

2) لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right) = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$. إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

بما أن f فردية و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3) أ• من أجل كل عدد حقيقي x :

$$x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = x - \left(1 - \frac{2}{e^x+1}\right) = x - \frac{(e^x+1)-2}{e^x+1} = x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-\left(-1+\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=x-\frac{-\left(e^x+1\right)+2e^x}{e^x+1}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

ب• لدينا: $f(x)-y=\frac{2}{e^x+1}$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

لدينا: $f(x)-y=\frac{2}{e^x+1}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ومنه (C) يقع فوق (Δ).

جـ• يمكننا إتباع نفس الأسلوب المتبع في ب. لكن لدينا النتيجة التالية:

بما أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$. و f دالة فردية فإن المستقيم (Δ') الذي معادلته $(-y)=(-x)-1$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

$(-y)=(-x)-1$ تكافئ: $y=x+1$. ومنه: $(\Delta'): y=x+1$.

وبما أن (C) يقع فوق (Δ) و f دالة فردية فإن (C) يقع تحت (Δ').

4) ندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $f(0)=0-\frac{e^0-1}{e^0+1}=0$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}>0$$

ومنه: f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات على المجال $[0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

5) رسم (Δ):

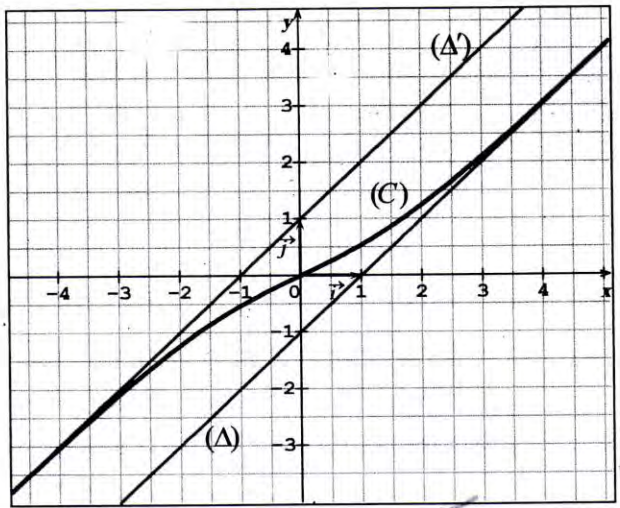
x	0	1
y	-1	0

رسم (Δ'):

x	0	1
y	1	2

لدينا : $f(0)=0$ ومنه المنحني (C) يمر من المبدأ $O(0;0)$.

نرسم (C) على المجال $[0;+\infty[$ ثم نتمه على $\mathbb{R}$ باستعمال التناظر بالنسبة إلى $O(0;0)$.



تمرين 27

I / نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^x+x+1$.

1) أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم برر أن :

$-1{,}28<\alpha<-1{,}27$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II / نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$ ؛

و ليكن (C) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، (نقبل أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

2) بين أن : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) بين أن : $f(\alpha)=\alpha+1$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ بالتقريب إلى 10^{-2} .

4) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$، ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) . (نقبل أن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

6) أرسم (Δ) و (C) في نفس المعلم .

الحل

I/ $g(x) = e^x + x + 1$

1) • لدينا : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \to -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$.

إذن : $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

• لدينا : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ ومنه : $\lim_{x \to +\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$.

إذن : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن مجموع الدالتين : $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x+1$ القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $g'(x) = (e^x)' + (x+1)' = e^x + 1$.

بما أن $e^x > 0$ على $\mathbb{R}$ فإن $e^x + 1 > 0$ ومنه: $g'(x) > 0$ ، إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$. لتبرير أن : $-1,28 < \alpha < -1,27$

يكفي أن نتحقق من أن $g(-1,28)$ و $g(-1,27)$ من إشارتين مختلفتين .

لدينا بالحساب : $g(-1,28) \approx -0,002 < 0$ و $g(-1,27) \approx 0,01 > 0$.

4) إشارة $g(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II/ $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.

1) • لدينا فرضا $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$ ومنه : $\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، ونستنتج عندئذ أن المستقيم ذا المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

• ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 1) = +\infty$ ، ومنه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$.

<u>إزالة حالة عدم التعيين</u> :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ نستطيع أن نكتب : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} = \frac{e^x x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = +\infty$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن حاصل قسمة الدالتين $x \mapsto xe^x$ و $x \mapsto e^x + 1$ القابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مع الدالة $x \mapsto e^x + 1$ لا تنعدم على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = \frac{(xe^x)'(e^x+1) - (e^x+1)' \times xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

بما أن $\frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ على $\mathbb{R}$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ المحصل عليها سابقا.

لدينا هكذا :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	

إذن : الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

3) إثبات أن : $f(\alpha) = \alpha + 1$.

لدينا : $f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$.

ولدينا من جهة :العدد α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$ ، إذن : $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0$ تكافئ $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$ ، ومنه : $e^\alpha = -\alpha - 1$.

بتعويض $e^{\alpha}=-\alpha-1$ في العلاقة $f(\alpha)=\dfrac{\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}$ نجد :

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}=\alpha+1$ ، إذن : $f(\alpha)=\alpha+1$.

استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتقريب إلى 10^{-2} :

نعلم أن : $-1,28<\alpha<-1,27$ ومنه : $1-1,28<\alpha+1<1-1,27$ ، إذن :

$-0,28<f(\alpha)<-0,27$.

4) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) لدينا : $f(x)-y=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}+1}-x=\dfrac{xe^{x}-x\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}=\dfrac{-x}{e^{x}+1}=\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{(-1)}{\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1+\dfrac{1}{e^{x}}}=-1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{(-1)}{\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}=0$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=0$ وبالتالي المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$

- وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) :

وجدنا سابقا أن : $f(x)-y=\dfrac{-x}{e^{x}+1}$ ،ومنه إشارة $f(x)-y$ هي من إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	
$f(x)-y$		+	0	-	

إذن :

- (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;0[$.
- (C) يقع تحت (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.
- (Δ) يقطع (C) في المبدأ $O(0;0)$.

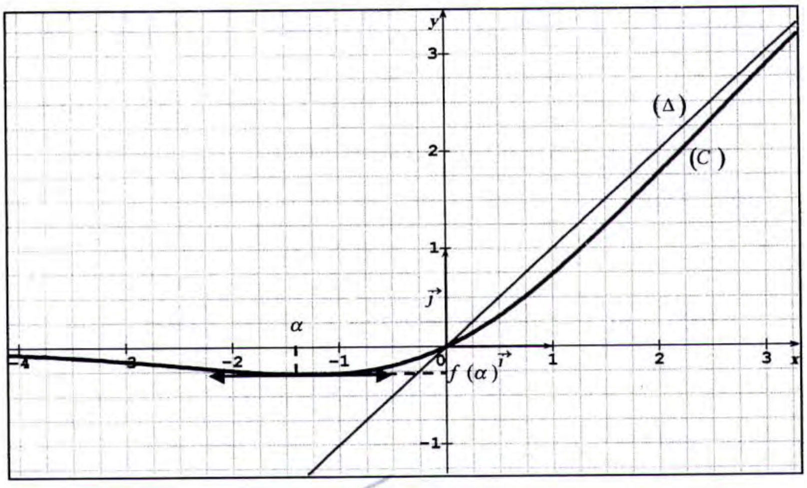
6) رسم (Δ) و (C) في نفس المعلم .

(Δ):

x	0	1
y	0	1

- نقاط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات :

• لدينا: $f(x)=0$ تعني $\frac{xe^x}{e^x+1}=0$ ومنه : $x=0$.إذن : (C) يمر من المبدأ $O(0;0)$.



تمرين 28

I / لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x+2-e^x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها . (نقبل أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0;+\infty[$ ، ثم برر أن : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II / لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$.

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-3} .

4) أرسم (C).

الحل

1) دراسة تغيرات الدالة g :

• النهايات :

$g(0)=0+2-e^{0}=1$ ، ومنه : $g(0)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ ، إذن لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}-1\right)$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$ وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ فرضا فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$. ومنه :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}}+\frac{2}{e^{x}}-1\right)=-\infty$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

• اتجاه التغير :

$g'(x)=1-e^{x}$. وبما أن $x\in[0;+\infty[$ فإن $e^{x}\geq1$. ومنه : $1-e^{x}\leq0$. إذن $g'(x)\leq0$

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

• جدول التغيرات :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$1 \searrow -\infty$

2) الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و $0\in]-\infty;1]$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0;+\infty[$ ، ولتبرير أن : $1{,}14<\alpha<1{,}15$ يكفي أن نتحقق من أن $g(1{,}14)$ و $g(1{,}15)$ من إشارتين مختلفتين .

لدينا بالحساب : $g(1{,}14)\approx0{,}013>0$ و $g(1{,}15)\approx-0{,}008<0$.

3) إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ هي كما في الجدول التالي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

لأن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

II / $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(xe^x+1\right)'\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(x+2-e^x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$. وبما أن $\dfrac{e^x}{\left(xe^x+1\right)^2}>0$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفسها

إشارة $g(x)$ ، لدينا هكذا :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

<u>جدول تغيرات الدالة</u> f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

حيث : $f(0)=\dfrac{e^0-1}{0e^0+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{xe^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(x+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\left(x+\frac{1}{e^x}\right)}=0$$

ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له : $y=0$ (محور الفواصل) مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

2) إثبات أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$. ومن جهة، بما أن α الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ فإن $g(\alpha)=0$. لدينا : $g(\alpha)=0$ تكافئ $\alpha+2-e^{\alpha}=0$ ، ومنه $e^{\alpha}=\alpha+2$.

بتعويض $e^{\alpha}=\alpha+2$ في العلاقة $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ ، نجد :

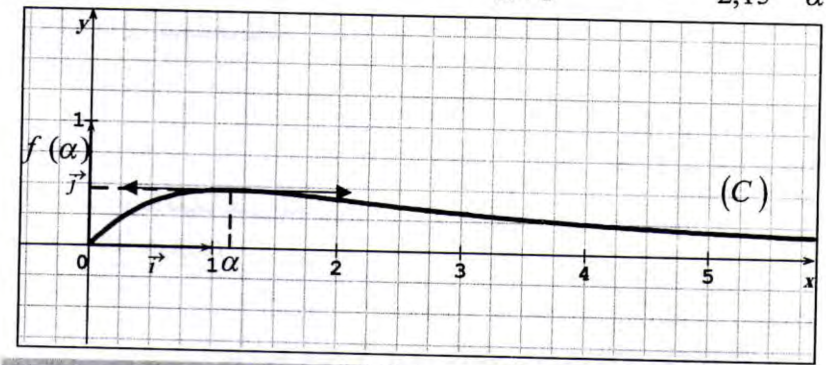
$$f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-3} :

لدينا : $1,14<\alpha<1,15$ ومنه : $2,14<\alpha+1<2,15$ ، بالمرور إلى المقلوب نجد :

$\dfrac{1}{2,15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2,14}$ ، أي $0,465<\dfrac{1}{\alpha+1}<0,467$ ، إذن : $0,465<f(\alpha)<0,467$

4) رسم (C)



تمرين 29

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : (E).... $y'+y=e^{-x}$.

1) بين أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=xe^{-x}$ هي حل للمعادلة (E) .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : (E_0).... $y'+y=0$.

3) بين أنه تكون دالة v معرفة على $\mathbb{R}$ حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $u-v$ حلا للمعادلة (E_0).

4) استنتج جميع حلول المعادلة (E) .

5) عين الدالة f ، حل للمعادلة (E) ، ومنحناها يمر من النقطة $A(0;2)$.

الحل

1) نبين أن : $u'(x)+u(x)=e^{-x}$.

لدينا: $u'(x)+u(x)=\left(xe^{-x}\right)'+xe^{-x}=1\times e^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}$

إذن u هي حل للمعادلة (E) .

2) $y'+y=0$. تكافئ $y'=-y$ ، وهي من الشكل $y'=ay$ ، الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة (E_0) هي الدوال : $x\mapsto Ce^{-x}$ ، حيث C ثابت حقيقي .

3) **أولا** : نفرض أن v حل للمعادلة (E) ونبرهن أن $u-v$ حل للمعادلة (E_0) .

لدينا: v حل للمعادلة (E) معناه : $v'+v=e^{-x}$. لنبرهن أن $u-v$ حل للمعادلة (E_0) ،

أي نبرهن أن $(u-v)'+(u-v)=0$.

لدينا: $(u-v)'+(u-v)=u'-v'+u-v=(u'+u)-(v'+v)$

وبما أن كل من u و v حل للمعادلة (E) فإن : $u'+u=e^{-x}$ و $v'+v=e^{-x}$.

ومنه: $(u'+u)-(v'+v)=e^{-x}-e^{-x}=0$. إذن : $(u-v)'+(u-v)=0$.

ثانيا : نفرض أن $u-v$ حل للمعادلة (E_0) ونبرهن أن v حل للمعادلة (E) .

لدينا : $u-v$ حل للمعادلة (E_0) معناه : $(u-v)'+(u-v)=0$.

ومنه: $u'-v'+u-v=0$ ، ومنه : $(u'+u)-(v'+v)=0$ ، ومنه : $v'+v=u'+u$

وبما أن : $u'+u=e^{-x}$ فإن : $v'+v=e^{-x}$ وهذا ما يدل أن v حل للمعادلة (E) .

4) استنتاج جميع حلول المعادلة (E) :

ليكن v حل للمعادلة (E) ، حسب ما سبق : $u-v$ حل للمعادلة (E_0) ومنه :

$u-v=Ce^{-x}$ ، ومنه : $v=u-Ce^{-x}$ ، ومنه : $v=xe^{-x}-Ce^{-x}$ ومنه $v=(x-C)e^{-x}$

إذن :الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة (E) هي الدوال : $x\mapsto(x-C)e^{-x}$ ، حيث C ثابت حقيقي .

5) الدالة f ، حل للمعادلة (E) ، و منحناها يمر من النقطة $A(0;2)$ معناه :

$f(x)=(x-C)e^{-x}$ و $f(0)=2$.

$f(0)=2$ تعني $(0-C)e^{-0}=2$ ، أي : $C=-2$. إذن : $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

تمرين 30

لتكن المعادلة التفاضلية $y'=y(1-y).....(E)$ ، نريد إيجاد حلول (E) التي لا تنعدم على $\mathbb{R}$ لذلك نضع : $z=\dfrac{1}{y}$.

1) تحقق أن : $z' = -z + 1.....(E')$.

2) بين أن حلول (E') هي الدوال $x \mapsto 1 + ce^{-x}$ حيث c ثابت حقيقي.

3) استنتج حلول المعادلة (E) .

الحل

1) لدينا: $z = \frac{1}{y}$ ومنه : $z' = \frac{-y'}{y^2}$. وبما أن $y' = y(1-y)$ فإن :

$z' = \frac{-y(1-y)}{y^2} = \frac{-1+y}{y} = -\frac{1}{y} + 1 = -z + 1$ ، أي : $z' = -z + 1$.

2) لدينا : $z' = -z + 1$ من الشكل : $z' = az + b$ مع $a = -1$ و $b = 1$.

إذن : حلول (E') هي الدوال $x \mapsto ce^{-x} - \frac{1}{(-1)}$ حيث c ثابت حقيقي .

أي الدوال $x \mapsto 1 + ce^{-x}$ حيث c ثابت حقيقي .

3) استنتاج حلول المعادلة (E) :

لدينا : $z = \frac{1}{y}$ ومنه : $y = \frac{1}{z}$ ، مع $z = 1 + ce^{-x}$.

إذن : $y = \frac{1}{1 + ce^{-x}}$ حيث c ثابت حقيقي .

تمرين 31

q شحنة مكثف كهربائي تعطى بدلالة الزمن t كما يلي : $q(t) = 6\left(1 - e^{-0,2t}\right)$

حيث $t \geq 0$ و t مقدر بالثانية .

1) بين أن الدالة q متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. فسر هذه النتيجة .

2) أحسب نهاية الدالة q لما t يؤول إلى $+\infty$. فسر هذه النتيجة .

3) شكل جدول تغيرات الدالة q .

4) أرسم (C) المنحني الممثل للدالة q في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) • بين أنه توجد لحظة زمنية وحيدة t_0 بحيث: $q(t_0) = 5,7$.

• باستعمال حاسبة مبرمجة ، جد قيمة تقريبية لـ t_0.

الحل

1) الدالة q تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا: $q'(t) = 6\left(0,2e^{-0,2t}\right) = 1,2e^{-0,2t} > 0$

إذن الدالة q متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

<u>التفسير</u> : تزداد الشحنة q كلما ازدادت مدة الشحن .

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 6\left(1 - e^{-0,2t}\right) = 6(1-0) = 6$

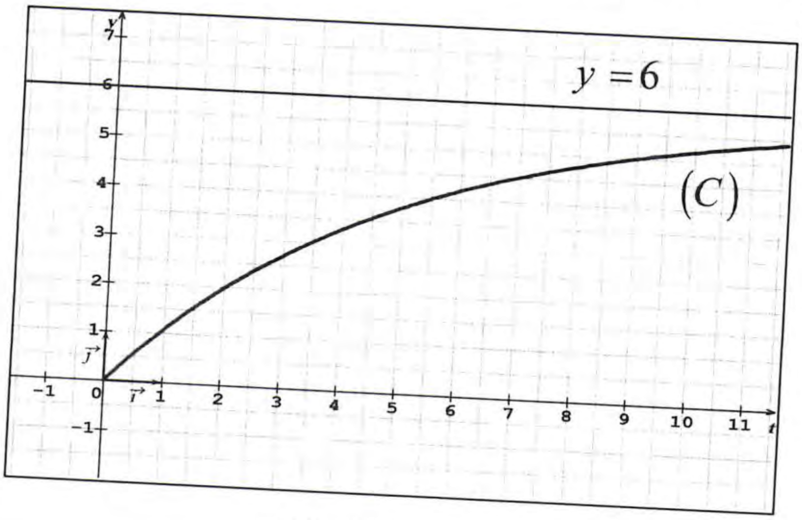
التفسير :الشحنة لا يمكنها تعدي القيمة 6 مهما كبرت مدة الشحن.

3) جدول تغيرات الدالة q :

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$q'(t)$	$+$
$q'(t)$	$0 \nearrow 6$

حيث : $q(0)=6\left(1-e^{-0,2\times 0}\right)=0$

4) رسم (C)



5) • اثبات أنه توجد لحظة زمنية وحيدة t_0 بحيث: $q(t_0)=5,7$.

الدالة q مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و $5,7\in]0;6[$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد t_0 من المجال $[0;+\infty[$ بحيث: $q(t_0)=5,7$.

• باستعمال ، مثلا ، الحاسبة $Ti\ 92$ وبحل المعادلة $q(t)=5,7$ نجد أنها تقبل حلا وحيدا $t_0\approx 14,98s$.

تمرين 32

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق ، يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا و القدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا ، ليكن $N(t)$ عدد البكتيريا في اللحظة t معبر عنها بالساعات ، الملاحظات التي استخلصها قادته إلى نمذجة هذه الوضعية بمعادلة تفاضلية : $N'(t)=0,07N(t)(1-10^{-3}N(t))$.

نضع : $P(t)=\dfrac{1}{N(t)}$ مع $N(t)\neq 0$

1) بين أن الدالة P تحقق المعادلة التفاضلية $P'=-0,07P+7\times10^{-5}$.

2) استنتج عبارة $P(t)$ ثم $N(t)$ بدلالة t.

3) ما هو عدد البكتيريا بعد 40 ساعة؟

4) ما هو الوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتيريا يمثل 80 % من الإستيعابية العظمى لهذا الوسط.

الحل

1) لدينا : $P(t)=\dfrac{1}{N(t)}$ ومنه : $P'(t)=\dfrac{-N'(t)}{N^2(t)}$.

لكن $N'(t)=0,07N(t)(1-10^{-3}N(t))$ ومنه :

$$P'(t)=\frac{-0,07N(t)(1-10^{-3}N(t))}{N^2(t)}=\frac{-0,07(1-10^{-3}N(t))}{N(t)}=\frac{-0,07}{N(t)}+0,07\times10^{-3}$$
$$=-0,07P(t)+7\times10^{-5}$$

إذن : $P'=-0,07P+7\times10^{-5}$.

2) لدينا : $P'=-0,07P+7\times10^{-5}$ ومنه : $p(t)=Ce^{-0,07t}-\dfrac{7\times10^{-5}}{-0,07}$

إذن : $p(t)=Ce^{-0,07t}+10^{-3}$. حيث C ثابت حقيقي.

<u>تعيين الثابت</u> C :

لدينا من المعطيات $N(0)=100$ ومنه : $P(0)=\dfrac{1}{N(0)}=\dfrac{1}{100}$

$P(0)=\dfrac{1}{100}$ تكافئ $Ce^{-0,07\times0}+10^{-3}$ ، ومنه : $C=9\times10^{-3}$.

إذن: $p(t)=9\times10^{-3}e^{-0,07t}+10^{-3}$.

وبما أن $N(t)=\dfrac{1}{P(t)}$ نستنتج أن :

$$N(t)=\frac{1}{9\times10^{-3}e^{-0,07t}+10^{-3}}=\frac{1}{10^{-3}\left(9\times e^{-0,07t}+1\right)}=\frac{10^3}{9\times e^{-0,07t}+1}$$

إذن: $N(t)=\dfrac{10^3}{9\times e^{-0,07t}+1}$.

3) لتعيين عدد البكتيريا بعد 40 ساعة نعوض $t = 40$ في العلاقة: $N(t) = \dfrac{10^3}{9\times e^{-0,07t}+1}$

$N(40) = \dfrac{10^3}{9\times e^{-0,07\times 40}+1} \approx 646,2910222$ أي ما يعادل 647 بكتيريا .

3) 80% يعادل 800 بكتيريا ، المطلوب إذن حل المعادلة $N(t) = 800$.

باستعمال ، مثلا ، الحاسبة $Ti\ 92$ نجد أن $t \approx 51,19$.

إذن عدد الساعات هو تقريبا 51 ساعة .

تمرين 33

بينت دراسة مخبريه لمجتمع من القوارض أن عددها يتزايد وفق دالة أسية ؛و توجد في الواقع مؤثرات أخرى تعرقل هذا التزايد (بموت نسبة معينة منه).نرمز بالرمز $u(t)$ لعدد القوارض الأحياء (مقدرة بالآلاف) في اللحظة t (المقدرة بالسنوات)

نقبل أن الدالة u تحقق الشروط التالية :
$$(E)\begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & (E_1) \\ u(0) = 1 & (E_2) \end{cases}$$

1. نفرض أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب t فإن $u(t) > 0$. نعرف الدالة h على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h = \dfrac{1}{u}$

برهن أن: u تحقق الشروط (E) إذا وفقط إذا كانت h تحقق :
$$(E')\begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & (E_1') \\ h(0) = 1 & (E_2') \end{cases}$$

2. أوجد عبارة h ثم عبارة u.
3. ما هي قيمة $u(t)$ عندما يؤول t إلى $+\infty$.

الحل

1) نضع $h = \dfrac{1}{u}$ أي $u = \dfrac{1}{h}$ ونفرض أن u تحقق الشرط (E) لدينا $h(0) = \dfrac{1}{u(0)} = 1$

إذن الشرط (E_2') محقق.

• من $u = \dfrac{1}{h}$ ينتج $u' = -\dfrac{h'}{h^2}$ وبالتعويض في (E_1) نجد $-\dfrac{h'(t)}{[h(t)]^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{h(t)} - \dfrac{1}{12}\dfrac{1}{[h(t)]^2}$

فينتج $h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12}$ أي (E_1') محققة .

الاستلزام العكسي

نفرض أن h تحقق الشرط (E'). لدينا $u(0)=\frac{1}{h(0)}=1$ إذن الشرط (E_2) محقق

ونعلم أن $h'=-\frac{u'}{u^2}$ إذن $-\frac{u'(t)}{[u(t)]^2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{u(t)}+\frac{1}{12}$ فينتج $u'(t)=\frac{u(t)}{4}-\frac{[u(t)]^2}{12}$

إذن (E_1) محققة.

2) نعلم أن حلول المعادلة التفاضلية $h'(t)=-\frac{1}{4}h(t)+\frac{1}{12}$ هي من الشكل

$y=ke^{-\frac{t}{4}}+\frac{1}{3}$ حيث k عدد حقيقي وحسب الشرط $h(0)=1$ فإن $k=\frac{2}{3}$

ومنه $h(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}$ فينتج $u(t)=\frac{1}{h(t)}=\frac{3}{1+2e^{-\frac{t}{4}}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}u(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{1+2e^{-\frac{t}{4}}}=3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{t}{4}}=0$

المحور الخامس

الدوال اللوغرتمية

ما يجب أن يعرف

الدالة اللوغريتمية النيبيرية

1. الدالة اللوغرتمية النيبيرية :

اللوغاريتم النيبيري لعدد :

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$. يسمى هذا العدد «اللوغاريتم النيبيري للعدد a » و نرمز إليه بالرمز « $\ln a$ ».

لدينا : $b = \ln a$ و $e^b = a$ تكافئ $b = \ln a$

تعريف الدالة « ln » :

نسمي « الدالة اللوغاريتمية النيبيرية » الدالة التي نرمز إليها بالرمز « ln » و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ تعني $y = \ln x$.
ونقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية « ln » هي الدالة العكسية للدالة الأسية « exp ».

2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$.

4) بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ وبما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

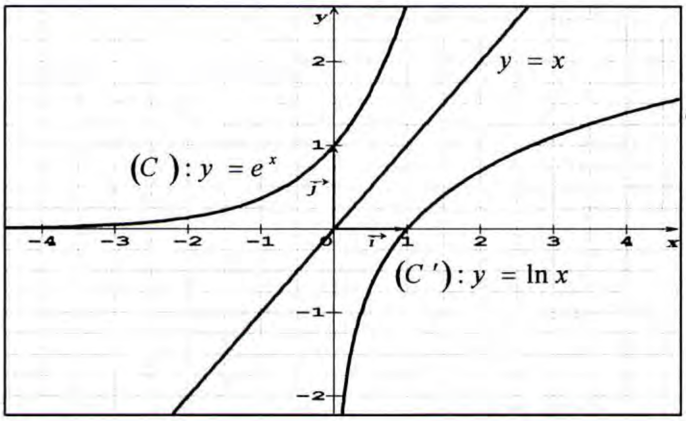
5) حساب بعض الصور :

ln

y	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
x	-1	0	1	2

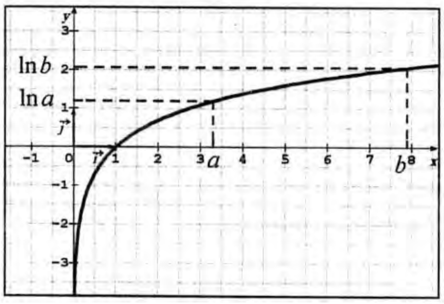
exp

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$



2. اتجاه تغير الدالة " ln ":

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



نتائج: من أجل كل عددين a و b من $]0;+\infty[$:

1) $\ln a = \ln b$ يعني $a=b$.
2) $\ln a < \ln b$ يعني $a<b$.
3) $\ln a > 0$ يعني $a>1$.
و $\ln a < 0$ يعني $0<a<1$.
كما أن $\ln 1 = 0$.

وبالتالي إشارة $\ln x$ هي كما في الجدول الموالي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

3. حل معادلات و متراجحات بأشكال لوغرتمية :

نتائج : من أجل كل عبارتين جبريتين $u(x)$ و $v(x)$ ومن اتجاه تغير الدالة اللوغرتمية نستنتج القواعد التالية :

- $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ تكافئ $u(x)=v(x)$.
- $\ln[u(x)] > \ln[v(x)]$ تكافئ $u(x)>v(x)$.
- $\ln[u(x)] \geq 0$ تكافئ $u(x)\geq 1$ ، • $\ln[u(x)] \leq 0$ تكافئ $0<u(x)\leq 1$.

الخاصية الأساسية و نتائجها

1. الخاصية الأساسية :

خاصية :من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

2. نتائج :

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b .$$

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما هكذا :من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2،....، a_n من $]0;+\infty[$: $\ln(a_1a_2..a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ،
$\ln(a^n) = n\ln a$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$: $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

دراسة الدالة اللوغريتمية النيبيرية

1. النهايات :

مبرهنة: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad (1)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \quad (2)$

2 . الاستمرارية و الاشتقاقية :

مبرهنة: الدالة " ln " مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. جدول تغيرات الدالة " ln " :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- المنحني (C) الممثل للدالة " ln " يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1) = 1$ و $\ln 1 = 0$.

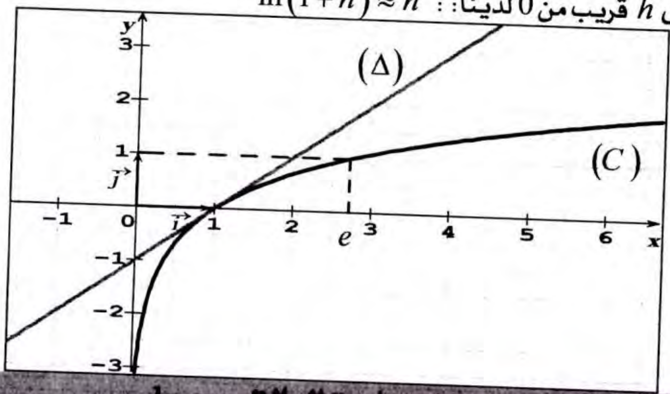
إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y = x - 1$.

- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1}$ أو $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1}$

نتيجة: الدالة $h \mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h \mapsto \ln(1+h)$ بجوار 0 .

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: : $\ln(1+h) \approx h$



دراسة الدالة $\ln ou$

1. النهايات:

لدراسة نهاية دالة $\ln ou$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة . بمعنى ، لحساب

النهاية : $\lim_{x \to a} \ln[u(x)]$ نتبع ما يلي :

إذا كان $\lim_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim_{X \to b} \ln X = c$ فإن $\lim_{x \to a} \ln[u(x)] = c$.

حيث : a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

2 . اتجاه التغير: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln ou$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

3. المشتقة : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln ou$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I : $(\ln ou)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

دالة اللوغريتم العشري

1 . دالة اللوغريتم العشري:

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

2 . خواص :

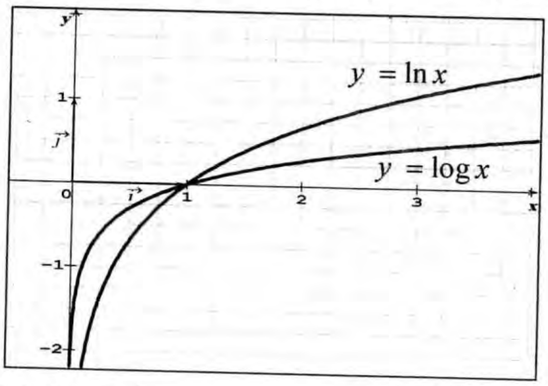
خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\log(ab) = \log a + \log b$.

نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$: $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :
$\log(a^n) = n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n : $\log(10^n) = n$ ، لأن $\log 10 = 1$.



خاصية2: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$

تمارين محلولة

تمرين 01

جد مجموعة تعريف كل دالة من الدالتين :

1) $f(x)=\ln(x-1)$. 2) $g(x)=\ln(x^2)$.

الحل

1) تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x-1>0$ أي $x>1$ و منه مجموعة تعريف f هي $]1;+\infty[$.

2) تكون g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2>0$ أي $x\neq 0$ و منه مجموعة تعريف g هي $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

تمرين 02

عين حسب قيم x إشارة $\ln(x-3)$ على المجال $]3;+\infty[$.

الحل

- $\ln(x-3)=0$ يعني $x-3=1$ أي $x=4$.
- $\ln(x-3)<0$ يعني $0<x-3<1$ أي $3<x<4$.
- $\ln(x-3)>0$ يعني $x-3>1$ أي $x>4$.

و منه إشارة $\ln(x-3)$ هي ملخصة في الجدول التالي:

x	3		4		$+\infty$
$\ln(x-3)$		-	0	+	

تمرين 03

حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) $\ln x+2=0$ ، (2) $\ln x-3<0$

(3) $\ln(x+1)=2$ ، (4) $\ln(x-1)\geq -3$

الحل

1) مجموعة تعريف المعادلة (1) هي $D=]0;+\infty[$. ولدينا :

(1) تعني $\ln x=-2$ أي $\ln x=\ln e^{-2}$ أي $x=e^{-2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{e^{-2}\}$

2) مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]0;+\infty[$. ولدينا :

(2) تعني $\ln x<3$ أي $\ln x<\ln e^3$ أي $x<e^3$ و منه مجموعة الحلول هي :

$S=]-\infty;e^3[\cap]0;+\infty[$ أي $S=]0;e^3[$

3) مجموعة تعريف المعادلة (3) هي $D =]-1;+\infty[$. ولدينا :

(3) تعني $x+1=e^2$ أي $x=e^2-1$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{e^2-1\}$

4) مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D =]1;+\infty[$. ولدينا :

(4) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S =]1+e^{-3};+\infty[$

تمرين 04

1) بسط الأعداد التالية :

$a=\ln e^2$ ، $b=\ln e^{-3}$ ، $c=e^{\ln 6}$ ، $d=e^{\ln 2+\ln 3}$.

2) أكتب الأعداد التالية على أبسط شكل ممكن :

$a=\ln 14-\ln 7$ ، $b=\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{2}{5}$ ، $c=\frac{\ln 100}{\ln 10}$ ، $d=\ln 8-\ln 12+\ln 15$ ،

$e=\ln 10000+\ln 0,01$ ، $f=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

الحل

1) نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x=\ln e^x$ ومنه :

$a=\ln e^2=2\ln e=2$ و $b=\ln e^{-3}=-3\ln e=-3$

نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $x=e^{\ln x}$ ومنه : $c=e^{\ln 6}=6$

2) بتطبيق الخاصية الأساسية للدالة " ln " ونتائجها نجد أن :

$a=\ln 14-\ln 7=\ln\frac{14}{7}=\ln 2$ ، $b=\ln\frac{5}{2}+\ln\frac{2}{5}=\ln\left(\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}\right)=\ln 1=0$

$c=\frac{\ln 100}{\ln 10}=\frac{\ln 10^2}{\ln 10}=\frac{2\ln 10}{\ln 10}=2$ ،

$$d=\ln 8-\ln 12+\ln 15=\ln\frac{8}{12}+\ln 15=\ln\left(\frac{8}{12}\times 15\right)=\ln 10$$

$$e=\ln 10000+\ln 0,01=\ln 10^4+\ln 10^{-2}=\ln\left(10^4\times 10^{-2}\right)=\ln 10^2=2\ln 10$$

$$=2\left[\ln\left(2\times 5\right)\right]=2\ln 2+2\ln 5$$

$$f=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=\ln\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)\times\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]=\ln\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)=\ln 1=0$$

تمرين 05

بسط العبارات التالية :

$A=\ln 2+\ln\frac{1}{2}-\ln(e^{-2})$ ، $B=\ln(3^2)+\ln 3-\ln\sqrt{3}$ ، $C=\frac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})}-\ln 2e$ ،

$D=\ln 125-\ln 81-\ln\frac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}$ ، $E=\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}]+\ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]$.

الحل

- $A=\ln 2+\ln\frac{1}{2}-\ln(e^{-2})=\ln 2-\ln 2-(-2\ln e)=2$
- $B=\ln(3^2)+\ln 3-\ln\sqrt{3}=2\ln 3+\ln 3-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{5}{2}\ln 3$
- $C=\frac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})}-\ln 2e=\frac{-2\ln e}{-\ln e}-(\ln 2+\ln e)=2-\ln 2-1=1-\ln 2$
- $D=\ln 125-\ln 81-\ln\frac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=\ln(5^3)-\ln(3^4)-(\ln 3-\ln 5)+2\frac{1}{2}\ln(3^5)$

$=3\ln 5-4\ln 3-\ln 3+\ln 5+5\ln 3=4\ln 5$

- $E=\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}]+\ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]=142\ln(\sqrt{2}-1)+142\ln(\sqrt{2}+1)$

$=142[\ln(\sqrt{2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)]=142\ln(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=142\ln 1=0$

تمرين 06

ليكن (T) مماس المنحني (C) الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ عند النقطة $A(e;1)$.

1) عين معادلة للمماس (T) .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{e}x$.

احسب $f(e)$.

3) استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (T) .

الحل

1) معادلة (T) هي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ و منه $(T):y=\frac{1}{e}x$

2) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$.

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$ وهكذا:

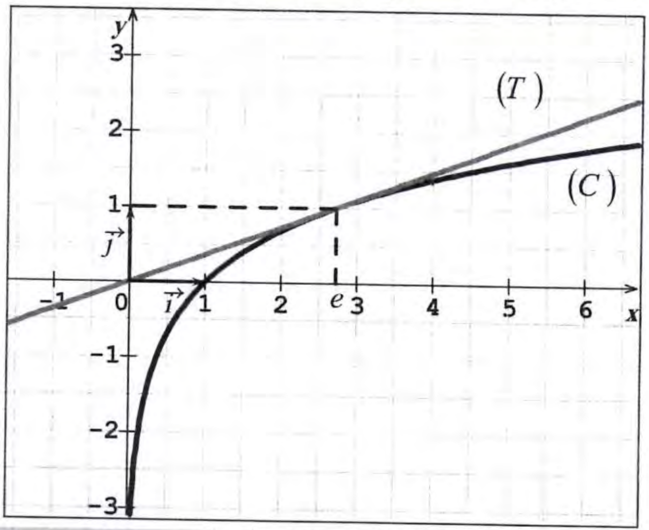
$f'(x)\geq 0$ من أجل $0<x\leq e$ و $f'(x)<0$ من أجل $x>e$.

$f(e)=0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad$ e $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\searrow$

3) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x) \leq 0$ أي من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$\ln(x) \leq \frac{1}{e}x$. نستنتج إذن أن المنحني (C) يقع تحت المماس (T) على المجال $]0;+\infty[$.



تمرين 07

في كل مما يلي اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة .

1 . التمثيل البياني للدالة اللوغرتمية يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة A ذات الإحداثيين: ج1) $(1;0)$ ، ج2) $(3;\ln e^3)$ ، ج3) $\left(\frac{1}{3};-\ln 3\right)$.

2 . نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)$ ، لدينا:

ج1) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ، ج2) $f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ ، ج3) $f(x)=\ln(x^2+x)$.

3 . المماس لمنحني الدالة اللوغرتمية عند النقطة ذات الفاصلة e يمر من :

ج1) النقطة $A(e;e)$ ، ج2) مبدأ المعلم ، ج3) النقطة $B(1;0)$.

الحل

1 . ج3) $\left(\frac{1}{3};-\ln 3\right)$:

التبرير :من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $\ln'(x)=3$ تكافئ $\frac{1}{x}=3$ ، أي : $x=\frac{1}{3}$

ولدينا: $\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$.

2. ج1) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$:

التبرير : من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

3. ج 2) مبدأ المعلم :

التبرير : معادلة المماس لمنحني الدالة اللوغرتمية عند النقطة ذات الفاصلة e هي :

$y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$ ، لدينا: $\ln(e)=1$ و $\ln'(e)=\frac{1}{e}$ ، إذن:

$y=\frac{1}{e}(x-e)+e$ ، أي : $y=\frac{1}{e}x$ هي معادلة لهذا المماس الذي يمر من المبدأ .

تمرين 08

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2X^2+4X-16=0$.

2) استنتج ، في $\mathbb{R}$ ، حلول المعادلة : $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$.

3) استنتج ، في $\mathbb{R}$ ، حلول المعادلة : $2\ln(x^2)+4\ln x-16=0$.

الحل

1) المعادلة : $2X^2+4X-16=0$ من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=16-4\times2\times(-16)=144$

تقبل حلين متمايزين: $X_1=\frac{-4-12}{4}=-4$ ، $X_2=\frac{-4+12}{4}=2$

2) من أجل كل $x>0$ نضع : $X=\ln x$ ، و بالتالي: $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$ تكافئ

$2X^2+4X-16=0$ ، فحسب السؤال 1) نجد : $X_1=-4$ ، $X_2=2$.

$X_1=-4$ تكافئ $\ln x_1=-4$ ، أي : $x_1=e^{-4}$.

$X_2=2$ تكافئ $\ln x_2=2$ ، أي : $x_2=e^2$.

إذن المعادلة $2(\ln x)^2+4\ln x-16=0$ تقبل حلين هما: $x_1=e^{-4}$ ، $x_2=e^2$.

3) من أجل كل $x>0$ لدينا:

$2\ln\left(x^2\right)+4\ln x-16=0$ تكافئ $4\ln x+4\ln x-16=0$ ، أي: $8\ln x=16$ ،أي:

$\ln x=2$ ،أي : $x=e^2$.

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x=e^2$.

تمرين 09

أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة:

1) $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.

2) $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

3) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$.

الحل

1) $f(x)=(\ln x)^2-6\ln x+5$.

لدينا : $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-6\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-6}{x}$

2) $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

لدينا : $f(x)=2x+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=2x+\ln(x+1)-\ln x$ ومنه :

$$f'(x)=2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{2x(x+1)+x-x-1}{x(x+1)}=\frac{2x^2+2x-1}{x(x+1)}$$

3) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$.

لدينا : $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ ، ومنه :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{x-2x\ln x}{x^4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
$$=\frac{1-2\ln x-x}{x^3}$$

تمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x-1)$.

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها.

الحل

• لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(x-1)=0^+$ وبما أن $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln(x-1)=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}f(x)=-\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ وبما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تمرين 11

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

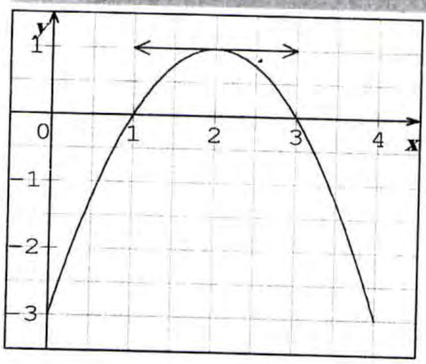
أدرس اتجاه تغير الدالة f .

الحل

نلاحظ أن $f=\ln ou$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $u(x)=\frac{1}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

تمرين 12



لتكن u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$ الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة u في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس. المنحني يشمل النقط التي إحداثياتها $(0;-3)$ ، $(1;0)$ ، $(2;1)$ ، $(3;0)$ و $(4;-3)$ و يقبل في النقطة التي فاصلتها 2 مماسا يوازي محور الفواصل .

1) بدون تبرير :

أ/ شكل جدول تغيرات الدالة u ، مبينا إشارة u' .

ب / شكل جدولا تبين فيه إشارة الدالة u على $[0;4]$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f=\ln ou$ (مركب الدالة u متبوعة بالدالة $\ln$)

مبررا إجابتك ، اذكر إن كانت الخواص التالية صحيحة أو خاطئة :

أ / f معرفة على $[0;4]$.

ب / f موجبة تماما على مجموعة تعريفها.

جـ / $f'(2)=0$.

د / المستقيم الذي معادلته : $x=1$ مقارب لمنحنى الدالة f .

الحل

1) أ / جدول تغيرات الدالة u بإشارة u' :

x	0		2		4
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3

ب / جدول إشارة الدالة u على $[0;4]$:

x	0		1		3		4
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) أ / خطأ : f معرفة معناه : $u(x) > 0$ ، لكن : $u(x) > 0$ من أجل $x \in]1;3[$ ، إذن :

f معرفة على المجال $]1;3[$.

ب / خطأ : من أجل $x \in]1;3[$ لدينا : $0 < u(x) < 1$ ، ومنه: $\ln[u(x)] < 0$ ، إذن :

f سالبة تماما على المجال $]1;3[$.

جـ / صحيح: من أجل $x \in]1;3[$ لدينا: $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ، ومنه: $f'(2) = \dfrac{u'(2)}{u(2)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

د / صحيح :لدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} u(x) = 0^+$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ X \to 0}} \ln X = -\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} (\ln o u)(x) = -\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = -\infty$ ، وبالتالي المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لمنحني الدالة f

بجوار $-\infty$.

تمرين 13

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $f(x) = -(\ln x)^2 + \ln x + 2$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب لـ (C) .

2) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) أحسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .

4) عين إشارة $f'(x)$.

5) أكتب جدول تغيرات الدالة f .

6) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا .

7) أنشئ المنحنى (C) .

الحل

1) نعلم أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln x = -\infty$ كما أن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} (\ln x)^2 = +\infty$ ومنه :

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \left[-(\ln x)^2 + \ln x + 2\right] = -\infty$ ، وعليه المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

2) نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ كما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$ وبالتالي لدينا حالة عدم تعيين من الشكل : $(-\infty+\infty)$ ، من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا :

$f(x) = \ln x(-\ln x + 1) + 2$ ، وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\ln x + 1) = -\infty$

نجد هكذا : $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x(-\ln x + 1) + 2] = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = -2(\ln x)' \ln x + (\ln x)' + 0$

ولكون: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ نجد هكذا : $f'(x) = -2\dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2\ln x + 1}{x}$

4) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة البسط $-2\ln x + 1$ لكون المقام $x > 0$.

- $-2\ln x + 1 = 0$ يكافئ $\ln x = \dfrac{1}{2}$ ، أي $x = e^{\frac{1}{2}}$ أي $x = \sqrt{e}$.
- $-2\ln x + 1 < 0$ يكافئ $\ln x > \dfrac{1}{2}$ ، أي $x > e^{\frac{1}{2}}$ أي $x > \sqrt{e}$.
- $-2\ln x + 1 > 0$ يكافئ $\ln x < \dfrac{1}{2}$ ، أي $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ أي $0 < x < \sqrt{e}$.

ومنه :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$-2\ln x + 1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

5) جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\sqrt{e})$	$\searrow$	$-\infty$

حيث : $f\left(\sqrt{e}\right)=-\left(\ln\sqrt{e}\right)^2+\ln\sqrt{e}+2=\frac{9}{4}$ ، لأن : $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$.

6) المعادلة $f(x)=0$ تكافئ : $-\left(\ln x\right)^2+\ln x+2=0$.

بوضع : $y=\ln x$ مع $x>0$ نحصل على المعادلة $-y^2+y+2=0$ وهي من الدرجة الثانية تقبل حلين متمايزين هما : -1 و 2 .

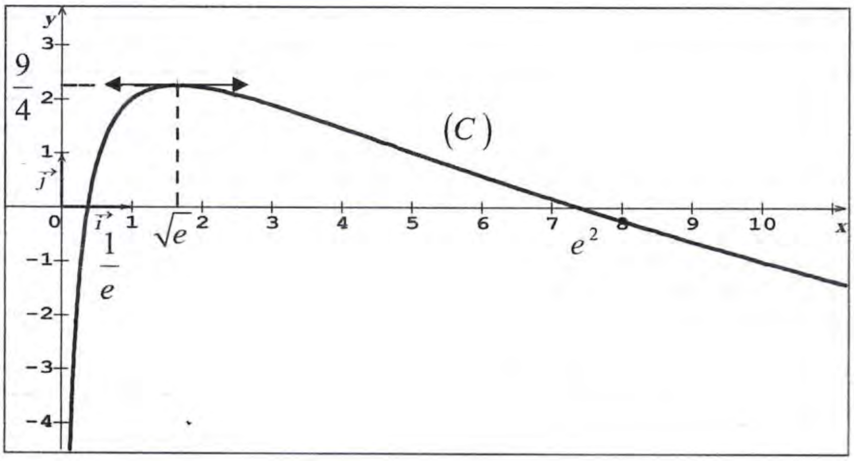
من أجل $y=-1$ نجد $\ln x=-1$ أي $x=e^{-1}$ أي $x=\frac{1}{e}$.

من أجل $y=2$ نجد $\ln x=2$ أي $x=e^2$.

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين هما $\frac{1}{e}$ و e^2 ،

وهندسيا المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين ذواتا الفاصلتين $\frac{1}{e}$ و e^2 .

7) المنحنى (C) :



تمرين 14

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;2]$ كما يلي : $f(x)=2x^2-3-\ln x$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(الوحدة $5cm$ على محور الفواصل و $2cm$ على محور التراتيب)

1) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C) .

2) أحسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .

3) عين إشارة $f'(x)$.

4) أكتب جدول تغيرات الدالة f .

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$0<\alpha<0,25$ و $1,25<\beta<1,5$.

7) أنشئ (T) و (C).

الحل

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(2x^2-3\right)=-3$. و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\ln x=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}(-\ln x)=+\infty$

إذن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}f(x)=+\infty$. وهذا ما يدل أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

2) لدينا : $f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

3) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $(2x-1)$ على المجال $]0;2]$ لأن $\frac{2x+1}{x}>0$ على المجال $]0;2]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

4) جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$

حيث : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{5}{2}$ و $f(2)=5-\ln 2$

5) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

معادلة (T) هي من الشكل : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

حيث : $f(1)=-1$ و $f'(1)=3$ ومنه : $y=3(x-1)-1$ ، أي : $(T): y=3x-4$

6) - على المجال $]0;0,25[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$

و $f(0,25)\approx -1,488<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0;0,25[$.

- على المجال $]1,25;1,5[$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما وبما أن : $f(1,25)\approx -0,098<0$

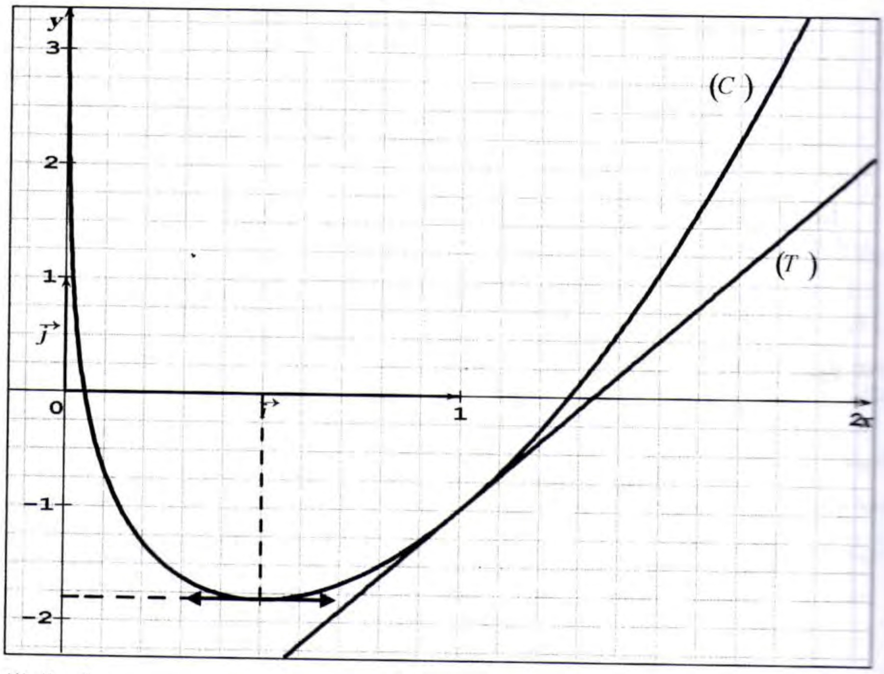
و $f(0,25)\approx 1,094>0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β ينتمي إلى المجال $]0;0,25[$. أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث :

$0<\alpha<0,25$ و $1,25<\beta<1,5$.

7) إنشاء (T) و (C).

(T) :

x	0	1
y	-4	-1



تمرين 15

I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x^2+ax+b\ln(x+1)$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحني الممثل للدالة g يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 0 و $\frac{3}{2}$.

II) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x^2+5x-5\ln(x+1)$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أدرس نهاية الدالة f عند -1 ثم عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا عند -1.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α من المجال $[2,4;2,5]$.

4) أرسم (C).

الحل

I) المنحني الممثل للدالة g يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين ذواتا الفاصلتين 0 و $\frac{3}{2}$ معناه $g'(0)=0$ و $g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ حيث: $g'(x)=-2x+a+\frac{b}{x+1}$

ومنه:

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ g'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a+b=0 \\ -3+a+\frac{2b}{5}=0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases}.$$

ومنه: $g(x)=-x^2+5x-5\ln(x+1)$

II) 1) • نهاية الدالة f عند -1:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-x^2+5x\right)=-6$، ومن جهة $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1)=0^+$ وبما أن $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\ln(x+1)=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[-x^2+5x-5\ln(x+1)\right]=+\infty$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=+\infty$. ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

• نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+5x\right)=-\infty$، ومن جهة $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ وبما أن

$\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x+1)=-\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+5x-5\ln(x+1)\right]=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2) لدينا : $f'(x) = -2x + 5 - \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x(-2x+3)}{x+1}$

بما أن $x+1>0$ على المجال $]-1;+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $x(-2x+3)$ الموضحة في الجدول التالي :

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x(-2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

حيث : $f(0)=0$ و $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -5\ln\left(\dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{21}{4}$

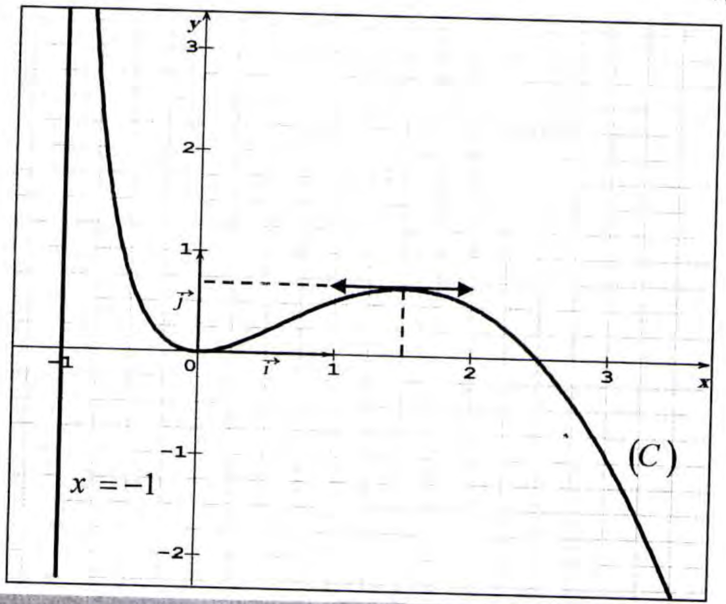
3) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2,4;2,5]$.

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[2,4;2,5]$ لأن : $[2,4;2,5] \subset \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $f(2,4) \approx 0,121 > 0$ و $f(2,5) \approx -0,013 < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[2,4;2,5]$. أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α من المجال $[2,4;2,5]$.

4) رسم (C):



تمرين 16

f دالة معرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\ln(x^2-2x)$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة $1cm$).

1) أ / أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة التعريف مبينا المستقيمات المقاربة.

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x=1$ محور تناظر لـ (C).

3) عين نقاط تقاطع (C) مع محور الفواصل.

4) أرسم (C) و (Δ) في نفس المعلم.

الحل

1) أ / • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2-2x)=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x)=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$: لدينا: $\lim_{x \overset{<}{\to} 0}(x^2-2x)=0^+$ ، وبما أن: $\lim_{X \overset{>}{\to} 0}\ln X=-\infty$ فإن:

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\ln(x^2-2x)=-\infty$ ، إذن: $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=-\infty$ ، ونستنتج ان المستقيم الذي معادلته: $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

• $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)$: لدينا: $\lim_{x \overset{>}{\to} 2}(x^2-2x)=0^+$ ، وبما أن: $\lim_{X \overset{>}{\to} 0}\ln X=-\infty$ فإن:

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2}\ln(x^2-2x)=-\infty$ ، إذن: $\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=-\infty$ ، ونستنتج ان المستقيم الذي معادلته: $x=2$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ب) الدالة f تقبل الاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty;0[$ ، $]2;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)'}{x^2-2x}=\frac{2x-2}{x^2-2x}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $x-1$ لأن المقام x^2-2x موجب تماما على مجموعة تعريف الدالة f ، بالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$ 0	1	2 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

(الجزء المظلل غير وارد في مجموعة التعريف)

2) من أجل $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ، فإن $(2\times1-x)\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ولدينا:

$$f(2-x)=\ln\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]=\ln(4-4x+x^2-4+2x)$$
$$=\ln(x^2-2x)=f(x)$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x=1$ محور تناظر لـ (C).

3) نحل في المجموعة $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$.

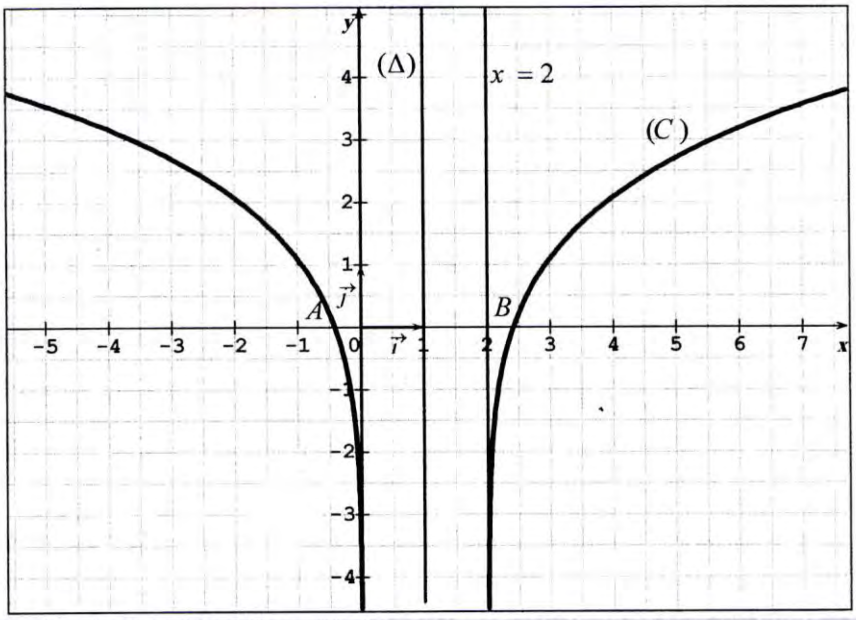
$f(x)=0$ معناه: $\ln(x^2-2x)=0$ ، أي: $\ln(x^2-2x)=\ln 1$ ، أي: $x^2-2x=1$ ، أي:

$x^2-2x-1=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta=8>0$ تقبل حلين متمايزين

هما: $x_1=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$ ، $x_2=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$.

إذن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(1-\sqrt{2};0)$ ، $B(1+\sqrt{2};0)$

4) الرسم:



تمرين 17

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1;1[$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة $2cm$).

1) بين أن f دالة فردية.

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أرسم (C).

الحل

1) المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة إلى 0 ولدينا:

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right)=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$$ ، إذن f دالة فردية

ويكفي دراستها على أحد المجالين $]-1;0]$ ، $[0;1[$ ، نختار المجال $[0;1[$.

2) • لدينا: $f(0)=\ln\left(\dfrac{1+0}{1-0}\right)=\ln 1=0$

• لدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ ، فإن:

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = +\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = +\infty$. ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له $x = 1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

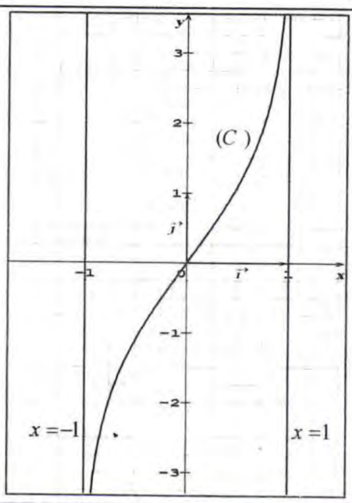
• الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;1[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} > 0$$

، ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;1[$ ،ويكون جدول تغيراتها

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

3) نرسم المنحني (C) على المجال $[0;1[$ ، ثم نتم الرسم على المجال $]-1;1[$ باستخدام التناظر بالنسبة إلى المبدأ O لكون الدالة f دالة فردية .



تمرين 18

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ و

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $1cm$ على محور و الفواصل و $0,5cm$ على محور التراتيب)

1) أدرس نهاية الدالة f عند 1 ثم عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا عند 1 .

2) بين أنه من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ ثم

استنتج اتجاه تغير f على $]1;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (D).

4) عين إحداثيي النقطة A من المنحني (C) بحيث (Δ) المماس لـ (C) في A معامل توجيهه

يساوي $-\frac{5}{3}$. ثم أكتب معادلة لـ (Δ).

5) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

6) انشئ (D) ، (Δ) و (C) في نفس المعلم.

الحل

1) • $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)$: لدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}(-x+4)=3$.

ولدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{2}{0^+}=+\infty$ ،

وبما أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$

نستخلص أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[-x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]=+\infty$. إذن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}f(x)=+\infty$

ونستنتج ان المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+4)=-\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1$ ، وبما أن : $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$.

نستخلص أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

2) من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=-1+\frac{\frac{1\times(x-1)-(x+1)\times1}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=-1+\frac{1\times(x-1)-(x+1)\times1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$$

$$= -1 + \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-(x-1)(x+1)-2}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$$

x	1		$+\infty$
x^2+1		$+$	
$x+1$		$+$	
$x-1$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	

نستنتج أن من أجل $x > 1$ يكون : $f'(x) < 0$. إذن f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ / إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته له $y = -x + 4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

لدينا من أجل $x > 1$: $f(x) - y = f(x) - (-x+4) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

وجدنا سابقا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x+4)] = 0$

إذن :المستقيم (D) الذي معادلته له $y = -x + 4$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ب / لدراسة الوضع النسبي لـ (C) و (D) ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$ أي إشارة :

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$. لأجل ذلك نقارن العدد $\frac{x+1}{x-1}$ بالعدد 1 من أجل $x > 1$.

لدينا من أجل $x > 1$: $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1} > 0$ ومنه : $\frac{x+1}{x-1} > 1$ ومنه : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$.

إذن : $f(x) - y > 0$. وبالتالي : (C) يقع تحت (D) على المجال $]1;+\infty[$.

4) لتعين إحداثيي النقطة A من المنحني (C) بحيث (Δ) المماس لـ (C) في A معامل توجيهه يساوي $-\frac{5}{3}$. نحل في المجال $]1;+\infty[$ المعادلة : $f'(x) = -\frac{5}{3}$.

$f'(x) = -\frac{5}{3}$ تكافئ $-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{5}{3}$ ، أي : $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{3}$

أي : $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{5}{3}=0$ ، أي : $\frac{3(x^2+1)-5(x-1)(x+1)}{3(x-1)(x+1)}=0$ ،

أي : $\frac{8-2x^2}{3(x-1)(x+1)}=0$ ، أي : $\frac{2(4-x^2)}{3(x-1)(x+1)}=0$ ، ومنه : $2(4-x^2)=0$

ومنه : $x=2$ أو $x=-2$ (مرفوض) ، إذن : $x=2$ فاصلة النقطة A ويكون ترتيبها :

$f(2)=-2+4+\ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right)$ ، أي : $f(2)=2+\ln 3$. إذن : $A(2;2+\ln 3)$.

- كتابة معادلة لـ (Δ) : معادلة (Δ) من الشكل : $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ، أي :

$y=-\frac{5}{3}(x-2)+2+\ln 3$ ، أي : $(\Delta): y=-\frac{5}{3}x+\frac{16}{3}+\ln 3$.

5) اثبات أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

على المجال $[4,4;4,5]$:- الدالة f مستمرة و متناقصة تماما . و بحاسبة نجد :

$f(4,4)\approx 0,0626>0$ و $f(4,5)\approx -0,0480<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[4,4;4,5]$.

أي أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[4,4;4,5]$.

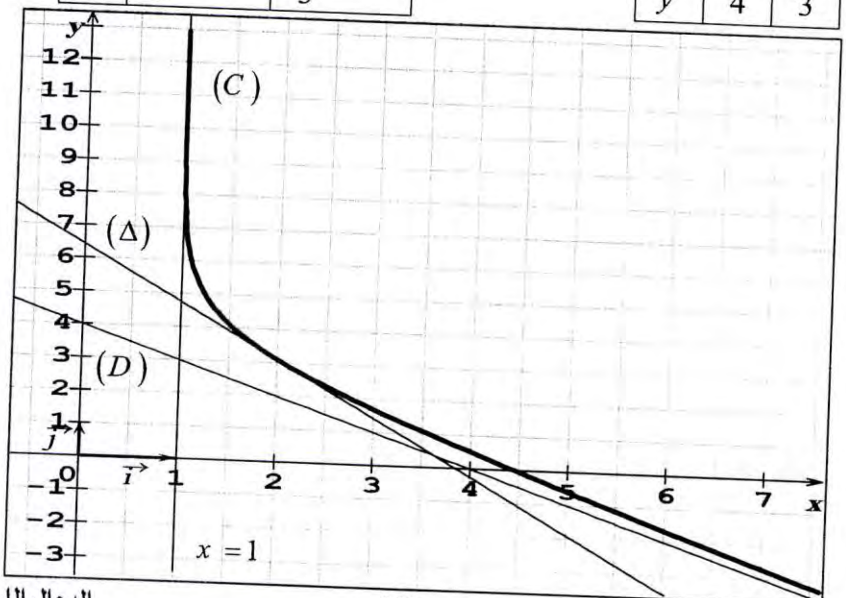
6) رسم : (D) ، (Δ) و (C) في نفس المعلم :

(Δ) :

x	0	1
y	$\frac{16}{3}+\ln 3$	$\frac{11}{3}+\ln 3$

(D) :

x	0	1
y	4	3



تمرين 19

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\ln(e^x+4)$

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$).

1) أ/ أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و فسر النتيجة هندسيا .

ب/ أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ/ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=x+\ln(1+4e^{-x})$.

ب/ استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

جـ/ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أرسم (C) ، (Δ) و (T) في نفس المعلم.

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{1}{5}x+m\ln 5$.

الحل

1) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+4)=4$ و $\lim\limits_{X\to 4}\ln X=\ln 4$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته : $y=\ln 4$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

ب/ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+4)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

جـ/ f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{(e^x+4)'}{e^x+4}=\dfrac{e^x}{e^x+4}>0$ ، ومنه : f متزايدة تماما $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$\ln 4 \nearrow +\infty$

2) أ/ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا:

$$x+\ln(1+4e^{-x})=\ln e^x+\ln(1+4e^{-x})=\ln\left[e^x\times(1+4e^{-x})\right]=\ln(e^x+4)=f(x)$$

ب/ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $f(x)-x=\ln(1+4e^{-x})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+4e^{-x})=1$ و $\lim\limits_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+4e^{-x})=0$ ، وبالتالي:

$\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)-x]=0$ ، إذن المستقيم: $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) :

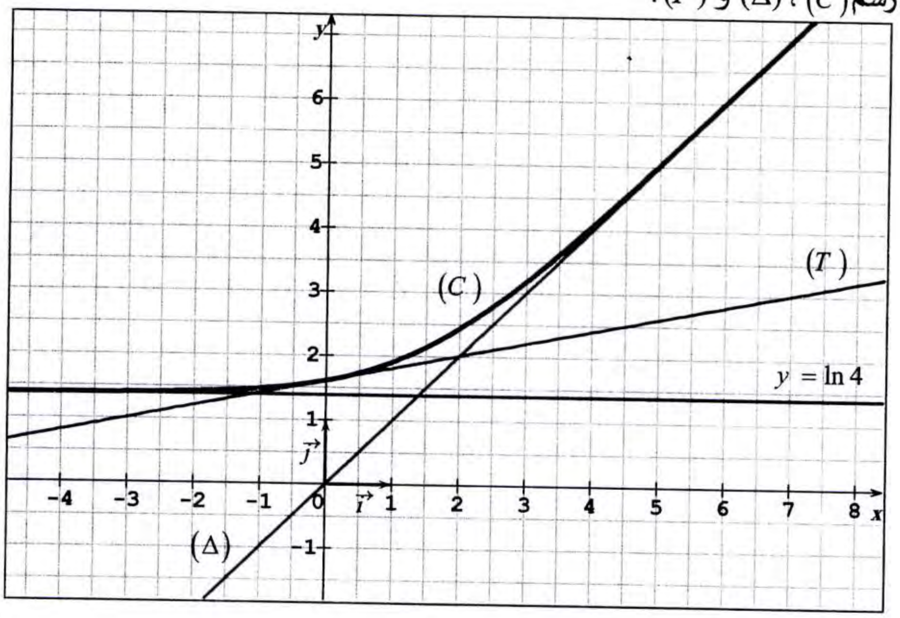
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $1+4e^{-x} > 1$ ، ومنه: $\ln(1+4e^{-x}) > 0$ ،

إذن: $f(x)-x > 0$ ، وبالتالي (C) يقع فوق (Δ) على $\mathbb{R}$.

3) معادلة (T) هي من الشكل: $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ، حيث:

$f(0)=\ln(e^0+4)=\ln 5$ و $f'(0)=\dfrac{e^0}{e^0+4}=\dfrac{1}{5}$ ، ومنه: $y=\dfrac{1}{5}x+\ln 5$ هي معادلة لـ (T) .

4) رسم (C) ، (Δ) و (T) :



5) المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{5}x+m\ln 5 ...(*)$

نعتبر (Δ_m) المستقيم الذي معادلة له: $y=\dfrac{1}{5}x+m\ln 5$ ، إذن :حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (T_m) ، ونلاحظ أن (T_m) و (T) متوازيان لأن لهما نفس الميل $\dfrac{1}{5}$ ، وبالتالي المناقشة تتم كما يلي:

- إذا كان : $m\ln 5 < \ln 5$ ، أي: $m<1$ فإن: (T_m) لا يقطع (C) وبالتالي المعادلة $(*)$ لا تقبل حلولا .

- إذا كان : $m\ln 5 = \ln 5$ ، أي: $m=1$ فإن: (T_1) هو المماس (T) و بالتالي المعادلة $(*)$ تقبل

حلا وحيدا .

- إذا كان : $m\ln 5 > \ln 5$ ، أي: $m > 1$ فإن: (T_m) يقطع (C) في نقطتين متمايزتين وبالتالي المعادلة (*) تقبل حلين متمايزين .

تمرين 20

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2}-6x+2+5\ln x$ ،

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) أ / أحسب النهاية : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

ب / أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $[9;9,5]$.

4) أرسم المنحني (C)

الحل

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{x^2}{2}-6x+2\right)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 5\ln x=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2}-6x+2\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln x=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2x}{2}-6+\frac{5}{x}=x-6+\frac{5}{x}=\frac{x^2-6x+5}{x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة كثير الحدود x^2-6x+5 الذي يقبل جذرين متمايزين هما: 1 و 5 ، نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	$+\infty$

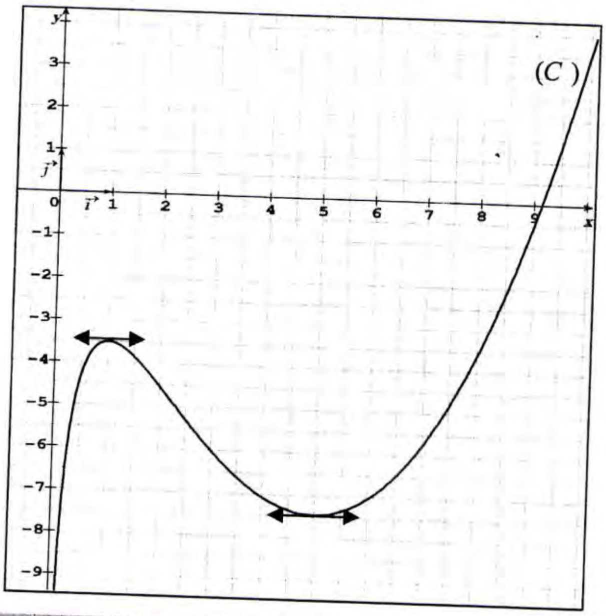
حيث: $f(1)=\frac{1}{2}-6+2+5\ln 1=-\frac{7}{2}=-3,5$

و : $f(5)=\frac{25}{2}-30+2+5\ln 5=-\frac{31}{2}+5\ln 5\approx 23,54$

3) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[9;9,5]$.

لدينا: $[9;9,5]\subset[5;+\infty[$ ومنه: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[9;9,5]$ وبما أن: $f(9)\approx -0,51<0$ و $f(9,5)\approx 1,38>0$ ، فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[9;9,5]$.

4) الرسم :



تمرين 21

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(2x)-\ln(x+1)$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)=\ln 2+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2) أ / أحسب النهاية: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

ب / أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) عين A نقطة تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل .

5) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 1.

6) أرسم (T) و المنحني (C).
7) عين العدد الحقيقي α بحيث المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة α يوازي المستقيم الذي معادلة له: $y = x$.

الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \ln 2 + \ln x - \ln(x+1) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2) أ / لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0^+$ وبما أن: $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \ln X = -\infty$، فإن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1$ وبما أن: $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = 0$، فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$.

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

3) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$، ومنه: f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فيكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $\ln 2$

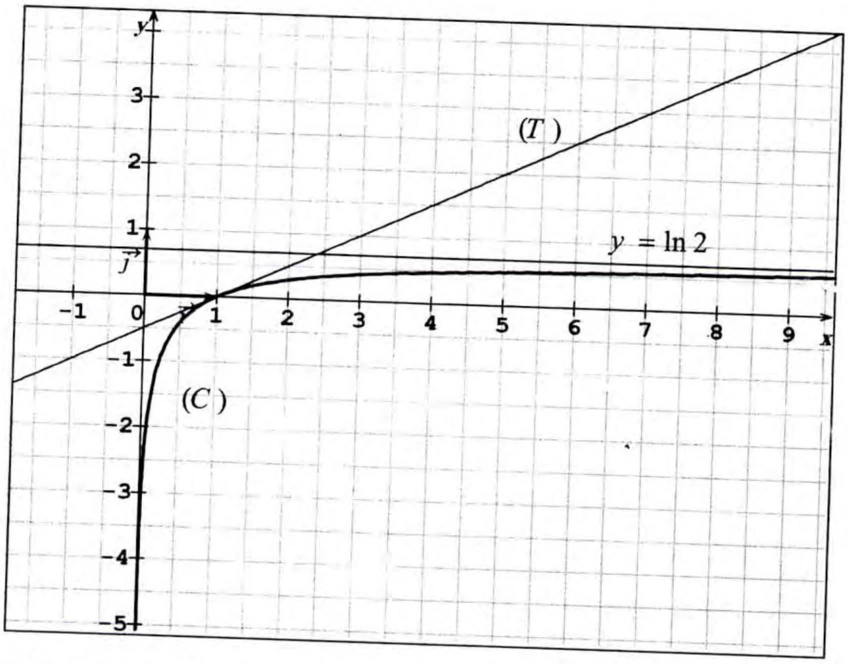
4) $f(x) = 0$ معناه $\ln(2x) - \ln(x+1) = 0$، أي: $\ln(2x) = \ln(x+1)$، أي: $2x = x + 1$

أي: $x = 1$، ولدينا: $f(1) = \ln(2) - \ln(2) = 0$، ومنه: $A(1;0)$.

5) معادلة (T) هي من الشكل: $y = f'(x)(x-1) + f(1)$

لدينا: $f'(1) = \frac{1}{2}$، ومنه: $y = \frac{1}{2}(x-1) + 0$. إذن: $(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

6) الرسم:



7) بما أن معامل توجيه المستقيم الذي معادلة له: $y = x$ هو 1 فإن العدد α هو حل المعادلة $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{1}{x(x+1)} = 1$ ، أي: $x(x+1) = 1$ ، أي: $x^2 + x - 1 = 0$ ، هذه الأخير معادلة من الدرجة الثانية مميزها $\Delta = 5$ تقبل حلين متمايزين هما:

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ، لكن $\alpha \in]0;+\infty[$ ، ومنه: $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

تمرين 22

f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $1cm$)

1) أدرس استمرارية الدالة f عند العدد 0 .

2) أ / أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ :

$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

ب / أحسب $g(0)$ ثم استنتج أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$:

. $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}$

جـ / بطريقة مماثلة بين أنه إذا كان $x \ge 0$ فإن : $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$.

د / تحقق أنه إذا كان $x > 0$ فإن : $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

هـ / استنتج أن f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 ، و أن : $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

أ / أدرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارتها على المجال $[0;+\infty[$.

ب / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـ / أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها . (نقبل أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

4) أرسم المنحني (C) .

الحل

1) لدينا: $f(0) = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ، ومنه: f مستمرة عند العدد 0 من اليمين. (تذكير: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$)

2) أ / الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right) = \frac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \le 0$$

ومنه g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

ب / لدينا: $g(0) = \ln(1+0) - \left(0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3}\right) = 0$ ، و بما أن متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$. نستنتج أن: من اجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا: $g(x) \le g(0)$ ، أي $g(x) \le 0$ ، ومنه: $\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \le 0$ ، إذن:

$$\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

جـ/ نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $k(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

الدالة k تقبل الاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا:

$$k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \ge 0$$

ومنه k متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

لدينا: $k(0) = \ln(1+0) - 0 + \frac{0^2}{2} = 0$ ، وبما أن k متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

نستنتج أن: من اجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ لدينا: $k(x) \ge k(0)$ ، أي: $k(x) \ge 0$ ، ومنه:

$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \ge 0$ ، إذن: $\ln(1+x) \ge x - \frac{x^2}{2}$

د / لدينا حسب ما سبق : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

و من أجل $x > 0$ نجد: $-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) - x \le -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ، ومنه:

$-\frac{x^2}{2x^2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le \frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x^2}$ ، ومنه: $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

هـ/ لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

وبما أن: $-\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

نستنتج حسب مبرهنة النهايات بالحصر أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

إذن: f قابلة للإشتقاق عند العدد 0 من اليمين ولدينا : $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

3) أ / الدالة h تقبل الاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا:

$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \le 0$ ، إذن : h متناقصة تماما على

المجال $]0;+\infty[$ ، ومن جهة لدينا: $h(0)=\dfrac{0}{0+1}-\ln(1+0)=0$ ، ومنه: $h(x)\le h(0)$ ،

أي: $h(x)\le 0$.

ب / من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{1+x}\times x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}\le 0$.

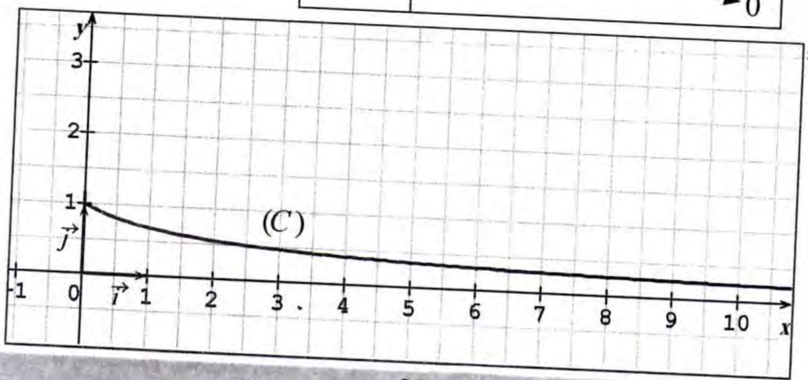
ومنه f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جـ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، نستنتج ان المستقيم الذي معادلة له $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ويكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 $\searrow$ 0

4) رسم (C) :



تمرين 23

f دالة معرفة المجال $]3;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(x+1)\ln(x-3)$.

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $0,5cm$)

1) تحقق أنه من أجل $x>3$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{x+1}{x-3}+\ln(x-3)$.

2) أ / أحسب $f''(x)$ حيث f'' هي الدالة المشتقة الثانية للدالة f ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f' .

ب / استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]3;+\infty[$.

3) أ / أدرس نهايات f عند أطراف المجال $]3;+\infty[$.

ب / شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ / عين نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل .

ب / تأكد من وجود نقطة انعطاف للمنحني (C) .

جـ / أرسم (C) .

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = (x+1)' \times \ln(x-3) + (x+1) \times \ln'(x-3)$$

$$= 1 \times \ln(x-3) + (x+1) \times \frac{1}{x-3} = \frac{x+1}{x-3} + \ln(x-3)$$

2) أ / الدالة f' تقبل الاشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$$f''(x) = \left(\frac{x+1}{x-3}\right)' + \ln'(x-3) = \frac{-4}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-7}{(x-3)^2}$$

إشارة $f''(x)$ هي من إشارة $x-7$ على المجال $]3;+\infty[$ ، الموضحة في الجدول التالي:

x	3		7		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه: الدالة f' متناقصة تماما على المجال $]3;7]$ و متزايدة تماما على المجال $[7;+\infty[$.

ب / نستنتج أن من اجل كل x من المجال $]3;+\infty[$: $f'(x) \geq f'(7)$ ، لكن:

$f'(7) = \frac{7+1}{7-3} + \ln(7-3) = 4 + \ln 4 > 0$ ، ومنه: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على المجال $]3;+\infty[$

3) - لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3}(x-3) = 0^+$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X \overset{>}{\to} 0} \ln X = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \ln(x-3) = -\infty$

وبما أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3}(x+1) = 4 > 0$ ، فإن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3}(x+1)\ln(x-3) = -\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = -\infty$. نستنتج ان المستقيم الذي معادلة له: $x = 3$ مقارب لـ (C) بجوار $-\infty$.

- لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty}(x-3) = +\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-3) = +\infty$

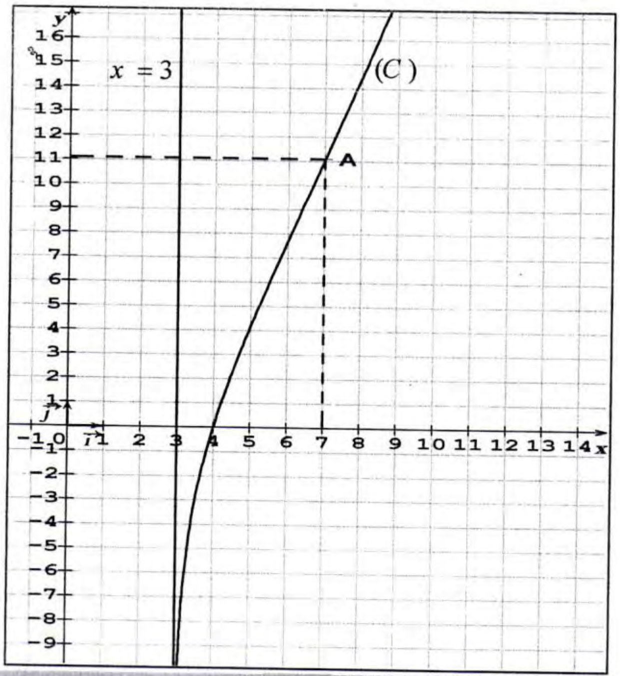
وبما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty}(x+1)\ln(x-3) = +\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

ب / جدول تغيرات الدالة f :

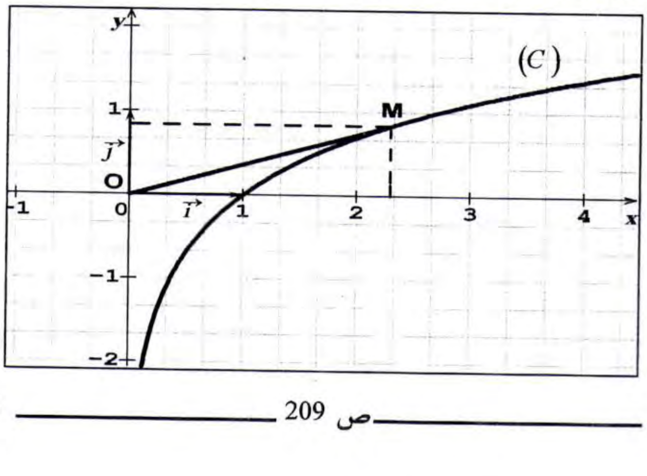
x	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4) أ / نحل في المجال $]3;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$ ، لدينا: $f(x)=0$ معناه:
$(x+1)\ln(x-3)=0$ ، أي: $x+1=0$ أو $\ln(x-3)=0$ ، أي: $x=-1$ (مرفوض)
أو $x-3=1$ ومنه: $x=4$.إذن: (C) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين $(4;0)$.
ب / من إشارة $f''(x)$ نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم عن العدد 7 مغيرة إشارتها إذن النقطة
$A(7;f(7))$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).
حيث: $f(7)=(7+1)\ln(7-3)=8\ln 4=16\ln 2$
جـ / الرسم:



تمرين 24

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I;J)$.
نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (C) الأقرب إلى O .



1) أحسب بدلالة x المسافة OM حيث M نقطة كيفية من (C) .

2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+\ln x$.

أ / أدرس تغيرات الدالة g .

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثم برر أن : $\alpha \in]0,6;0,7[$.

جـ/ حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x^2+(\ln x)^2$.

- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) حل المسألة المطروحة.

الحل

1) لدينا $M(x;y)$ حيث : $y=\ln x$ ومنه : $M(x;\ln x)$ ولدينا من جهة :

$OM=\sqrt{x^2+y^2}$ ومنه $OM=\sqrt{x^2+(\ln x)^2}$.

2) أ / دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left(x^2+\ln x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)=+\infty$

- اتجاه التغير :

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$.

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

ب/ لدينا :

- الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} g(x)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

α على المجال $]0;+\infty[$.

بما أن $]0,6;0,7[\subset]0;+\infty[$ و بحاسبة نجد : $g(0,6)\approx-0,15<0$ و

$g(0,7)\approx 0,13>0$ نستنتج أن $\alpha\in]0,6;0,7[$.

جـ / تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات :

لدينا :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x^2 + (\ln x)^2\right] = +\infty \text{ و } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 + (\ln x)^2\right] = +\infty$$

- اتجاه التغير :الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x) = 2x + 2\times\frac{1}{x}\times\ln x = \frac{2}{x}\left(x^2 + \ln x\right) \text{ ، أي : } f'(x) = \frac{2}{x}g(x)$$

لكون $\frac{2}{x} > 0$ نستنتج أن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) حل المسألة : نلاحظ أن : $OM = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2} = \sqrt{f(x)}$

للدالة f قيمة حدية صغرى هي $f(\alpha)$ ، ومنه أصغر مسافة OM هي $\sqrt{f(\alpha)}$.

حيث : $\alpha \in]0,6;0,7[$ و تكون أقرب نقطة M من المنحني (C) إلى المبدأ O هي النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha;\ln\alpha)$.

تمرين 25

1) نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x - 3 + \ln x$$

أ / ادرس اتجاه تغير الدالة g .

ب / بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]2,20;2,21[$.

جـ / استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)$. وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$).

أ / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب / أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

جـ / أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د / بين أن: $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ طوله 10^{-2} .

هـ / أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

و / حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ثم فسر ذلك بيانيا .

ي / أنشئ (C).

الحل

1) أ / الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$g'(x)=(x-3)'+\ln' x=1+\frac{1}{x}>0$ ، ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب / الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2,20;2,21[$ وبما أن:

$g(2,20)\approx -0,011<0$ و $g(2,21)\approx 0,002>0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]2,20;2,21[$ ، يحقق: $g(\alpha)=0$

جـ / إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ موضحة في الجدول الموالي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) أ / من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\times(-2+\ln x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times(-2+\ln x)'$$

$$=\frac{1}{x^2}\times(-2+\ln x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=\frac{-2+\ln x}{x^2}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{x-3+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ ، كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ب / لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}(-2+\ln x)=-\infty$ ،

ومنه: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

جـ / لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1>0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2+\ln x)=+\infty$ ،

ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

د / لدينا: $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-2+\ln\alpha)...(*)$ ، ومن جهة لدينا: $g(\alpha)=0$ ، أي:

$\alpha-3+\ln\alpha=0$ ، ومنه: $\ln\alpha=-\alpha+3$ ، بتعويض: $\ln\alpha=-\alpha+3$ في المساواة (*) نجد:

$$f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(-2-\alpha+3)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\times(1-\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$ طوله 2×10^{-2} :

لدينا: $2,20<\alpha<2,21$ ومنه: $1,20<\alpha-1<1,21$ ومنه: $1,44<(\alpha-1)^2<1,46$.

ومنه: $\frac{1,44}{2,20}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{1,46}{2,21}$ ، أي: $0,65<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<0,66$ ، ومنه:

$-0,66<-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<-0,65$ ، إذن: $-0,66<f(\alpha)<-0,65$. وهو حصر لـ $f(\alpha)$ طوله 10^{-2} .

هـ / جدول تغيرات الدالة f :

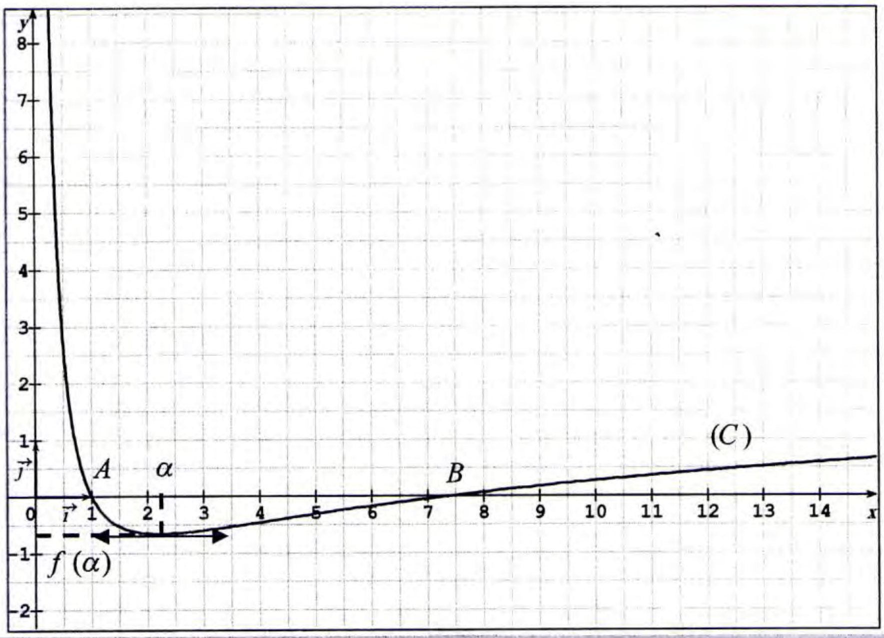
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

و / $f(x)=0$ معناه: $\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)=0$ ، ومنه: $1-\frac{1}{x}=0$ أو $-2+\ln x=0$

أي: $x=1$ أو $x=e^2$ ،

وهذا يعني أن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(1;0)$ ، $B(e^2;0)$.

ي / الرسم:



تمرين 26

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\log x=3 \ (1)$ ، $\log x \le -2 \ (2)$ ، $\log x>4 \ (3)$

الحل

1) تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x=3$ تعني $\log x=\log(10^3)$ أي $x=10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\{10^3\}$.

2) تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x \le -2$ تعني $\log x \le \log(10^{-2})$ و بما أن الدالة $\log$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $0<x\le 10^{-2}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=]0;10^{-2}]$.

3) تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x>4$ تعني $\log x>\log(10^4)$ و بما أن الدالة $\log$ متزايدة تماما على

المجال $]0;+\infty[$ فإن $x > 10^4$. إذن مجموعة الحلول هي: $S =]10^4;+\infty[$.

تمرين 27

كم هو عدد أرقام العدد : 2007^{2008} ؟.

الحل

لدينا : $\log\left(2007^{2008}\right) = 2008\log(2007)$.

ثم بالحاسبة نجد : $2008\log(2007) = 6631,515124$ ومنه نحصل على الحصر التالي :

$6631 < \log\left(2007^{2008}\right) < 6632$. وبما أنه من اجل كل عدد صحيح نسبي n :

$n = \log 10^n$ فإن : $6631 = \log 10^{6631}$ و $6632 = \log 10^{6632}$.

ومنه: $6631 < \log\left(2007^{2008}\right) < 6632$ تعني $\log\left(10^{6631}\right) < \log\left(2007^{2008}\right) < \log\left(10^{6632}\right)$

أي : $10^{6631} < 2007^{2008} < 10^{6632}$ ، أي : $\underbrace{1000...00000}_{6631\ \text{صفرا}} < 2007^{2008} < \underbrace{1000...00000}_{6632\ \text{صفرا}}$

وبالتالي العدد 2007^{2008} يتألف من 6632 رقما .

تمرين 28

تقاس حمضية محلول بـ الـ PH حيث : $PH = -\log\left[H_3O^+\right]$ و $\left[H_3O^+\right]$ يمثل تركيز المحلول بأيونات H_3O^+ (عدد المولات في اللتر) .

- ملصقة على ماء معدني تدل $PH = 6,3$. أحسب تركيز أيونات H_3O^+ في هذا الماء .

الحل

لدينا : $PH = -\log\left[H_3O^+\right]$ ومنه : $6,3 = -\log\left[H_3O^+\right]$

أي : $-6,3 = \log\left[H_3O^+\right]$ ، أي : $\left[H_3O^+\right] = 10^{-6,3}moles$.

تمرين 29

الحجم M لزلزال شدته I يقاس على سلم "ريشتر" بـ : $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ حيث I_0 يمثل الشدة المرجعية .

- أحسب حجم زلزال 1971 في مدينة "لوس أنجلس" بالولايات المتحدة الأمريكية علما أن : $\left(I = 50,01\times10^6 I_0\right)$.

الحل

لدينا : $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ومنه : $M = \log\left(\frac{50,01\times10^6 I}{I_0}\right)$ ، أي :

ومنه : $M \approx 7,70$ ، $M = \log\left(50,01\times10^{6}\right)$.

تمرين 30

الشدة l (الوحدة *décibels*) لصوة استطاعته p يعطى بـ : $l = 10\log\left(\dfrac{p}{p_0}\right)$ حيث

p_0 يمثل عتبة امكانية السمعية .

- أحسب الشدة لحوار سمعي عادي $\left(p = 10^5 p_0\right)$.

الحل

لدينا : $l = 10\log\left(\dfrac{p}{p_0}\right)$ ومنه : $l = 10\log\left(\dfrac{10^5 p_0}{p_0}\right)$ ، أي : $l = 10\log\left(10^5\right)$

ومنه : $l = 5\times10\log(10) = 50$.

تمرين 31

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \dfrac{1+\log_{\frac{1}{2}}(x)}{x}$. وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و

متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة $1cm$) .

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانيا. (نقبل أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$)

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عين نقاط تقاطع المنحني (C) مع محور الفواصل.

4) أرسم (C).

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x) = \frac{1+\dfrac{\ln x}{\ln 2}}{x} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right) = \left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x\ln 2}\right)$$

1) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(1+\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right) = -\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right) = -\infty$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = -\infty$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $x = 0$ مقارب لـ (C)

بجوار $-\infty$.

ب / لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\ln 2}=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x\ln 2}\right)=0$ ،

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $y=0$ مقارب لـ (C) بجوار عند $+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\left[\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)\right]'=\left(\frac{1}{x}\right)'\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(\frac{1}{x\ln 2}\right)=\left(\frac{1}{x^2\ln 2}\right)\times(1-\ln 2-\ln x)$$

إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $1-\ln 2-\ln x$.

- $1-\ln 2-\ln x=0$ معناه: $\ln x=1-\ln 2$ ، أي: $x=e^{1-\ln 2}=e\times e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{e}{2}$.
- $1-\ln 2-\ln x<0$ معناه: $\ln x>1-\ln 2$ ، أي: $x>\frac{e}{2}$.
- $1-\ln 2-\ln x>0$ معناه: $\ln x<1-\ln 2$ ، أي: $x<\frac{e}{2}$.

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e\ln 2}$	$\searrow$	0

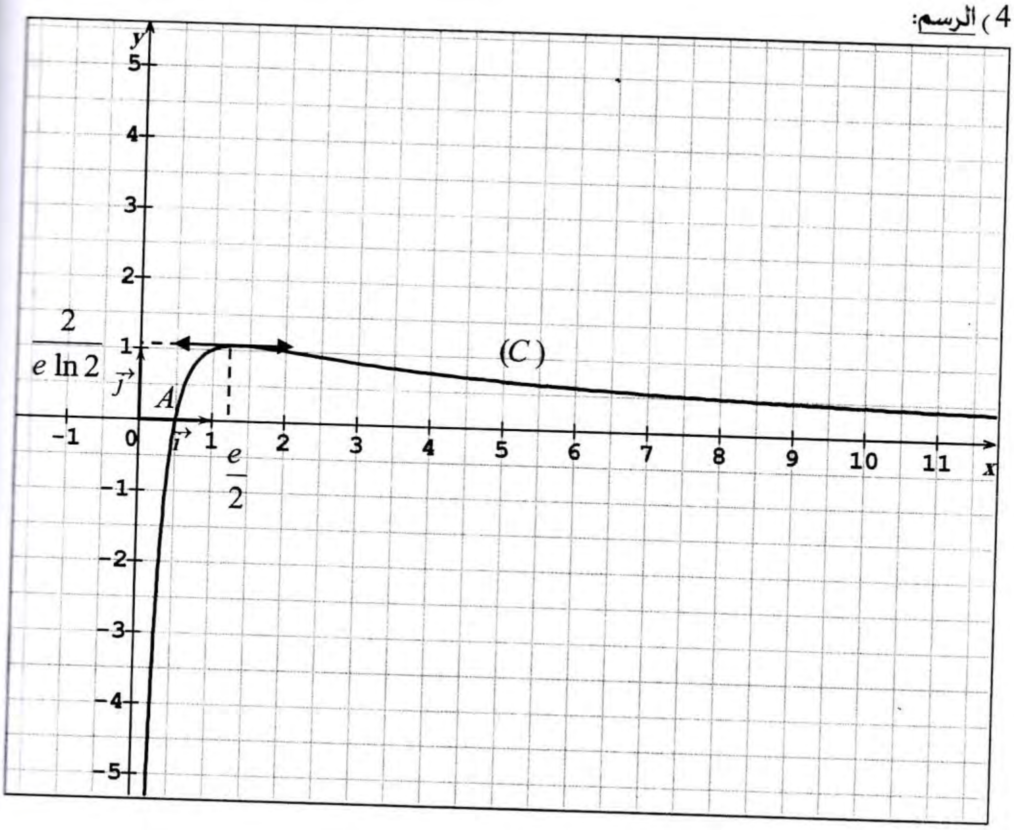
حيث: $f\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{\frac{e}{2}}\left(1+\frac{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln 2}\right)=\frac{2}{e}\left(1+\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)=\frac{2}{e\ln 2}$

3) نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$.

$f(x)=0$ معناه: $\frac{1}{x}\left(1+\frac{\ln x}{\ln 2}\right)=0$ ، ومنه: $1+\frac{\ln x}{\ln 2}=0$ ، ومنه: $\ln x=-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$

ومنه: $x=\frac{1}{2}$ ، إذن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $A\left(\frac{1}{2};0\right)$.

4) الرسم:



المحور السادس

التزايد المقارن

ما يجب أن يعرف

الدالة الأسية ذات الأساس a

1 . قوى عدد حقيقي موجب تماما:

تعريف1: نضع $a^b = e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^b : " a أس b " أو " a قوى b ".

تعريف2 : a عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a .

قواعد الحساب :

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a ، b و من أجل كل عددين حقيقيين x ، y لدينا:

$\ln(a^x) = x\ln a$ (1) . $a^x a^y = a^{x+y}$ (2) . $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$ (3) . $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (4)

$(a^x)^y = a^{xy}$ (5) . $(ab)^x = a^x b^x$ (6) . $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ (7) .

دراسة الدالة الأسية ذات الأساس a

تمهيد : نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$ ،
$f_a(x) = a^x = e^{x\ln a}$

1 . اتجاه التغير: الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f_a'(x) = \ln a \times e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $f_a'(x) < 0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

* إذا كان $a > 1$ فإن $f_a'(x) > 0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 . النهايات: نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

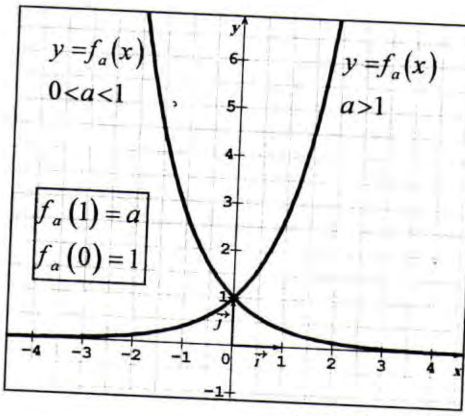
* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$

* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = 0$

* إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$

3 . جدول التغيرات و التمثيل البياني:



x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_a(x)$ $0<a<1$	$+\infty \searrow 0$
x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_a(x)$ $a>1$	$0 \nearrow +\infty$

ملاحظة : إذا كان $a=1$ فإن $f_1(x)=1$ ومنه الدالة f_1 ثابتة.

نتيجة : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 :

المنحنيان الممثلان للدالتين : $x \mapsto a^x$ ، $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ في معلم متعامد متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.

الدالة : الجذر النوني

1 . الدالة الجذر النوني :

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،يوجد عدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$ و تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ، الدالة الجذر النوني.

خاصية: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}}=0$.

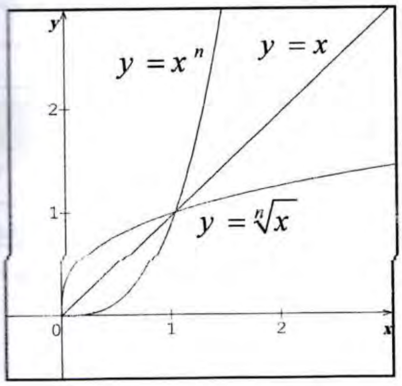
2 . دراسة الدالة: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، و من أجل x من $[0;+\infty[$:

$f_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

f_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $f_n'(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ ومنه $f_n'(x)>0$ ،

إذن f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$



x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	$0 \nearrow +\infty$

ملاحظة

الدالة f_n غير قابلة للاشتقاق عند 0.

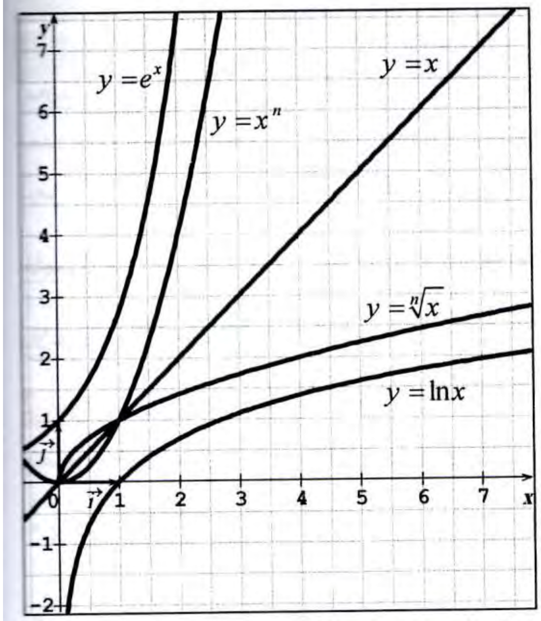
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x} = +\infty$$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، ومن أجل x من $[0;+\infty[$:

المنحنيان الممثلان للدالتين : $x \mapsto x^n$ ، $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ في معلم متعامد متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته: $y = x$.

التزايد المقارن

التزايد المقارن في جوار $+\infty$: من اجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا:



العمود (1)	العمود (2)
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{e^x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$

ملاحظة هامة :الشكل أعلاه يسهل قراءة النهايات السابقة كمايلي :

العمود (1) : القراءة في اتجاه عقارب الساعة .

العمود (2) : القراءة في عكس اتجاه عقارب الساعة .

تمارين محلولة

تمرين 01

أكتب على الشكل a^b الأعداد التالية : 1) $e^{5\ln 2}$ ، 2) $e^{-3\ln 1,1}$ ، 3) $e^{\pi \ln \pi}$ ، 4) $e^{\sqrt{2}\ln 2}$

الحل

1) لدينا: $e^{5\ln 2} = e^{\ln 2^5} = 2^5 = 32$.

2) لدينا: $e^{-3\ln 1,1} = e^{\ln(1,1)^{-3}} = (1,1)^{-3} = \dfrac{1}{(1,1)^3} = \dfrac{1}{1,331}$.

3) لدينا: $e^{\pi \ln \pi} = e^{\ln \pi^{\pi}} = \pi^{\pi}$.

4) لدينا: $e^{\sqrt{2}\ln 2} = e^{\ln 2^{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}}$.

تمرين 02

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $0,5^x - 2 = 0$ ، 2) $10^{x-1} = 2^{x+1}$ ، 3) $1,2^x \geq 4$ ، 4) $0,8^x \leq 0,1$.

الحل

1) المعادلة $0,5^x - 2 = 0$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $0,5^x - 2 = 0$ تكافئ: $0,5^x = 2$ ، أي:

$e^{x\ln(0,5)} = e^{\ln 2}$ ، أي: $x\ln(0,5) = \ln 2$ ، أي: $x = \dfrac{\ln 2}{\ln(0,5)} = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{\ln 2}{-\ln 2} = -1$

إذن: $S_1 = \{-1\}$

2) المعادلة $10^{x-1} = 2^{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $10^{x-1} = 2^{x+1}$ تكافئ: $e^{\ln(10^{x-1})} = e^{\ln(2^{x+1})}$

أي: $e^{(x-1)\ln 10} = e^{(x+2)\ln 2}$ ، أي: $(x-1)\ln 10 = (x+1)\ln 2$ ، أي :

$x\ln 10 - \ln 10 = x\ln 2 + \ln 2$ ، ومنه: $x(\ln 10 - \ln 2) = \ln 2 + \ln 10$ ، ومنه:

$x\ln\left(\dfrac{10}{2}\right) = \ln(2\times 10)$ ، أي: $x = \dfrac{\ln 20}{\ln 5}$ ، إذن: $S_2 = \left\{\dfrac{\ln 20}{\ln 5}\right\}$.

3) المتراجحة $1,2^x \geq 4$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $1,2^x \geq 4$ ، تكافئ $e^{\ln 1,2^x} \geq e^{\ln 4}$ ، أي:

$\ln 1,2^x \geq \ln 4$ ، أي: $x(\ln 1,2) \geq \ln 4$ ، ومنه: $x \geq \dfrac{\ln 4}{\ln 1,2}$ ، ومنه: $S_3 = \left[\dfrac{\ln 4}{\ln 1,2};+\infty\right[$.

4) المتراجحة $0,8^x \leq 0,1$ معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا: $0,8^x \leq 0,1$ ، تكافئ $e^{\ln 0,8^x} \leq e^{\ln 0,1}$ ، أي:

$x\ln(0,8) \leq \ln(0,1)$ ، أي: $x \geq \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8}$ ، إذن : $S_4 = \left[\dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8};+\infty\right[$.

تمرين 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+1-2^x$.

1) أ/ أحسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ/ أحسب $f(0)$ و $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) استنتج، في $\mathbb{R}$، حلول المتراجحة: $2^x \le x+1$.

الحل

1) أ/ - لدينا: $f(x)=2^x\left(\frac{x}{e^{x\ln 2}}+\frac{1}{2^x}-1\right)$، و $\lim_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$، ثم بوضع:

$u=x\ln 2$ يكون $x\to+\infty$ يكافئ $u\to+\infty$ لكون $\ln 2>0$، ومنه:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x\ln 2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}}\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=0$، لكون $\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=0$،

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x\ln 2}}+\frac{1}{2^x}-1\right)=-1$، وبالتالي: $\lim_{x\to+\infty}2^x\left(\frac{x}{e^{x\ln 2}}+\frac{1}{2^x}-1\right)=-\infty$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

- لدينا: $\lim_{x\to-\infty}2^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$، ومنه: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=1-(\ln 2)\times 2^x$.

$f'(x)=0$ تعني: $2^x=\frac{1}{\ln 2}$، أي: $e^{x\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$، ومنه: $x=-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$.

$f'(x)>0$ تعني: $2^x<\frac{1}{\ln 2}$، أي: $e^{x\ln 2}<\frac{1}{\ln 2}$، ومنه: $x<-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$.

$f'(x)<0$ تعني: $2^x>\frac{1}{\ln 2}$، أي: $e^{x\ln 2}>\frac{1}{\ln 2}$، ومنه: $x>-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$.

نضع: $x_0=-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$، ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

جـ/ لدينا: $f(0)=0+1-2^0=1-1=0$ و $f(1)=1+1-2^1=2-2=0$.

نستنتج ومن جدول التغيرات إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) المتراجحة $2^x \leq x+1$ تكافئ $f(x) \geq 0$.
استنادا ألى جواب السؤال جـ / لدينا: $f(x) \geq 0$ تكافئ $x \in [0;1]$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي $S=[0;1]$.

التمرين 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\,3^{-x}$.

1) أ / أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب / أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$، فسر النتيجة هندسيا.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أحسب $f(0)$ ثم أنشئ المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=x\,3^{-x}=xe^{-x\ln 3}=\dfrac{x}{e^{x\ln 3}}$.

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x\ln 3)=+\infty$، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x\ln 3}=+\infty$.

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x\ln 3}=-\infty$، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

ب/ نضع: $u=x\ln 3$، ومنه: $x=\dfrac{u}{\ln 3}$ و يكون: $x\to+\infty$ يكافئ $u\to+\infty$،

لكون: $\ln 3>0$، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x\ln 3}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\frac{u}{\ln 3}}{e^{u}}=\dfrac{1}{\ln 3}\times\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{e^{u}}=0$

لكون: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{e^{u}}=0$. إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^{x\ln 3}}\right)'=\frac{(x)'\times e^{x\ln 3}-x\times\left(e^{x\ln 3}\right)'}{\left(e^{x\ln 3}\right)^2}=\frac{e^{x\ln 3}-x(\ln 3)e^{x\ln 3}}{\left(e^{x\ln 3}\right)^2}$$

$$=\frac{e^{x\ln 3}(1-x\ln 3)}{\left(e^{x\ln 3}\right)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-x\ln 3$، لكون $\frac{e^{x\ln 3}}{\left(e^{x\ln 3}\right)^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

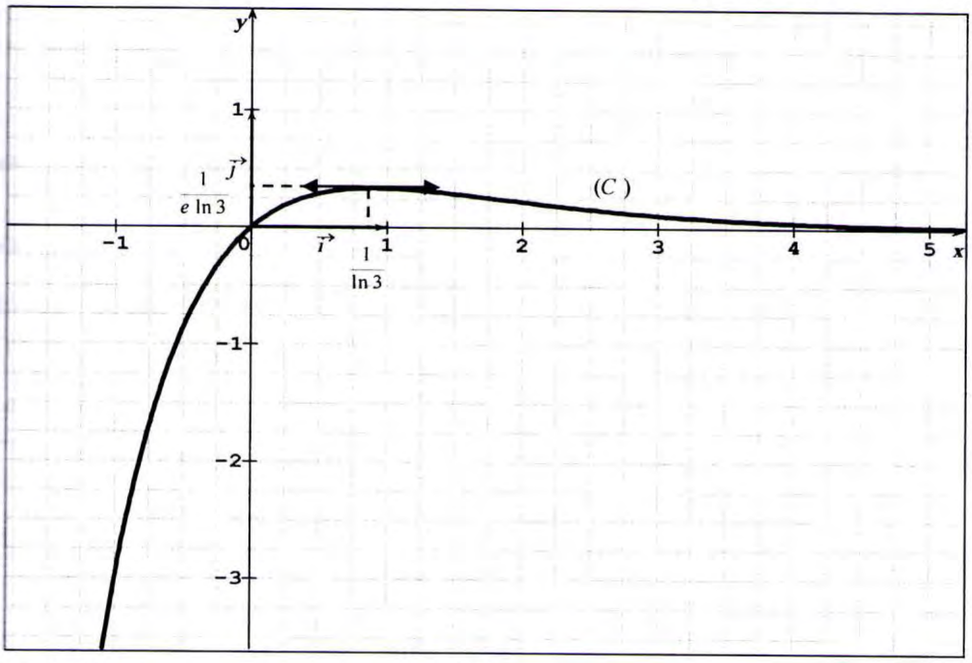
- $1-x\ln 3=0$ معناه: $x=\frac{1}{\ln 3}$.
- $1-x\ln 3<0$ معناه: $1<x\ln 3$، أي: $x>\frac{1}{\ln 3}$.
- $1-x\ln 3>0$ معناه: $1>x\ln 3$، أي: $x<\frac{1}{\ln 3}$.

وبالتالي يكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln 3}$	$\searrow$	0

حيث: $f\left(\frac{1}{\ln 3}\right)=\frac{1}{\ln 3}e^{-\frac{1}{\ln 3}\times\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}e^{-1}=\frac{1}{e\ln 3}$

3) $f(0)=0\times 3^{-0}=0$.



تمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$.

1) بين أن f دالة فردية .

2) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أنشئ المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الحل

1) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-x$ من $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f(-x)=\frac{5^{-x}}{5^{2(-x)}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}=\frac{1}{5^x}\times\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}=\frac{5^x}{1-5^{2x}}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$$

ومنه f دالة فردية .

2) لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{5^x}}{\cancel{5^x}\left(5^x-\frac{1}{5^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5^x-\frac{1}{5^x}}=0$

لأن: $5>1$ فيكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{5^x}=0$.

3) الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(5^x\right)'\times\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)\times\left(5^{2x}-1\right)'}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=\frac{\left(e^{\ln 5^x}\right)'\times\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)\times\left(e^{\ln 5^{2x}}-1\right)'}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^{\ln 5^x}\right)'\times\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)\times\left(e^{\ln 5^{2x}}-1\right)'}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=\frac{\left(e^{x\ln 5}\right)'\times\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)\times\left(e^{2x\ln 5}-1\right)'}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{(\ln 5)\left(e^{x\ln 5}\right)\times\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)\times\left((2\ln 5)e^{2x\ln 5}\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}=\frac{(\ln 5)5^x\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^x\right)(2\ln 5)5^{2x}}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{(\ln 5)5^{3x}-(\ln 5)5^{x}-2(2\ln 5)5^{3x}}{\left(5^{2x}-1\right)^{2}}=\frac{-(\ln 5)5^{3x}-(\ln 5)5^{x}}{\left(5^{2x}-1\right)^{2}}=\frac{(\ln 5)5^{x}\left(-5^{2x}-1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^{2}}$$

$$=-\frac{(\ln 5)5^{x}\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^{2}}<0$$

ومنه: f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

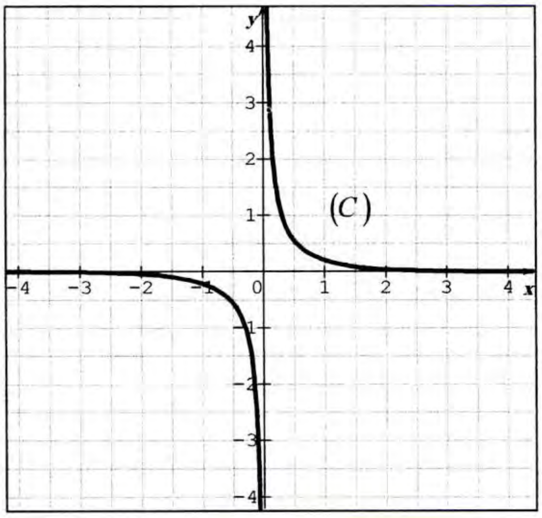
ولكون f دالة فردية نستنتج أن f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ،

وبما أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

فيكون جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

4) الرسم:



تمرين 06

بسط كتابة الأعداد التالية:

$A=\sqrt[3]{2^{5}}\times\sqrt[7]{2^{3}}$ ، $B=\dfrac{\sqrt[3]{8^{2}}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$ ، $C=\sqrt[10]{1024}-2^{-2}\sqrt[6]{2}$ ، $D=5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{25}$.

الحل

- $A=\sqrt[3]{2^5}\times\sqrt[7]{2^3}=\left(2^5\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2^3\right)^{\frac{1}{7}}=2^{\frac{5}{3}}\times2^{\frac{3}{7}}=2^{\frac{5}{3}+\frac{3}{7}}=2^{\frac{44}{21}}=\left(2^{44}\right)^{\frac{1}{21}}=\sqrt[21]{2^{44}}$

- $B=\dfrac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}=\dfrac{\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}\times(32)^{\frac{1}{4}}}{8(4)^{\frac{1}{8}}}=\dfrac{\left(2^6\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2^5\right)^{\frac{1}{4}}}{2^3\times\left(2^2\right)^{\frac{1}{8}}}=\dfrac{2^2\times2^{\frac{5}{4}}}{2^3\times2^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{2^{\frac{13}{4}}}{2^{\frac{13}{4}}}=1$

- $C=\sqrt[10]{1024}-2^{-2}\sqrt[6]{2}=\sqrt[10]{2^{10}}-2^{-2}\times\sqrt[6]{2}=\left(2^{10}\right)^{\frac{1}{10}}-2^{-2}\times2^{\frac{1}{6}}=1-2^{-2+\frac{1}{6}}$

$$=1-2^{\frac{-11}{6}}=1-\frac{1}{2^{\frac{11}{6}}}=\frac{2^{\frac{11}{6}}-1}{2^{\frac{11}{6}}}=\frac{\sqrt[6]{2^{11}}-1}{\sqrt[6]{2^{11}}}=\frac{\sqrt[6]{2048}-1}{\sqrt[6]{2048}}$$

- $D=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}=5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$

تمرين 07

أكتب الأعداد التالية على شكل أس ناطق :

1) $(x-3)^2\sqrt{x-3}$ ؛ $x\geq3$

2) $\sqrt[8]{(x+2)^3}$ ؛ $x\geq-2$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ ؛ $x\geq-1$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}$ ؛ $x>2$

الحل

1) $(x-3)^2\sqrt{x-3}=(x-3)^2\times(x-3)^{\frac{1}{2}}=(x-3)^{2+\frac{1}{2}}=(x-3)^{\frac{5}{2}}$

2) $\sqrt[8]{(x+2)^3}=\left[(x+2)^3\right]^{\frac{1}{8}}=(x+2)^{3\times\frac{1}{8}}=(x+2)^{\frac{3}{8}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x+1}}=\dfrac{1}{(x+1)^{\frac{1}{5}}}=(x+1)^{-\frac{1}{5}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}=\dfrac{(2x-4)^{\frac{1}{3}}}{(2x-4)^{\frac{1}{7}}}=(2x-4)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}=(2x-4)^{\frac{4}{21}}$

تمرين 08

حل المعادلتين و المتراجحتين التالية:

1) $x^3 = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ؛ 2) $\sqrt[5]{x+1} = \frac{1}{2}$ ، 3) $x^{\frac{2}{3}} < x$ ، 4) $\sqrt{(x+1)^5} \le 1$.

الحل

1) المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ ، ولدينا: $x^3 = \frac{4}{\sqrt{x}}$ تعني: $x^3 = \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}$ ، أي: $x^3 \times x^{\frac{1}{2}} = 4$

ومنه: $x^{3+\frac{1}{2}} = 4$ ، أي: $x^{\frac{7}{2}} = 4$ ، ومنه: $\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{2}{7}} = 4^{\frac{2}{7}}$ ، أي: $x = 4^{\frac{2}{7}}$ ، إذن مجموعة الحلول

هي: $S = \left\{4^{\frac{2}{7}}\right\}$.

2) المعادلة معرفة من أجل : $x+1 > 0$ ، أي من أجل: $x > -1$ ولدينا: $\sqrt[5]{x+1} = \frac{1}{2}$ تعني:

$(x+1)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$ ، أي: $\left[(x+1)^{\frac{1}{5}}\right]^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، أي: $x+1 = \frac{1}{32}$ ، ومنه: $x = \frac{-31}{32}$ ، إذن

مجموعة الحلول هي: $S = \left\{\frac{-31}{32}\right\}$.

3) المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$ ، ولدينا: $x^{\frac{2}{3}} < x$ تعني: $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} < 1$ ، ومنه: $x^{\frac{2}{3}-1} < 1$ ،

ومنه: $x^{\frac{-1}{3}} < 1$ ، ومنه: $\left(x^{\frac{-1}{3}}\right)^3 < 1^3$ ، أي: $x^{-1} < 1$ ، ومنه: $\frac{1}{x} < 1$ ، ومنه: $x > 1$ ،

إذن مجموعة الحلول هي: $S =]1; +\infty[$.

4) المتراجحة معرفة من أجل : $x+1 > 0$ ، أي من أجل $x > -1$ ولدينا: $\sqrt{(x+1)^5} \le 1$ تعني:

$\left[(x+1)^5\right]^{\frac{1}{2}} \le 1$ ، ومنه: $(x+1)^{\frac{5}{2}} \le 1$ ، ومنه: $\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{5}} \le 1^{\frac{2}{5}}$ ، أي: $x+1 \le 1$ ،

أي : $x \le 0$ ، إذن مجموعة الحلول هي: $S =]-1; 0]$.

تمرين 09

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt[3]{1+2x^2}$.

1) بين أن الدالة f زوجية.

2) أدرس نهاية f عند $+\infty$. استنتج نهاية f عند $-\infty$.

3) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f'(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f .

4) أ / أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. فسر النتيجتين بيانيا.

ب / أنشئ المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس .

الحل

1) $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 ولدينا: $f(-x)=\sqrt[3]{1+2(-x)^2}=\sqrt[3]{1+2x^2}=f(x)$

ومنه الدالة f زوجية .

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2x^2)=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt[3]{X}=+\infty$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+2x^2}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، وبما أن الدالة f زوجية فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3) لدينا: $f: x\longrightarrow 1+2x^2\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }}\sqrt[3]{1+2x^2}$ ، وحيث أن الدالتان: $x\longrightarrow 1+2x^2$

و $x\longrightarrow\sqrt[3]{x}$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f'(x)=\left(\sqrt[3]{1+2x^2}\right)'=\left[\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]'=\dfrac{1}{3}\times\left(1+2x^2\right)'\times\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{3}-1}$

$$=\frac{1}{3}\times4x\times\left(1+2x^2\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\frac{x}{\left(1+2x^2\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}\times\frac{x}{\sqrt[3]{\left(1+2x^2\right)^2}}$$

إذن: $f'(x)=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{x}{\sqrt[3]{\left(1+2x^2\right)^2}}$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة x ويكون جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(0)=\sqrt[3]{1+2\times0^2}=\sqrt[3]{1}=1$.

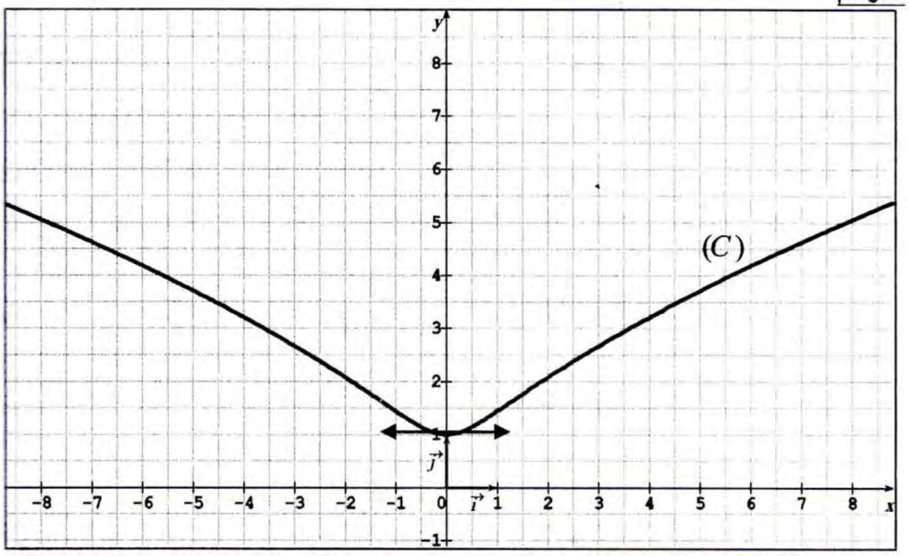
4) أ / من أجل $x\neq0$ لدينا: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}}{x}=\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{1+2x^2}{x^3}}$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$ $=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^3}\right)=$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x^2}{x^3}\right)$ ، وبما أن: $\lim_{X\to0}\sqrt[3]{X}=0$ ، فإن:

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1+2x^2}{x^3}}=0$ ، إذن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ، وبما أن الدالة f زوجية فإن:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. نستنتج أن المنحني (C) يقبل فرعي قطع مكافئ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ في اتجاه محور الفواصل .

ب / الرسم:



تمرين 10

احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+x-\ln x\right)$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x-2x}{4x^2}\right)$ ، 3) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x^3\right)$ ،

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-\ln x\right)$ ، 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+2}$ ، 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+x}$ ،

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$ ، 8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{\ln x}$ ، 9) $\lim_{x\to-\infty}(1+2x)e^{3x}$ ،

10) $\lim_{x\to-\infty}(e^{1-x}-x^2+1)$ ، 11) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x(\ln x)^3$ ، 12) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}\ln x$.

الحل

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+x-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$ ، لأن:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x-2x}{4x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2x}\right)=0$ ، لأن:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}\right)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x^3\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{e^x}{x^3}-1\right)=+\infty$ ، لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty=\lim_{x\to+\infty}x^3$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{\ln x}{x^3}\right)=+\infty$ ،

لأن: $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$.

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=+\infty$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1}{3}$.

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$ ،

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$.

7) لحساب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$ ، نضع: $u=x+1$ ،ومنه : $x=u-1$ ويكون: $x\to+\infty$

تكافئ $u\to+\infty$ ، ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}\times\frac{1}{1-\frac{1}{u}}=0$

لأن: $\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$ و $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{u}}=1$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\ln x}+2\times\frac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ، لأن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{3x}+2xe^{3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2x)e^{3x}$ ، نضع: $u=3x$ ،ومنه : $x\to-\infty$

تكافئ $u\to-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{3x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}3xe^{3x}\right)=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{2}{3}ue^{u}\right)=0$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}ue^{u}=0$ ، وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=0$.فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{3x}+2xe^{3x}\right)=0$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{1-x}-x^2+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{x-1}}-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^2e^{x-1}+e^{x-1}}{e^{x-1}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^2e^{x-1}+e^{x-1}}{e^{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1-e^{-1}x^2e^{x}+e^{-1}e^{x}}{e^{-1}e^{x}}\right)=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0^{+}$.

11) لحساب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x(\ln x)^3$ ، نضع: $u=\ln x$ ،ومنه : $x=e^{u}$ ويكون: $x\xrightarrow{>}0$

تكافئ $u\to-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x(\ln x)^3=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}u^3=0$.

12) لحساب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}\ln x$ ، نضع: $u=\sqrt{x}$ ،ومنه : $x=u^2$ ويكون: $x\xrightarrow{>}0$

تكافئ $u\xrightarrow{>}0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{u\xrightarrow{>}0}u\ln u^2=2\lim\limits_{u\xrightarrow{>}0}u\ln u=0$

لأن: $\lim\limits_{u\xrightarrow{>}0}u\ln u=0$.

تمرين 11

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب/ بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ و استنتج المستقيم المقارب لـ (C) .

2) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x^2)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ / عين نقاط تقاطع المنحني (C) مع محوري الإحداثيات.

ب / أرسم المنحني (C) .

4) أ/ ناقش بيانيا ، وحسب قيم العدد الحقيقي k عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=k$.

ب/ بين أن المعادلة: $f(x)=2$ تقبل حلا واحدا α ،ثم تحقق أن $\alpha \in [-2;-1]$.

جـ/ بين أن α يحقق العلاقة: $\alpha = -1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

الحل

1) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ب/ لدينا: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=\dfrac{x^2+2x+1}{e^x}=\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{1}{e^x}$

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ ، ولكون:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)e^{-x}+(x+1)^2(-e^{-x})=(x+1)e^{-x}(2-x-1)$$
$$=(x+1)(1-x)e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ ، ومنه: إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1-x^2)$

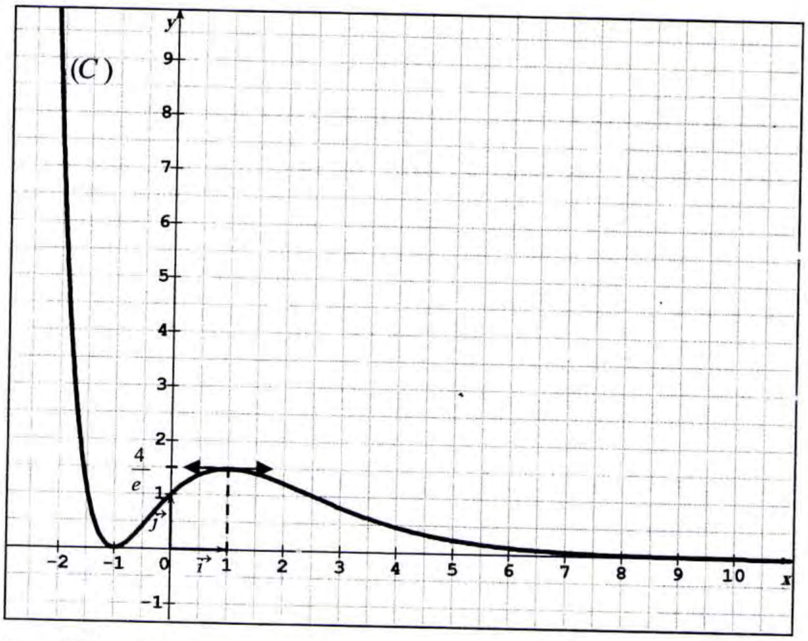
وينتج:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

حيث: $f(-1)=(-1+1)^2e^{-(-1)}=0$ و $f(1)=(1+1)^2e^{-1}=4e^{-1}=\dfrac{4}{e}$

3) أ/ لدينا: $f(0)=(0+1)^2e^{-0}=1$ ، ومنه (C) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الإحداثيين $(0;1)$ ، ومن جدول التغيرات نلاحظ أن (C) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين $(-1;0)$.

ب/ الرسم:



4) أ / حلول المعادلة: $f(x)=k$ إن وجدت هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي معادلة له $y=k$ و الموازي دوما لمحور الفواصل ، ومنه:

- إذا كان : $k<0$ فإن المعادلة $f(x)=k$ لا تقبل حلا .
- إذا كان : $0<k<1$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل ثلاثة حلول :حل موجب تماما وحلان سالبان تماما .
- إذا كان : $k=1$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل ثلاثة حلول :حل موجب تماما وحل معدوم وحل سالب تماما .
- إذا كان : $1<k<\frac{4}{e}$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل ثلاثة حلول : حلان موجبان تماما وحل سالب تماما .
- إذا كان : $k=\frac{4}{e}$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلان :حل موجب تماما (وهو العدد 1) وحل سالب تماما .
- إذا كان : $k>\frac{4}{e}$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل واحد سالب تماما .

ب / لدينا: $2>\frac{4}{e}$ ومنه المعادلة $f(x)=2$ تقبل حل واحد α سالب تماما .

وبما أن: $f(-2)\approx 7,39$ و $f(-1)=0$ ، فإن: $0<2<7,39$ ، وبالتالي: $-2<\alpha<-1$.

جـ / لدينا: $f(\alpha)=2$ تكافئ: $(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$، أي: $(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$، ومنه:

$\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}$ أو $\alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}$، أي: $\alpha=-1+\sqrt{2e^{\alpha}}$ أو $\alpha=-1-\sqrt{2e^{\alpha}}$

لكن: $-2<\alpha<-1$، ومنه: $\alpha=-1-\sqrt{2e^{\alpha}}$.

تمرين 12

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2e^{-2x}$

1) أ / أحسب f' مشتقة الدالة f.

ب / استنتج تغيرات الدالة f.

2) أ / أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب / أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسر النتيجة هندسيا.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) أنشئ المنحني (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: $3cm$)

الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})=2x(1-x)e^{-2x}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $x(1-x)$، لأن من أجل كل عدد حقيقي x: $e^{-2x}>0$

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

2) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$، نستنتج أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-2x}=+\infty$، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ب/ لدينا: $x^2e^{-2x}=(xe^{-x})^2$ و بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ فينتج: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-2x}=0$، إذن:

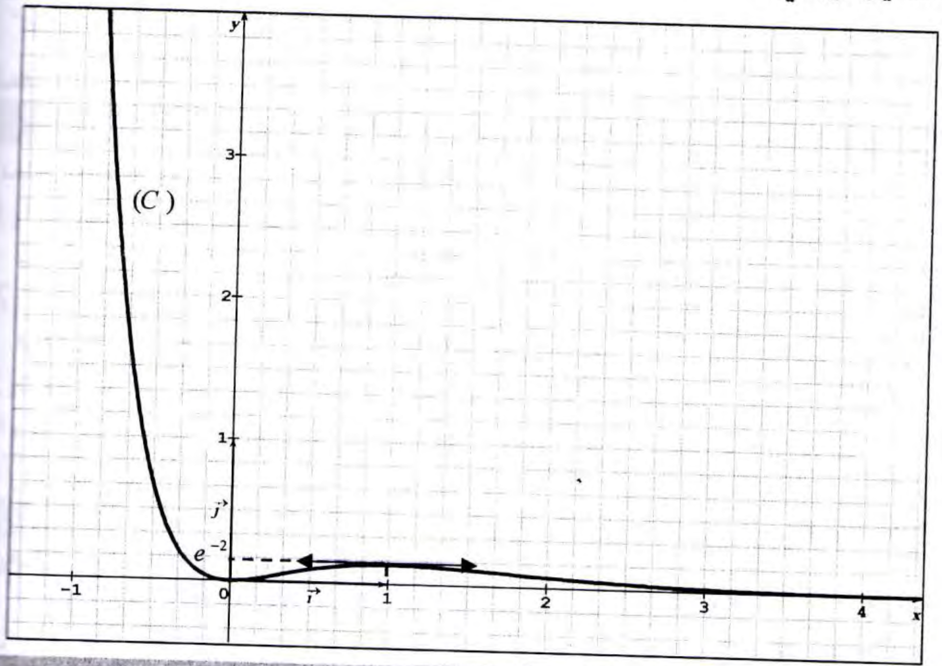
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

3) جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

حيث: $f(0)=0^2\times e^{-2\times0}=0$، $f(1)=1^2e^{-2\times1}=e^{-2}$.

4) التمثيل البياني:



التمرين 13

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(x+1)(x+2)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المنحني (C) الممثل للدالة الأسية.

4) أرسم (C) و (C_f) في نفس المعلم.

الحل

1) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x+xe^x+e^x)$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=(x^2+x+1)'\times e^x+(x^2+x+1)\times(e^x)'=(2x+1)\times e^x+(x^2+x+1)e^x$$
$$=(2x+1)\times e^x+(2x+1+x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x$$

وحيث أن: x^2+3x+2 هو كثير حدود من الدرجة الثانية مميزه: $\Delta=1$ يقبل جذرين متمايزين هما: -1 و -2 يكون: $x^2+3x+2=(x+1)(x+1)$.

وبما أن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x>0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $(x+1)(x+2)$

ونستنتج جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث : $f(-2)=((-2)^2-2+1)e^{-2}=3e^{-2}=\dfrac{3}{e^2}$

: $f(-1)=((-1)^2-1+1)e^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

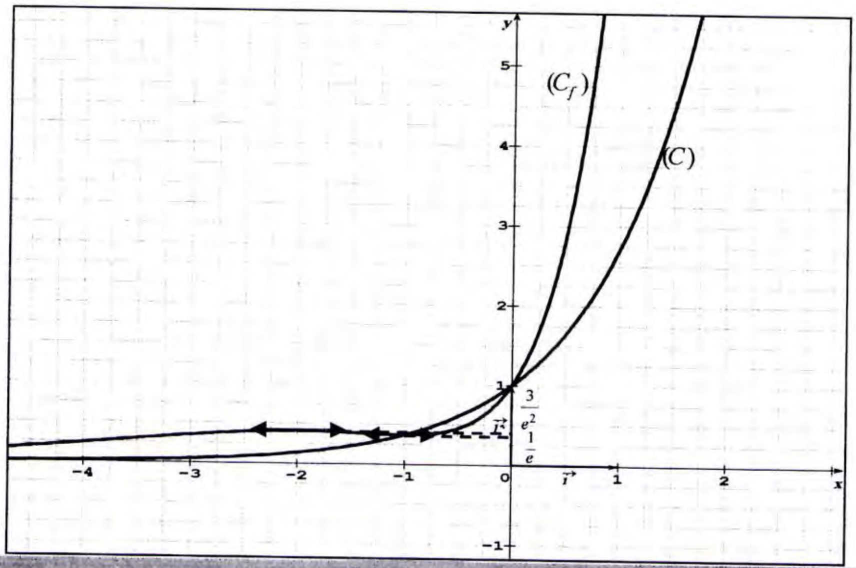
$$f(x)-e^x=(x^2+x+1)e^x-e^x=(x^2+x+1-1)e^x=(x^2+x)e^x=x(x+1)e^x$$

ومنه إشارة الفرق $f(x)-e^x$ هي من إشارة $x(x+1)$ كما يلي:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-e^x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- من أجل: $x\in]-\infty;-1[$ لدينا: (C_f) فوق (C).
- من أجل: $x\in]-1;0[$ لدينا: (C_f) تحت (C).
- من أجل: $x\in]0;+\infty[$ لدينا: (C_f) فوق (C).
- (C_f) و (C) يتقاطعان في نقطتين إحداثييهما: $(-1;e^{-1})$ ، $(0;1)$. (حيث: $e^0=1$)

4) الرسم: لدينا: $f(0)=1$ ، ومنه: (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الإحداثيين $(0;1)$.



التمرين 14

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^{x}-x-1$.

أ / أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة g .

جـ / استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $e^{x}-x>0$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-x}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الرسم: $2cm$)

أ / أحسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. فسر النتيجتين بيانيا.

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ / أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

د / أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (T) .

هـ / أرسم (C) و (T) في نفس المعلم .

الحل

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$.

ب/ الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^{x}-1$.

إشارة $e^{x}-1$ موضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	

ويكون جدول تغيرات الدالة g كما يلي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $g(0)=e^{0}-0-1=1-1=0$

جـ/ نستنتج من جدول التغيرات أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g(x)\geq 0$ ، أي:

$e^{x}-x-1\geq 0$ ، أي: $e^{x}-x\geq 1$ ، ومنه: $e^{x}-x>0$.

2) أ/ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}-1}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}-1}=-1$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ونستنتج ان المستقيم الذي

معادلة له: $y=-1$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$.

. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^{x}}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}-1}$ ، وبما أن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ ،فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^{x}}{x}-1}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ونستنتج ان المستقيم الذي

معادلة له: $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ب/ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1(e^{x}-x)-x(e^{x}-1)}{(e^{x}-x)^{2}}=\frac{e^{x}-x-xe^{x}+x}{(e^{x}-x)^{2}}=\frac{(1-x)e^{x}}{(e^{x}-x)^{2}}$$

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-x$ ، لكون: $\dfrac{e^{x}}{(e^{x}-x)^{2}}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ويكون جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

حيث: $f(1)=\frac{1}{e^{1}-1}=\frac{1}{e-1}$.

جـ/ معادلة (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، حيث: $f(0)=\frac{0}{e^{0}-0}=0$ ،

$f'(0)=\frac{(1-0)e^{0}}{(e^{0}-0)^{2}}=1$ ، ومنه: $(T): y=x$.

د / ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y=f(x)-x$ ، لدينا:

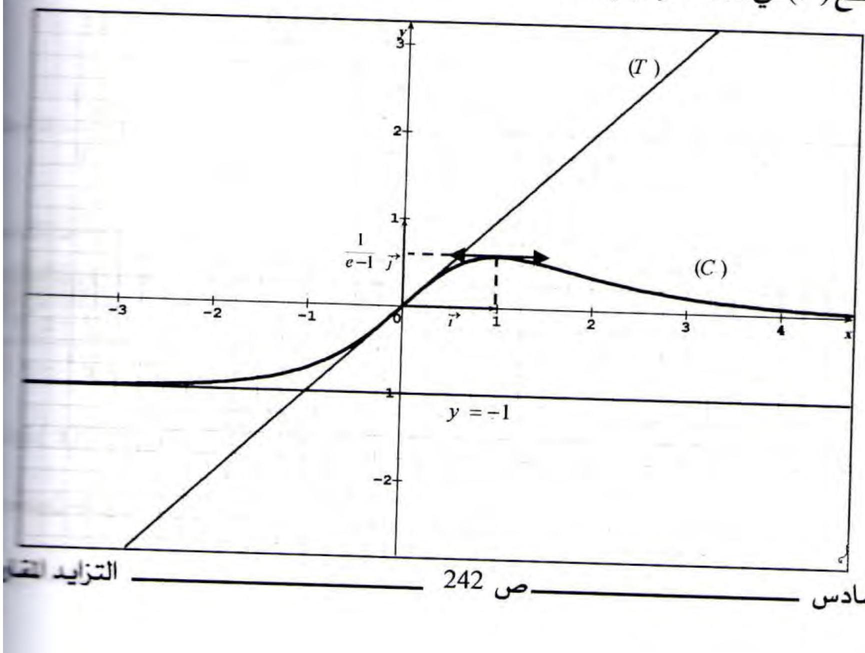
$$f(x)-x=\frac{x}{e^{x}-x}-x=\frac{x-xe^{x}+x^{2}}{e^{x}-x}=\frac{-x(e^{x}-x-1)}{e^{x}-x}=\frac{-xg(x)}{e^{x}-x}$$

إشارة الفرق $f(x)-x$ هي من إشارة $-x$ ، لأن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

- إذا كان: $x<0$ فإن (C) فوق (T) .
- إذا كان: $x>0$ فإن (C) تحت (T) .
- (C) يقطع (T) في النقطة $O(0;0)$.

هـ / الرسم:



التمرين 15

تعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ; x>0 \\ f(x)=0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(وحدة الطول $5cm$)

1) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C).

2) أ/ من أجل $x>0$ احسب العبارة : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

ب/ ادرس نهاية هذه العبارة لما x يؤول إلى 0.

جـ/ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ بالنسبة للمنحني (C) ؟

3) بين أنه من أجل $x>0$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4) شكل جدول التغيرات الدالة f.

5) أنشئ المنحني (C).

الحل

1) نبين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

من أجل $x>0$ لدينا: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to0}e^{X}=1$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1$ ، ومن جهة:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}=1\times1=1$ ، إذن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ، نستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

2) أ/ من أجل $x>0$ لدينا: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-0}{x}=\dfrac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$

ب/ بوضع : $u=\dfrac{1}{x}$ يكون: $x\overset{>}{\to}0$ تكافئ $u\to+\infty$ ، ولدينا:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{u\to+\infty}\left(u+u^2+u^3\right)e^{-u}$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{e^u}+\frac{u^2}{e^u}+\frac{u^3}{e^u}\right)$$

وبما أن: $\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{e^u}=0$ ، فإن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

جـ / نستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند العدد 0 من اليمين ولدينا: $f_d'(0)=0$.

و المنحني (C) يقبل نصف مماس عند النقطة $O(0;0)$ معامل توجيهه : $f_d'(0)=0$.

3) من أجل $x>0$ لدينا: $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ ، ومنه:

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$=\left(0-\frac{1}{x2}\ -\frac{2}{x^3}\right)'\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{x^2}\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\left(0-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)'\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{x^2}\times\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

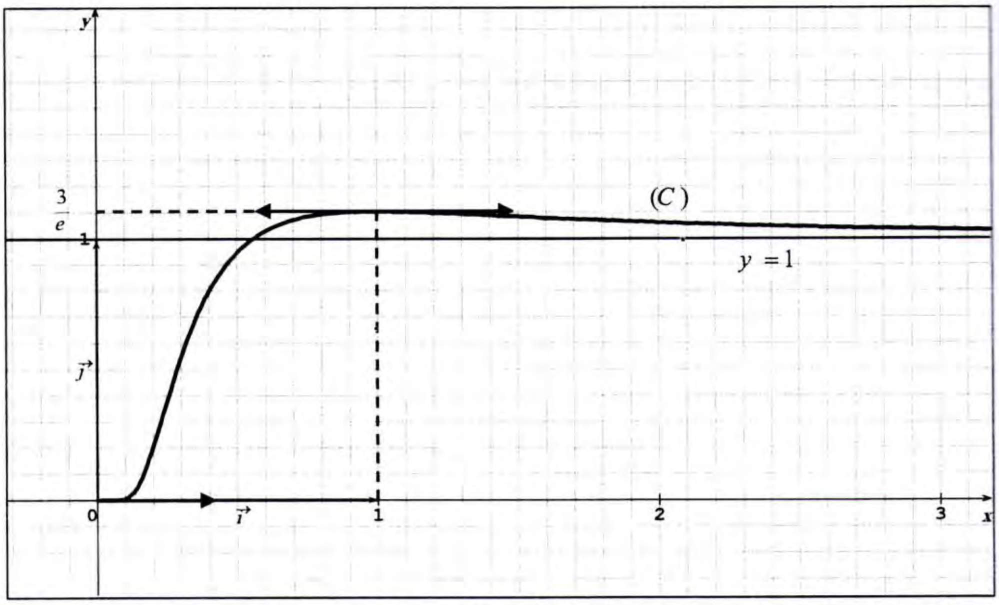
$$=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{1-x}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

4) إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $1-x$ ، نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{e}$	$\searrow$	1

حيث: $f(1)=\frac{1^2+1+1}{1^2}e^{-\frac{1}{1}}=3e^{-1}=\frac{3}{e}$

5) الرسم :



تمرين 16

1) نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+3-2\ln x$$

أ / أدرس تغيرات الدالة g .

ب / استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$. (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة $2cm$.

أ / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب / أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا.

جـ / أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

د / ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$ ، أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا. أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (D) .

هـ/ أحسب $f(1)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

و/ أنشئ (D) و (C).

الحل

1) أ/ لدينا : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \ln x = -\infty$ ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2x+\frac{3}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$$

نلاحظ بسهولة أن $g'(x)$ له إشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

و منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $g(1) = 1^2 + 3 - 2\ln 1 = 4$

ب/ من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x)$ موجب تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) أ/ الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\times\left[\frac{2x\times x - 1\times(x^2-1)}{x^2}\right] = \frac{2-2\ln x + x^2 + 1}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2+3-2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

من $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ ينتج أن $f'(x)$ له إشارة $g(x)$ ، وهذا يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}}\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{x^2-1}{2x}\right) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}}\left(\frac{2\ln x - x^2 + 1}{2x}\right) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ ،

ومنه المستقيم الذي معادلة له: $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

جـ/ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ ،

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

د/ $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2x}\right)=0$ وهذا يعني أن (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

الوضع النسبي لـ (C) و (D):

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}-\frac{x}{2}=\frac{2\ln x+x^2-1-x^2}{2x}=\frac{2\ln x-1}{2x}$$

إشارة $f(x)-\frac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $2\ln x-1$ ، لدينا:

- $2\ln x-1=0$ معناه: $\ln x=\frac{1}{2}$ ، أي: $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.
- $2\ln x-1<0$ معناه: $\ln x<\frac{1}{2}$ ، أي: $0<x<\sqrt{e}$.
- $2\ln x-1>0$ معناه: $\ln x>\frac{1}{2}$ ، أي: $x>\sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f(x)-\frac{1}{2}x$		$-$	0	$+$	

ومنه: (C) تحت (D) من أجل $0<x<\sqrt{e}$.

(C) فوق (D) من أجل $x>\sqrt{e}$.

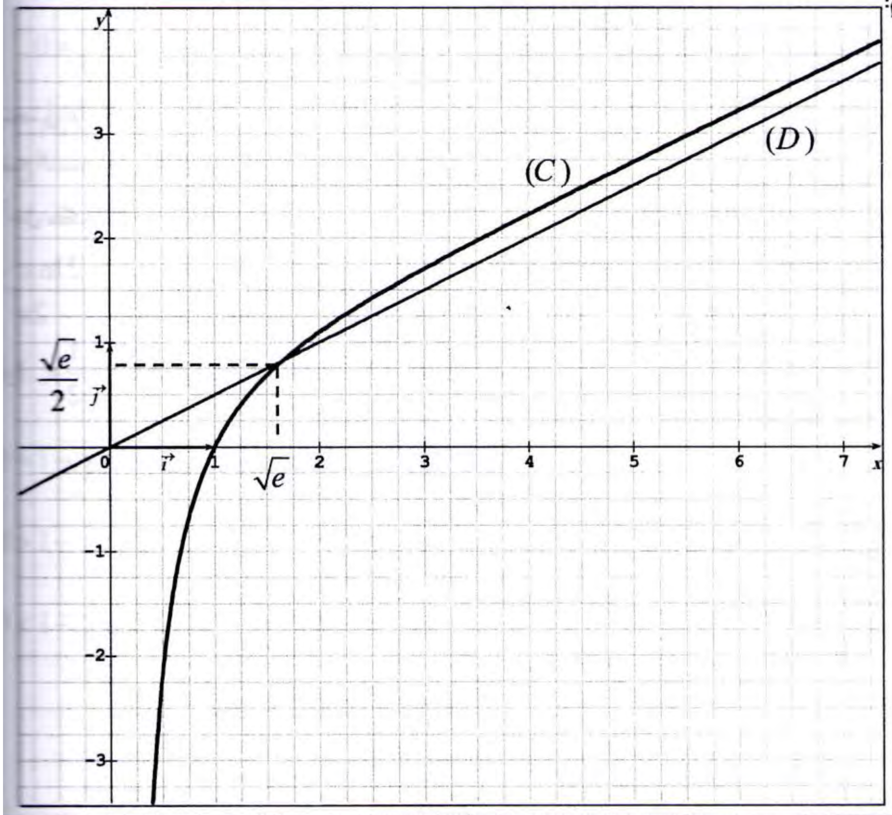
(C) يقطع (D) من أجل $x=\sqrt{e}$ ، أي في النقطة ذات الإحداثيين $\left(\sqrt{e};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

هـ) جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

و / لدينا: $f\,(1)=\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{1^2-1}{2\times 1}=0$ ، نستنتج ومن جدول تغيرات الدالة f أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة إحداثييها $(1;0)$.

الرسم:



تمرين 17

1) نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$g\,(x)=-2\ln x-xe+1$.

أ / أحسب نهايتي الدالة g عند 0 وعند $+\infty$.

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ / بين أن المعادلة $g\,(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$ ثم تحقق أن $\alpha\in\,]0,5;1[$.

د / استنتج إشارة $g\,(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{\ln x+xe}{x^2}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة : $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$)

أ / أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$. فسر النتيجتين هندسيا.

ب / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ / بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ ، نأخذ : $\alpha\approx 0,67$ عين قيمة مقربة إلى 10^{-1} للعدد $f(\alpha)$.

د / بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]0;+\infty[$ ثم تحقق أن $\beta\in]0,2;0,4[$.

هـ / أرسم المنحني (C) .

الحل

1) أ / لدينا: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(-2\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(-xe+1)=1$ ومنه: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe+1)=-\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

ب / الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$g'(x)=-2\times\dfrac{1}{x}-e=\dfrac{-ex-2}{x}<0$ ، لأن: $-ex-2<0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه: g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

يكون جدول تغيرات الدالة g كما يلي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

جـ / الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبما أن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

على المجال $]0;+\infty[$ ، وحيث أن: $g(0,5)\approx1,027>0$ و $g(1)\approx-1,718<0$ ، نستنتج أن:

$\alpha\in]0,5;1[$

د / لكون الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$ تكون إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2) أ / بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=0$ فإن:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+xe}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له $y=0$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$.

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(\ln x+xe)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x^2=0^+$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{\ln x+xe}{x^2}=-\infty$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}g(x)=+\infty$ ونستنتج أن المستقيم الذي معادلة له: $x=0$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

ب / الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-2x\ln x-ex^2}{x^4}=\frac{1-2\ln x-ex}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ ، وبالتالي يكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

جـ / لدينا: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha+\alpha e}{\alpha^2}$ لكن: $g(\alpha)=0$ ومنه: $-2\ln\alpha-\alpha e+1=0$ ،

ومنه: $\ln\alpha=\frac{1-e\alpha}{2}$ ، ثم بالتعويض في العلاقة: $f(\alpha)=\frac{\ln\alpha+\alpha e}{\alpha^2}$ ، نجد:

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1-e\alpha}{2}+\alpha e}{\alpha^2}=\frac{1-e\alpha+2\alpha e}{2\alpha^2}=\frac{1-e\alpha+2\alpha e}{2\alpha^2}=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$$

بفرض أن : $\alpha\approx0,67$ ، بحاسبة نجد من العلاقة: $f(\alpha)=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ ، أن: $f(\alpha)=3,136...$

ومنه: $f(\alpha)\approx3,1$

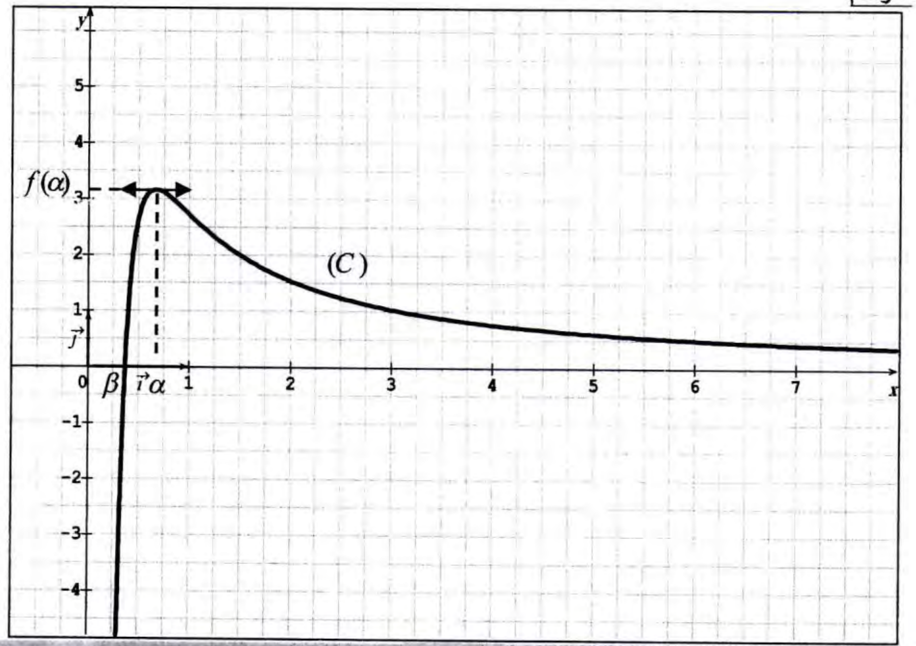
د / على المجال $[\alpha;+\infty[$ لدينا: $]0;f(\alpha)]\not\ni0$ وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا على المجال $[\alpha;+\infty[$.

لدينا: $]0,2;0,4[\subset]0;\alpha]$ ومنه الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,2;0,4[$

وبما أن: $f(0,2)\approx-26,68<0$ و $f(1)\approx1,04>0$ ،فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]0;+\infty[$ ، ونستنتج أن المنحني (C) يقطع

محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $\beta \in]0,2;0,4[$.

هـ / الرسم:



تمرين 18

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x^2 & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و

متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، الوحدة $2cm$.

1) أدرس استمرارية الدالة f عند العدد $x_0 = 0$.

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد $x_0 = 0$. ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) بين أن الدالة f دالة زوجية .

4) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

5) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة $f(x) = 0$. فسر النتيجة هندسيا.

6) أنشئ المنحني (C) .

الحل

1) لدينا: $f(0) = 0$ ، وبوضع: $u = x^2$ ، يكون: $x \to 0$ يكافئ $u \to 0$ ، ومنه:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(x^2 \ln x^2\right) = \lim_{u \to 0}(u \ln u) = 0$ ، إذن: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ ، ومنه:

الدالة f مستمرة عند العدد $x_0 = 0$.

2) من أجل $x \neq 0$ لدينا:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\ln x^2}{x}=x\ln x^2=2x\ln|x|=\begin{cases}2x\ln(-x)\ ;\ x<0\\ 2x\ln x\ ;\ x>0\end{cases}$$

- من أجل $x>0$ لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(2x\ln x)=0$ ، لأن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(x\ln x)=0$

إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$

ومنه: f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ من اليمين ولدينا: $f_d'(0)=0$.

- من أجل $x<0$ لدينا: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}[2x\ln(-x)]$ ، وبوضع: $u=-x$ ،

يكون: $x \overset{<}{\to} 0$ يكافئ $u \overset{>}{\to} 0$ ، ومنه: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}[2x\ln(-x)]=\lim\limits_{u \overset{>}{\to} 0}[-2u\ln u]=0$

لأن: $\lim\limits_{u \overset{>}{\to} 0}(u\ln u)=0$ ، إذن: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$

ومنه: f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ من اليسار ولدينا: $f_g'(0)=0$.

بما أن: $f_g'(0)=f_g'(0)=0$ فإن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ولدينا: $f'(0)=0$.

نستنتج أن المنحني (C) يقبل مماسا عند النقطة $O(0;0)$ معامل توجيهه $f'(0)=0$.

3) من أجل $x\in\mathbb{R}$ ، $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا: $f(-x)=(-x)^2\ln(-x)^2=x^2\ln x^2=f(x)$

ومنه: الدالة f دالة زوجية ، ويكفي دراستها مثلا على المجال $[0;+\infty[$. ويكون المنحني (C) متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.

4) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ، وبما أن: $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x^2=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln x^2=+\infty$ ، إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=(x^2)'\times\ln x^2+x^2\times\ln'(x^2)=2x\ln x^2+x^2\times\frac{2x}{x^2}=2x\ln x^2+2x$$
$$=2x(\ln x^2+1)$$

على المجال $]0;+\infty[$ إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $\ln x^2+1$ ، ومنه:

• $\ln x^2+1=0$ معناه: $\ln x^2=-1$ ، أي: $x^2=e^{-1}=\frac{1}{e}$ ، ومنه: $x=\sqrt{\frac{1}{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$.

• $\ln x^2+1<0$ معناه: $\ln x^2<-1$ ، أي: $x^2<\frac{1}{e}$ ، ومنه: $0<x<\frac{\sqrt{e}}{e}$.

• $\ln x^2+1>0$ معناه: $\ln x^2>-1$ ، أي: $x^2>\frac{1}{e}$ ، ومنه: $x>\frac{\sqrt{e}}{e}$.

ومنه جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

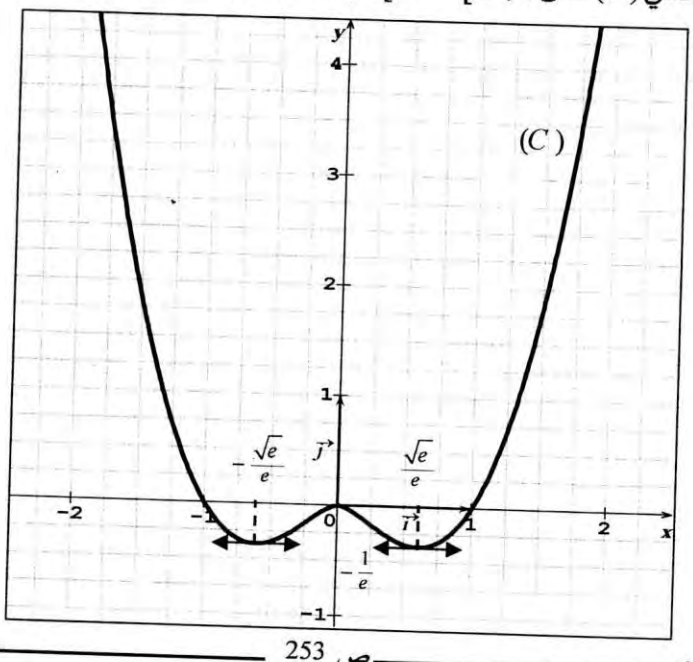
x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)=f\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)=\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)^2\ln\left(\sqrt{\frac{1}{e}}\right)^2=\frac{1}{e}\times\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

5) $f(x)=0$ معناه: $x^2\ln x^2=0$ ، أي: $x^2=0$ أو $\ln x^2=0$ ، أي: $x=0$ أو $x^2=1$

إذن: $x=0$ أو $x=1$ أو $x=-1$ ، نستنتج أن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقاط $O(0;0)$ ، $A(1;0)$ ، $B(-1;0)$.

6) ننشئ المنحني (C) على المجال $]0;+\infty[$ ثم نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .



المحور السابع

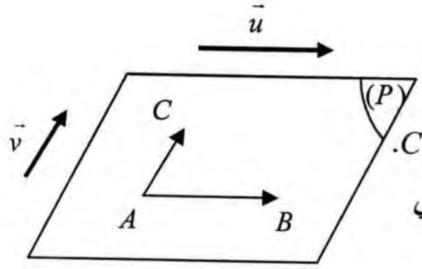
الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقات له

ما يجب أن يعرف

الجداء السلمي في الفضاء

1 .الجداء السلمي في الفضاء :

التعريف :



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط

حيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B و C.

* الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ المحسوب في المستوي (P).

* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

ملاحظات ونتائج:

• الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ مستقل عن تمثيل الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقل عن المستوي (P).

• $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$.

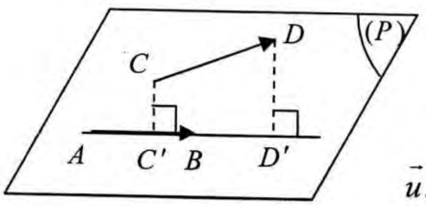
• المربع السلمي لـ $\vec{u}$ هو $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$. ولدينا النتيجة التالية:

إذا كانت A و B نقطتان من الفضاء فإن: $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (AB)^2$.

مبرهنة01: (عبارة ثانية للجداء السلمي في الفضاء)

من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء لدينا: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$

مبرهنة02: (عبارة ثالثة للجداء السلمي في الفضاء)



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من الفضاء .

إذا كانت A ، B ، C و D أربع نقط من مستو (P)

بحيث: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ وكانتا C' و D' المسقطين العموديين لـ C و D على الترتيب على المستقيم (AB) فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

خواص:

كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء .

لدينا بالأخص: مهما كانت الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من الفضاء ، ومهما كان العدد الحقيقي k فإن :

- $\vec{u}\vec{v}=\vec{v}\vec{u}$ • $(k\vec{u})\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}\vec{v})$ • $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}.\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ • $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ • $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

2 . العبارة التحليلية للجداء السلمي – المسافة بين نقطتين :

$\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء .

- $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعان من الفضاء ، لدينا : $\vec{u}\vec{v}=xx'+y.y'+z.z'$.

وبصفة خاصة : $\vec{u}\vec{u}=x^2+y^2+z^2$ وينتج على التو : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ نقطتان من الفضاء ، لدينا :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

التعامد في الفضاء

1. الأشعة المتعامدة :

تعريف :

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من الفضاء ، حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان . ونكتب : $\vec{u}\perp\vec{v}$

اصطلاح: نصطلح على أن الشعاع المعدوم $\vec{0}$ عمودي على جميع أشعة الفضاء .

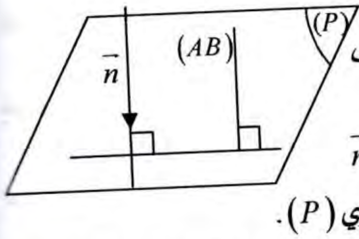
مبرهنة: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ، لدينا : $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $\vec{u}.\vec{v}=0$

نتيجة: $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء . $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعان من الفضاء ، لدينا: $\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $xx'+y.y'+z.z'=0$.

2. الشعاع الناظم لمستو :

تعريف :

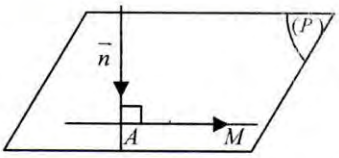
- القول أن الشعاع غير المعدوم $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم (ناظمي) لمستو (P) إذا وفقط إذا كان المستقيم (AB) عموديا على المستوي (P) .



- الشعاع الناظم للمستوي (P) هو كل شعاع غير معدوم $\vec{n}$ منحاه يعامد المستوي (P) ، ونقول إن الشعاع $\vec{n}$ يعامد المستوي (P) .

المعادلة الديكارتية لمستو

1. تمييز مستو :



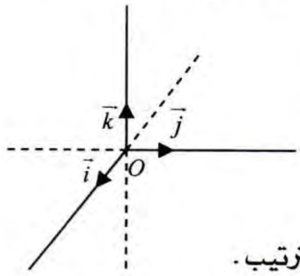
خاصية : $\vec{n}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .
مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له .

2. المعادلة الديكارتية لمستو :

مبرهنة : • كل مستو، $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل
$ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي .

• مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c
أعداد حقيقية غير معدومة معا هي مستو ، و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

حالات خاصة :



• معادلة ديكارتية للمستوي $P\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ هي $z=0$

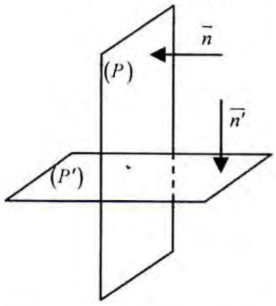
• معادلة ديكارتية للمستوي $P\left(O;\vec{j};\vec{k}\right)$ هي $x=0$

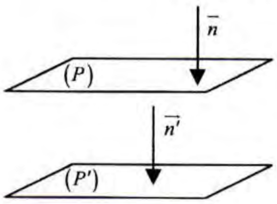
• معادلة ديكارتية للمستوي $P\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$ هي $y=0$

نتائج : (P) و (P') مستويان $\vec{n}$ ، $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب .

• (P) يوازي (P') معناه $\vec{n}$ ، $\vec{n}'$ مرتبطان خطيا ، أي يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{n}=k.\vec{n}'$.

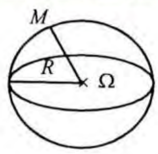
• (P) عمودي على (P') معناه $\vec{n}$ ، $\vec{n}'$ متعامدان ، أي $\vec{n}.\vec{n}'=0$.





سطح الكرة

1. التعريف :



Ω نقطة ثابتة في الفضاء ، R عدد حقيقي موجب تماما .
(S) سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R هي مجموعة النقط
M من الفضاء بحيث $\Omega M=R$.

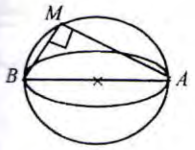
2 . معادلة سطح كرة :

مبرهنة : $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء .

معادلة سطح الكرة التي مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها R هي :

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$$

3 . معادلة سطح كرة علم قطرها :



خاصية : $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء .

سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M\ (x\,;y\,;z)$ من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$

4 . مجموعة النقط $M\ (x\,;y\,;z)$ من الفضاء بحيث: $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

خاصية : $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متعامد و متجانس للفضاء .

مجموعة النقط $M\ (x\,;y\,;z)$ من الفضاء بحيث $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

مع a ، b ، c و d أعداد حقيقية ، هي :

- إما المجموعة الخالية . • إما نقطة . • إما سطح كرة .

المرجح في الفضاء

1. مرجح نقطتين :

مبرهنة وتعريف :

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء ، و a و b عددان حقيقيان حيث $a+b\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

تسمى النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين a و b على الترتيب .

ملاحظات ونتائج :

- تسمى النقطة G كذلك مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b)\}$.
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b)\}$ فإن G تنتمي إلى المستقيم (AB) .
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;a)\}$ حيث $a\neq 0$ فإن G منتصف القطعة $[AB]$.
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b)\}$ وكان a و b من نفس الإشارة فإن G تقع داخل القطعة $[AB]$.
- إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b)\}$ وكان a و b مختلفين في

الإشارة فإن G تقع خارج القطعة $[AB]$.

• المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا معاملات النقط في ، أو على ، نفس العدد الحقيقي غير المعدوم.

خاصية :

إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.

إحداثيات مرجح نقطتين : في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفضاء.

إحداثيات النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A(x_A;y_A;z_A);a);(B(x_B;y_B;z_B);b)\}$

هي: $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}$ ، $y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}$ ، $z_G=\dfrac{az_A+bz_B}{a+b}$.

2 . مرجح ثلاث نقط أو أكثر :

مبرهنة وتعريف:

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء و a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية حيث : $a+b+c\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

تسمى النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات a ، b و c على الترتيب.

ملاحظات :

• تسمى النقطة G كذلك مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$.

• إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;a);(C;a)\}$ حيث $a\neq 0$ فإن G مركز ثقل المثلث ABC .

• مرجح ثلاث نقط ليست في استقامية A ، B و C يقع داخل المستوي (ABC) .

• مرجح ثلاث نقط ليست في استقامية A ، B و C ومرفقة بمعاملات من نفس الإشارة يقع داخل المثلث ABC .

خاصية 01 :

إذا كانت النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+b\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

خاصية02 : (خاصية التجميع) :

لتكن النقطة G مرجحا للجملة المثقلة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$.

إذا كان $a+b\neq 0$ فإن الجملة $\{(A;a);(B;b)\}$ تقبل مرجحا ليكن H.

وتكون عندئذ النقطة G مرجحا للجملة $\{(H;a+b);(C;c)\}$.

ملاحظات :

• إليك خوارزمية الخاصية 02 :

$$\boxed{\{(A;a);(B;b)\}} \quad \boxed{(C;c)}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\{(H;a+b);(C;c)\}}$$
$$\Downarrow$$
$$G$$

• نحصل على خاصيتين مماثلتين إذا كان $b+c \neq 0$ أو $a+c \neq 0$.

إحداثيات مرجح ثلاث نقط : في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء.

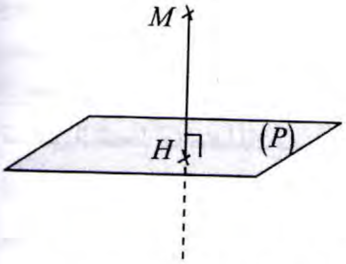
إحداثيات النقطة G مرجح الجملة المثقلة :

$$\left\{\left(A\left(x_A;y_A;z_A\right);a\right);\left(B\left(x_B;y_B;z_B\right);b\right);\left(C\left(x_C;y_C;z_C\right);c\right)\right\}$$

هي: $x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$ ، $y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}$ ، $z_G=\dfrac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c}$.

تطبيقات الجداء السلمي

1. بعد نقطة عن مستو:



تعريف :

المسافة بين النقطة M والمستوي (P) هي الطول MH ،

حيث H هي المسقط **العمودي** لـ M على (P) .

ونكتب : $MH=d\left(M;(P)\right)$.

خاصية :

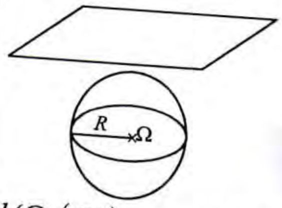
في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء ، المسافة بين النقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$

والمستوي (P) الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ ، تعطى بالعلاقة :

$$d\left(M_0;(P)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

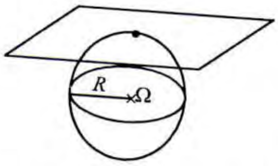
2. الوضع النسبي لسطح كرة ومستو:

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء ، نعتبر المستوي (P) و (S) سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R . لتحديد الوضع النسبي لـ (P) و (S) نقارن بين : $d(\Omega;(P))$ و R ، وينتج على التو ، ما يلي :



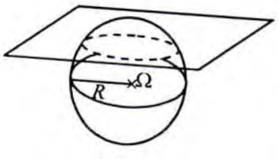
إذا كان : $d(\Omega;(P)) > R$

فإن: (P) لايقطع (S)



إذا كان : $d(\Omega;(P)) = R$

فإن: (P) يمس (S) في نقطة



إذا كان : $d(\Omega;(P)) < R$

فإن: (P) يقطع (S) في دائرة

3. دراسة مجموعة نقط في الفضاء من الشكل :

$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = k$ و $\alpha\left(\overrightarrow{MA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MB}\right)^2 = k$

- أنظر التمرين رقم 12

تمارين محلولة

تمرين 01

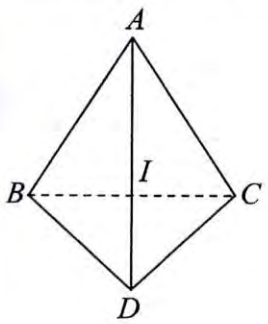
$ABCD$ رباعي وجوه منتظم، بحيث كل وجه هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a، حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

1) أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

2) لتكن I منتصف $[BC]$.

- أحسب، بطريقتين مختلفتين، الجداء السلمي التالي: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$.
- استنتج قيمة مقربة للزاوية $\widehat{ADI}$.

الحل

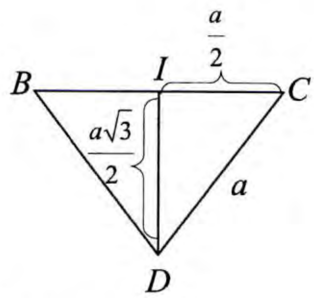


1) لدينا:

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

2) I منتصف $[BC]$.



- لدينا: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA}.\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)\right]$

$$(1) \; ... = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

ومن جهة: $(2) \; ...\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI} = DA.DI.\cos\widehat{ADI} = a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos\widehat{ADI}$

من (1) و (2) نجد : $\frac{a^2}{2} = a.\ \frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos\widehat{ADI}$ ومنه : $\cos\widehat{ADI} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

بحاسبة نجد : $\widehat{ADI} \approx 0,96rad$

تمرين 02

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط : $A\left(3;3;-5\right)$ ، $B\left(4;-1;3\right)$ ، $C\left(5;2;-3\right)$.

1) أحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) استنتج قيمة مقربة للزاوية : $\widehat{BAC}$.

الحل

1) لدينا: $\overrightarrow{AB}\left(1;-4;8\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(2;-1;2\right)$.

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1(2)+(-4)(-1)+8(2) = 22$

2) لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 22$ ومن جهة: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 22$

حيث: $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2+(-4)^2+8^2} = \sqrt{81} = 9$

و : $AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

ومنه: $9\times3\times\cos\widehat{BAC} = 22$ ، ومنه : $\cos\widehat{BAC} = \frac{22}{27}$ ، بحاسبة نجد $\widehat{BAC} \approx 35^0$.

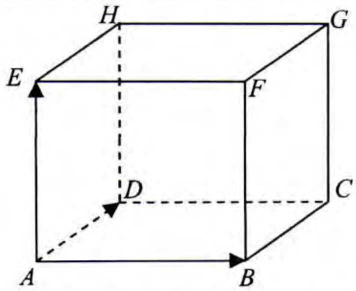
تمرين 03

$ABCDEFGH$ مكعب ، نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ للفضاء .

1) عين مركبات الأشعة: $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{ED}$.

2) بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED) .

الحل



1) لدينا: $A\,(0;0;0)$ ، $B\,(1;0;0)$ ، $D\,(0;1;0)$ ،
$E\,(0;0;1)$ ، $G\,(1;1;1)$.

ومنه : $\overrightarrow{AG}\,(1;1;1)$ ، $\overrightarrow{BE}\,(-1;0;1)$ ، $\overrightarrow{ED}\,(0;1;-1)$.

2) تذكير :

لإثبات أن مستقيم عمودي على مستو يكفي إثبات أنه عمودي على مستقيمين متقاطعين من هذا المستوي .

لإثبات أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED) يكفي إثبات أن المستقيم (AG)

عمودي على المستقيمين (BE) و (ED) . لكون (BE) و (ED) من المستوي (BED) ومتقاطعان في النقطة E .

لنبين عندئذ أن : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{ED}$.

أي نبين أن : $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = 0$ و $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{ED} = 0$.

لدينا:

$\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = 1\times(-1)+1\times0+1\times1=0$.

و $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{ED} = 1\times0+1\times1+1\times(-1)=0$

ومنه المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED).

تمرين 04

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-1;2)$ و $\vec{n}(3;2;-4)$ شعاع ناظمي له .

الحل

طريقة 01:المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$

لدينا: $\vec{n}(3;2;-4)$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1;z-2)$. ومنه : $\overrightarrow{AM} . \vec{n} = 0$ تكافئ $3(x-1)+2(y+1)-4(z-2)=0$ ، أي : $(P): 3x+2y-4z+7=0$.

طريقة 02 : معادلة المستوي (P) لاهي من الشكل : $ax+by+cz+d=0$ ،حيث الأعداد a ، b ، c هي مركبات الشعاع الناظم $\vec{n}(3;2;-4)$ ، ومنه $a=3$ ، $b=2$ ، $c=-4$.إذن المعادلة: $3x+2y-4z+d=0$ ، لتعيين العدد d نستعمل انتماء النقطة $A(1;-1;2)$ إلى المستوي (P) ، لدينا $A\in(P)$ معناه: $3(1)+2(-1)-4(2)+d=0$ ومنه: $d=7$.

إذن: $(P): 3x+2y-4z+7=0$.

تمرين 05

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء .

نعتبر النقط $A(0;1;-1)$ ، $B(2;1;-2)$ و $C(1;0;-2)$.

1) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

2) عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC).

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

الحل

1) نبين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، لأجل ذلك نبين أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

لدينا: $\overrightarrow{AB}\left(2;0;-1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1;-1;-1\right)$. نبرهن بالخلف أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

نفرض أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض.

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ تكافئ: $\begin{cases}2=k\times 1\\0=k\times(-1)\\-1=k\times(-1)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}k=2\\k=0\\k=1\end{cases}$ ومنه k ليس وحيدا وهذا تناقض

إذن النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا هو المستوي (ABC).

2) ليكن $\vec{n}\left(a;b;c\right)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC). حيث: a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة. لدينا: $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ أي: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

من المساواتين الإخيرتين نحصل على الجملة: $\begin{cases}2a-c=0\\a-b-c=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}c=2a\\b=-a\end{cases}$ ومنه:

$\vec{n}\left(a;-a;2a\right)$ أي $\vec{n}=a\left(1;-1;2\right)$ وهذا مايدل أنه يوجد عدد غير منته من الأشعة الناظمية ، بأخذ مثلا $a=1$ نجد $\vec{n}=\left(1;-1;2\right)$.

3) المستوي (ABC) هو مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

لدينا: $\vec{n}=\left(1;-1;2\right)$ و $\overrightarrow{AM}\left(x-0;y-1;z+1\right)$. ومنه: $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ تكافئ

$1\left(x-0\right)-\left(y-1\right)+2\left(z+1\right)=0$ ، أي: $(ABC):x-y+2z+3=0$.

تمرين 06

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

(P) المستوي في الفضاء المعرف بالشروط المقترحة أدناه.

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

1) النقطة $A\left(1;-5;7\right)$ هي المسقط العمودي للمبدأ O على المستوي (P).

2) المستوي (P) يشمل النقط $A\left(2;-3;1\right)$ ، $B\left(1;0;2\right)$ و $C\left(4;-2;3\right)$.

3) المستوي (P) يشمل النقطة $A\left(3;-2;5\right)$ ويوازي المستوي الذي معادلته: $2x+y-3z+7=0$

4) المستوي (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A\left(0;2;1\right)$ و $B\left(4;-1;3\right)$.

الحل

1) معادلة (P) هي من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية مع a ، b و c ليست كلها معدومة ، و $\vec{n}\left(a;b;c\right)$ شعاع ناظم لـ (P).

بما أن A هي المسقط العمودي للمبدأ O على المستوي (P) فإن $\overrightarrow{OA}(1;-5;7)$ ناظم لـ (P).

ومنه: $x-5y+7z+d=0$ ، وبما أن $A\in(P)$ فإن: $1-5(-5)+7(7)+d=0$

ومنه: $d=-75$. إذن: $(P):x-5y+7z-75=0$.

2) معادلة (P) هي من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية مع a ، b و c ليست كلها معدومة و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظم لـ (P) .

لدينا: المستوي (P) يشمل النقط $A(2;-3;1)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(4;-2;3)$.

ومنه: $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$. حيث: $\overrightarrow{AB}(-1;3;1)$ و $\overrightarrow{AC}(2;1;2)$.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ تكافئ: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ، أي:

$\begin{cases}-a+3b+c=0\\2a+b+2c=0\end{cases}$ ، بضرب المساواة الأولى في العدد 2 نجد: $\begin{cases}-2a+6b+2c=0\\2a+b+2c=0\end{cases}$ ،

ثم بالجمع طرفا بطرف نجد: $7b+4c=0$ ، أي: $c=-\frac{7}{4}b$.

بالتعويض في الجملة الأولى نجد: $\begin{cases}-a+3b-\frac{7}{4}b=0\\2a+b+2\left(-\frac{7}{4}b\right)=0\end{cases}$ ، أي: $\begin{cases}a=\frac{5}{4}b\\a=\frac{5}{4}b\end{cases}$

ومنه: $\vec{n}\left(\frac{5}{4}b;b;-\frac{7}{4}b\right)$ ، أي: $\vec{n}=b\left(\frac{5}{4};1;-\frac{7}{4}\right)$ ، إذن يوجد عدد غير منته من الأشعة الناظمية، بأخذ مثلا: $b=4$ نجد الشعاع $\vec{n}(5;4;-7)$. ومنه: $5x+4y-7z+d=0$

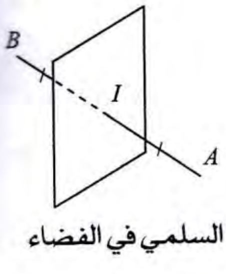
وبما أن $B\in(P)$ فإن $5(1)+4(0)-7(2)+d=0$ ، ومنه: $d=9$.

إذن: $(P):5x+4y-7z+9=0$.

3) بما أن المستوي (P) يوازي المستوي الذي معادلته: $2x+y-3z+7=0$ فإن $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظم لـ (P) وبما أن $A(3;-2;5)$ نقطة من (P) فإن المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث: $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$. لدينا: $\overrightarrow{AM}(x-3;y+2;z-5)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ تكافئ $2(x-3)+1(y+2)-3(z-5)=0$ ، أي:

$(P):2x+y-3z+11=0$



4) بما أن المستوي (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(0;2;1)$ و $B(4;-1;3)$. فإن (P) يمر من النقطة $I\left(2;\frac{1}{2};2\right)$

منتصف القطعة $[AB]$ و $\overrightarrow{AB}(4;-3;2)$ شعاع ناظم لـ (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$.

لدينا : $\overrightarrow{IM}\left(x-2;y-\frac{1}{2};z-2\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0$ تكافئ $4(x-2)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)+2(z-2)=0$ ، أي :

$(P):4x-3y+2z-\frac{21}{2}=0$.

تمرين 07

عين معادلة سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ حيث : $A(0;1;2)$ و $B(2;0;2)$.

الحل

طريقة 01 : سطح الكرة التي التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ، لدينا : $\overrightarrow{MA}(-x;1-y;2-z)$ و $\overrightarrow{MB}(2-x;-y;2-z)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ : $-x(2-x)-y(1-y)+(2-z)(2-z)=0$

أي : $x^2-2x+y^2-y+4-4z+z^2=0$ أي $x^2+y^2+z^2-2x-y-4z+4=0$

طريقة 02 : مركز الكرة التي التي قطرها $[AB]$ هو $\Omega\left(\frac{0+2}{2};\frac{1+0}{2};\frac{2+2}{2}\right)$ أي:

$\Omega\left(1;\frac{1}{2};2\right)$ ونصف قطرها : $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2+(2-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ومنه معادلة سطح الكرة : $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

بعد النشر و التبسيط نجد : $x^2+y^2+z^2-2x-y-4z+4=0$.

تمرين 08

عين في كل حالة المجموعة (E) للنقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث :

أ. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$.

ب. $x^2+y^2+z^2-4y-2z+5=0$.

جـ. $x^2+y^2+z^2-2x-2y+5=0$

الحل

أ.لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$ تكافئ $x^2-2x+y^2-2y+z^2-2=0$

تكافئ $(x-1)^2-1^2+(y-1)^2-1^2+(z-0)^2-2=0$ أي $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=2^2$

ومنه (E) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1;1;0)$ ونصف قطرها 2 .

ب. لدينا : $x^2+y^2+z^2-4y-2z+5=0$ تكافئ $x^2+y^2-4y+z^2-2z+5=0$

تكافئ $(x-0)^2+(y-2)^2-2^2+(z-1)^2-1^2+5=0$ أي $(x-0)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=0$

المساواة الأخيرة تعني أن : $(x-0)^2=0$ و $(y-2)^2=0$ و $(z-1)^2=0$

ومنه : $x=0$ و $y=2$ و $z=1$. إذن مجموعة النقط (E) هي النقطة $A(0;2;1)$.

جـ. لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+5=0$ تكافئ $x^2-2x+y^2-2y+z^2+5=0$

تكافئ $(x-1)^2-1^2+(y-1)^2-1^2+(z-0)^2+5=0$ أي $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=-3$

المساواة الأخيرة مستحيلة ، لأن طرفها الأيمن سالب وطرفها الأيسر موجب .

ومنه (E) هي المجموعة الخالية .

تمرين 09

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء .

1) عين (E) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$.

2) عين (F) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$.

الحل

1) نفرض G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ ، G هي مركز ثقل المثلث ABC

وتحقق : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

لدينا : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$$=3\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$

وبما أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ فإن : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

ومنه : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=3$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$ أي $GM=1$.

و بالتالي فإن المجموعة (E) هي سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1.

2) ليكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ وليكن H مرجحا للجملة $\{(A;1),(B;2)\}$. لدينا: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}=\vec{0}$.

ومنه: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

و $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)+2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)=3\overrightarrow{MH}+\left(\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}\right)$

وبما أن $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ ، فإن : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}$.

إذن : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MH}\right\|$

أي : MG = MH . وبالتالي (F) هي المستوي المحوري للقطعة $[GH]$.

تمرين 10

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $3x-2y+5z-4=0$.

1) عين بعد النقطة A(1 ; -2 ; 7) عن المستوي (P).

2) عين بعد النقطة B(2 ; 1 ; 0) عن المستوي (P). ماذا تستنتج ؟

الحل

1) $d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|3(1)-2(-2)+5(7)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}=\sqrt{38}$

2) $d\left(B;(P)\right)=\dfrac{|3(2)-2(1)+5(0)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}=0$. ومنه النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

تمرين 11

أدرس الوضع النسبي للمستوي (P) المعرف بمعادلته الديكارتية و سطح الكرة (S) التي مركزها Ω ونصف قطرها R في كل حالة :

1) $(P):x+y+z+1=0$ ، $\Omega(1;0;0)$ ، $R=1$.

2) $(P):x+y+z-5=0$ ، $\Omega(1;0;1)$ ، $R=7$.

3) $(P):x+z+2=0$ ، $\Omega(1;1;1)$ ، $R=2\sqrt{2}$.

الحل

1) $d\left(\Omega;(P)\right)=\dfrac{|1(1)+0(1)+0(1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$ ، ومنه (P) لايقطع (S) .

2) $d\left(\Omega;(P)\right)=\dfrac{|1(1)+0(1)+(1)-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<7$ ، ومنه (P) يقطع (S) في دائرة .

3) $d\left(\Omega;(P)\right)=\dfrac{|1+1++2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ ، ومنه (P) يمس (S) في نقطة .

تمرين 12

في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ للفضاء ،نعتبر النقطتين $A(1;1;1)$ ، $B(0;1;1)$

1) عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=2$.

2) عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=2$.

3) عين مجموعة النقط $M\left(x\,;y\,;z\right)$ التي تحقق : $2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=-5$.

الحل

1) لدينا: $\overrightarrow{AB}\left(-1;0;0\right)$ و $\overrightarrow{AM}\left(x-1;y-1;z-1\right)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=2$ تكافئ : $\left(-1\right)\left(x-1\right)+0\left(y-1\right)+0\left(z-1\right)=2$ ، أي : $x=1$

ومنه مجموعة النقط هي المستوي الذي معادلته $x=1$.

2) لدينا: $\overrightarrow{MA}\left(1-x\,;1-y\,;1-z\right)$ و $\overrightarrow{MB}\left(-x\,;1-y\,;1-z\right)$ ، ومنه:

$2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=2$ تكافئ $2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2=2$ تكافئ :

$2\left[\left(1-x\right)^2+\left(1-y\right)^2+\left(1-z\right)^2\right]+3\left[\left(-x\right)^2+\left(1-y\right)^2+\left(1-z\right)^2\right]=2$ ، تكافئ:

$x^2+y^2+z^2-\frac{4}{5}x-2y-2z+\frac{241}{125}=0$ ، تكافئ :

$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=\frac{29}{125}$.

ومنه مجموعة النقط هي سطح كرة مركزها $\Omega\left(\frac{2}{5};1;1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{29}{125}}$.

3) لدينا: $\overrightarrow{MA}\left(1-x\,;1-y\,;1-z\right)$ و $\overrightarrow{MB}\left(-x\,;1-y\,;1-z\right)$ ، ومنه :

$2\left(\overrightarrow{MA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=-5$ تكافئ :

$2\left[\left(1-x\right)^2+\left(1-y\right)^2+\left(1-z\right)^2\right]-2\left[\left(-x\right)^2+\left(1-y\right)^2+\left(1-z\right)^2\right]=-5$

تكافئ : $x=\frac{7}{4}$.

ومنه مجموعة النقط هي المستوي الذي معادلته $x=\frac{7}{4}$.

تمرين 13

ليكن $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ المستويان اللذان معادلتاهما على الترتيب : $-2x+y+5z-1=0$

و $x+2y-7=0$ ، ولتكن النقطة $A\left(5;-2;-1\right)$.

1) بين أن المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ متعامدان .

2) أحسب المسافة بين النقطة A وكل من المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.

3) استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم $\left(D\right)$ مستقيم تقاطع $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.

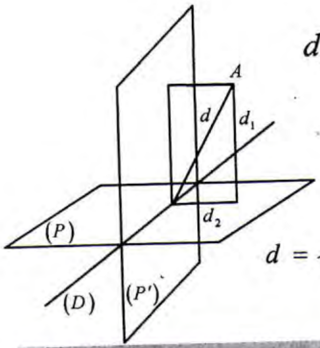
الحل

1) لدينا : $\overrightarrow{n_1}(-2;1;5)$ شعاع ناظم لـ (P) و $\overrightarrow{n_2}(1;2;0)$ شعاع ناظم لـ (P').

نبين أن $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$. لدينا : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = -2(1)+1(2)+5(0)=0$ ، ومنه $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ وبالتالي (P) و (P') متعامدان.

2) لدينا : $d_1 = d(A;(P)) = \dfrac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(5)^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{30}} = \dfrac{3\sqrt{30}}{5}$

و : $d_2 = d(A;(P')) = \dfrac{|5+2\times(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$



3) لتكن d المسافة بين A والمستقيم (D) ، لدينا حسب مبرهنة فيثاغورث: $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ ، ومنه :

$$d = \sqrt{d_1^2+d_2^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{450}{25}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

تمرين 14

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين :

$A(3;1;3)$ ، $B(-6;2;1)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $x+2y+2z=5$

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك .

1) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\| = 2$ هي :

ج1) مستو ، ج2) سطح كرة ، ج3) المجموعة الخالية .

2) إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هي :

ج1) $\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ ، ج2) $\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right)$ ، ج3) $\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

3) سطح الكرة التي مركزها B ونصف قطرها 1 :

ج1) يقطع (P) في دائرة ، ج2) متماس مع (P) ، ج3) لا يقطع (P)

الحل

1) الجواب : ج2) سطح كرة ، لأن :

لتكن G مرجح الجملة $\{(A;4);(B;-1)\}$ ، إن G موجودة ووحيدة لأن $4-1=3\neq 0$

وتحقق : $4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. ولدينا:

$$4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=4\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=3\overrightarrow{MG}+4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$$

وبما أن $4\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ، فإن : $4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ ، ومنه :

$\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=2$ أي $3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2$ أي $GM=\dfrac{2}{3}$

ومنه مجموعة النقط هي سطح كرة مركزها G مرجح الجملة $\{(A;4);(B;-1)\}$ ،

ونصف قطرها $\dfrac{2}{3}$.

2) الجواب ج3) $H\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ ، لأن :

• $H\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)\in(P)$ ، إذ أن : $\dfrac{7}{3}+2\left(\dfrac{-1}{3}\right)+2\left(\dfrac{5}{3}\right)=5$ محققة.

• $\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$ و $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظم لـ (P) مرتبطان خطيا، حيث: $\overrightarrow{AH}=-\dfrac{2}{3}\vec{n}$

3) الجواب ج3) لا يقطع (P) ، لأن : $d\left(B;(P)\right)$ بعد النقطة B عن المستوي (P) أكبر

تماما من 1 نصف قطر سطح الكرة ، إذ أن : $d\left(B;(P)\right)=\dfrac{\left|-6+2(2)+2(1)-5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}>1$

تمرين 15

في الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط :

$A(2;4;1)$ ، $B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$ و $E(1;1;0)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير لكل إقتراح من الإقتراحات التالية :

1) المعادلة : $2x+2y-z-11=0$ هي معادلة للمستوي : (ABC) .

2) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

3) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

الحل

1) <u>صحيح</u> ، لأن :

- إحداثيات كل من A ، B و C تحقق المعادلة $2x+2y-z-11=0$ ، إذ أن :

$2(2)+2(4)-1-11=0$ ، $2(0)+2(4)-(-3)-11=0$ ، $2(3)+2(1)-(-3)-11=0$

- A ، B ، C ليست في استقامية ، إذ أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;-4)$

غير مرتبطين خطيا ، حيث : $\dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{-4}{-4}$.

2) **خطأ**، لأن : $E \notin (ABC)$، إذ أن إحداثيات E لا تحقق المعادلة: $2x+2y-z-11=0$ بحيث المساواة: $2(1)+2(1)-0-11=0$ خاطئة.

3) **صحيح**، لأن :الشعاعان $\overrightarrow{AB}\,(-2;0;-4)$ و $\overrightarrow{CD}\,(-2;-1;1)$ متعامدان ، إذ أن :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-2)\times(-2)+(-1)\times0+1\times(-4)=0$.

تمرين 16

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط :

$A\,(3;0;1)$ ، $B\,(0;-1;2)$ ، $C\,(1;-1;0)$ و $D\,(1;1;-2)$.

1) أثبت أن المثلث ABC قائم في C ثم أحسب مساحته.

2) أ / تحقق أن الشعاع $\vec{n}\,(2;-5;1)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC).

ب / استنتج معادلة المستوي (ABC) .

جـ / أحسب المسافة بين D والمستوي (ABC) .

3) استخلص مما سبق حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

1) لدينا: $AB^2=(3-0)^2+(0-(-1))^2+(1-2)^2=11$

و : $AC^2=(3-1)^2+(0-(-1))^2+(1-0)^2=6$

و : $BC^2=(0-1)^2+(-1-(-1))^2+(2-0)^2=5$

نلاحظ أن : $AC^2+BC^2=AB^2$ ، ومنه ABC قائم في C .

ملاحظة : يمكننا إثبات أن $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$.

لتكن S مساحة المثلث ABC ، لدينا: $S=\dfrac{CA\times CB}{2}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

2) أ / نتحقق من أن $\vec{n}$ عمودي على شعاعين متقاطعين من المستوي (ABC).

لدينا : $\overrightarrow{CA}\,(2;1;1)$ و $\overrightarrow{CB}\,(-1;0;2)$ من المستوي (ABC) ومتقاطعين في النقطة C و $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ لأن :

$\vec{n}.\overrightarrow{CA}=2(2)-5(1)+1(1)=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{CB}=2(-1)-5(0)+1(2)=0$

ب / استنتاج معادلة المستوي (ABC) :

بما أن $\vec{n}\,(2;-5;1)$ ناظم لـ (ABC) فإن معادلة (ABC) هي من الشكل :

$2x-5y+z+d=0$. وبما أن $A\in(ABC)$ فإن : $2(3)-5(0)+1+d=0$

ومنه : $d=-7$ ، إذن : $(ABC):2x-5y+z-7=0$

جـ/ المسافة بين D والمستوي (ABC) هي :

$$d\left(D;(ABC)\right)=\frac{\left|2(1)-5(1)-2-7\right|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{30}}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$$

3) ليكن V حجم $ABCD$ ، ولتكن S مساحة مثلث القاعدة ، نختار المثلث ABC .

وليكن h إرتفاع $ABCD$ ، لدينا: $V=\frac{1}{3}\times S\times h$ ، حيث:

$h=d\left(D;(ABC)\right)=\frac{2\sqrt{30}}{5}$ و $S=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

ومنه: $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{30}}{2}\times\frac{2\sqrt{30}}{5}=2$.

المحور التاسع

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

ما يجب أن يعرف

الأعداد المركبة

1 . تعريف: نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

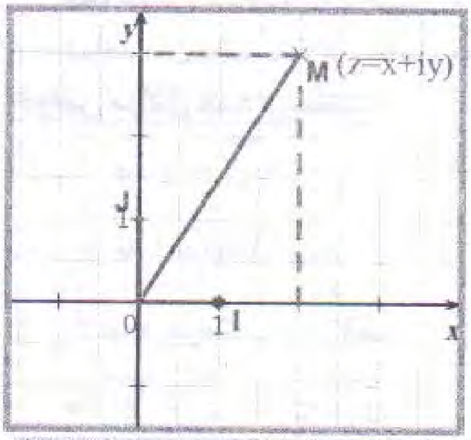
ملاحظات و ترامیز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، ونرمز له بـ: $\operatorname{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، ونرمز له بـ: $\operatorname{Im}(z)$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما. أي $z = 0$ يعني $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

2 . التمثيل الهندسي لعدد مركب :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

- إلى كل عدد مركب $z = x + i\,y$ ($x \in \mathbb{R}$ ، $y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$) نرفق النقطة M إحداثياها $(x; y)$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + i\,y$

نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.

- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب .

العمليات في مجموعة الأعداد المركبة

1 . تساوي عددين مركبين :

تعريف: يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نضع : $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$ ، $z = z'$ معناه ($x = x'$ و $y = y'$)

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

2 . مجموع وجداء عددين مركبين :

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ، ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$ ، ($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$) .

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z'=x+x'+i(y+y')$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z'=xx'-yy'+i(xy'+x'y)$.

ملاحظات: • إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ وكان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$ ، فإن $z+z'$ هو لاحقة $\vec{u}+\vec{v}$.

• إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ وكان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.

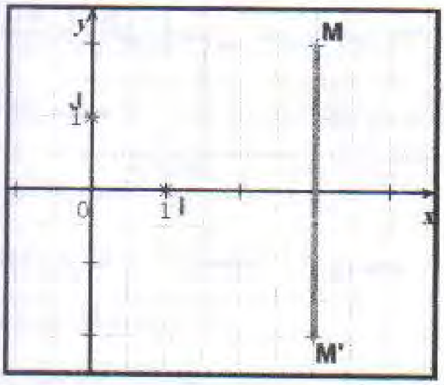
• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

3 . مرافق عدد مركب :

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ، ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$).

العدد المركب $x-iy$ والذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.



التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. z عدد مركب حيث $z=x+iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M' لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

خواص مرافق عدد مركب :

1) • $\bar{\bar{z}}=z$. • $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$.

• $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$. • $z\bar{z}=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$.

2) z عدد مركب و مرافقه $\bar{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$. لدينا:

• $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$ • $\overline{zz'}=\bar{z}\cdot\overline{z'}$. • $\overline{z^n}=\bar{z}^n$. $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

• $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$. مع $z\neq0$. • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.مع $z'\neq0$.

4 . مقلوب عدد مركب غير معدوم :

مبرهنة : كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له $\frac{1}{z}$.

نتائج :ـ بوضع $z=x+iy$ نحصل على : $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{(-y)}{x^2+y^2}$.

ـ لدينا: $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\times\overline{z}}$ ، حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

اللواحق و الهندسة

خاصية: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

A و B نقطتان من المستوي ، z_A لاحقة A و z_B لاحقة B .

- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي z_B-z_A ، ونكتب : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$.
- لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هي : $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$.
- α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

لاحقة النقطة G هي : $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$.

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

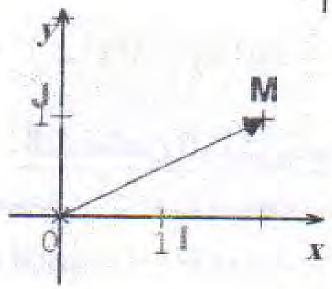
1 . طويلة عدد مركب :

تعريف: z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان). نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

ملاحظات: • إذا كان $z=x$ فإن $|z|=|x|$ ، • إذا كان $z=iy$ فإن $|z|=|y|$.

• $z=0$ يعني $|z|=0$ ، • $|z|^2=x^2+y^2$.

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب :



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

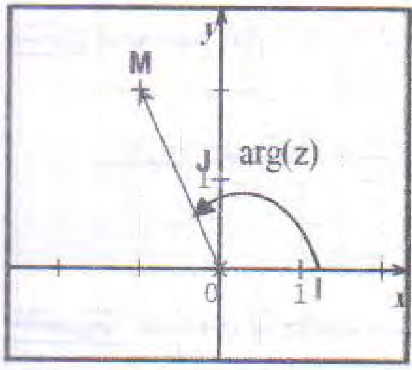
z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$

خواص طويلة عدد مركب : من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}|=|z|$. • $|-z|=|z|$.
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$. • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$. مع $z'\neq 0$
- $|z^n|=|z|^n$. • $|z+z'|\leq|z|+|z'|$. (المتباينة الثلاثية).

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب ، لدينا : $AB=|z_B-z_A|$.

2 . عمدة عدد مركب غير معدوم :



تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + i\,y$

(x و y عددان حقيقيان). في المستوي المركب المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة للعدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان

للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

ملاحظات ونتائج : • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد .

• إذا كان θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ عمدة لـ z ، و نكتب $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب لدينا:

$\arg(z_B) - \arg(z_A) = \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ و $\arg(z_B - z_A) = \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)$.

• z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + i\,y$ ، (x و y عددان حقيقيان) ،إذا كان:

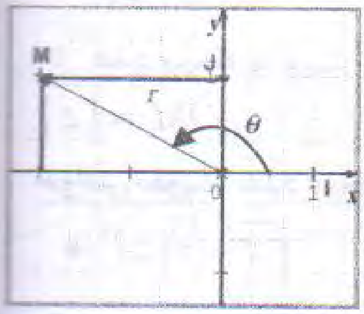
- $z = x$ و $x > 0$ فإن : $zrg(z) \equiv 0[2\pi]$.
- $z = x$ و $x < 0$ فإن : $zrg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
- $z = iy$ و $y > 0$ فإن : $zrg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z = iy$ و $y < 0$ فإن : $zrg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم: z و z' عددان مركبان غير معدومين . لدينا :

• $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ • $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$.

• $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$. • $\arg(z^n) = n\arg(z)$. $n \in \mathbb{N}^*$

3 . الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :



تعريف: z عدد مركب غير معدوم .العدد z يكتب على الشكل

$z = r[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]$ ، حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$.

هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z .

ملاحظة: إذا كان $z = x + i\,y$ ، فإن : $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ و $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$

خاصية: يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

خاصية: إذا كان $z = \lambda[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]$ وكان $\lambda > 0$ فإن :

$|z| = \lambda$ و $\theta = \arg(z)$.

4 . الانتقال من الشكل المثلثي إلى الشكل الجبري و العكس :

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$	من الجبري إلى المثلثي ← → من المثلثي إلى الجبري	$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\theta=\frac{x}{r}$ $\sin\theta=\frac{y}{r}$

توظيف خواص الطويلة و العمدة لحل مسائل في الهندسة

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1 . حساب المسافات :

خاصية : A ، B نقطتان لا حقتاهما على الترتيب : z_A و z_B . لدينا: $AB=\left|z_B-z_A\right|$.

نتائج : • مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

• مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $\left|z-z_A\right|=r$ ،حيث r عدد حقيقي موجب تماما ، هي دائرة مركزها A و نصف قطرها r .

2 . حساب الزوايا:

خاصية 01 : A ، B نقطتان لا حقتاهما على الترتيب : z_A و z_B . لدينا:

$$\arg\left(z_B-z_A\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)$$

خاصية 02 : A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على الترتيب : z_A ، z_B ، z_C . حيث: $z_A\neq z_B$

لدينا: $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

3 . التفسير الهندسي لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

نتيجة: لدينا: $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{AC}{AB}$ و $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

4 . تطبيقات :

أ / استقامية ثلاث نقط : تكون النقط A ، B ، C في استقامية إذا وفقط إذا كان العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ حقيقي .

ب / التعامد : يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان إذا وفقط إذا كان العدد المركب

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف .

جـ / طبيعة مثلث :

• يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا تحقق مايلي :

$\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$. حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة: إذا تحقق الشرط $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ فقط يكون المثلث ABC متساوي الساقين .

• يكون المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين في A إذا تحقق مايلي :

$\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$. حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة: إذا تحقق أحد الشرطين فقط يكون المثلث ABC إما متساوي الساقين فقط و إما قائم فقط في A .

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

1 . ترميز أولر :

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$.

حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2 . الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z .

3 . قواعد الحساب على الشكل الأسي :

خواص: θ و θ' عددان حقيقيان.لدينا:

• $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$. • $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$. • $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

نتائج : z و z' عددان مركبان مكتوبان في الشكل الأسي كما يلي:

$z = re^{i\theta}$ ، $z' = r'e^{i\theta'}$ لدينا:

• $\overline{z} = re^{-i\theta}$ ، • $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ ، • $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

• $z = z'$ معناه : $r = r'$ و $\theta = \theta' + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

4 . دستور موافر :

خاصية: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

نتيجة: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $z^n = r^n e^{in\theta}$ ، $z^n = r^n\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right]$.

5 . استعمال الشكل الأسي لتحديد طبيعة مثلث:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية، لواحقها على الترتيب: z_A ، z_B ، z_C .

1) إذا كان: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2) إذا كان: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكون المثلث ABC قائم متساوي الساقين في A .

3) إذا كان: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ke^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $k \in \mathbb{R}-\{1\}$ يكون المثلث ABC قائم في A .

4) إذا كان: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\theta}$ ، $\left(\theta \neq \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \text{ و } \theta \neq \dfrac{\pi}{2}[2\pi]\right)$ يكون المثلث ABC متساوي الساقين في A .

6 . المعادلة الوسيطية لدائرة ـ لنصف مستقيم مفتوح:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

خاصية: Ω نقطة ثابتة في المستوي ذات اللاحقة z_Ω ، θ عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب تماما. لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $z = z_\Omega + re^{i\theta}$.

1) في حالة r ثابت و θ يمسح $\mathbb{R}$ ، المجموعة (E) هي دائرة مركزها Ω ونصف قطرها r .

ـ المعادلة: $z = z_\Omega + re^{i\theta}$ تسمى معادلة وسيطية للدائرة.

2) في حالة r يمسح $\mathbb{R}_+^*$ و θ ثابت، المجموعة (E) هي نصف مستقيم مفتوح مبدؤه Ω وموجه بالشعاع $\vec{v}$ حيث: $(\overrightarrow{OI};\vec{v}) = \theta$.

ـ المعادلة: $z = z_\Omega + re^{i\theta}$ تسمى معادلة وسيطية لنصف المستقيم المفتوح.

المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

1 . الجذران التربيعيان لعدد مركب:

تعريف: ω عدد مركب. يسمى حلا المعادلة $z^2 = \omega$ ، في $\mathbb{C}$ ،الجذرين التربيعيين للعدد ω .

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران.

2 . المعادلات من الدرجة الثانية.

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد

حقيقية و $a \neq 0$. و $\Delta = b^2 - 4ac$ مميزها .

• إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا حقيقيا مضاعفا : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

• إذا كان $\Delta > 0$ ، المعادلة تقبل حلين حقيقيين متمايزين :

$$z' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• إذا كان $\Delta < 0$ ، المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين :

$z' = \frac{-b - \omega}{2a}$ و $z'' = \frac{-b + \omega}{2a}$ ، حيث ω جذر تربيعي لـ Δ .

<u>نتائج</u> : إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن :

1) من أجل كل عدد مركب z : $az^2 + bz + c = a(z - z')(z - z'')$

2) $z' + z'' = -\frac{b}{a}$ و $z' \times z'' = \frac{c}{a}$.

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

1 . النقط الصمدة بتحويل نقطي :

<u>تعريف</u> : f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث $M' = f(M)$. تكون نقطة Ω صامدة بالتحويل f إذا تحقق ما يلي : $f(\Omega) = \Omega$.

2 . التحويل المطابق :

<u>تعريف</u> : التحويل المطابق هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $M' = M$.

<u>خواص</u> : • كل نقطة من المستوي صامدة بالتحويل المطابق .

• التحويل المطابق تقايس .

<u>العبارة المركبة</u> :

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = z$ ، هو التحويل المطابق .

3 . الانسحاب :

<u>تعريف</u> : الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

<u>خواص</u> : • الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل المطابق .

• الخاصة المميزة: صورة ثنائية (A, B) هي ثنائية (A', B') تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

• الانسحاب تقايس .

• **العبارة المركبة:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$ ، b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{U}$ صورة b .

4 . التحاكي :

تعريف : Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم. التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث :

$$k \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

خواص :

• التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.

• إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقط Ω ، M و M' في استقامية .

• **الخاصة المميزة:** صورة ثنائية (A, B) بالتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي الثنائية (A', B') التي تحقق: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

• نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا .

• **العبارة المختصرة للتحاكي :** $z'-z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$.

• **العبارة المركبة:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a .

5 . الدوران :

تعريف : ω نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي ،

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M' حيث: $\Omega M' = \Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$

خواص : الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.

الخاصة المميزة: صورة كل ثنائية (A, B) بالدوران الذي مركزه ω و زاويته θ هي ثنائية (A', B') تحقق ما يلي : $A'B' = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \theta$ ، وبالتالي الدوران تقايس.

• **العبارة المختصرة للدوران :** $z'-z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega})$.

• **العبارة المركبة:** التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg(a)$.

تمارين محلولة

تمرين 01

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عين الجواب الصحيح معللا اختيارك .

1 . الشكل الجبري للعدد المركب $z=\dfrac{7+3i}{5-2i}$ هو :

ج1) $1+i$ ، ج2) $\dfrac{29}{21}+\dfrac{29}{21}i$ ، ج3) $\dfrac{7}{5}-\dfrac{3}{2}i$

2 . حل للمعادلة: $2z+\overline{z}=9+i$ في $\mathbb{C}$ هو: ج1) 3 ، ج2) i ، ج3) $3+i$.

3 . إذا كان z و z' عددان مركبان حيث $|z|=2$ و $z'=z-\dfrac{1}{\overline{z}}$ فإن $|z'|$ تساوي :

ج1) 1 ، ج2) $\dfrac{3}{2}$ ، ج3) $\dfrac{1}{2}$.

4 . إذا كان $\dfrac{\pi}{6}$ عمدة لـ z فإن عمدة لـعدد المركب $\dfrac{i}{\overline{z}^{2}}$ هي :

ج1) $-\dfrac{\pi}{6}$ ، ج2) $-\dfrac{5\pi}{6}$ ، ج3) $\dfrac{5\pi}{6}$.

5 . إذا كان $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ فإن الشكل الأسي لـ z هو :

ج1) $e^{\frac{i5\pi}{6}}$ ، ج2) $e^{\frac{i7\pi}{6}}$ ، ج3) $\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{6}}$ ، ج4) $e^{-\frac{i5\pi}{6}}$.

6 . مجموعة حلول المعادلة $z=\dfrac{z-2}{z-1}$ في $\mathbb{C}$ هي :

ج1) $\{1-i\}$ ، ج2) $\varnothing$ ، ج3) $\{1-i;1+i\}$.

الحل

1 . الجواب الصحيح هو: ج1) $1+i$.

ـ التبرير : $z=\dfrac{7+3i}{5-2i}=\dfrac{7+3i}{5-2i}\times\dfrac{5+2i}{5+2i}=\dfrac{(7+3i)\times(5+2i)}{5^2+2^2}=\dfrac{29+29i}{29}$

$=\dfrac{29}{29}+\dfrac{29}{29}i=1+i$

2 . الجواب الصحيح هو: ج3) $3+i$.

ـ التبرير :نضع $z=x+iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان ، لدينا: $2z+\overline{z}=9+i$

تكافئ $2(x+iy)+\overline{(x+iy)}=9+i$ ، أي: $2(x+iy)+(x-iy)=9+i$

أي: $3x+iy=9+i$ ، فحسب تساوي عددين مركبين نجد: $3x=9$ و$y=1$ ، ومنه: $x=1$ و $y=1$ ، أي: $z=3+i$ هو حل للمعادلة $2z+\overline{z}=9+i$.

ملاحظة : يمكن الإجابة بتعويض كل اقتراح في المعادلة ، فنجد الجواب الصحيح الوحيد هو :ج3)

3 . الجواب الصحيح هو : ج2) $\frac{3}{2}$.

التبرير: لدينا: $z'=z-\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z\times\overline{z}-1}{\overline{z}}=\frac{|z|^2-1}{\overline{z}}=\frac{2^2-1}{\overline{z}}=\frac{3}{\overline{z}}$

ومنه: $|z'|=\left|\frac{3}{\overline{z}}\right|=\frac{|3|}{|\overline{z}|}=\frac{3}{|z|}=\frac{3}{2}$

4 . الجواب الصحيح هو : ج3) $\frac{5\pi}{6}$.

التبرير: لدينا ، $\arg\left(\frac{i}{\overline{z}^{2}}\right)=\arg(i)-\arg\left(\overline{z}^{2}\right)=\arg(i)-2\arg\left(\overline{z}\right)$

$=\arg(i)-(-2\arg(z))=\arg(i)+2\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$

5 . الجواب الصحيح هو : ج1) $e^{\frac{i5\pi}{6}}$.

التبرير : نعين أولا الشكل الجبري للعدد $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، لدينا:

$$z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

ومنه: $|z|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$.

لتكن $\theta=\arg(z)$. لدينا: $\begin{cases}\cos\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه : $\theta=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ، أي :

$\theta=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي: $\frac{5\pi}{6}$ عمدة لـ z ، ومنه : الشكل الأسي لـ z هو :

. $z=1\times e^{\frac{i5\pi}{6}}=e^{\frac{i5\pi}{6}}$ ، أي: $z=e^{\frac{i5\pi}{6}}$.

6. الجواب الصحيح هو: ج3) $\{1-i;1+i\}$.

التبرير: $z=\frac{z-2}{z-1}$ تكافئ $z(z-1)=z-2$ ، أي: $z^2-2z+2=0$ وهذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية مميزها: $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4=(2i)^2$ ، فهي تقبل حلين مركبين مترافقين: $z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ ، $z_2=\overline{z_1}=1-i$.

تمرين 02

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ، مع x و y عددان حقيقيان. من اجل كل عدد مركب z يختلف عن $-i$ نعرف العدد المركب Z كما يلي: $Z=\frac{z-i}{z+i}$

1. أكتب العدد Z على الشكل الجبري.
2. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد Z حقيقيا.
3. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد Z تخيليا صرفا.

الحل

1. لدينا: $Z=\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}\times\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)}$

$$=\frac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

إذن: $Z=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$

2. العدد Z حقيقي معناه: $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}=0$ ، مع $x^2+(y+1)^2\neq0$.

أي: $-2x=0$ مع $x\neq0$ و $y\neq-1$ ، أي: $x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$.

إذن: مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد Z حقيقيا هي المستقيم الذي معادلة له: $x=0$ ، باستثناء النقطة $A(0;-1)$.

3. العدد Z تخيلي صرف معناه: $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$ ، أي:

$x^2+y^2-1=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$ ، أي: $x^2+y^2=1$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد Z تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة $A(0;-1)$.

تمرين 03

من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $-1+i$ ، نضع: $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$ ، حيث: $z=x+iy$

مع x و y عددان حقيقيان.

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C ،

لواحقها على الترتيب : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\frac{1}{2}i$ ، $z_C=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(\overline{z})=-2$.
2. حدد $\text{Re}[f(z)]$ و $\text{Im}[f(z)]$ بدلالة x و y .
3. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا .
4. حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون: $|f(z)|=2$.
5. بين أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين في النقطة C.

الحل

1 . $f(\overline{z})=-2$ تكافئ: $\frac{2\overline{z}-i}{\overline{z}+1-i}=-2$ ، أي: $2\overline{z}-i=-2\overline{z}-2+2i$ ، ومنه :

$\overline{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$ ، ومنه: $z=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$.

2 . لدينا: $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}=\frac{2(x+iy)-i}{x+iy+1-i}=\frac{2x+i(2y-1)}{x+1+i(y-1)}\times\frac{x+1-i(y-1)}{x+1-i(y-1)}$

$$=\frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}+i\times\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

ومنه: $\text{Re}(f(z))=\frac{2x^2+2y^2+2x+3y+1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$ و $\text{Im}(f(z))=\frac{x+2y-1}{(x+1)^2+(y-1)^2}$

3 . $f(z)$ حقيقي معناه: $\text{Im}[f(z)]$.

$\text{Im}[f(z)]$ تعني : $x+2y-1=0$ و $(x+1)^2+(y-1)^2\neq 0$

أي: $x+2y-1=0$ و $x\neq -1$ ، $y\neq 1$. إذن مجموعة النقط هي المستقيم الذي معادلة له:

$x+2y-1=0$ باستثناء النقطة $A(-1;1)$.

4 . $|f(z)|=2$ تعني : $\left|\frac{2z-i}{z+1-i}\right|=2$ ، أي: $\left|\frac{2\left(z-\frac{i}{2}\right)}{z+1-i}\right|=2$ ، أي: $2\left|\frac{z-\frac{i}{2}}{z+1-i}\right|=2$

أي: $\left|\dfrac{z-\dfrac{i}{2}}{z+1-i}\right|=1$ ، أي: $|z+1-i|=\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$ ، أي: $|z-z_A|=|z-z_B|$ ، أي:

$BM=AM$ ، إذن مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

5 . بالحساب نجد:

$$AB=|z_A-z_B|=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ ، }AC=|z_A-z_C|=\frac{\sqrt{10}}{4}\text{ ، }BC=|z_B-z_C|=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

ومنه: $AB^2=\dfrac{5}{4}$ ، $AC^2=\dfrac{5}{8}$ ، $BC^2=\dfrac{5}{8}$ ،

لدينا: $AC=BC$ ، وبما أن : $AC^2+BC^2=\dfrac{5}{8}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{4}=BA^2$ ، فإن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين في النقطة C.

تمرين 04

نعتبر الأعداد المركبة التالية : $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ ، $z_2=1-i$ و $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$.

1 . أكتب على الشكل المثلثي كل من الأعداد : z_1 ، z_2 و z_3 .

2 . عين الشكل الجبري للعدد z_3 .

3 . استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

الحل

1 .لدينا: $|z_1|=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1=\arg(z_1)$.

لدينا: $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه : $\theta_1=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتالي: $-\dfrac{\pi}{6}$ عمدة لـ z_1 ، إذن الشكل المثلثي لـ z_1: $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

ولدينا: $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = |z_2| = 1-i$ ، لتكن $\theta_2 = \arg(z_2)$.

لدينا: $\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه: $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

وبالتالي: $-\frac{\pi}{4}$ عمدة لـ z_2 ، إذن الشكل المثلثي لـ z_2 : $z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ولدينا: $1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_3|$ ، لتكن $\theta_3 = \arg(z_3)$.

لدينا: $\arg z_3 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$

وبالتالي: $\frac{\pi}{12}$ عمدة لـ z_3 ، إذن الشكل المثلثي لـ z_3 : $z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2 . لدينا: $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{2(1-i)} \times \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

إذن: $z_3 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3 . من الشكل المثلثي $z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ، ومن الشكل الجبري

$z_3 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، بالمطابقة نجد: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تمرين 05

z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$ و $z_2 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب $z_3 = z_1 \times z_2$ ، ثم أكتب z_3 على الشكل المثلثي .

3) أكتب z_3 على الشكل الجبري .

4) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

5) بين أن العدد: z_3^{12} حقيقي .

الحل

1) ـ لدينا: $z_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i=\frac{3}{\sqrt{2}}\times(1+i)$ ،

ومنه: $|z_1|=\left|\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)\right|=\left|\frac{3}{\sqrt{2}}\right|\times|1+i|=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=3$

ومنه: $\arg(z_1)=\arg\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\times(1+i)\right)=\arg\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+\arg(1+i)=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

وبالتالي: $z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

ـ لدينا: $z_2=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ،

ومنه: $|z_2|=\left|\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right|=\left|\frac{1}{3}\right|\times\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$

ومنه: $\arg(z_2)=\arg\left(\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)=\arg\left(\frac{1}{3}\right)+\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

وبالتالي: $z_2=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2) لدينا: $z_3=z_1\times z_2$ ، ومنه: $|z_3|=|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|=3\times\frac{1}{3}=1$

ومنه : $\arg(z_3)=\arg(z_1\times z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

ويكون الشكل المثلثي لـ z_3 : $z_3=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$

3) لدينا: $z_3=z_1\times z_2=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i\right)\times\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4) بمطابقة الشكل الجبري: $z_3=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ مع الشكل المثلثي:

$z_3=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$ ، نجد: $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

5) لدينا: $z_3 = 1\times\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ، ومنه بتطبيق دستور موافر نجد:

$$z_3^{12} = 1^{12}\times\left(\cos\frac{12\times7\pi}{12}+i\sin\frac{12\times7\pi}{12}\right) = \cos7\pi + i\sin7\pi$$
$$= \cos7\pi+i\sin7\pi = \cos(\pi+2\pi\times3)+i\sin(\pi+2\pi\times3)$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1+i\times0 = -1$$

ومنه: $z_3^{12} = -1$ فهو حقيقي.

تمرين 06

نعتبر العدد المركب : $z = (\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

1 . أكتب z^2 على الشكل الجبري .

2 . عين الطويلة و عمدة لـ z^2 ، ثم استنتج الطويلة و عمدة لـ z .

3 . عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n تخيليا صرفا .

الحل

1 . لدينا:

$$z^2 = \left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$$
$$= 8\sqrt{3}+8i$$

إذن: $z^2 = 8\sqrt{3}+8i$.

2 . لدينا: $z^2 = 8\sqrt{3}+8i = 8\left(\sqrt{3}+i\right)$ ،

ومنه: $\left|z^2\right| = \left|8\left(\sqrt{3}+i\right)\right| = |8|\times\left|\sqrt{3}+i\right| = 8\times2 = 16$

لتكن $\theta = \arg(z^2)$. لدينا: $\begin{cases}\cos\theta = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\end{cases}$ ، ومنه: $\theta = \frac{\pi}{6}+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$

إذن: $\frac{\pi}{6}$ عمدة لـ z^2 .

استنتاج الطويلة و عمدة لـ z :

لدينا: $\left|z^2\right| = 16$ ، ومنه: $|z|^2 = 16$ ، ومنه: $|z| = 4$ ، لأن: $|z|>0$.

لدينا: $\arg(z^2) = \frac{\pi}{6}$ ، ومنه: $2\arg(z) = \frac{\pi}{6}$ ، ومنه: $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$.

3 . لدينا: $|z| = 4$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$ ومنه الشكل المثلثي للعدد z هو:

$z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ، وبتطبيق دستور موافر نجد :

$$z^n=4^n\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)=\left(4^n\times\cos\frac{n\pi}{12}\right)+i\left(4^n\times\sin\frac{n\pi}{12}\right)$$

وبالتالي: z^n تخيلي صرف معناه : $4^n\times\cos\frac{n\pi}{12}=0$ ، ومنه: $\cos\frac{n\pi}{12}=0$ ، ومنه :

$\frac{n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ، ومنه : $n=12k+6$ ، حيث $k\in\mathbb{N}$

تمرين 07

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=\frac{3}{2}(1+i)$ ، $z_B=2-\frac{1}{2}i$ ، $z_C=-\frac{1}{2}+2i$

1. أ/ أحسب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطة $[BC]$.

ب/ أحسب لاحقة منتصف القطعة $[OA]$. ماذا تستنتج ؟

2. أ/ أثبت أن : $z_{\overline{BC}}=\frac{5}{3}iz_{\overline{OA}}$ ، ثم استنتج حاصل القسمة : $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}$.

ب/ فسر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}$.

جـ/ ماذا تستنتج بالنسبة للشعاعين $\overline{BC}$ و $\overline{OA}$ ؟

3. استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.

الحل

1. أ/ لدينا: $z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}i+-\frac{1}{2}+2i}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$.

ب/ لاحقة منتصف القطعة $[OA]$ هي: $\frac{z_O+z_A}{2}=\frac{0+\frac{3}{2}(1+i)}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$

نلاحظ أن : $\frac{z_O+z_A}{2}=z_I$ ، ومنه: القطران $[OA]$ ، $[BC]$ في الرباعي $ABOC$ متناصفان فهو متوازي أضلاع.

2. أ/ لدينا: $z_{\overline{BC}}=z_C-z_B=\left(2-\frac{1}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}+2i\right)=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$.

ومن جهة : $\frac{5}{3}iz_{\overline{OA}}=\frac{5}{3}i\left(z_A-z_O\right)=\frac{5}{3}i\left(\frac{3}{2}(1+i)-0\right)=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$.

إذن: $z_{\overline{BC}}=\frac{5}{3}iz_{\overline{OA}}$.

استنتاج حاصل القسمة $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}$:

لدينا: $z_{\overline{BC}}=\frac{5}{3}iz_{\overline{OA}}$ تكافئ $z_C-z_B=\frac{5}{3}i\left(z_A-z_O\right)$ ، أي: $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}=\frac{5}{3}i$.

ب/ أولا : التفسر الهندسي لـ $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}$:

لدينا: $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right|=\frac{\left|z_C-z_B\right|}{\left|z_A-z_O\right|}=\frac{BC}{OA}$ ، إذن: $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right|=\frac{BC}{OA}$

ثانيا: التفسر الهندسي لـ $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right)$:

لدينا:
$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right)&=\arg\left(z_C-z_B\right)-\arg\left(z_A-z_O\right)+2\pi k\\&=\left(\vec{u};\overline{BC}\right)-\left(\vec{u};\overline{OA}\right)+2\pi k\\&=\left(\vec{u};\overline{BC}\right)+\left(\overline{OA};\vec{u}\right)+2\pi k\\&=\left(\overline{OA};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overline{BC}\right)+2\pi k\\&=\left(\overline{OA};\overline{BC}\right)+2\pi k\end{aligned}$$

إذن: $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right)=\left(\overline{OA};\overline{BC}\right)+2\pi k$ ، حيث : $k\in\mathbb{Z}$.

جـ/ لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}=\frac{5}{3}i$ ، ومنه: $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_O}\right)=\arg\left(\frac{5}{3}i\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

ومنه $\left(\overline{OA};\overline{BC}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ، إذن: $\overline{BC}$ و $\overline{OA}$ متعامدان.

متوازي الأضلاع $ABOC$ قطراه $[OA]$ ، $[BC]$ متعامدان فهو معين.

ملاحظة: $BC \neq OA$ ، لأن: $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_O}\right| = \left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3} \neq 1$

لو كان $BC = OA$ لكان المعين $ABOC$ مربعا .

تمرين 08

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0 ...(1)$.

2 . استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0 ...(2)$.

الحل

1 . مميز المعادلة (1) هو: $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

فهي تقبل حلين مركبين مترافقين هما: $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$

2 . بوضع: $Z = -iz + 3i + 3 ...(*)$ نجد أن المعادلة (2) تكافئ: $Z^2 - 2Z + 2 = 0$

وحسب السؤال 1 نجد: $Z = 1 + i$ أو $Z = 1 - i$.

من أجل: $Z = 1 + i$ نجد من (*): $1 + i = -iz + 3i + 3$ ، أي: $iz = 2i + 2$ ،

أي: $z = \frac{2i + 2}{i} \times \frac{-i}{-i} = 2 - 2i$.

ومن أجل: $Z = 1 - i$ نجد من (*): $1 - i = -iz + 3i + 3$ ، أي: $iz = 4i + 2$ ،

أي: $z = \frac{4i + 2}{i} \times \frac{-i}{-i} = 4 - 2i$. إذن: المعادلة (2) تقبل حلين هما: $2 - 2i$ و $4 - 2i$.

تمرين 09

1 . أنشر العدد: $(1 - \sqrt{2})^2$.

2 . حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

3 . حل في مجموعة الأعداد المركبة كل من المعادلتين: $z + \frac{1}{z} = 1$ ، $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

4 . $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$$

أ / بين أنه من أجل كل عدد مرب غير معدوم z :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$

ب / استنتج مما سبق حلول المعادلة: $P(z) = 0$.

الحل

1 . لدينا: $(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

2 . مميز المعادلة المعطاة هو: $\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1 - \sqrt{2})^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين حقيقيين متمايزين:

$z_2=\frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ ، $z_1=\frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2}=1$

3 . $z+\frac{1}{z}=1$ تكافئ $z^2-z+1=0$ ، وهذه الأخيرة مميزها يساوي : $-3=(i\sqrt{3})^2$

تقبل حلين مركبين مترافقين : $z_1'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_2'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ تكافئ $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ ، وهذه الأخيرة مميزها يساوي: $-2=(i\sqrt{2})^2$

تقبل حلين مركبين مترافقين : $z_1''=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ ، $z_2''==\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$

4 . لدينا بعد النشر و التبسيط :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}=z^2+2z\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-(1+\sqrt{2})z-(1+\sqrt{2})\frac{1}{z}+\sqrt{2}$$

$$=\frac{z^4+2z^2+1-(1+\sqrt{2})z^3-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}z^2}{z^2}$$

$$=\frac{z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1}{z^2}=\frac{P(z)}{z^2}$$

ب / بوضع : $Z=z+\frac{1}{z}$ ، نجد : $P(z)=0$ تكافئ : $Z^2-(1+\sqrt{2})Z+\sqrt{2}=0$

وهذه الأخيرة تقبل حسب السؤال 2 حلين هما $Z_1=1$ و $Z_2=\sqrt{2}$.

ثم باستعمال المساواة : $Z=z+\frac{1}{z}$ نجد حسب السؤال 3 حلول المعادلة $P(z)=0$ هي :

$z_1'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_2'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1''=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ ، $z_2''==\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$.

تمرين 10

1 . تحقق من أن : $(1+i)^6=-8i$.

2 . نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2=-8i$ ....(I) .

أ) استنتج من السؤال 1) حلا للمعادلة (I) .

ب) عين الحل الثاني للمعادلة (I) ثم أكتبه على الشكل الجبري .

3 . استنتج من السؤال 1) حلا للمعادلة: $z^3=-8i$.

الحل

1 . لدينا : $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$ ، ومنه : $(1+i)^6=(2i)^3=-8i$.

طريقة أخرى :لدينا : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $(1+i)^6=(\sqrt{2})^6e^{i6\frac{\pi}{4}}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}=-8i$

2 . بما أن : $(1+i)^6=-8i$ فإن : $\left[(1+i)^3\right]^2=-8i$ ، ومنه : $(1+i)^3$ حل للمعادلة (I).

حيث : $(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)=2i(1+i)=-2+2i$.

لدينا : $-2+2i$ حل للمعادلة (I) ومنه : $\overline{-2+2i}=-2-2i$ حل للمعادلة (I).

3 . لدينا : $(1+i)^6=\left[(1+i)^2\right]^3$ ، ومنه : $(1+i)^2=2i$ حل للمعادلة : $z^3=-8i$.

تمرين 11

نعتبر العدد المركب $Z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$ ، أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير في كل حالة :

1 . لدينا : $|Z|=1$.

2 . لدينا : $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

3 . لدينا : $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

4 . لدينا : $-\frac{\pi}{12}$ عمدة للعدد المركب Z .

الحل

1 . صحيح ، لدينا : $|Z|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right|\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{\left|-\sqrt{2}\right|}{|1+i|}\times\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times1=1$.

2 . خطأ ، لدينا : $Z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\times e^{\frac{i\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$

3 . صحيح ، لدينا : $Z=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i3\pi}{4}}e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i13\pi}{12}}$.

4 . خطأ ، لدينا : $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$ ، لكن: $\frac{13\pi}{12}\neq-\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

تمرين 12

أكتب العبارة $\cos^2 5x\sin 3x$ بدلالة $\sin$ فقط .

الحل

لدينا: $\cos 5x=\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}$ ، ومنه : $\cos^2 5x=\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{i10x}+2+e^{-i10x})$

ولدينا : $\sin 3x=\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}$ ، ومنه :

$$\cos^2 5x \sin 3x = \frac{1}{4}(e^{i10x}+2+e^{-i10x})\times\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}$$
$$=\frac{1}{8i}(e^{i13x}-e^{i7x}+2e^{i3x}-2e^{-i3x}+e^{-i7x}-e^{-i13x})$$
$$=\frac{1}{8i}(e^{i13x}-e^{-i13x}-e^{i7x}+e^{-i7x}+2e^{i3x}-2e^{-i3x})$$
$$=\frac{1}{4}(\frac{e^{i13x}-e^{-i13x}}{2i}-\frac{e^{i7x}-e^{-i7x}}{2i}+2\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i})$$
$$=\frac{1}{4}(\sin 13x-\sin 7x+2\sin 3x)$$

تمرين 13

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
في كل ما يأتي اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التعليل :

1. z عدد مركب يحقق : $\bar{z}+|z|=6+2i$ ، الشكل الجبري للعدد z هو :
ج1) $\frac{8}{3}-2i$ ، ج2) $-\frac{8}{3}-2i$ ، ج3) $\frac{8}{3}+2i$ ، ج4) $-\frac{8}{3}+2i$.

2. مجموعة النقط M ذات الاحقة $z=x+iy$ بحيث: $|z-1|=|z+i|$ هي مستقيم معادلة له: ج1) $y=x-1$ ، ج2) $y=-x$ ، ج3) $y=-x+1$ ، ج4) $y=x$.

3. n عدد طبيعي، العدد المركب $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ حقيقي إذا وفقط إذا كان n يكتب على الشكل: ج1) $3k+1$ ، ج2) $3k+2$ ، ج3) $3k$ ، ج4) $6k$.

4. حل للمعادلة $z=\frac{6-z}{3-z}$ هو:
ج1) $-2-i\sqrt{2}$ ، ج2) $2+i\sqrt{2}$ ، ج3) $1-i$ ، ج4) $-1-i$.

5. مجموعة النقط M ذات اللاحقة $z=x+iy$ بحيث: $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$ هي :
ج1) مستقيم معادلة له $y=-x$.
ج2) دائرة مركزها النقطة I ذات اللاحقة $1+i$ ونصف القطر $R=\sqrt{2}$.
ج3) مستقيم معادلة له $y=x$.
ج4) دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B، حيث A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=2i$.

الحل

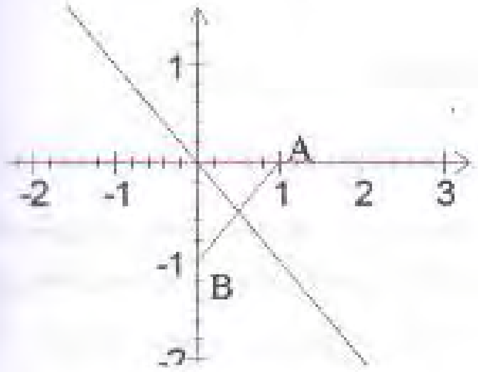
1. ج1) $z=\frac{8}{3}-2i$.

التبرير:

لدينا: $\bar{z}=\frac{8}{3}+2i$ ، و: $|z|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+(-2)^2}=\frac{10}{3}$ ،

ومنه: $\bar{z}+|z|=\frac{8}{3}+2i+\frac{10}{3}=6+2i$

2. ج2) $y=-x$



التبرير:

لتكن النقطة A ذات اللاحقة 1 ولتكن النقطة B ذات اللاحقة $-i$ ، $|z-1|=|z+i|$ تعني: $AM=BM$

إذن مجموعة النقط هي المستقيم محور القطعة $[AB]$.

و الذي معادلته $y=-x$.

(يمكن استعمال الشكل الجبري: $z=x+iy$)

3. ج3) $3k$.

التبرير:

لدينا: $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n=\left(2\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n=2^n\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$

$$=2^n\times\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

العدد المركب $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ حقيقي إذا وفقط إذا كان $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ ، أي: $\frac{n\pi}{3}=\pi k$

أي: $n=3k$. حيث $k\in\mathbb{N}$

4. ج2) $2+i\sqrt{2}$.

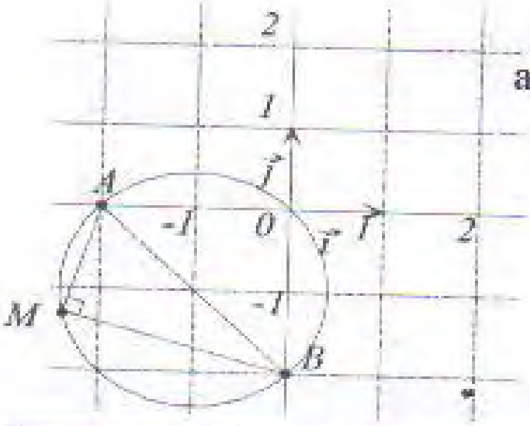
التبرير:

المعادلة $z=\frac{6-z}{3-z}$ تكافئ $z^2-4z+6=0$ ، مميز المعادلة الأخيرة $\Delta=-8=\left(i2\sqrt{2}\right)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين: $2+i\sqrt{2}$ و $2-i\sqrt{2}$.

5. ج4) دائرة قطرها $[AB]$.

التبرير: A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_A=-2$ ، $z_B=2i$.



لدينا : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2i}\right)$

$=\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

وهذا يعني أن المثلث AMB قائم في M .

إذن مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B .

تمرين 14

1 . ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف كما يلي $P(z)=z^3+z^2-2$

أ / أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.

ب / أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$.

جـ / استنتج جذرا آخر لـ $P(z)$.

2 . في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C ، لواحقها على الترتيب : $z_A=1$ ، $z_B=-1-i$ ، $z_C=-1+i$.

في كل حالة مما يأتي ، عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث:

أ / $|z-z_A|=|z-z_B|$.

ب / العدد المركب : $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي ، حيث $z\neq z_A$.

جـ / العدد المركب : $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي سالب تماما ، حيث $z\neq z_A$.

د / العدد المركب : $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ تخيلي صرف ، حيث $z\neq z_A$.

هـ / $z=1+2e^{i\theta}$ ، حيث θ يمسح مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

و / $z=-1-i+re^{i\frac{\pi}{4}}$ ، حيث r يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

الحل

1.أ / لدينا: $\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P(z)}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع .

$\overline{P(z)}=\left(\overline{z}\right)^3+\left(\overline{z}\right)^2-2$ بتطبيق خاصية الأس .

إذن $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.

ب / لدينا : $P(1) = 1^3 + 1^2 - 2 = 0$ ،

و: $P(-1-i) = (-1-i)^3 + (-1-i)^2 - 2$.

أي : $P(-1-i) = 2i(-1-i) + 2i - 2 = 0$.

جـ / لدينا : $P(-1-i) = 0$ ومنه: $\overline{P(-1-i)} = 0$ ، وبالتالي : $P(\overline{-1-i}) = 0$

أي : $P(-1+i) = 0$ ، إذن: $-1+i$ جذر لـ $P(z)$.

2. أ / $|z - z_A| = |z - z_B|$ تعني: $AM = BM$ ، وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

ب / العدد $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ حقيقي معناه : $arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

أي : $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \equiv \pi k$ ، ومنه النقط A ، B ، M في استقامية ، وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A (لكون $z \neq z_A$ فإن $M \neq A$)

جـ / العدد $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ حقيقي سالب تماما معناه : $arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \pi k$ حيث k عدد صحيح نسبي سالب تماما .

ومنه : $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \equiv \pi k$ ، أي : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv \pi k$.

ومنه النقط A ، B ، M في استقامية ، و M داخل القطعة $[AB]$ وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطة A (لكون $z \neq z_A$ فإن $M \neq A$)

د / العدد $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف معناه : $arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

أي : $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k$ ، أي : $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k$ أو

ومنه المثلث ABM قائم في M ، وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A (لكون $z \neq z_A$ فإن $M \neq A$)

هـ / لدينا: $z = 1 + 2e^{i\theta}$ تعني : $z = z_A + 2e^{i\theta}$ ، وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 .

و / لدينا: $z = -1 - i + re^{i\frac{\pi}{4}}$ تعني : $z = z_B + re^{i\frac{\pi}{4}}$ ، وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه النقطة B والموجه بالشعاع $\overrightarrow{w}$ حيث : $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{4}$.

تمرين 15

نعتبر العدد المركب: $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1 . أكتب العدد المركب z^2 على الشكل الجبري .

2 . أكتب العدد المركب z^2 على الشكل الأسي .

3 . استنتج الشكل الأسي للعدد المركب z .

الحل

1 . لدينا :

$$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^2(2-\sqrt{2})$$
$$=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}-2+\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}$$
$$=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$$

2 . لدينا : $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3 . لدينا : $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $|z^2|=|z|^2=4$ ، أي : $|z|=2$.

و : $\arg(z^2)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ، أي : $2\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ، أي : $\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{8}[\pi]$.

إذن : $z=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

تمرين 16

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (وحدة الطول $1cm$) .

نعتبر العددين المركبين: $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ، $z_0=6+6i$ ، ولتكن النقطة A_0 صورة العدد z_0 .

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف النقطة A_n ذات اللاحقة z_n بحيث : $z_n=a^nz_0$.

1 . أ / أكتب العددين z_1 و a^2 على الشكل الجبري .

ب / أكتب العدد z_1 على الشكل الأسي ثم بين أن: $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2 . أ / أكتب العددين z_3 و z_7 بدلالة كل من العددين z_1 و a^2 .

ب / استنتج الشكل الأسي لكل من العددين z_3 و z_7 .

3 . علم النقط A_0 ، A_1 ، A_3 و A_7 صور الأعداد z_0 ، z_1 ، z_3 و z_7 على الترتيب .

الحل

1 . أ / لدينا :

$$z_1 = az_0 = \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\right](6+6i) = \frac{6}{4}\left[\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right](1+i)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+1\right) = \frac{3}{2}\left(2i\sqrt{3}+2\right) = 3(1+i\sqrt{3})$$

ولدينا :

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 + 2i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)+2i\,\frac{3-1}{4^2}$$

$$= \frac{2}{4}\times\frac{2\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{1}{4}$$

ب / لدينا : $|z_1| = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$ و $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ، ومنه : $z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{1}{4}$ ومنه : $|a^2| = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ ، ولدينا : $\arg(a^2) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

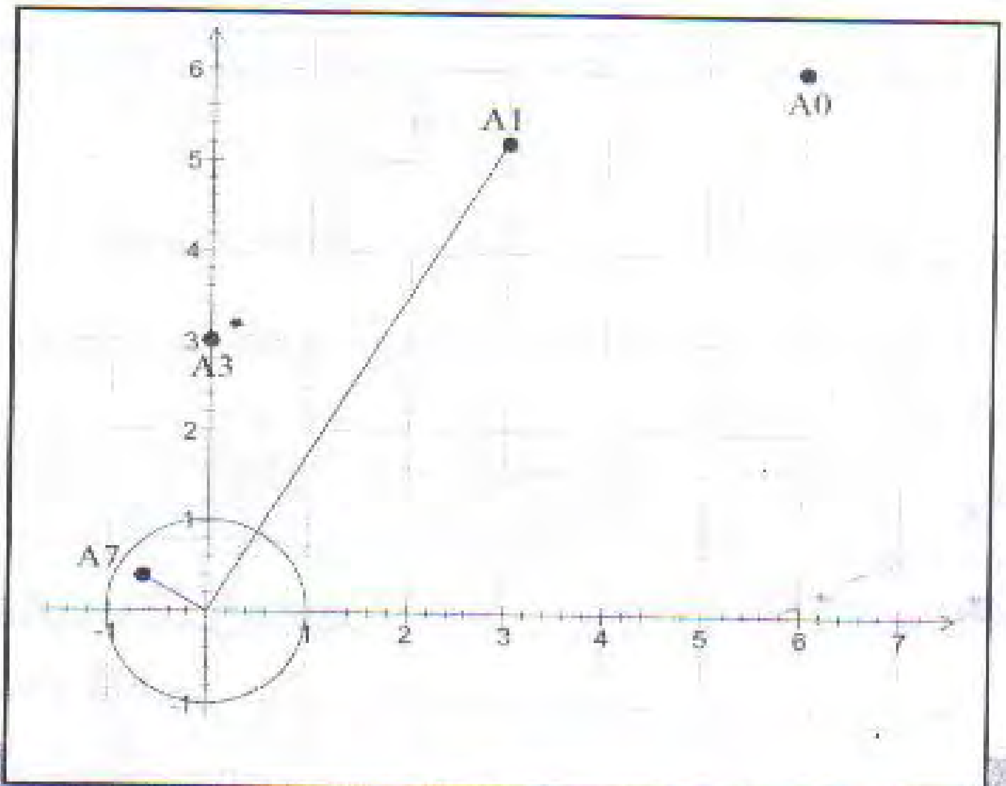
إذن : $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2 . أ / لدينا : $z_3 = a^3 z_0 = a^2 a z_0 = a^2 z_1$ و $z_7 = a^7 z_0 = a^6 z_1$ ،

إذن : $z_3 = a^2 z_1$ و $z_7 = a^6 z_1$.

ب / نستنتج أن : $z_3 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، وأن : $z_7 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \times 6e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

3 . أنظر الشكل الموالي :



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (وحدة الطول $2cm$) .
نعتبر النقطتين I و A ذات اللاحقتين 1 و -2 على الترتيب ، ولتكن K منتصف القطعة $[IA]$ ولتكن (C) الدائرة التي قطرها $[IA]$.

1 . أرسم شكلا مناسبا ، نحتاجه في مواصلة التمرين .

2 . لتكن B النقطة ذات اللاحقة b حيث : $b=\dfrac{1+4i}{1-2i}$ ، أكتب العدد b على الشكل الجبري ثم بين أن النقطة B تنتمي إلى الدائرة (C) .

3 . لتكن D نقطة من (C) ذات اللاحقة d بحيث : $(\vec{KI};\vec{KD})=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ ، حيث k عدد صحيح نسبي .

أ / حدد الطويلة وعمدة للعدد المركب $d+\dfrac{1}{2}$.

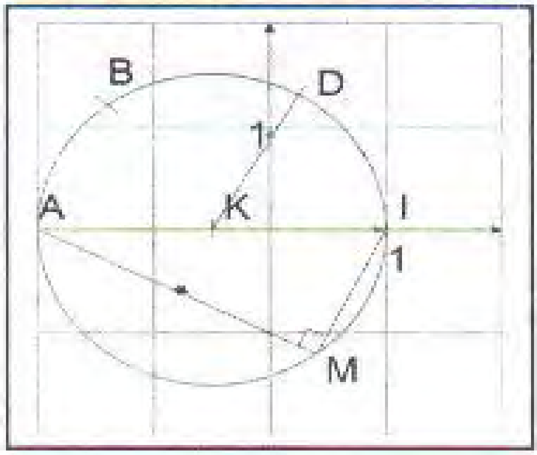
ب / استنتج أن : $d=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.

جـ / عين العدد الحقيقي a الذي يحقق : $\dfrac{1+2ia}{1-ia}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.

د / لتكن النقطة M ذات اللاحقة m حيث : $m=\dfrac{1+2ix}{1-ix}$ ، ونضع : $Z=\dfrac{m-1}{m+2}$.
أحسب العدد المركب Z ثم استنتج طبيعة المثلث AIM .

الحل

1 . أنظر الشكل :



2 . لدينا: $b=\dfrac{1+4i}{1-2i}=\dfrac{(1+4i)(1+2i)}{1+4}=\dfrac{1+4i+2i-8}{5}=-\dfrac{7}{5}+i\dfrac{6}{5}$

لكي نبين أن النقطة B تنتمي إلى الدائرة (C) يكفي أن نبين أن : $BK=IK=1,5$.

لدينا : لاحقة الشعاع $\overline{BK}$ هي : z_k-z_B ولدينا :

$$z_k-z_B=-\frac{1}{2}-b=-\frac{1}{2}+\frac{7}{5}-i\frac{6}{5}=\frac{9}{10}-i\frac{6}{5}$$

ومنه : $\left|z_k-z_B\right|^2=\left|\dfrac{9}{10}-i\dfrac{6}{5}\right|^2=\dfrac{81}{100}+\dfrac{36}{25}=\dfrac{81}{100}+\dfrac{144}{100}=\dfrac{225}{100}$

إذن : $BK^2=\dfrac{225}{100}$ ، ومنه : $BK=\sqrt{\dfrac{225}{100}}=\dfrac{15}{10}=1,5$.

3 . أ/ العدد $d+\dfrac{1}{2}$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{KD}$. ولدينا : $\left|d+\dfrac{1}{2}\right|=KD=1,5$ لأن D نقطة من (C) . ومن جهة: $arg\left(d+\dfrac{1}{2}\right)=(\vec{u};\overrightarrow{KD})=(\overrightarrow{KI};\overrightarrow{KD})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

ب / نستنتج أن : $d+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3}{2}(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

ومنه : $d=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

جـ / لدينا : $\dfrac{1+2ia}{1-ia}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$ تكافئ $4(1+2ia)=(1-ia)(1+3i\sqrt{3})$ ، أي :

$4+8ia=1+3i\sqrt{3}-ia+3a\sqrt{3}$ ، أي: $4+8ia=1+3a\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-a)$ ، أي :

$\begin{cases}1+3a\sqrt{3}=4\\3\sqrt{3}-a=8a\end{cases}$ ، ومنه : $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

د / لدينا : $Z=\frac{m-1}{m+2}=\frac{\frac{1+2ix}{1-ix}-1}{\frac{1+2ix}{1-ix}+2}=\frac{1+2ix-1+ix}{1+2ix+2-2ix}=\frac{3ix}{3}=ix$

ونستنتج أن : $|Z|=|x|$ و $arg(Z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، لأن Z تخيلي صرف.

بما أن : $arg(Z)=arg(\frac{m-1}{m+2})=(\vec{AM};\vec{IM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، نستنتج أن المثلث AIM قائم في M . وهذا يعني أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة (C) .

تمرين 18

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين M و M' ذات اللاحقتين $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ على الترتيب حيث : x ، y ، x' ، y' أعداد حقيقية.

نذكر أن $\overline{z}$ يرمز إلى مرافق العدد z و أن $|z|$ يرمز إلى طويلة العدد z .

1. بعض الخواص :

أ / بين أن $\overline{OM}$ و $\overline{OM'}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان : $\operatorname{Re}\left(z'\times\overline{z}\right)=0$.

ب / بين أن النقط O ، M و M' في استقامية إذا وفقط إذا كان : $\operatorname{Im}\left(z'\times\overline{z}\right)=0$.

2. تطبيقات :

أ / عين مجموعة النقط N ذات اللاحقة z^2-1 ، بحيث يكون الشعاعان $\overline{OM}$ و $\overline{ON}$ متعامدين.

ب / نفرض $z\neq 0$ ، ولتكن النقطة P ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$ ، نريد تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث تكون النقط O ، N و P في استقامية.

- بين أن : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

- باستعمال نتائج الجزء 1 عين مجموعة النقط المراد البحث عنها.

الحل

1. بعض الخواص :

أ / لدينا : $\overline{OM}(x;y)$ و $\overline{OM'}(x';y')$ متعامدين معناه : $xx'+yy'=0$.

ولدينا : $z'\times\overline{z}=(x'+iy')\times(x-iy)=(x'x+y'y)+i(xy'-yx')$

ومنه : $xx'+yy'=0$ تكافئ $\operatorname{Re}\left(z'\times\overline{z}\right)=0$.

ب / النقط O ، M و M' في استقامية معناه : الشعاعان $\overrightarrow{OM}(x;y)$ و $\overrightarrow{OM'}(x';y')$ مرتبطان خطيا ، أي: $xy'-yx'=0$ ، ومنه : $\text{Im}\left(z'\times\overline{z}\right)=0$.

2 . تطبيقات :

أ / لدينا: $z^2-1=x^2-y^2-1+2xyi$

ومنه: $xx'+yy'=x\left(x^2-y^2-1\right)+y\left(2xy\right)=x\left(x^2+y^2-1\right)$

ومنه $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدان معناه: $xy'-yx'=0$ ، أي: $x=0$ أو $x^2+y^2-1=0$

$x=0$ معادلة محور التراتيب ، $x^2+y^2-1=0$ معادلة دائرة الوحدة .

إذن: مجموعة النقط N ذات اللاحقة z^2-1 ، بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدين هي اتحاد محور التراتيب مع دائرة الوحدة .

ب / لدينا: $\overline{\left(z^2-1\right)}=\left(\overline{z}^2-1\right)=-\overline{z}^2\left(-1+\frac{1}{\overline{z}^2}\right)=-\overline{z}^2\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}$.

ولدينا:

$$\text{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)}\right]=\text{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(-\overline{z}^2\right)\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\right]=\text{Im}\left(-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right)$$

و بما أن: $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$ حقيقي فإن: $\text{Im}\left(-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right)=\text{Im}\left(-\overline{z}^2\right)$ ، لكن:

$-\overline{z}^2=-\left(x-iy\right)^2=-x^2+y^2+2ixy$ ، ومنه: $\text{Im}\left(-\overline{z}^2\right)=2xy$.

$\text{Im}\left(-\overline{z}^2\right)=0$ تكافئ: $2xy=0$ ، أي: $x=0$ أو $y=0$.

- إذن مجموعة النقط المراد البحث عنها هي اتحا محوري الإحداثيات.

تمرين 19

ليكن j العدد المركب المعرف كما يلي : $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1 . بين أن العدد j يحقق الخواص التالية :

أ) $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ب) $j^3=1$. جـ) $1+j+j^2=0$. د) $-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2 . في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط M ، N و P لواحقها على الترتيب m ، n و p .

أ / بين أن المثلث MNP يكون متقايس الأضلاع و مباشر إذا تحقق مايلي :

$m-n=-j^2(p-n)$.

ب / بين أن المثلث MNP يكون متقايس الأضلاع و مباشر إذا تحقق مايلي :

$.m+nj+pj^2=0$

الحل

1. أ) لدينا: $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

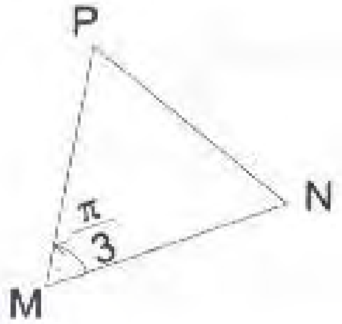
ب) لدينا: $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{\frac{2i\pi}{3}\times 3}=e^{2i\pi}=1$.

جـ) لدينا: $1+j+j^2=1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

د) لدينا: $-j^2=1+j=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{i\pi}{3}}$.

2. أ/ نضع: $z=\frac{m-n}{p-n}$.



بما أن المثلث MNP متقايس الأضلاع و مباشر فإن:

$$arg(z)=Arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right)=\left(\vec{NP};\vec{NM}\right)=\frac{\pi}{3}$$

و: $|z|=\left|\frac{m-n}{p-n}\right|=\frac{MN}{NP}=1$

ومنه: $z=1\times e^{\frac{i\pi}{3}}=-j^2$ ، أي: $\frac{m-n}{p-n}=-j^2$ ، أي: $m-n=-j^2(p-n)$.

ب/ باستعمال نتيجة السؤال الأخير نجد: $m-n=-j^2(p-n)$ تكافئ:

$m-n=-j^2p+j^2n$ ، أي: $m+(-j^2-1)n+pj^2=0$ ، أي:

$.m+jn+pj^2=0$

تمرين 20

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (وحدة الطول $5cm$).

نضع: $z_0=2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$ ، ونسمي A_n صورة العدد المركب z_n .

1 . أ/ أحسب الأعداد المركبة: z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 ، ثم تحقق أن z_4 حقيقي.

ب / مثل النقط : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 .

2 . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = |z_n|$.

أ / بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب / أكتب ، بدلالة n ، الحد العام u_n .

3 . عين العدد الطبيعي n_0 بحيث من أجل كل $n \geq n_0$ ، النقط A_n تقع داخل قرص مركزه O ونصف قطره $0,1$.

4 . أ / بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

ب / استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1} .

5 . من أجل كل عدد طبيعي n نسمي l_n طول الخط المنكسر المحدد بالنقاط :
A_0 ، A_1 ، A_2 ... ، A_{n-1} ، A_n .

أ / عبر عن l_n بدلالة n .

ب / عين نهاية المتتالية (l_n) .

الحل

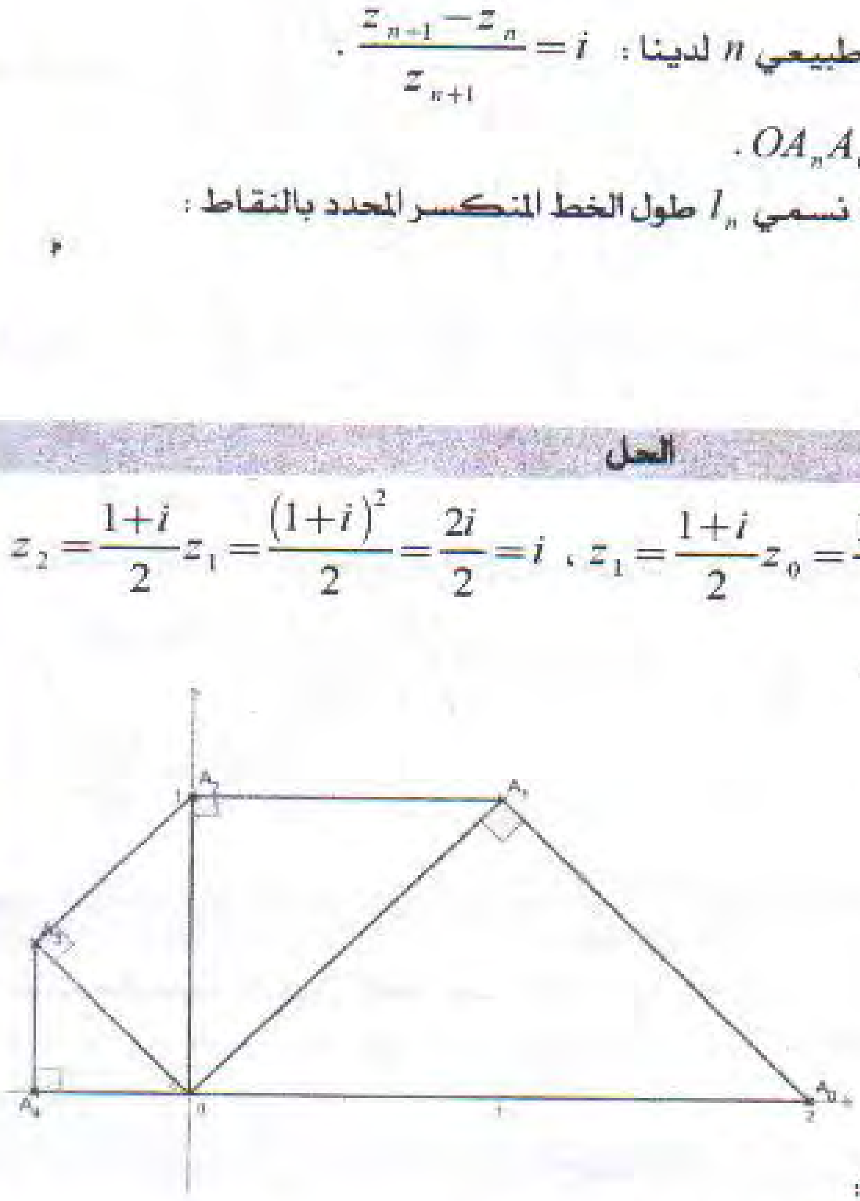
1 . أ / لدينا : $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i$ ، $z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

، $z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = \frac{-1+i}{2}$ ،

، $z_4 = \frac{1+i}{2} z_3 = -\frac{1}{2}$

إذن : z_4 حقيقي .

ب / أنظر الشكل المقابل .



2 . أ / لدينا : $u_n = |z_n|$ ، ومنه:

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |z_n| = \frac{\sqrt{1+1}}{2} |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$$

إذن : (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وحدها الأول : $u_0 = |z_0| = 2$.

ب / لدينا : $u_n = u_0 \times q^n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. لدينا : $|z_n| \leq 0,12$ تكافئ $u_n \leq 0,1$ ، أي : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0,05$ ، أي :

$n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \ln 0,05$ ، أي : $n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \approx 8,6$ ، ومنه : $n_0 = 9$.

4. أ / لدينا : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{\frac{1+i-2}{2}}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{-1+i}{i(-i+1)} = \frac{1}{-i} = i$

ب / لدينا : $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - z_O} = \frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$.

بما أن : $\left|\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = |i| = 1$ ، فإن : $\frac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O} = 1$

ومنه : $A_{n+1}A_n = A_{n+1}O$ ، أي المثلث OA_nA_{n+1} متساوي الساقين .

ولدينا : $\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - z_O}\right) = \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ، لكن :

$\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OA_{n+1}}; \overrightarrow{OA_n}\right)$ ، أي : $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}; \overrightarrow{OA_n}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ، أي المثلث

OA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1}

نستخلص مما سبق أن المثلث OA_nA_{n+1} قائم و متساوي الساقين في A_{n+1} .

5. أ / لكون المثلث OA_nA_{n+1} قائم و متساوي الساقين في A_{n+1} فبتطبيق مبرهنة فيثاغورث

نجد : $2A_{n+1}A_n^{\ 2} = OA_n^{\ 2}$ ، أي : $A_{n+1}A_n = \frac{OA_n}{\sqrt{2}} = \frac{u_n}{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

كما أن : $A_0A_1 = \sqrt{2}$ ، $A_1A_2 = 1$ ، $A_2A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

إذن : l_n يمثل مجموع n حدا الأولى من متتالية هندسية حدها الأول $A_0A_1 = \sqrt{2}$ وأساسها

$\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

إذن: $$l_n=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$$

ب / لدينا: $l_n=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$ ، وبما أن $-1<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ فإن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty} l_n=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}-2$.

تمرين 21

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E)...z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$

1. بين ان المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه.

2. عين العددين المركبين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z يكون:
$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-z_0)(z-2-2i)(az+b)$.

3. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و I لواحقها على الترتيب: $z_A=1$ ، $z_B=-1+i$ ،

$z_C=2+2i$ ، $z_I=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$.

أ / عين z_D لاحقة النقطة D بحيث تكون I منتصف $[AD]$.

ب / أكتب العدد $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقط B ، D و C؟

الحل

1. نضع: $z_0=x$ حيث x عدد حقيقي ، x حل للمعادلة (E) معناه:

$x^3-4x^2-ix^2+7x+ix-4=0$ ، أي: $x^3-4x^2+7x-4+i(-x^2+x)=0$ ، أي:

$\begin{cases}x^3-4x^2+7x-4=0...(1)\\-x^2+x=0...(2)\end{cases}$ ، من (2) نجد: $x=0$ أو $x=1$.

من أجل $x=0$ نعوض في (1) نجد: $-4=0$ غير محققة.

من أجل $x=1$ نعوض في (1) نجد: $4-4=0$ محققة . ومنه: $z_1=1$.

2. لدينا بعد النشر و التبسيط : $(z-1)(z-2-2i)(az+b)=$

$$az^3+(-2a+b-2ia)z^2+\left[(a-3b)+i(2a-2b)\right]z+b(2+2i)$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ (-2a+b-2ia)=-(4+i) \\ (a-3b)+i(2a-2b)=7+i \\ b(2+2i)=-4 \end{cases}$ ، من المساواة الأولى و الرابعة في الجملة

الأخيرة نجد : $\begin{cases} a=1 \\ b=-1+i \end{cases}$.

ومنه: $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=(z-z_0)(z-2-2i)(z-1+i)$

3. $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$ تعني: $(z-z_0)(z-2-2i)(z-1+i)=0$

أي: $\begin{cases} z-z_0=0 \\ z-2-2i=0 \\ z-1+i=0 \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} z=1 \\ z=2+2i \\ z=1-i \end{cases}$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\{1;1-i;2+2i\}$.

4. أ/ I منتصف $[AD]$ معناه: $z_I=\dfrac{z_A+z_D}{2}$ ، ومنه: $z_D=2z_I-z_A$ ، ومنه:

$z_D=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}i\right)-1=\dfrac{4}{3}i$ ، إذن: $z_D=\dfrac{4}{3}i$.

ب/ لدينا: $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=\dfrac{\frac{4}{3}i+1-i}{2+2i+1-i}=\dfrac{1+\frac{i}{3}}{3+i}\times\dfrac{3-i}{3-i}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

بما أن: $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ حقيقي فإن النقط B ، D و C في استقامية.

<u>توضيح</u>: $\arg\left(\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\right)=\arg\left(\dfrac{3}{5}\right)=\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، لكن: $\arg\left(\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}\right)=\pi k$

تعني: $(\overline{BC};\overline{BD})=\pi k$.

أي أن النقط B ، D و C في استقامية.

تمرين 22

من أجل كل عدد مركب z نعرف كثير الحدود $P(z)$ كما يلي :

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

1 . أ / أحسب $P\left(i\sqrt{3}\right)$ و $P\left(-i\sqrt{3}\right)$.

ب / عين العددين الحقيقيين a و b بحيث : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2+az+b\right)$.

جـ / حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2 . في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$

بين أن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة .

3 . لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O .

بين أن : $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

الحل

1 . أ / لدينا : $P\left(i\sqrt{3}\right)=9-6\left(-i3\sqrt{3}\right)-72-i18\sqrt{3}+63=0$ ،

و : $P\left(-i\sqrt{3}\right)=9-6\left(i3\sqrt{3}\right)-72+i18\sqrt{3}+63=0$

ب / لدينا : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2+az+b\right)=z^4+az^3+(a+3b)z^2+3az+3b$

$$=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

بالمطابقة نجد : $a=-6$ ، $b=21$. ومنه : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$.

جـ / $P(z)=0$ تكافئ : $z^2+3=0$ أو $z^2-6z+21=0$.

$z^2=-3$ تعني : $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

المعادلة : $z^2-6z+21=0$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية مميزها هو

$\Delta=36-84=-48=\left(i4\sqrt{3}\right)^2$ ، فهي تقبل حلين مركبين مترافقين :

$$z_1=\frac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3} \quad ، \quad z_2=\frac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\left\{-i\sqrt{3};i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3}\right\}$

2 . بما أن : $z_B=\overline{z_A}$ فإن A و B متناظرتان بالنسبة إلى المحور $(O;\vec{u})$.

وبما أن : $z_D=\overline{z_C}$ فإن C و D كذلك متناظرتان بالنسبة إلى المحور $(O;\vec{u})$.

ومنه : $\widehat{CAB}=\widehat{ABD}$ ، وبالتالي : الرباعي $ABDC$ دائري ، إذن : رؤوسه A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة .

3 . بما أن E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O فإن : $z_E=-z_D=-3+2i\sqrt{3}$

ومنه : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+3}$

$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

بما أن : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فإن المثلث BEC متقايس الأضلاع.

تمرين 23

في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z) = az^2 + bz + c$.

1 . عين الأعداد الحقيقية a ، b و c إذا علمت أن : $P(1) = 1$ و $P(1+i) = 0$.

2 . استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $P(z) = 0$.

3 . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتين A ، B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = 1-i$.

أ/ أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب/ بين أن المثلث OAB قائم و متساوي الساقين.

جـ/ لتكن النقطة C التي لاحقتها 2 . بين أن الرباعي $OACB$ مربع.

الحل

1 . لدينا: $\begin{cases} P(1)=1 \\ P(1+i)=0 \end{cases}$ تعني: $\begin{cases} a\times1^2+b\times1+c=1 \\ a\times(1+i)^2+b\times(1+i)+c=0 \end{cases}$ ، أي:

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a\times2i+b+bi+c=0 \end{cases}$ ، أي: $\begin{cases} a+b+c=1....(1) \\ b+c+(b+2a)i=0....(2) \end{cases}$ ، من المساواة (2) في الجملة

الأخيرة وحسب تعريف العدد المركب المعدوم نجد : $\begin{cases} b+c=0 \\ b+2a=0 \end{cases}$ ،أي: $\begin{cases} c=-b \\ a=-\frac{b}{2} \end{cases}....(I)$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد: $-\frac{b}{2}+b-b=1$ ، ومنه: $b=-2$ ، وبتعويض $b=-2$ في

الجملة (I) نجد: $a=1$ ، $c=2$ ، ومنه: $P(z)=z^2-2z+2$.

2 . لدينا: $P(1+i)=0$ ، ومنه: $1+i$ هو حل للمعادلة $P(z)=0$ ،ويكون الحل الآخر

$\overline{1+i}=1-i$ ، لأن المعادلة: $z^2-2z+2=0$ من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية.

3 . أ/ كتابة: z_A و z_B على الشكل الأسي:

لدينا: $|z_A| = |1+i| = \sqrt{2}$ ، لتكن $\theta_1 = \arg(z_A)$. لدينا: $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، ومنه :

$\theta_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، وبالتالي: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ومنه : $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب / لدينا: $OA = |z_A| = \sqrt{2}$ ، $OB = |z_B| = \sqrt{2}$ ، $AB = |z_B - z_A| = |-2i| = 2$.

نلاحظ أن: $OA = OB$ ، ومن جهة: $OA^2 + OB^2 = 2+2 = 4 = AB^2$

ومنه المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين في O .

<u>طريقة أخرى</u> :

لدينا: $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left[\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})\right]} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين في O .

<u>توضيح</u> : لدينا: $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ومنه : $\left|\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$ ، أي: $\dfrac{OA}{OB} = 1$ ، أي:

$OA = OB$. ومن جهة: $\arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + 2\pi k = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$

أي: $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، النتيجتان : $OA = OB$ و $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$

تؤكدان أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين في O .

جـ / لدينا: $z_C = 2$ ، نبين اولا أن $OACB$ متوازي أضلاع .

لدينا: $z_A - z_O = z_A = 1+i$ ، ومن جهة: $z_C - z_B = 2-(1-i) = 1+i$

نلاحظ أن: $z_A - z_O = z_C - z_B$ ، ومنه: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$.

إذن: $OACB$ متوازي أضلاع .

وبما أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين في O ، نستنتج أن لمتوازي الأضلاع $OACB$

ضلعان متتاليان و متقايسان (هما $[OA]$ و $[OB]$)

نستخلص مما سبق أن متوازي الأضلاع $OACB$ هو مربع .

تمرين 24

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

في كل حالة عين طبيعة التحويل f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z

النقطة M' ذات اللاحقة z' محددا عناصره المميزة :

1) $z' = z + 4 - 5i$ ، 2) $z' = 2z$ ، 3) $z' = -3z + 1 + 2i$ ،

4) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z$ ، 5) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$ ، 6) $z' = iz + i$ ، 7) $z' = -iz + 1$.

الحل

1) $z' = z + 4 - 5i$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث:
$a = 1$ و $b = 4 - 5i$ ، ومنه: f هو انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{w}} = 4 - 5i$.

2) $z' = 2z$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث:
$a = 2$ و $b = 0$ ، ومنه: f هو تحاك مركزه O ونسبته: $a = 2$.

3) $z' = -3z + 1 + 2i$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$
حيث: $a = -3$ و $b = 1 + 2i$ ، ومنه: f هو تحاك نسبته: $a = -3$ ، ومركزه النقطة Ω
ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+2i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}$.

4) $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$

حيث: $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ و $b = 0$ ، بما أن : $|a| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| = 1$ فإن : f هو دوران مركزه O

وزاويته: $\arg(a) = \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{\pi}{3}$.

5) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث:

$a = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $b = 0$ ، بما أن : $|a| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 1$ فإن : f هو دوران مركزه O وزاويته:

$\arg(a) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

6) $z' = iz + i$: f ، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث:

$a = i$ و $b = i$ ، بما أن : $|a| = |i| = 1$ فإن : f هو دوران زاويته: $\arg(a) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-i} = \frac{i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}$

7) $f : z' = -iz + 1$، العبارة المركبة للتحويل f هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $a = -i$ و $b = 1$، بما أن: $|a| = |-i| = 1$ فإن f هو دوران زاويته:

$\arg(a) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

تمرين 25

1 . عين العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة -1 و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

2 . ليكن t التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = z - \sqrt{3}i$.

- عين طبيعة التحويل t محددا عناصره المميزة .

3 . أ/ عين العبارة المركبة للتحويل المركب: tor .

ب/ استنتج طبيعة التحويل tor محددا عناصره المميزة .

الحل

1 . أ/ العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل: $z' = az + b$ حيث: $|a| = 1$

و $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$.

ومنه: $a = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و $b = (1-a)z_\Omega = (1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) \times (-1) = -1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2 . لدينا: $t : z' = z - \sqrt{3}i$ ، ومنه: t انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذو اللاحقة $-\sqrt{3}i$.

3 . لتكن: M ، M_1 و M' نقطا من المستوي لواحقها على الترتيب z ، z_1 و z' ، حيث: M_1 صورة M بالدوران r ، و M' صورة M_1 بالإنسحاب t .

لدينا: $M_1 = r(M)$ تعني: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \dots (1)$

: $M' = t(M_1)$ تعني : $z' = z_1 - \sqrt{3}i \dots (2)$

من المساواة (1) بتعويض z_1 في المساواة (2) نجد: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} - \sqrt{3}i$ ، ومنه:

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + e^{i\frac{\pi}{3}} - (1 + \sqrt{3}i)$ ، ومنه: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي:

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وهي العبارة المركبة للتحويل tor .

ب/ $tor : z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا: العبارة المركبة للتحويل $t \circ r$ هي من الشكل: $z' = az + b$ ،

حيث: $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b = -e^{i\frac{\pi}{3}}$.

بما أن: $|a| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ فإن: $t \circ r$ دوران زاويته: $\arg(a) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ ، ومركزه

النقطة A ذات اللاحقة: $z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

تمرين 26

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (وحدة الطول $1cm$).

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

2. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $a = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

أ / أكتب العددين a و b على الشكل الأسي .

ب / أحسب الأطوال OA ، OB و AB ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

3. لتكن C النقطة ذات اللاحقة $c = -\sqrt{3} + i$ ، ولتكن D صورة C بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ، عين d لاحقة النقطة D .

4. لتكن G مرجح الجملة المثقلة: $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$

أ / برر وجود النقطة G ثم بين أن لاحقة النقطة G هي: $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

ب / علم النقط A ، B ، C ، D و G .

جـ / بين أن النقط C ، D و G في استقامية .

د / بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع .

الحل

1. مميز المعادلة: $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$ هو $\Delta = 64\times 3 - 4\times 64 = -64 = (8i)^2$

فهي تقبل حلين مركبين مترافقين: $z_1 = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$ و $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$

2. أ / لدينا: $a = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ، ومنه: $b = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ب / لدينا: $OA = |a| = 8$ و $OB = |b| = 8$ ، وكذلك:

$$AB = |b-a| = \left|4\sqrt{3} + 4i - 4\sqrt{3} + 4i\right| = |8i| = 8$$

ومنه: $OA = OB = AB = 8$ ، إذن: OAB متقايس الأضلاع .

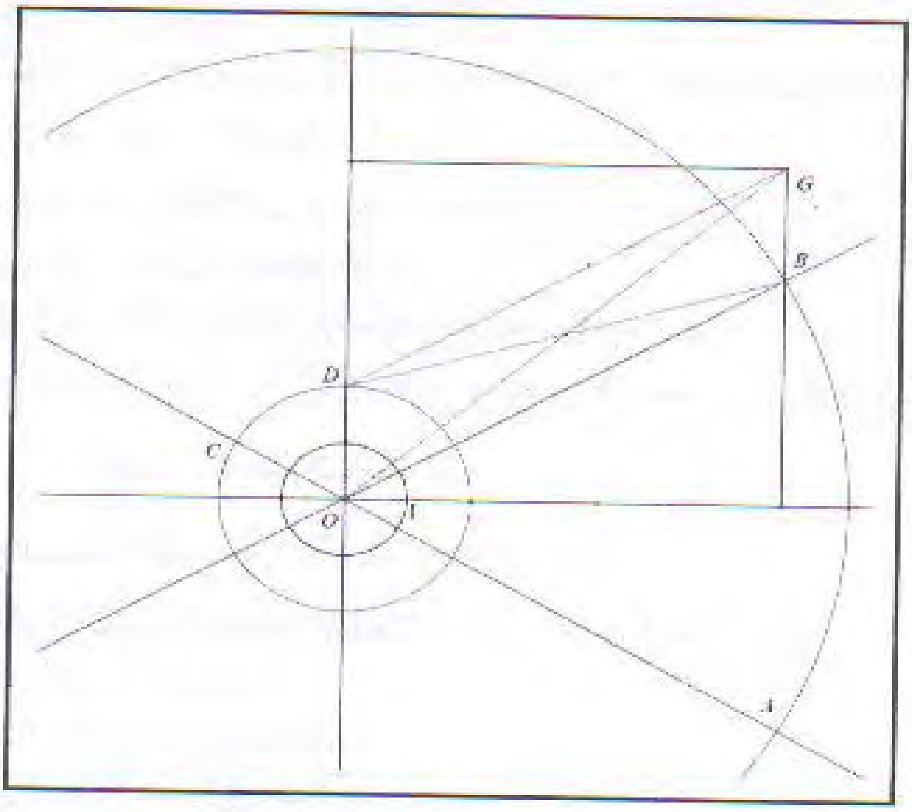
3 . العبارة المركبة للدوران r هي: $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$ ، ومنه :

$d=e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i)=e^{-i\frac{\pi}{3}}2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{6}}=2i$.

4 . أ / لدينا : $-1+1+1\neq 0$ ، ومنه G موجودة ولدينا :

$$z_G=\frac{1}{-1+1+1}(-1\times z_O+1\times z_D+1\times z_B)=d+b=2i+4\sqrt{3}+4i=4\sqrt{3}+6i$$

ب / أنظر الشكل .



جـ / لاحقة الشعاع $\overrightarrow{CD}$ هي : $d-c=2i-(-\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i$ ، ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{DG}$ هي : $g-d=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i=4(d-c)$ ، ومنه : $\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{CD}$

إذن النقط C ، D و G في استقامية .

د / لتكن K منتصف القطعة $[BD]$ ، ومنه بتطبيق خاصية التجميع للمرجح تكون G مرجح الجملة $\{(O;-1),(K;2)\}$ ولدينا : $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{-1+2}\overrightarrow{OK}$ أي : $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OK}$ ،

ومنه : K منتصف القطعة $[OG]$ نستخلص أن الرباعي $OBGD$ قطراه متناصفان فهو متوازي أضلاع .

تمرين 27

من أجل كل عدد مركب z نعرف كثير الحدود $P(z)$ كما يلي:

$$P(z)=z^{3}+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^{2}+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}$$

1. أ/ بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعينه.

ب/ تحقق أن: $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^{2}+z+74\right)$.

جـ/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B، I، ذات اللواحق على الترتيب: $z_A=-7+5i$، $z_B=-7-5i$، $z_I=i\sqrt{2}$.

أ/ عين لاحقة صورة النقطة I بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

ب/ نعتبر النقطة C ذات اللاحقة $z_C=1+i$، عين لاحقة النقطة N حتى يكون الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع.

جـ/ نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D=1+11i$،

- أكتب العدد المركب $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ على الشكل الجبري ثم المثلثي.
- برر أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.
- استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $ABCN$.

الحل

1. أ/ ليكن y عددا حقيقيا، العدد المركب iy تخيلي صرف، حل للمعادلة $P(z)=0$ معناه: $P(iy)=0$، أي: $-iy^{3}-\left(1-i\sqrt{2}\right)y^{2}+\left(74-i\sqrt{2}\right)iy-74i\sqrt{2}=0$، أي: $\left(y^{2}+\sqrt{2}y\right)+i\left(-y^{3}+\sqrt{2}y^{2}+74y-74\sqrt{2}\right)=0$، حسب تعريف العدد المركب المعدوم نجد:

$$\begin{cases}-y^{2}+\sqrt{2}y=0\\ -y^{3}+\sqrt{2}y^{2}+74y-74\sqrt{2}=0\end{cases}$$ أي:

$$\begin{cases}y\left(y-\sqrt{2}\right)=0....(1)\\ -y^{3}+\sqrt{2}y^{2}+74y-74\sqrt{2}=0....(2)\end{cases}$$ ، من (1) نجد أن $y=0$ أو $y=\sqrt{2}$.

- من أجل $y=0$ بالتعويض في (2) نجد $-74\sqrt{2}=0$. وهذا مستحيل.
- من أجل $y=\sqrt{2}$ بالتعويض في المساواة (2) نجدها محققة.

ومنه: $y=\sqrt{2}$، إذن: $i\sqrt{2}$ حل للمعادلة $P(z)=0$.

ب/ بالحساب نجد:

$$\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+z+74\right)=z^3+z^2+74z-i\sqrt{2}z^2-i\sqrt{2}z-i\,74\sqrt{2}$$
$$=z^3+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}=P(z)$$

$P(z)=0$ معناه: $z-i\sqrt{2}=0$ أو $z^2+z+74=0$

$z-i\sqrt{2}=0$ تعني: $z=i\sqrt{2}$

مميز المعادلة: $z^2+z+74=0$ هو $\Delta=1-296=-295=i^2\times 295$

فهي تقبل حلين مركبين مترافقين: $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{295}}{2}$ و $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{295}}{2}$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي: $S=\left\{i\sqrt{2};\dfrac{-1+i\sqrt{295}}{2};\dfrac{-1-i\sqrt{295}}{2}\right\}$.

2. أ/ العبارة المركبة للدوران r هي: $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z$ ، ومنه لاحقة صورة I هي:

$z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i\sqrt{2}=-1+i$.

ب/ الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NC}$ ، أي: $z_B-z_A=z_C-z_N$ ،

ومنه: $z_N=z_A-z_B+z_C=7+5i-7+5i+1+i=1+11i$

جـ/ لدينا: $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=\dfrac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i}=\dfrac{-8+4i}{8+16i}$

$$=\frac{(-2+i)(2-4i)}{4+16}=\frac{10i}{20}=\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- لدينا: $\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ومنه: $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ، أي: $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

إذن: المستقيمان (AC) و (BD) متعامدان.

- بما أن $ABCN$ متوازي أضلاع وقطراه $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان فهو معين.

تمرين 28

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E)...z^3+2z^2-16=0$.

1. أ/ بين أن العدد 2 هو حل للمعادلة (E).

ب/ عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث: $(z-2)(az^2+bz+c)=0$.

جـ/ استنتج حلول المعادلة (E) ثم اكتب هذه الحلول على الشكل الأسي.

2. نعتبر النقط A ، B و D ذات اللواحق $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ و $z_D=-2+2i$

على الترتيب.

أ/ مثل النقط A ، B و D .

ب/ عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ومثل C .

3. لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ/ عين z_E و z_F لاحقتي E و F على الترتيب ثم مثل E و F .

ب/ بين أن : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ ، ثم حدد طبيعة المثلث AEF .

جـ/ لتكن I منتصف $[EF]$ ،عين صورة المثلث EBA بالدوران الذي مركزه I وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

الحل

1. أ/ لدينا : $2^3 + 2\times 2^2 - 16 = 0$ ، ومنه العدد 2 هو حل للمعادلة (E) .

ب/ لدينا : $(z-2)(az^2+bz+c) = az^3 - 2az^2 + bz^2 - 2bz + cz - 2c$ ، ومنه :

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=2 \\ c-2b=0 \\ -2c=-16 \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}$ ،

ومنه : $z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+4z+8)=0$

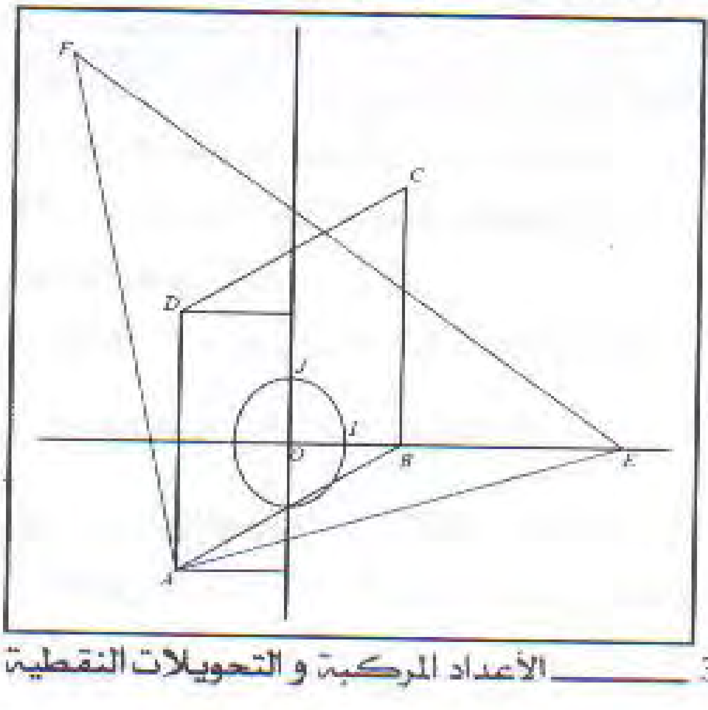
جـ/ لدينا : $z^3+2z^2-16=0$ معناه : $z-2=0$ أو $z^2+4z+8=0$

$z-2=0$ معناه : $z=2$ ، مميز المعادلة $z^2+4z+8=0$ هو: $\Delta = 16-32=(4i)^2$

فهي تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ،

$z_2 = \overline{z_1} = -2-2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$



2. أ/ أنظر الشكل :

ب/ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع معناه :

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ، أي: $z_C - z_B = z_D - z_A$ ،

ومنه: $z_C=2+(-2+2i)-(-2-2i)=2+4i$

3. أ/ E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ معناه: $z_E-z_B=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_B)$

ومنه: $z_E=2-i(2+4i-2)=6$.

F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$ معناه: $z_F-z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_D)$ ،

ومنه: $z_F=-2+2i+i(2+4i+2-2i)=-2+2i-2+4i=-4+6i$

. أنظر E و F في الشكل.

4. أ/ لدينا: $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=\frac{(-4+6i)-(-2-2i)}{6-(-2-2i)}=\frac{-2+8i}{8+2i}=\frac{i(2i+8)}{8+2i}=i$

ب/ بما أن: $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن المثلث AEF قائم ومتساوي الساقين في A.

توضيح: لدينا: $\left|\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}\right|=|i|=1$ تعني: $\frac{AF}{AE}=1$، أي: $AF=AE$

ومن جهة $\arg\left(\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$، تعني: $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})=\frac{\pi}{2}$، أي: $(AF)\perp(AE)$

جـ/ بما أن I منتصف $[EF]$ الذي يمثل الوتر في المثلث AEF القائم والمتساوي الساقين في A فإن المثلثين AIE و AIF متقايسين وكل منهما قائم ومتساوي الساقين، الدوران الذي مركزه I وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ يحول E إلى A، ويحول A إلى F وبما أن $BE=AD$ و $(BE)\perp(AD)$ فإن المثلثين EBA و ADF متقايسين، ومنه صورة B هي D .

إذن: صورة المثلث EBA هو المثلث ADF.

تمرين 29

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين 1 و 2 على الترتيب. وليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]0;\pi[$. نسمي P النقطة ذات اللاحقة: $z_P=1+e^{2i\theta}$.

1. بين أن P تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 1 .

2. أ/ عبر عن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AP}\right)$ بدلالة θ.

ب/ استنتج المجموعة (E) للنقط P لما يمسح θ المجال $]0;\pi[$.

3. لتكن P' صورة P بالدوران R الذي مركزه O وزاويته -2θ . ولتكن $z_{P'}$ لاحقة

النقطة P' .

أ/ بين أن: $z_{P'} = \overline{z}_P$.

ب/ تحقق أن P' تنتمي إلى الدائرة (C) .

4. في ماياتي نفرض: $\theta = \frac{\pi}{3}$.

أ/ لتكن A' صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته: $-\frac{2\pi}{3}$.

- عين المجموعة (C') صورة الدائرة (C) بالدوران r .

ب/ عين لاحقة النقطة P' صورة P بالدوران r .

جـ/ بين أن المثلث AMO متقايس الأضلاع.

الحل

1. نبين أن: $AP = 1$ ، لدينا: $AP = |z_P - z_A| = |1 + e^{2i\theta} - 1| = |e^{2i\theta}| = 1$.

2. أ/ $$\left(\vec{AB};\vec{AP}\right) = \arg\left(\frac{z_P - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left[\frac{e^{2i\theta}}{2-1}\right] = \arg\left(e^{2i\theta}\right) = 2\theta[2\pi]$$

ب/ لدينا: $z_P = 1 + e^{2i\theta}$ تكافئ: $z_P = z_A + 1\times e^{2i\theta}$ ، ولما θ يمسح المجال $]0;\pi[$ فإن: 2θ يمسح المجال $]0;2\pi[$. إذن: المجموعة (E) للنقط P لما يمسح θ المجال $]0;\pi[$ هي الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 1 .

3. أ/ الكتابة المختصرة للدوران R الذي مركزه O وزاويته -2θ هي: $z' - 0 = e^{-2i\theta}(z - 0)$

أي: $z' = ze^{-2i\theta}$. وبما أن: $z_P = 1 + e^{2i\theta}$ فإن:

$$z_P{}' = z_P e^{-2i\theta} = \left(1 + e^{2i\theta}\right)e^{-2i\theta} = e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}e^{-2i\theta} = 1 + e^{-2i\theta} = \overline{z}_P$$

ب/ لدينا: $z_{P'} = \overline{z}_P$ ، ومنه: P' هي نظيرة P بالنسبة إلى محور الفواصل ،وبما أن: (C) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 1 ، و P تنتمي إلى (C) فإن P' تنتمي إلى الدائرة (C) . (لاحظ أن المركز A للدائرة (C) ينتمي إلى محور الفواصل)

4. لدينا: $\theta = \frac{\pi}{3}$ ،

أ/ تذكير: إن صورة دائرة بدوران هي دائرة تقايسها .

إذن : المجموعة (C') هي دائرة مركزها A' ونصف قطرها 1 ، حيث: $A' = r(A)$.

العبارة المركبة للدوران r هي: $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z$.

ومنه: $$z_{A'} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_A = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\times 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن: $z_{A'} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ب / لدينا: $z_P = 1 + e^{2i\theta} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه: $z_{P'} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = 1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z}_P = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ملاحظة :النقطتان P و P' متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل . (أنظر السؤال3)

جـ /إن النقطتين O و P من الدائرة (C) ومنه: $AP = AO = 1$ ، وعلاوة على ذلك:

$OP = |z_P| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ ، إذن: المثلث AMO متقايس الأضلاع.

تمرين 30

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$.

2 . في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط K ، L و M ذات اللواحق على الترتيب : $1+i$ ، $1-i$ ، $-i\sqrt{3}$.

أ / أوجد لاحقة النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى L .

ب / أوجد لاحقتي النقطتين A و C صورتي M و N على الترتيب بالدوران ذو المركز O والزاوية : $\frac{\pi}{2}$.

جـ / أوجد لاحقتي النقطتين D و B صورتي M و N على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}(0;2)$.

3 . أ / أثبت أن النقطة K منتصف القطعتين $[DB]$ و $[AC]$.

ب / أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$ على الشكل الجبري .

جـ / استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

الحل

1 . مميز المعادلة $z^2-2z+2=0$ هو: $\Delta=4-8=-4=(2i)^2$

فهي تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z_1=1+i$ ، $z_2=\overline{z_1}=1-i$

2 . أ / لدينا: $z_L=\dfrac{z_M+z_N}{2}$ ومنه:

$z_N=2z_L-z_M=2-2i+i\sqrt{3}=2+i(\sqrt{3}-2)$

ب / العبارة المركبة للدوران ذو المركز O والزاوية: $\dfrac{\pi}{2}$ هي: $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ، أي: $z'=iz$

ومنه: $z_A=iz_M=i(-i\sqrt{3})=\sqrt{3}$ ، و : $z_C=i(2+i(\sqrt{3}-2))=2-\sqrt{3}+2i$

جـ / لدينا: $z_{\vec{w}}=2i$ ومنه العبارة المركبة لهذا الانسحاب هي: $z'=z+2i$

ومنه: $z_D=-i\sqrt{3}+2i=i(2-\sqrt{3})$ و $z_B=2+i\sqrt{3}-2i+2i=2+i\sqrt{3}$

3 . أ / لدينا: $\dfrac{z_D+z_B}{2}=\dfrac{1}{2}(2i-i\sqrt{3}+2+i\sqrt{3})=1+i=z_K$

ومن جهة : $\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2i)=1+i=z_K$

ونستنتج أن القطرين $[DB]$ و $[AC]$ متناصفان ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ب / لدينا: $\dfrac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=\dfrac{2-\sqrt{3}+2i-1-i}{2+i\sqrt{3}-1-i}=\dfrac{1-\sqrt{3}+i}{1+i(\sqrt{3}-1)}$

$$=\frac{i[\cancel{1+i(\sqrt{3}-1)}]}{\cancel{1+i(\sqrt{3}-1)}}=i$$

جـ / لدينا: $\left|\dfrac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right|=|i|$ ، أي: $\dfrac{|z_C-z_K|}{|z_B-z_K|}=1$ ،أي: $|z_C-z_K|=|z_B-z_K|$

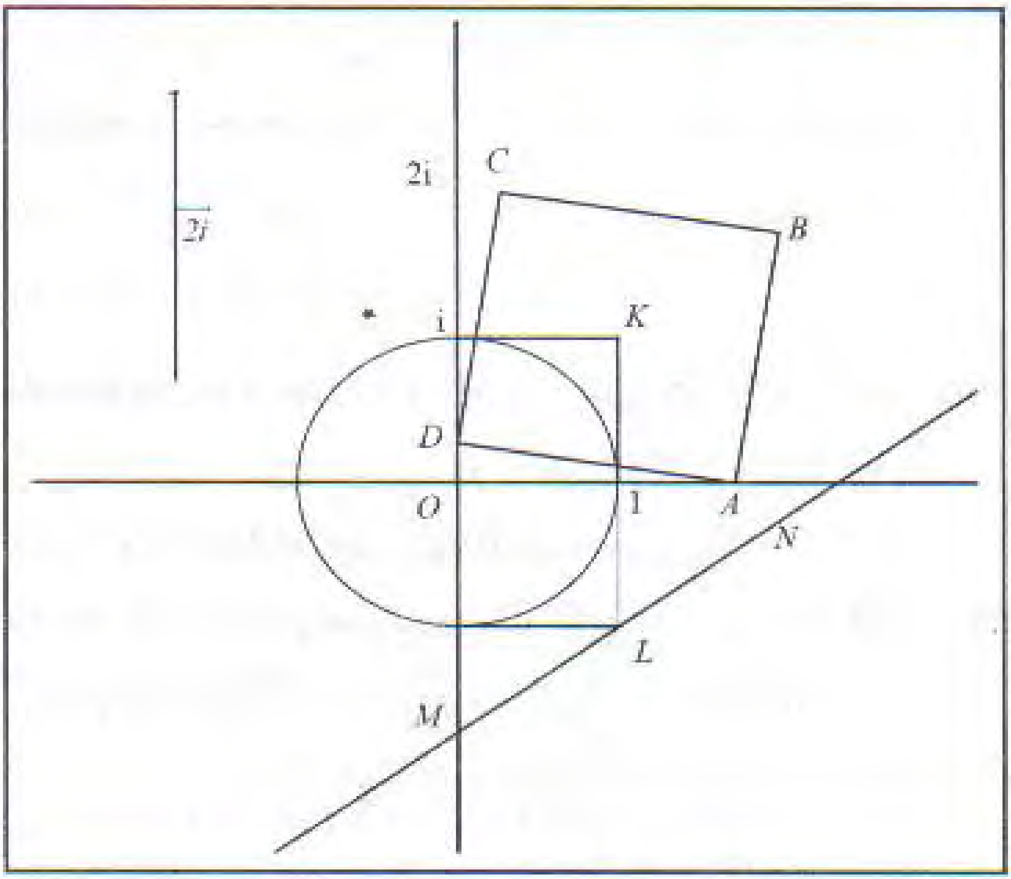
ومنه: $KC=KB$ ، ونستنتج أن القطران $[DB]$ و $[AC]$ متقايسان

ومن جهة: $\arg\left(\dfrac{z_C-z_K}{z_B-z_K}\right)\equiv\arg(i)[2\pi]$ ، أي: $\left(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

أي القطران $[DB]$ و $[AC]$ متعامدان.

بما أن القطران $[DB]$ و $[AC]$ متقايسان و متعامدان فإن الرباعي $ABCD$ مربع .

<u>رسم توضيحي:</u>



تمرين 31

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

2. نعتبر النقط: A ، B ، C ، P ذات اللواحق: $z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ، $z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ، $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ ، $z_P = 3 + 2i$ على الترتيب ، والشعاع $\vec{w}$ ذو اللاحقة:

$$z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$$

أ) أوجد z_Q لاحقة النقطة Q صورة B بواسطة الإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$.

ب) أوجد z_R لاحقة النقطة R صورة P بواسطة التحاكي الذي مركزه C ونسبته $-\frac{1}{3}$.

جـ) أوجد z_S لاحقة النقطة S صورة P بواسطة الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3. أ/ بين أن الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع .

ب/ أحسب $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ ثم استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $PQRS$.

جـ/ علل وجود النقاط P ، Q ، R ، S على نفس الدائرة (γ) التي مركزها Ω ذات اللاحقة: -1 ، ثم عين نصف قطرها ρ .

الحل

1. $\Delta = -2304 = (48i)^2$ ومنه المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين:

$z_1 = \frac{3}{2} + 6i$ ، $z_2 = \overline{z_1} = \frac{3}{2} - 6i$.

2. أ/ لدينا: $z_Q = z_B + z_{\overrightarrow{w}} = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

ب/ لدينا: $z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$ ،

ومنه: $z_R = -\frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right) - 3 - \frac{1}{4}i = -5 - i$

جـ/ لدينا: $z_S - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$ ،

ومنه: $z_S = -i\left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right) + \frac{3}{2} + 6i = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.

3. أ/ لدينا: $\overline{PQ} = z_Q - z_P = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i - 3 - 2i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$

ومن جهة: $\overline{SR} = z_R - z_S = -5 - i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$

لدينا: $\overline{PQ} = \overline{SR}$ ، ومنه: الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع .

ب/ لدينا: $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5 - i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i}{-\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i} = \frac{-11 + 5i}{-5 - 11i} = \frac{11 - 5i}{5 + 11i} = \frac{(11 - 5i)(5 - 11i)}{25 + 121}$

$= \frac{-146i}{146} = -i$

بما أن: $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = -i$ ، فإن: $\arg\left(\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ،

أي: $(\overline{QP};\overline{QR}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، ومنه: $\overline{QP}$ و $\overline{QR}$ متعامدان .

وبما أن: $\left|\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right| = |-i| = 1$ ، فإن: $\frac{|z_R - z_Q|}{|z_P - z_Q|} = 1$ ، أي: $\frac{QR}{QP} = 1$ ، ومنه: $QR = QP$.

لدينا : $\overline{QP}$ و $\overline{QR}$ متعامدان و $QR = QP$ ، أي :القطران $[QR]$ و $[QP]$ متعامدان ومتقايسان ، إذن متوازي الأضلاع $PQRS$ مربع .

جـ/ بالحساب نجد : $|z_\Omega - z_P| = |z_\Omega - z_Q| = |z_\Omega - z_R| = |z_\Omega - z_S| = \sqrt{17}$

أي : $\Omega P = \Omega Q = \Omega R = \Omega S = \sqrt{17}$ ، وهذا يعني أن : النقاط P ، Q ، R ، S على نفس الدائرة (γ) التي مركزها Ω ذات اللاحقة : -1 ، ونصف قطرها: $\rho = \sqrt{17}$.

تمرين 32

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $2cm$) ، نعتبر النقط A ، B ، I ، لواحقها على الترتيب : $z_A = 1-2i$ ، $z_B = -2+2i$ ، $z_I = 1$.

لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$.

1 . عين لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة (C) ، و ρ نصف قطرها .

2 . D نقطة لاحقتها $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$ ، أكتب العدد z_D على الشكل الجبري ، ثم بين أن D نقطة من الدائرة (C) .

3 . لتكن E نقطة من الدائرة (C) ذات اللاحقة z_E ، بحيث : $(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}) = \dfrac{\pi}{4}$.

أ/ حدد الطويلة وعمدة للعدد : $z_E + \dfrac{1}{2}$.

ب/ استنتج أن : $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4 . ليكن r التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z' + \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$.

أ/ حدد طبيعة التحويل r محددا عناصره المميزة .

ب/ لتكن K النقطة ذات اللاحقة: $z_K = 2$. عين لاحقة صورة النقطة K بالتحويل r بالحساب ، ثم باعتبارات هندسية .

الحل

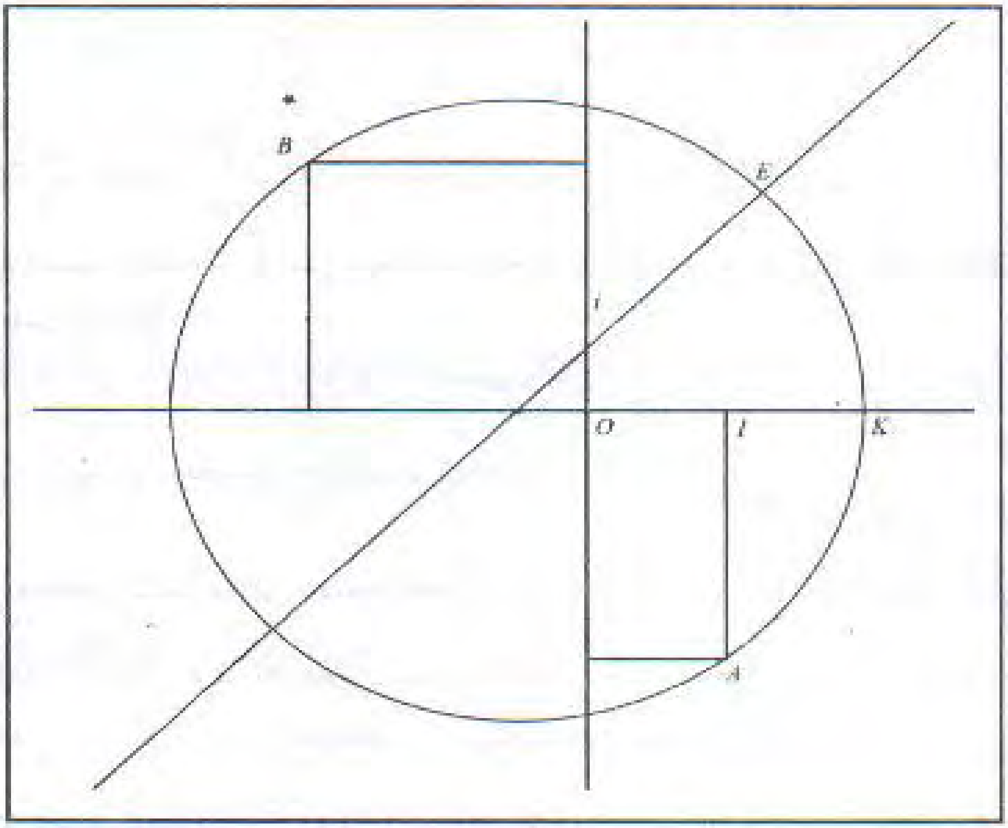
1 . لدينا: $z_\Omega = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1-2i-2+2i}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

و : $\rho = \dfrac{1}{2}|z_B - z_A| = \dfrac{1}{2}|-2+2i-1+2i| = \dfrac{1}{2}\sqrt{9+16} = \dfrac{5}{2}$

2 . لدينا : $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i} = \dfrac{3+9i}{4+2i} \times \dfrac{4-2i}{4-2i} = \dfrac{(3+9i)(4-2i)}{16+4} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$

كتبيات أن D نقطة من الدائرة (C) نبين أن : $|z_D - z_\Omega| = \dfrac{5}{2}$.

لدينا: $|z_D - z_\Omega| = \left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i + \dfrac{1}{2}\right| = \sqrt{4 + \dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$.



3. أ / بما أن: E نقطة من الدائرة (C) فإن: $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$ ،

ولدينا: $\left(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ تكافئ: $\arg\left(\dfrac{z_E - z_\Omega}{z_I - z_\Omega}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ،

أي: $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) - \arg\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ، أي: $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

ب / لدينا: $\left|z_E + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$ و $\arg\left(z_E + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ، ومنه: الشكل المثلثي للعدد $z_E + \dfrac{1}{2}$ هو:

$z_E + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ، ونستنتج الشكل الجبري :

$z_E + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ، ومنه: $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$

4. أ/ الكتابة: $z'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\frac{1}{2}\right)$ تكافئ $z'-z_{\Omega}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z-z_{\Omega}\right)$

وهي الكتابة المختصرة للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ب/ بالحساب : لدينا $z'+\frac{1}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_K+\frac{1}{2}\right)$ ، أي: $z_{K'}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ،

أي: $z'=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{5\sqrt{2}}{2}=z_E$ ، إذن صورة النقطة K هي النقطة E .

باعتبارات هندسية: النقطة K هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المحور (Ox) ، وبالتالي صورة النقطة K هي النقطة E .

تمرين 33

1. z_1 و z_2 عددان مركبان. حل جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$.

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث وحدة الطول $1cm$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$.

أ/ أكتب z_A ، z_B على الشكل الأسي ثم مثل النقطتين A و B .

ب/ أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسي.

جـ/ استنتج طبيعة المثلث OAB وقيسا للزاوية الموجهة $\left(\overline{OA};\overline{OB}\right)$.

د/ عين لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي $ACBO$ معينا ، ثم علم النقطة C .

هـ/ أحسب بـ cm^2 مساحة المثلث ABC .

3. ليكن r التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

أ/ عين طبيعة التحويل r محددا عناصره المميزة.

ب/ ماهي على الشكل الأسي لواحق A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالتحويل r ؟

جـ/ ماهي بـ cm^2 مساحة المثلث $A'B'C'$ ؟

الحل

1. لدينا: $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ -z_1\sqrt{3}+z_2 3=2\sqrt{3}i \end{cases}$ ، أي:

$$\begin{cases} 2z_2 = -2+2i\sqrt{3} \\ z_1\sqrt{3}-z_2 = -2 \end{cases}$$
، أي:
$$\begin{cases} z_2 = -1+i\sqrt{3} \\ z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}+i \end{cases}$$

2. أ/ لدينا : $z_A = -\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

و : $z_B = -1+i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب/ لدينا: $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، أي : $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

جـ/ لدينا : $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه: $\left|\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$ ، ومنه: $\dfrac{OA}{OB} = 1$ ،

أي: $OA = OB$ ، ومنه المثلث OAB متساوي الساقين في O .

ولدينا: $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = -\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) = -\arg\left(\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = -\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

د/ الرباعي $ACBO$ معين معناه: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ ، أي: $z_C - z_A = z_B - z_O$ ، ومنه :

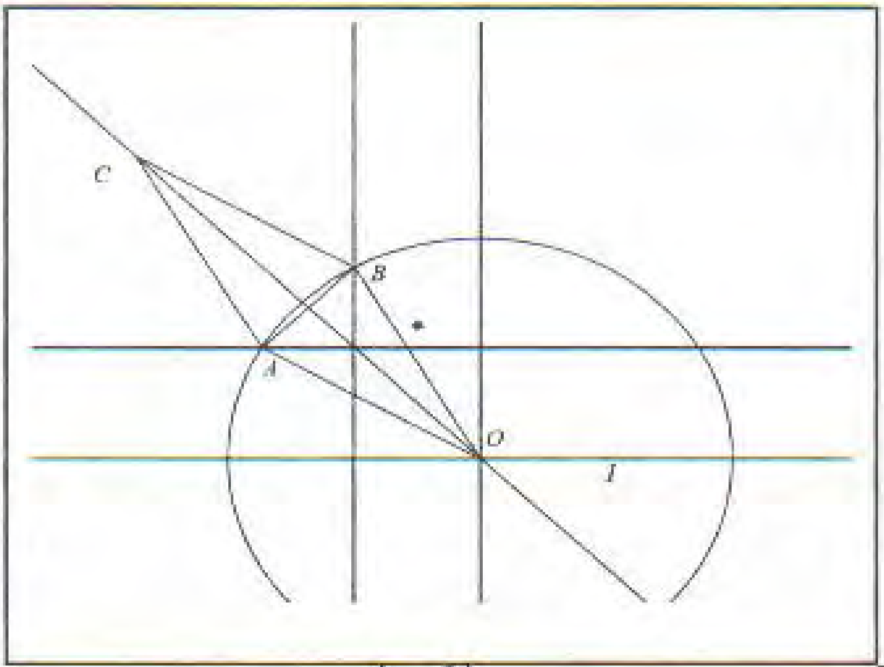
$$z_C = z_A + z_B = -1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(-1+i\right)$$

هـ/ مساحة المثلث ABC تساوي :

$$\frac{AB}{2}\times\frac{OC}{2} = \frac{1}{4}\left|z_B - z_A\right|\left|z_C - z_O\right|$$
$$= \frac{1}{4}\left|-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\right|\left|\left(\sqrt{3}+1\right)\left(-1+i\right)\right|$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\left|1+i\right|\left(\sqrt{3}+1\right)\left|-1+i\right|$$
$$= \frac{1}{4}\times 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 1$$

ومنه مساحة المثلث ABC هي : $1cm^2$

رسم توضيحي:



3. أ/ لدينا: $r: z' = e^{-i\frac{\pi}{6}} z$ ، وبما أن: $\left| e^{-i\frac{\pi}{6}} \right| = 1$ فإن: r دوران مركزه O وزاويته

$$\arg\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

ب/ لدينا: $z_{A'} = z_B$ و $z_{B'} = 2i$ و $z_{C'} = \left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بدوران، وبما أن الدوران تقايس نستنتج ان مساحة المثلث $A'B'C'$ هي نفسها مساحة المثلث ABC، أي: $1cm^2$.

تمرين 34

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقطتين A و B من المستوي المركب لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1$ ،

$z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

لتكن M نقطة ذات اللاحقة z ، ولتكن M_1 النقطة ذات اللاحقة z_1 ، بحيث M_1 هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، ولتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' ، بحيث M' هي صورة M_1 بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{u}$. نرمز بـ T إلى التحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' .

1. أ/ بين أن: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 1$.

ب / عين صورة النقطة B بالتحويل T .

جـ / بين أن T يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تعيينها.

د / حدد طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة .

2. نضع: $z = x + iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان .

أ / من أجل $z \neq 0$ ، عين $\operatorname{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)$ بدلالة x و y .

ب / عين (Γ) مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث OMM' قائم في O . (يطلب تحديد عناصر المجموعة (Γ))

3. في هذا الجزء نفرض: $z = 1+i$.

أ / تحقق أن : $M \in (\Gamma)$.

ب / أحسب $|z'|$ ومساحة المثلث OMM' بـ cm^2 .

الحل

1. أ / لدينا: M_1 صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ، ومنه: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z \ldots (1)$.

و: M' هي صورة M_1 بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{u}$ ، ومنه: $z' = z_1 - 1 \ldots (2)$.

من (1) وبالتعويض في (2) نجد: $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$.

ب / لدينا: $z_B = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ومنه: $z_B' = e^{i\frac{\pi}{3}}z_B - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 - 1 = 0$

ومنه : $T(B) = O$ ، إذن صورة B هي O .

جـ / Ω صامدة بالتحويل T معناه: $\Omega = T(\Omega)$ ، أي: $z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{3}}z_\Omega - 1$ ، أي :

$z_\Omega(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) = -1$ ، أي : $z_\Omega(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1$ ، أي: $z_\Omega(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1$ ، أي:

$z_\Omega(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = -(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، ومنه: $z_\Omega = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

إذن: النقطة Ω ذات اللاحقة $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل T .

د / لدينا: $T : z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$ ، بما أن : $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ فإن : T دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ ومركزه النقطة الصامدة فيه وهي Ω .

2. أ / لدينا: $\frac{z'}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

إذن: $\frac{z'}{z}=\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ ، ومنه: $\text{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)=\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2}$

ب / المثلث OMM' قائم في O معناه : $(\overline{OM},\overline{OM'})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، حيث : $k\in\mathbb{Z}$.

أي : العدد $\frac{z'}{z}$ تخيلي صرف ، وهذا يعني أن : $\text{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)=0$ ، أي: $\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2}=0$ ،

ومنه: $x^2+y^2-2x=0$ ، ومنه: $x^2-2x+1+y^2=1$ ، أي: $(x-1)^2+y^2=1$.

إذن المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $A(1;0)$ ونصف قطرها 1 ، باستثناء النقطتين O و B .

لاحظ أن : $\frac{z'}{z}$ معرف معناه : $z\neq 0$ ، أي: $M\neq O$ ، ولدينا: $T(B)=O$ ، ومنه: $M\neq B$.

3 . أ / لدينا : $|z-1|=|1+i-1|=|i|=1$ ، أي : $AM=1$ ، ومنه: $M\in(\Gamma)$.

ب / لدينا: $|z'|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}z-1\right|=\left|(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(1+i)-1\right|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|$

$$=\left|-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{(-\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{2\times(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

مساحة المثلث OMM' هي: $\frac{OM\times OM'}{2}=\frac{|z|\times|z'|}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

تمرين 35

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $4cm$)

نعتبر النقاط A ، B و C ذات اللواحق : $z_A=i$ ، $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ على الترتيب.

1 . أ / عين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول B إلى C.

ب / أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري .

جـ / مثل النقاط A ، B و C.

2 . لتكن D مرجح الجملة : $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$.

أ / عين z_D لاحقة النقطة D.

ب / بين أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3 . ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

أ / عين العبارة المركبة للتحاكي h .

ب / عين لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالتحاكي h .

4 . أكتب العدد المركب : $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث CDE.

الحل

1 . أ / لتكن θ زاوية الدوران r ، العبارة المركبة للدوران r هي: $z' = e^{i\theta} z$.

وبما أن r يحول B إلى C فإن: $z_C = e^{i\theta} z_B$ ،

ومنه: $e^{i\theta} = \dfrac{z_C}{z_B} = \dfrac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، إذن: $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

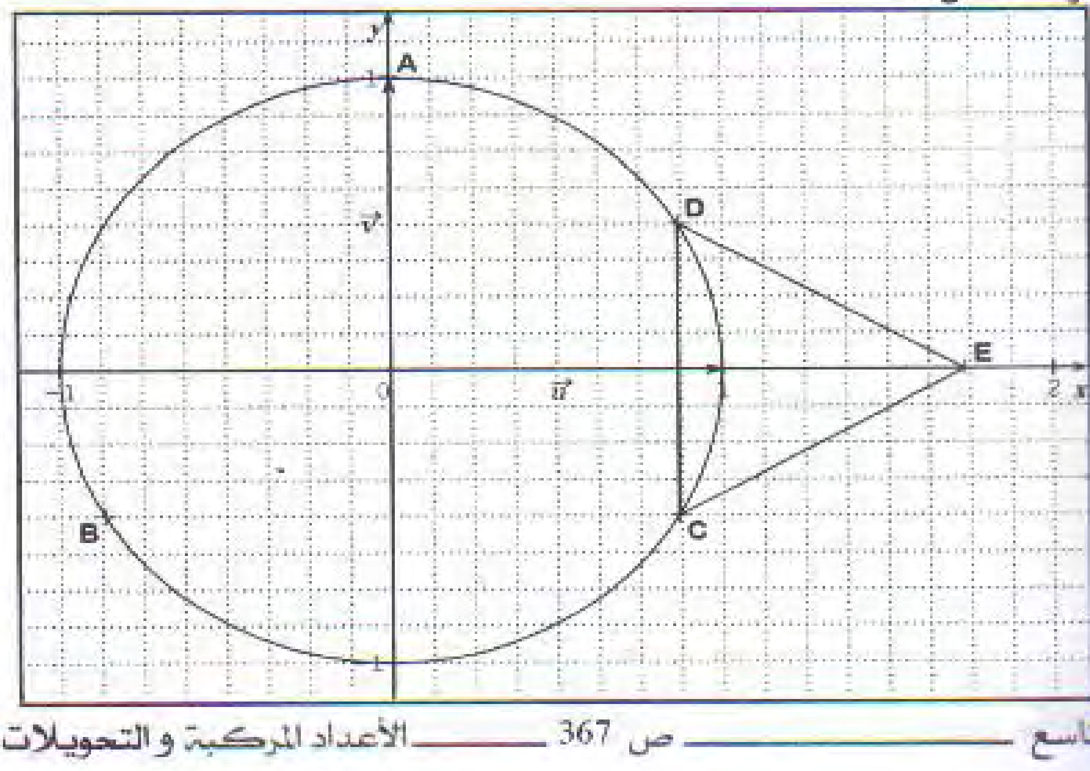
ب / لدينا: $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

ولدينا: $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

إذن: $z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ و $z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

جـ / أنظر الشكل.



2. أ/ لدينا:

$$z_D=\frac{2z_A-z_B+2z_C}{2-1+2}=\frac{1}{3}\left(2i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\sqrt{3}-i\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

إذن: $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

ب/ بما أن: $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=1$ فإن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 .

3. أ/ العبارة المركبة للتحاكي h هي: $z'=2z+b$ ، حيث: $b=(1-2)\times z_A$

أي: $b=-z_A$ ، أي: $b=-i$ ، ومنه: $h:z'=2z-i$.

ب/ $E=h(D)$ معناه: $z_E=2z_D-i$ ، ومنه: $z_E=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i=\sqrt{3}$.

4. لدينا:

$$\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{2i}{\sqrt{3}+i}=\frac{2i\left(\sqrt{3}-i\right)}{4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

بما أن: $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، فإن المثلث CDE متقايس الأضلاع.

ما يجب أن يعرف

في كل ما يأتي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

التشابه المباشر

1 . التعريف : القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات و على الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M \neq N$ ، صورها M',N',P',Q' على الترتيب بالتحويل S فإن:

$$\frac{P'Q'}{M'N'}=\frac{PQ}{MN} \quad و \quad \left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)=\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right) .$$

نتيجة : من التعريف ، الإنسحاب ، الدوران ، التحاكي هي تشابهات مباشرة .

2 . نسبة تشابه مباشر :

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k .

العدد k يسمى نسبة التشابه S . $\left(k=\frac{M'N'}{MN}\right)$ ، و منه النسبة ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N .

حالة خاصة: إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

3 . زاوية تشابه مباشر :

تعريف: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يحافظ على الزوايا الموجهة ، أي : $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$. و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N . هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ تسمى زاوية التشابه المباشر S .

4 . مركز تشابه مباشر :

خاصية : إذا لم يكن التشابه المباشر S إنسحابا فإنه يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω ، تسمى مركزه ، (تحقق $S(\Omega)=\Omega$).

5 . تعيين تشابه مباشر :

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω ، نسبته k $(k>0, k\neq 1)$ و زاويته θ فإن :

- $S(\Omega)=\Omega$.
- من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن Ω لدينا:

$$M'=S(M) \quad \text{تعني:} \quad \begin{cases} \Omega M'=k\,\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta \end{cases}$$

التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

1 . الكتابة المركبة لتشابه مباشر:

خاصية 01: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$.

خاصية 02: a و b عددان مركبان حيث $a \neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

2 . الكتابة المختصرة لتشابه مباشر:

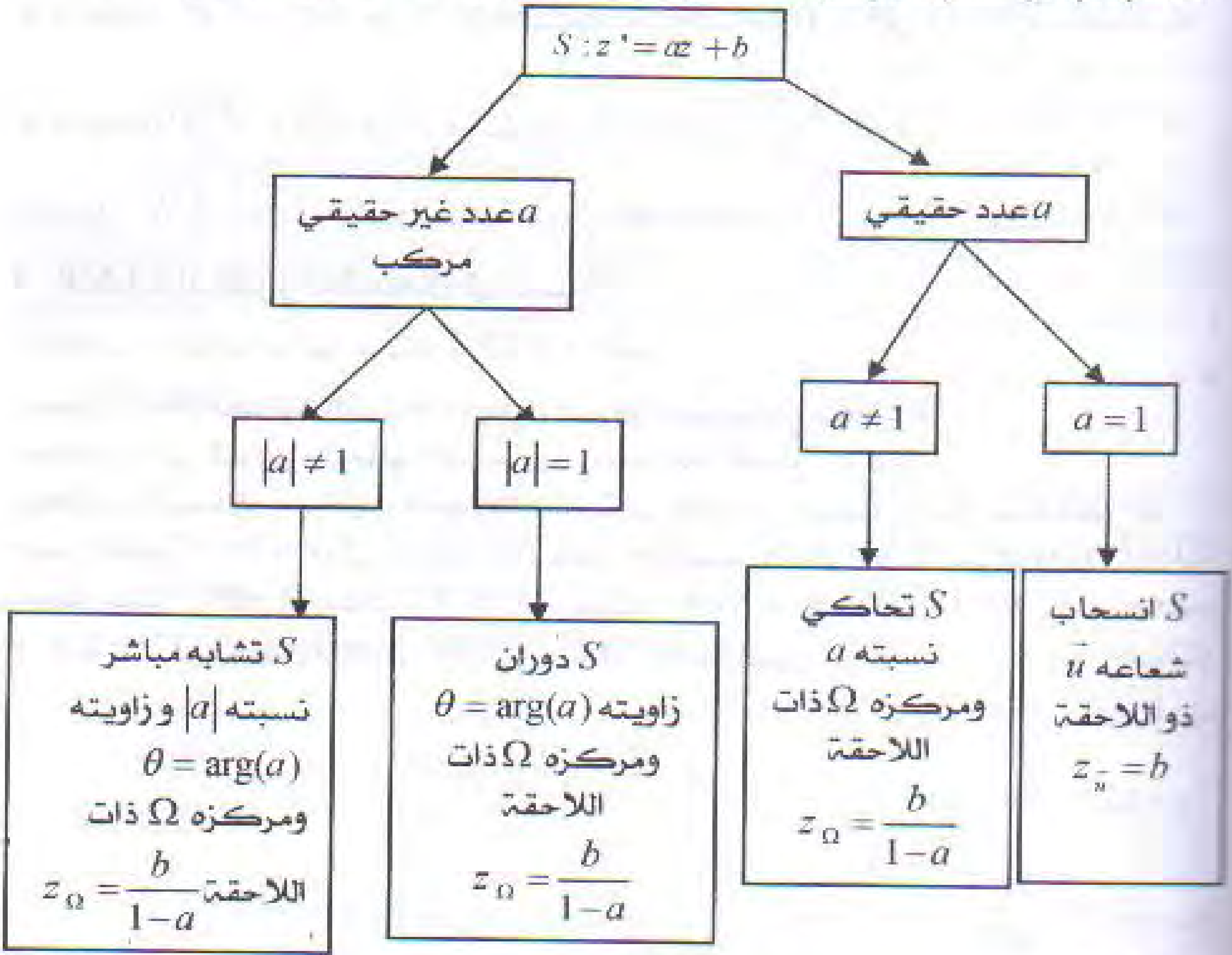
خاصية: ليكن S تشابها مباشرا مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω، ونسبته k $(k > 0, k \neq 1)$، وزاويته θ $(\theta \in \mathbb{R})$. ولتكن M و M' نقطتان ذات اللاحقتين z و z' على الترتيب.

لدينا: $M' = S(M)$ تكافئ $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$.

الكتابة $z' - z_\Omega = ke^{i\theta}(z - z_\Omega)$ تسمى الكتابة المختصرة للتشابه المباشر S.

3 . مخطط تصنيف التشابهات المباشرة:

S تشابه مباشر كتابته المركبة: $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$.



خواص تشابه مباشر

1 . تركيب تشابهين مباشرين :

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين .

2 . التحليل القانوني لتشابه مباشر:

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k $\left(k \in \mathbb{R}_+^*\right)$ وزاويته θ $\left(\theta \in \mathbb{R}\right)$.

- إذا كان $k=1$ و $\theta=0$ التشابه S انسحاب .
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω و يحلل كمايلي :

$S=h \circ r=r \circ h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

3 . التشابه المباشر و نقط المستوي :

خاصية: إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

نتائج

- إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a=\dfrac{z_{B'}-z_{A'}}{z_B-z_A}=1$
- إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $k=\dfrac{A'B'}{AB}$

وزاويته $\theta=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$ ، ومركزه النقطة الصامدة فيه .

4 . التشابه المباشر و الأشكال الهندسية :

إذا كان S تشابها مباشرا نسبته k $(k>0)$ فإنه:

- يحول المسافات بضربها بالعدد k ، ويحول المساحات بضربها في العدد k^2 .
- يحافظ على : التوازي ، التعامد، الاستقامية ، منتصفات القطع ، المرجح .
- يحول مستقيما إلى مستقيم ، قطعة مستقيمة إلى قطعة مستقيمة ، دائرة ذات المركز w ونصف القطر r $(r>0)$ إلى دائرة ذات المركز w' ونصف القطر $k \times r$ ، حيث: $w'=S(w)$
- يحول مثلثا ABC إلى مثلث $A'B'C'$ ، بحيث : $A'=S(A)$ ، $B'=S(B)$ و $C'=S(C)$ ويكون المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهين .

تمارين محلولة

تمرين 01

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة $z=x+iy$ النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة $z'=x'+iy'$ حيث:

$$\begin{cases} x'=x-y+4 \\ y'=x+y \end{cases}$$

1 . بين أن التحويل S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω يطلب تحديدها .

2 . نفرض أن: $M\neq\Omega$

أ / أثبت أن: $z'-z_\Omega=(1+i)(z-z_\Omega)$.

ب / أثبت أن النسبة : $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ ثابتة يطلب تحديدها.

جـ / أثبت أن الزاوية : $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})$ ثابتة يطلب تحديدها.

3 . أ / عبر عن z' بدلالة z .

ب / حدد الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S .

4 . A ، B و C نقط من المستوي ، و A' ، B' و C' صورها بالتحويل S على الترتيب .

أثبت أن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

الحل

1 . أ / Ω صامدة بالتحويل S معناه: $S(\Omega)=\Omega$ ، بفرض $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ فإن: $S(\Omega)=\Omega$ تعني:

$\begin{cases} x_\Omega=x_\Omega-y_\Omega+4 \\ y_\Omega=x_\Omega+y_\Omega \end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases} y_\Omega=4 \\ x_\Omega=0 \end{cases}$ ، إذن: S يقبل نقطة صامدة وحيدة $\Omega(0;4)$

2 . أ / من أجل $M\neq\Omega$ لدينا:

$$z'-z_\Omega=x-y+4+i(x+y)-4i=x-y+4+i(x+y-4)...(1)$$

ومن جهة: $(1+i)(z-z_\Omega)=(1+i)(x+iy-4i)=(1+i)(x+i(y-4))$

$$=(x+i(y-4))+ix-(y-4)=x-y+4+i(x+y-4)...(2)$$

من (1) و(2) نجد: $z'-z_\Omega=(1+i)(z-z_\Omega)$

ب / لدينا: $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=\dfrac{|z'-z_\Omega|}{|z-z_\Omega|}=\left|\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=|1+i|=\sqrt{2}$

إذن: $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=\sqrt{2}$ ، ومنه: النسبة $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ ثابتة ومستقلة عن اختيار النقطة M .

جـ / من أجل $M \neq \Omega$ لدينا: $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

3. أ / لدينا: $z'-z_\Omega = (1+i)(z-z_\Omega)$ ومنه: $z'-4i = (1+i)(z-4i)$ ،

ومنه: $z' = (1+i)z + 4$ ، وهي العبارة المركبة للتحويل S .

ب / الكتابة المركبة للتحويل S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 1+i$

و $b = 4i$ ، بما أن: $a \in \mathbb{C}^*$ فإن S تشابه مباشر مركزه $\Omega(0;4)$ النقطة الصامدة فيه

ونسبته: $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = \sqrt{2}$ ، وزاويته: $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4}$

4. بما أن نسبة التشابه المباشر S هي $\sqrt{2}$ فإن: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \sqrt{2}$ ، وبالتالي:

المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

تمرين 02

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(1-i)$.

1. أحسب لاحقة النقطة A' صورة النقطة A ذات اللاحقة $\left(1-i\sqrt{3}\right)$ بالتحويل f .

2. B نقطة ذات اللاحقة $-\sqrt{3}i$ وصورة النقطة C بالتحويل f . عين لاحقة النقطة C .

3. عين طبيعة التحويل f وحدد عناصره المميزة .

الحل

1. $A' = f(A)$ معناه: $z_{A'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_A + \sqrt{3}(1-i)$ ، ومنه:

$$z_{A'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_A + \sqrt{3}(1-i) = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}(1-i) = 4+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$$

2. $B = f(C)$ معناه: $z_B = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_C + \sqrt{3}(1-i)$ ، أي:

$-i\sqrt{3} = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_C + \sqrt{3}(1-i)$ ، ومنه:

$$z_C = \frac{-\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{3i}{4}$$

3. الكتابة المركبة للتحويل f هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 1+i\sqrt{3}$

و $b = \sqrt{3}(1-i)$ ، بما أن: $a \in \mathbb{C}^*$ فإن f تشابه مباشر مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة:

$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{1-(1+i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{-i\sqrt{3}} \times \frac{i}{i} = 1+i$ ، ونسبته: $|a| = \left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$ ،

وزاويته: $\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

تمرين 03

1. ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة $z=x+iy$ النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة $z'=x'+iy'$ حيث:

$$z'=(1-i)z+i$$

عين طبيعة التحويل S محددا عناصره المميزة .

2. ليكن التحويل النقطي S' الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة $z=x+iy$ النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة $z'=x'+iy'$ حيث: $\begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=x-1 \end{cases}$

أ/ عين العبارة المركبة للتحويل S' .

ب/ استنتج طبيعة التحويل S' محددا عناصره المميزة .

3. حدد طبيعة التحويل المركب: SoS' محددا عناصره المميزة .

الحل

1. الكتابة المركبة للتحويل S هي من الشكل $z'=az+b$ ، حيث $a=1-i$ و $b=i$ ، بما أن: $a\in\mathbb{C}^*$ فإن S تشابه مباشر مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة: $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{i}{1-(1-i)}=1$ ، ونسبته: $|a|=|1-i|=\sqrt{2}$ ، وزاويته: $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$.

2. أ/ لدينا: $z'=x'+iy'=-y+1+i(x-1)=-y+1+ix-i$

$$=-y+1+ix-i=i(x+iy)+1-i=iz+1-i$$

ومنه: $z'=iz+1-i$ هي الكتابة المركبة للتحويل S' .

ب/. الكتابة المركبة للتحويل S' هي من الشكل $z'=a'z+b'$ ، حيث $a'=i$ و $b'=1-i$ ، بما أن: $a'\in\mathbb{C}^*$ و $|a'|=|i|=1$ فإن S' دوران مركزه النقطة ذات اللاحقة: $\frac{b'}{1-a'}=\frac{1-i}{1-i}=1=z_\Omega$ ، أي النقطة Ω ، وزاويته: $\arg(a')=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$.

3. طبيعة التحويل المركب SoS' :

لدينا: S هو تشابه مباشر مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=1$ ونسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

وبما أن S' دوران فهو تشابه مباشر مركزه النقطة Ω اللاحقة $z_\Omega=1$ ونسبته 1 وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

نستنتج حسب خاصية تركيب تشابهين مباشرين أن التحويل SoS' هو تشابه مباشر مركزه النقطة Ω اللاحقة $z_\Omega=1$ ونسبته: $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$ وزاويته: $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

تمرين 04

ليكن S التشابه المباشر الذي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة $z=x+iy$ النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة $z'=x'+iy'$ حيث:
$.z'=(1-2i)z+3-4i$

1. عين العبارة التحليلية للتشابه المباشر S.
2. عين صورة المستقيم (D) الذي معادلته: $x=-2$ بالتشابه المباشر S.
3. عين صورة الدائرة (C) التي مركزها $A(1;-1)$ ونصف قطرها 3 بالتشابه المباشر S.

الحل

1. لدينا: $z'=(1-2i)z+3-4i$ تكافئ: $x'+iy'=(1-2i)(x+iy)+3-4i$

أي: $x'+iy'=x+2y+3+i(y-2x-4)$، ومنه: $\begin{cases}x'=x+2y+3\\y'=y-2x-4\end{cases}$

الجملة: $\begin{cases}x'=x+2y+3\\y'=y-2x-4\end{cases}$ هي العبارة التحليلية للتشابه المباشر S.

2. بتعويض $x=-2$ في العبارة التحليلية للتشابه المباشر S نجد: $\begin{cases}x'=2y+1...(1)\\y'=y...(2)\end{cases}$،

من (2) بتعويض y في (1) نجد: $x'=2y'+1$، أي: $-x'+2y'+1=0$،

إذن: صورة المستقيم (D) ذي المعادلة: $x=-2$ بالتشابه المباشر S هو المستقيم (D') الذي معادلة له: $-x'+2y'+1=0$.

3. نعين أولا نسبة التشابه المباشر S، هذه النسبة هي: $|1-2i|=\sqrt{5}$

صورة الدائرة (C) بالتشابه المباشر S، هي الدائرة (C') التي مركزها A' صورة A ونصف قطرها يساوي: $3\times\sqrt{5}$. لدينا: $A(1;-1)$ ومنه باستبدال x و y بإحداثيي النقطة A في العبارة التحليلية للتشابه المباشر S نجد: $\begin{cases}x'=1-2+3\\y'=-1-2-4\end{cases}$، أي: $\begin{cases}x'=2\\y'=7\end{cases}$، ومنه:

$.A'(2;7)$

تمرين 05

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد متجانس مباشر من المستوي.

ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' من المستوي ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(1-i)z+1+i$

1. حدد العناصر المميزة للتشابه S.
2. عين النقطة A سابقة النقطة O بالتشابه S.
3. عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|(1-i)z+1+i|=2$.

الحل

1. الكتابة المركبة للتشابه المباشر S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث $a = 1 - i$
و $b = 1 + i$ ، ومنه مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة:
$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{1-(1-i)} = 1-i$ ، مركز التشابه المباشر S هو $\Omega(1;-1)$ ونسبته:
$|a| = |1-i| = \sqrt{2}$ ، وزاويته: $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$.
2. A سابقة النقطة O معناه: $S(A) = O$ ، أي: $z_O = (1-i)z_A + 1 + i$ ، أي:
$0 = (1-i)z_A + 1 + i$ ، ومنه: $z_A = \frac{-1-i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = -i$ ، إذن: $A(0;-1)$.
3. إن: $|(1-i)z + 1 + i| = 2$ تكافئ $|z'| = 2$ ، أي: $OM' = 2$.
بما أن O صورة النقطة A ، M' صورة النقطة M بالتشابه المباشر S الذي نسبته $\sqrt{2}$ فإن:
$OM' = \sqrt{2}AM$ ، ومنه: $2 = \sqrt{2}AM$ ، أي: $AM = \sqrt{2}$.
إذن: مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|(1-i)z + 1 + i| = 2$ هي الدائرة
التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

تمرين 06

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 4i$ ، $z_C = -2 + i$ ،
و $z_D = 1 - 2i$ على الترتيب.
1. أ/ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D .
ب/ استنتج العناصر المميزة للتشابه المباشر S .
2. لتكن E_0 نقطة ذات اللاحقة $z_{E_0} = \frac{8}{5}i$ ، نضع من أجل كل عدد طبيعي n :
$E_{n+1} = S(E_n)$ و $u_n = \|\overrightarrow{\Omega E_n}\|$ ، حيث Ω مركز التشابه المباشر S .
أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب/ أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل

1. أ/ الكتابة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث a و b عددان
مركبان مع $a \neq 0$. لدينا: $\begin{cases} B = S(A) \\ D = S(C) \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ ، أي:
$\begin{cases} 1+4i = ai + b ...(1) \\ 1-2i = a(-2+i) + b ...(2) \end{cases}$ ، بطرح (2) من (1) طرفا بطرف نجد: $6i = 2a$ ،

ومنه: $a=3i$ ، ثم بالتعويض في (1) نجد: $b=4+4i$ ، إذن: $S:z'=3iz+4+4i$.

ب/ نسبة التشابه المباشر S هي: $|a|=|3i|=3$

زاوية التشابه المباشر S هي: $\arg(a)=\arg(3i)=\frac{\pi}{2}$.

مركز التشابه المباشر S هي النقطة Ω ذات اللاحقة:

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{4+4i}{1-3i}\times\frac{1+3i}{1+3i}=-\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$$

2. أ/ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\|\overrightarrow{\Omega E_n}\|=\Omega E_n$ ومنه:

$u_{n+1}=\|\overrightarrow{\Omega E_{n+1}}\|=\Omega E_{n+1}$ ، ومن تعريف التشابه المباشر S لدينا: $\Omega E_{n+1}=3\Omega E_n$

أي: $u_{n+1}=3u_n$ ، ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول:

$$u_0=\|\overrightarrow{\Omega E_0}\|=\Omega E_0=|z_{E_0}-z_\Omega|=\left|\frac{8}{5}i+\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i\right|=\frac{4}{5}$$

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=u_0\times q^n=\frac{4}{5}\times 3^n$.

بما أن: $3>1$ و $\frac{4}{5}>0$ فإن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{5}\times 3^n=+\infty$.

تمرين 07

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، (الوحدة $1cm$).

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z'=-\left(\sqrt{3}+i\right)z-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

1. بين أن f تشابه مباشر يطلب تعيين مركزه Ω ونسبته وزاويته.

2. لتكن M_0 نقطة ذات اللاحقة $z_0=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$ ، أحسب ΩM_0 ثم عين قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M_0})$.

3. نعتبر متتالية النقط $(M_n)_{n\geq 0}$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$M_{n+1}=f(M_n)$ ، نسمي z_n لاحقة النقطة M_n.

أ/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $z_n-i=2^ne^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0-i)$.

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\Omega M_n\geq 25$.

الحل

1. الكتابة المركبة للتحويل f هي من الشكل $z'=az+b$ ، حيث $a=-\left(\sqrt{3}+i\right)$

و $b=-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$، بمأن: $a\in\mathbb{C}^{*}$ فإن f تشابه مباشر مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة

$$z_{\Omega}=\frac{b}{1-a}=\frac{-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}+i}=\frac{-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}+i}\times\frac{1+\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}-i}=i$$

ونسبته: $2=\left|-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|=|a|$ ، وزاويته:

$$\arg(a)=\arg\left[-\left(\sqrt{3}+i\right)\right]=\arg(-\sqrt{3}-i)=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

2. لدينا: $\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3+1}{16}}=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right|=\left|z_0-i\right|=\Omega M_0$.

ولدينا: $-\frac{\pi}{6}=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)=\arg\left(z_0-i\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M_0}\right)$

3. أ/ نسمي $P\left(n\right)$ هذه الخاصية.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا: $2^{0}e^{i\frac{7\times0\pi}{6}}\left(z_0-i\right)=1\times e^{i0}\times\left(z_0-i\right)=z_0-i$ ،
ومنه صحة $p(0)$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $P\left(n\right)$ أي: $z_n-i=2^{n}e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$ ، ونبرهن صحة
$P\left(n+1\right)$ أي: $z_{n+1}-i=2^{n+1}e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$.

لدينا: $M_{n+1}=f\left(M_n\right)$ ، ومنه باستعمال العبارة المختصرة للتشابه المباشر f نجد:

$z_{n+1}-z_{\Omega}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-z_{\Omega}\right)$ ، أي: $z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-i\right)$ ، ومنه:

$$z_{n+1}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}\left(z_n-i\right)=2e^{i\frac{7\pi}{6}}2^{n}e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)=2^{n+1}e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$$

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $z_n-i=2^{n}e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$.

ب/ لدينا: $\Omega M_n=\left|2^{n}e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)\right|=2^{n}\left|e^{i\frac{7n\pi}{6}}\right|\Omega M_0=2^{n}\frac{1}{2}=2^{n-1}$

ومنه: $\Omega M_n\geq25$ تكافئ $2^{n-1}\geq25$ ، أي: $2^{n}\geq50$ ، أي: $\ln(2^{n})\geq\ln50$ ، أي:
$n\geq\frac{\ln50}{\ln2}\approx5,64$ ومنه: $n\geq6$.

إذن: 6 هو أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\Omega M_n\geq25$.

تمرين 08

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، (الوحدة $1cm$) .
نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=3+5i$ ، $b=-4+2i$ و $c=1+4i$ على الترتيب .

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z'=(2-2i)z+1$

1 . عين طبيعة التحويل f محددا عناصره المميزة .

2 . أ / عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل f .

ب / بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان .

3 . علما أن لاحقة النقطة M هي $z=x+iy$ ، حيث x و y عددان حقيقيان .

عين مجموعة النقط M بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين .

الحل

1 . الكتابة المركبة للتحويل f هي من الشكل $z'=az+b$ ، حيث $a=2-2i$ و $b=1$ ، بما أن : $a\in\mathbb{C}^*$ فإن f تشابه مباشر مركزه Ω النقطة ذات اللاحقة z_Ω حيث:

$$z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1}{-1+2i}=\frac{1}{-1+2i}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}=-\frac{1}{5}-\frac{2i}{5}$$

ونسبته: $|a|=|2-2i|=2\sqrt{2}$ ، وزاويته: $\arg(a)=\arg(2-2i)=-\frac{\pi}{4}$

2 . أ / لتكن b' لاحقة النقطة B' ،

لدينا: $b'=f(b)=(2-2i)(-4+2i)+1=-3+12i$

ب / لدينا: $\frac{b'-c}{a-c}=\frac{-3+12i-1-4i}{3+5i-1-4i}=\frac{-4+8i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}=4i$

لكن: $\frac{b'-c}{a-c}=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB'})$ ، ومنه: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB'})=\arg(4i)=\frac{\pi}{2}$.

إذن: المستقيمان (CB') و (CA) متعامدان .

3 . لدينا: $\overrightarrow{CM'}\cdot\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}x'-1\\y'-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2(x'-1)+y'-4=2x'+y'-6...(*)$

ومن جهة: $z'=(2-2i)z+1$ تكافئ :

$$x'+iy'=(2-2i)(x+iy)+1=2x+2y+1+i(-2x+2y)$$

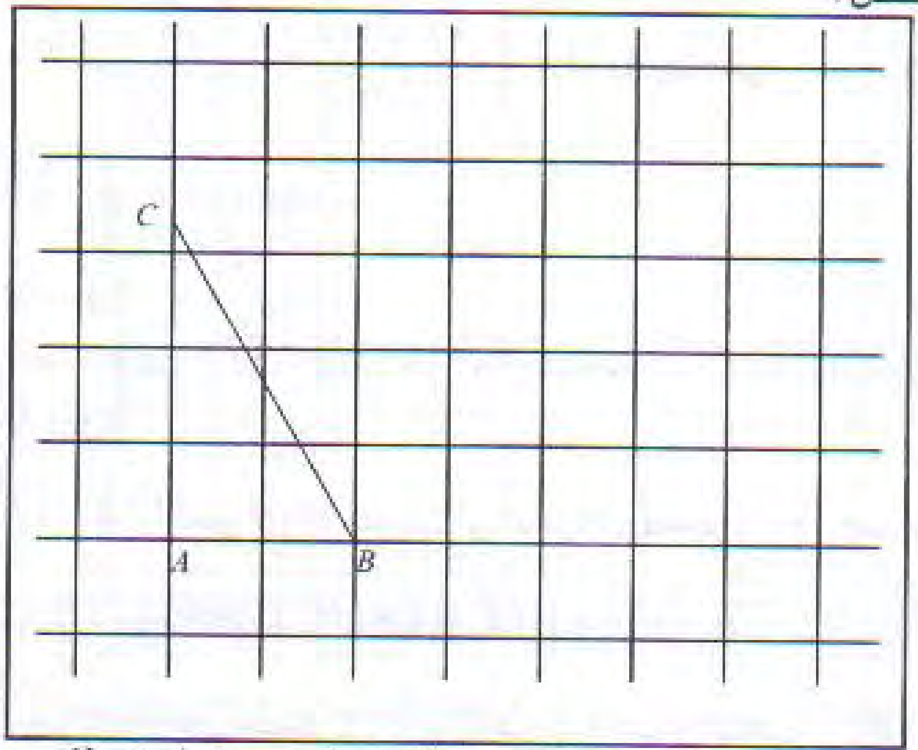
بالمطابقة نجد: $x'=2x+2y+1$ و $y'=-2x+2y$

بالتعويض في المساواة (*) نجد $2(2x+2y+1)-2x+2y-6=0$ ، أي: $x+3y=2$

إذن: مجموعة النقط M بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدين هي المستقيم الذي معادلة له: $x+3y=2$.

تمرين 09

في المستوي المركب الموجه نعتبر المثلث ABC حيث: $AB=2$ ، $AC=1+\sqrt{5}$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$. نأخذ المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث: $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ كما في الشكل.



1. أ/ بين أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول B إلى A ويحول A إلى C.

ب/ عين نسبة وزاوية التشابه S.

2. نسمي Ω مركز التشابه S ،بين أن Ω تنتمي إلى دائرة قطرها $[AB]$ وأن $\Omega\in(BC)$ ، ثم أنشئ النقطة Ω.

3. لتكن النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S .

أ/ بين أن النقط A ، Ω و D في استقامية، و أن المستقيمين (CD) و (AB) متوازيان، ثم أنشئ النقطة D.

ب/ بين أن: $CD=3+\sqrt{5}$.

4. لتكن E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (CD) .

أ/ اشرح كيفية انشاء النقطة F صورة النقطة E بالتشابه S ، ثم أنشئ النقطة F.

ب/ استنتج طبيعة الرباعي $BFDE$.

الحل

1. أ/ العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل: $z'=az+b$ حيث a و b عددان

مركبان و $a \neq 0$.

لدينا: $\begin{cases} A = S(B) \\ C = S(A) \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} z_A = az_B + b \\ z_C = az_A + b \end{cases}$ ، أي: $\begin{cases} 0 = a\times 2 + b \\ (1+\sqrt{5})i = a\times 0 + b \end{cases}$ ، ومنه:

$\begin{cases} a = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i \\ b = (1+\sqrt{5})i \end{cases}$ ، إذن: $S : z' = \left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right)z + (1+\sqrt{5})i$

ب / نسبة التشابه S هي: $|a| = \left|-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i\right| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته هي:

$$\arg(a) = \arg\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$$

2 . بما أن: $\begin{cases} A = S(B) \\ C = S(A) \\ \Omega = S(\Omega) \end{cases}$ فإن: $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right)$

لدينا: $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ تعني أن: Ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$. ومن جهة

لدينا: $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\pi$.

بما أن: $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\pi$ فإن النقط Ω، B و C في استقامية وبالتالي: $\Omega \in (BC)$.

3 . لدينا: $D = S(C)$ ، ومنه: $\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ ، وبالتالي:

$\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -\pi$ ، بما أن:

$\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = -\pi$ فإن النقط A ، Ω و D في استقامية وعلاوة على ذلك :

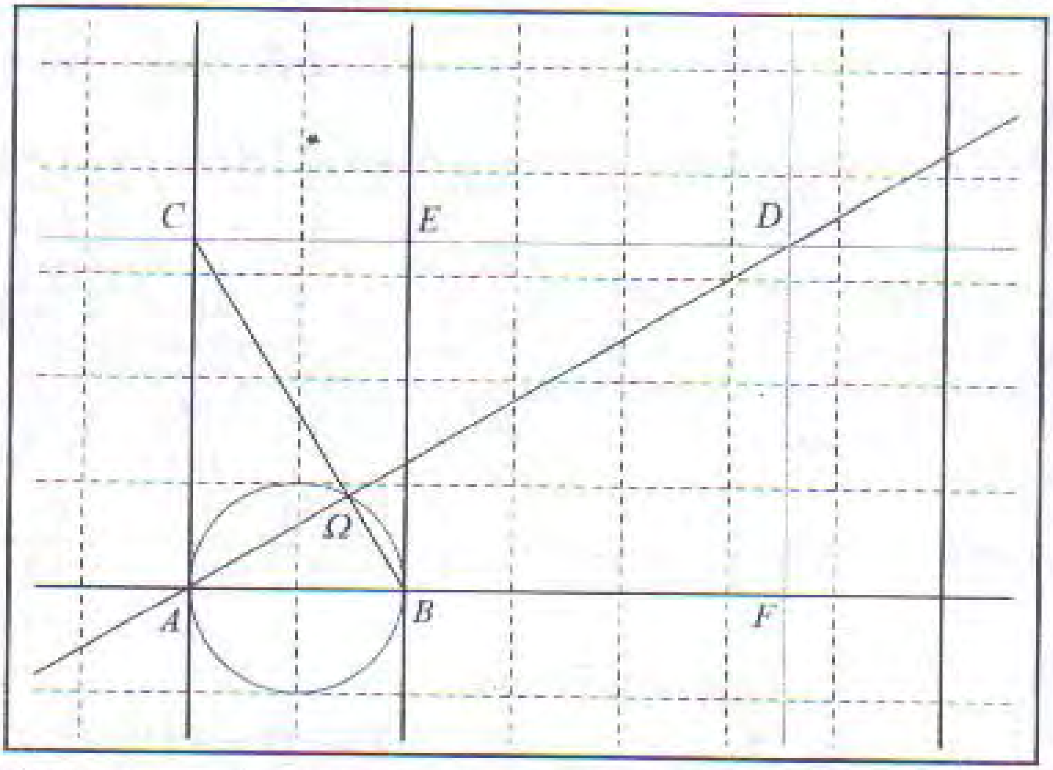
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = -\pi$ ، ومنه: المستقيمان (CD) و (AB) متوازيان .

ب / لدينا: $CD = |a| \times AC = |a| \times |a| \times AB = |a|^2 \times AB = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \times 2 = 3 + \sqrt{5}$

4 . أ / إن صورة المستقيم (BE) بالتشابه S هو المستقيم العمودي على (BE) و المار بصورة النقطة B أي بالنقطة A ، إذن هو المستقيم (AB) ، ومن جهة، صورة المستقيم (CE) بالتشابه S هو المستقيم العمودي على (CE) و المار بصورة النقطة C أي بالنقطة D ، إذن هو

ستقيم (DF).

ب/ الرباعي $BFDE$ هو مربع، لأن:
$CD=3+\sqrt{5}$ ومنه: $DE=3+\sqrt{5}-2=1+\sqrt{5}=CA=DF$. وعلاوة على ذلك، زوايا $BFDE$ كلها قائمة.



تمرين 10

نسمي r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $w=2$، وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ونسمي h التحاكي الذي مركزه النقطة Ω، ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. نضع: $S=hor$

أ/ عين طبيعة التحويل S ثم حدد عناصره المميزة.

ب/ بين أن الكتابة المركبة للتحويل S هي: $z'=\frac{1+i}{2}z+1-i$.

جـ/ لتكن M نقطة كيفية من المستوي ذات اللاحقة z و M' صورتها بالتحويل S ذات اللاحقة z'. بين أن: $z-z'=i(2-z')$.

2. برهن أنه إذا كانت A نقطة معطاة ذات اللاحقة a فإن صورة النقطة P ذات اللاحقة p بالدوران R ذي المركز: A والزاوية $\frac{\pi}{2}$ هي النقطة Q ذات اللاحقة q حيث: $q-a=i(p-a)$.

تطبيق: استنتج مما سبق طبيعة المثلث $\Omega MM'$ من أجل M مختلفة عن Ω.

الحل

1 . أ / بما أن $S = hor$ فإن S هو تشابه مباشر مركزه Ω ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ب / الكتابة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z' = az + b$ ،

حيث: $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$ و $b = (1-a)w$.

لدينا: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+i}{2}$

و: $b = \left(1 - \frac{1+i}{2}\right) \times 2 = 1 - i$ ، إذن: $S : z' = \frac{1+i}{2}z + 1 - i$.

جـ / لدينا: $z - z' = z - \frac{1+i}{2}z - 1 + i = \frac{1-i}{2}z - 1 + i$ ، ومن جهة:

$$i(2 - z') = i\left(2 - \frac{1+i}{2}z - 1 + i\right) = -\frac{i-1}{2}z + i - 1 = \frac{1-i}{2}z - 1 + i$$

إذن: $z - z' = i(2 - z')$.

2 . <u>البرهان</u>: لدينا: $Q = R(P)$ معناه: $\begin{cases} AQ = AP \\ \left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، أي:

$\begin{cases} \frac{AQ}{AP} = \frac{|q-a|}{|p-a|} = \left|\frac{q-a}{p-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{q-a}{p-a}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، ومنه: $\frac{q-a}{p-a} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ، أي: $q - a = i(p - a)$

لدينا: $z - z' = i(2 - z')$ فحسب العلاقة $q - a = i(p - a)$ نستنتج أن M هي صورة Ω بالدوران الذي مركزه M' وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ومنه: المثلث $\Omega MM'$ قائم ومتساوي الساقين في M' .

تمرين 11

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، (الوحدة $2cm$) .

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = i$ ، $z_B = 2$ على الترتيب .

1 . أ / عين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.

ب / عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

2 . نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات

اللاحقة z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

أ / بين أن B' هي صورة النقطة B بالتحويل f .

ب / بين أن A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل f .

جـ / بين أنه من أجل عدد مركب z يختلف عن i لدينا: $\frac{z'-z}{i-z}=-i$.

د / استنتج طبيعة المثلث AMM' من أجل $M \neq A$.

3. أ / حدد الطبيعة و العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث:
$|z-2|=\sqrt{2}$.

ب / بين أن: $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ ، ثم استنتج أنه إذا كانت $M \in (E)$ فإن: M' صورة M بالتحويل f تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

الحل

1. أ / لدينا: $B_1=h(B)$ معناه: $z_{B_1}-z_A=\sqrt{2}(z_B-z_A)$ ، أي: $z_{B_1}=\sqrt{2}(2-i)+i$.

ب / لدينا: $B'=r(B_1)$ معناه: $z_{B'}-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1}-z_A)$ ، أي:

$z_{B'}-i=e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(2-i)+i-i\right]$ ، أي:

$$z_{B'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left[\sqrt{2}(2-i)\right]+i=(1+i)(2-i)+i=3+2i$$

2. أ / تبين أن: $f(B)=B'$ ، لدينا: $f(B)=(1+i)2+1=3+2i=z_{B'}$.

ب / نبين أن: z_A هو الحل الوحيد للمعادلة $f(z)=z$ ، لدينا: $f(z)=z$ تعني: $(1+i)z+1=z$ ، أي: $iz+1=0$ ، أي: $z=\frac{-1}{i}\times\frac{i}{i}=i=z_A$ ، ومنه: z_A هو الحل الوحيد للمعادلة $f(z)=z$. إذن: A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل f .

جـ / من أجل عدد مركب z يختلف عن i لدينا:

$\frac{z'-z}{i-z}=\frac{z+iz+1-z}{i-z}=\frac{i(z-i)}{i-z}=-i$ ، وهذا يعني أن: $z'-z=-i(i-z)$ ،

أي: $z'-z=e^{-\frac{i\pi}{2}}(z_A-z)$ ، وهذا يعني أن M' هي صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه M وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، أي المثلث AMM' قائم و متساوي الساقين في M .

3. أ / لدينا: $|z-2|=\sqrt{2}$ تعني: $|z-z_B|=\sqrt{2}$ ، أي: $BM=\sqrt{2}$. ومنه: (E) هي دائرة مركزها B و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب/ لدينا: $z'-3-2i=(1+i)z+1-3-2i=(1+i)z-2-2i=(1+i)(z-2)$

بما أن: $|z-2|=\sqrt{2}$ فإن: $|z'-z_{B'}|=|1+i||z-2|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ ،

لدينا: $|z'-z_{B'}|=2$ تعني أن: M' صورة M بالتحويل f تنتمي إلى دائرة (C) مركزها B' ونصف قطرها 2 .

تمرين 12

المستوي المركب منسوب معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، (الوحدة $1cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق $z_A=2+i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=6+3i$ و $z_D=-1+6i$ على الترتيب.

1 . مثل النقط A ، B ، C و D.

2 . عين طبيعة التشابه المباشر f الذي يحقق: $f(A)=B$ و $f(C)=D$ ، وحدد عناصره المميزة.

3 . لتكن J النقطة ذات اللاحقة $z_J=3+5i$ ، بين أن الدوران R الذي مركزه J وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ يحول A إلى D و C إلى B .

4 . لتكن I النقطة ذات اللاحقة $z_I=1+i$ ، ولتكن النقطتان M و N منتصفا القطعتين $[AC]$ و $[BD]$ على الترتيب.

باستعمال الأسئلة السابقة عين طبيعة متوازي الأضلاع $IMJN$.

5 . نعتبر النقطتين P و Q بحيث يكون كل من $IAPB$ و $ICQD$ مربع .

أ / عين z_P و z_Q لاحقتي النقطتين P و Q .

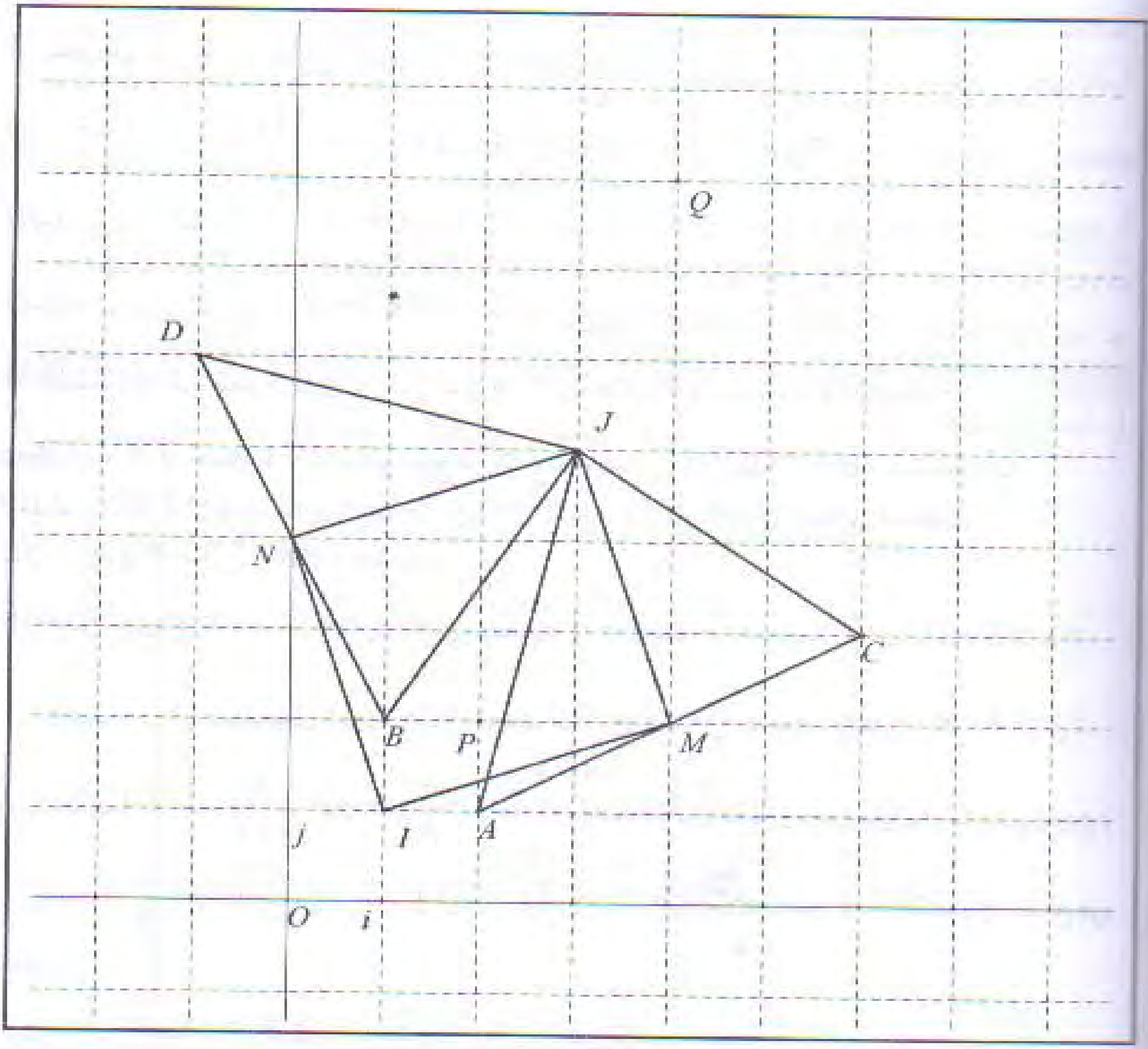
ب / أحسب النسبتين $\frac{IP}{IA}$ و $\frac{IQ}{IC}$ ثم عين قيسا لكل من الزاويتين $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IP})$ و $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ})$.

جـ / استنتج العناصر المميزة للتشابه المباشر g الذي يحقق: $g(A)=P$ و $g(C)=Q$.

ثم تحقق أن J هي صورة M بالتشابه المباشر g .

الحل

1 . أنظر الشكل.



2. الكتابة المركبة للتشابه f هي من الشكل $z' = az + b$ ، حيث a و b عددان مركبان

مع $a \neq 0$. لدينا: $\begin{cases} B = f(A) \\ D = f(C) \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$ ،أي:

$\begin{cases} 1+2i = a(2+i)+b...(1) \\ -1+6i = a(6+3i)+b...(2) \end{cases}$ ، بطرح (2) من (1) طرفا بطرف نجد: $a = i$ ، ثم بالتعويض

في (1) نجد: $b = 2$ ، إذن: $f : z' = iz + 2$.

نسبة التشابه المباشر f هي: $|a| = |i| = 1$ ، ومنه f دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة:

$z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = 1+i$ ، وزاويته هي: $\arg(a) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$.

3 . نبين أن: $z_D - z_J = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_A - z_J\right)$ وأن: $z_B - z_J = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_C - z_J\right)$.

أي: $z_D = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_A - z_J\right) + z_J$ و $z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_C - z_J\right) + z_J$.

لدينا: $e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_A - z_J\right) + z_J = -i(-1-4i) + 3 + 5i = -1 + 6i = z_D$

ولدينا: $e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_C - z_J\right) + z_J = -i(3-2i) + 3 + 5i = 1 + 2i = z_B$

4 . لدينا: B هي صورة A و D هي صورة C بالدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

وكذلك N منتصف $[BD]$ هي صورة M منتصف $[AC]$ بهذا الدوران . نستنتج أن المثلث MIN قائم ومتساوي الساقين ، وبالمثل المثلث MJN قائم ومتساوي الساقين .
إذن: متوازي الأضلاع $IMJN$ هو مربع .

5 . أ / من أجل P نستعمل الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فنحصل على: $z_P = 2 + 2i$.

و من أجل Q نستعمل الدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فنحصل على: $z_Q = 4 + 8i$.

ب / لدينا: $\frac{IP}{IA} = \sqrt{2}$ ، $\frac{IQ}{IC} = \sqrt{2}$. (حاصل قسمة طول القطر على طول الضلع في المربع)

ولدينا: $\left(\overline{IA}, \overline{IP}\right) = \frac{\pi}{4}$ ، $\left(\overline{IC}, \overline{IQ}\right) = \frac{\pi}{4}$. (قيس الزاوية المحصورة بين القطر و الضلع في المربع) .

جـ / بما أن I صامدة بالتشابه المباشر g ، فإن I هي مركز التشابه المباشر g وزاويته $\frac{\pi}{4}$

ونسبته $\sqrt{2}$. وبما أن $IMJN$ مربع فإن J هي صورة M بالتشابه المباشر g .

تمرين 13

في المستوي المركب و الموجه نعتبر المربع $ABCD$ الذي مركزه O . لتكن P نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ بحيث $P \neq B$. نسمي Q نقطة تقاطع المستقيمين (AP) و (CD) . المستقيم (Δ) العمودي على (AP) و المار من A يقطع (BC) في النقطة R ويقطع (CD) في النقطة S .

1 . أنجز شكلا مناسبا .

2 . ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ / حدد صورة المستقيم (BC) بالدوران r .

ب / عين بالدوران r صورتي النقطتين R و P .

جـ/ حدد طبيعة كل من المثلثين ARQ ، APS .

3. لتكن النقطتين N و M منتصفي القطعتين $[PS]$ و $[QR]$ على الترتيب.

ونعتبر f التشابه المباشر الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

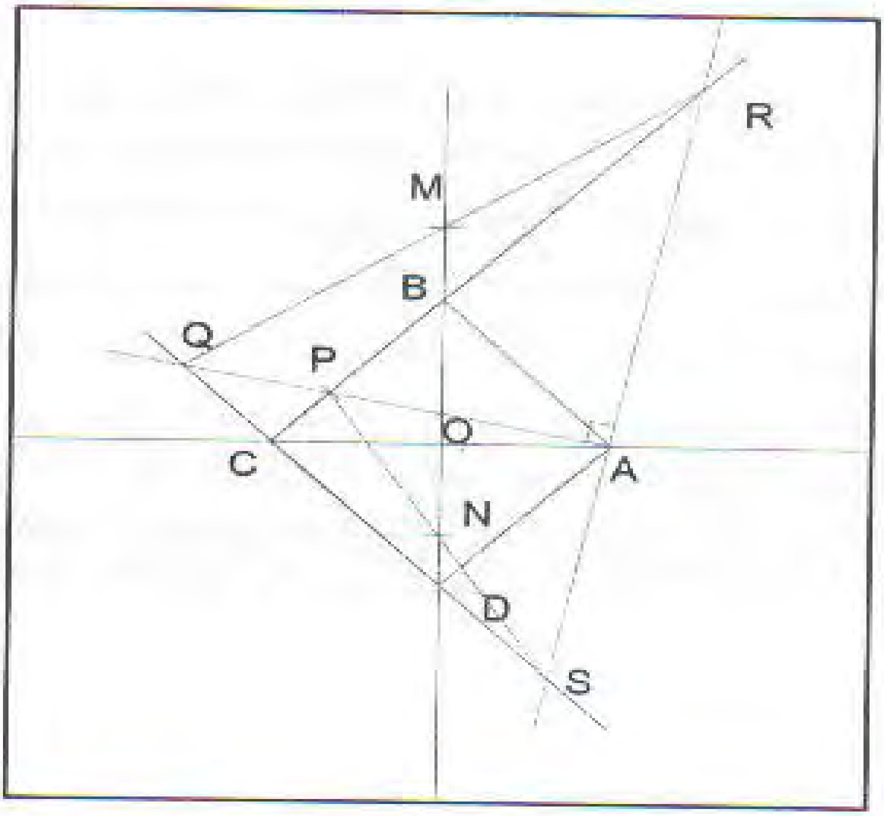
أ/ عين بالتشابه f صورتي النقطتين R و P .

ب/ من أجل $P \neq B$ ، ماهي مجموعة النقط N لما P تمسح القطعة المستقيمة $[BC]$ ؟

جـ/ بين أن النقط: M ، B ، N و D في استقامية.

الحل

1. أنظر الشكل.



2. أ/ $ABCD$ مربع موجه ومنه: $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$ و $AB = AD$ ، إذن: $r(B) = D$.

وبما أن الدوران يحافظ على أقياس الزوايا و يحافظ على الاستقامية ، فإن: صورة المستقيم (BC) بالدوران r هو مستقيم عمودي على (BC) ويمر من D ، إذن هو المستقيم (CD) .

ب/ بما أن R نقطة من (BC) ، فإن صورة R بالدوران r هي نقطة من (CD) ، المستقيم العمودي على (AR) والمار من A يقطع (CD) في النقطة Q ومنه: $r(R) = Q$ ، وبالمثل نجد: $r(P) = S$.

جـ/ كل من المثلثين ARQ ، APS قائم ومتساوي الساقين ، لأن:

بما أن $r(R) = Q$ فإن: $AR = AQ$ و $\widehat{RAQ} = \frac{\pi}{2}$ ، وبما أن: $r(P) = S$ فإن: $AP = AS$ و

$.\widehat{PAS}=\frac{\pi}{2}$

3. أ/ المثلث ARQ قائم ومتساوي الساقين في A ، وبما أن M منتصف الوتر $[QR]$، فإن M تنتمي إلى الارتفاع المتعلق بالضلع $[QR]$ وبالتالي $(AM)\perp(RM)$ و $AM=MR$.

إذن :المثلث AMR قائم ومتساوي الساقين في M ، ونستنتج أن: $\widehat{RAM}=\frac{\pi}{4}$ لكون (AM) ارتفاع فهو منصف ومتوسط في المثلث AMR .

باستعمال مبرهنة فيثاغورث في المثلث AMR القائم في M نجد: $AM^2+MR^2=AR^2$

لكن $AM=MR$ ، ومنه: $2MR^2=AR^2$ ، ومنه: $AM=\frac{1}{\sqrt{2}}AR$.

- نستخلص أن: صورة النقطة R بالتشابه المباشر f هي النقطة M .

باتباع نفس الأسلوب السابق نجد أن: صورة النقطة P بالتشابه المباشر f هي النقطة N .

ب/ النقطة P تمسح القطعة المستقيمة المفتوحة $]BC[$ ، وبما أن : $f(B)=O$ و $f(C)=D$ فإن صورة القطعة المستقيمة المفتوحة $]BC[$ بالتشابه المباشر f هي القطعة المستقيمة المفتوحة $]OD[$. وبما أن: $N=f(P)$ فإن: P تمسح القطعة المستقيمة المفتوحة $]OD[$.

جـ/ نستنتج من السؤال ب/ أن النقط O ، N و D في استقامية ، وبما أن $B\in(OD)$ فإن النقط O ، N ، D و B تكون في استقامية . يكفي الآن أن نتحقق من أن $M\in(OD)$ إن صورة المستقيم (BC) بالتشابه المباشر f هو المستقيم (OD) ، وبما أن $R\in(BC)$ و $M=f(R)$ فإن $M\in(OD)$. إذن: النقط M ، B ، N و D في استقامية.

ما يجب أن يعرف

تذكير حول المتتاليات العددية

1. تعريف : متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى ، العدد $u(n)$.

2. اتجاه تغير متتالية عددية:

متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$ على الترتيب) .

متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$ على الترتيب) .

متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 : $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$. وينتج من أجل كل عدد طبيعي n_0 = $u_{n+1} = u_n = \dots = u_{n_0}$. (أي جميع الحدود متساوية وتساوي الحد الأول)

متتالية رتيبة: إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب) .

خاصية : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) متزايدة ، و إذا كانت الدالة f متناقصة تكون المتتالية (u_n) متناقصة .

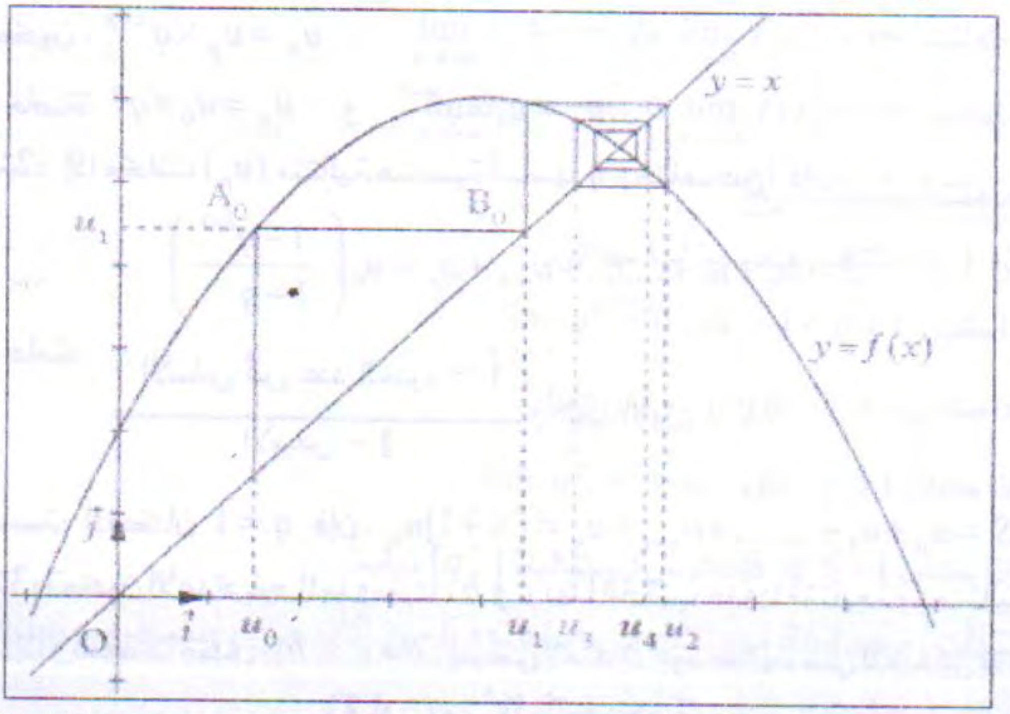
ملاحظة: عكس الخاصية غير صحيح .

التمثيل البياني لمتتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$

في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) وفقا للبرنامج التالي:

- ننشئ (C) المنحني الممثل للدالة f و (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.
- ننشئ u_0 عل محور الفواصل .
- ننشئ النقطة A_0 من المنحني (C) ذات الفاصلة u_0 .
- ننشئ النقطة B_0 من المستقيم (Δ) ذات نفس ترتيب النقطة A_0 .
- ننشئ على محور الفواصل u_1 فاصلة النقطة B_0 .
- بنفس الأنساق السابقة نعيد نفس العمل بدءا من u_1 لإنشاء u_2 و هكذا لإنشاء u_3 ، u_4 ،...

(أنظر الشكل الموالي)



المتتالية الحسابية- المتتالية الهندسية

1. المتتالية الحسابية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p يكون : $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة : $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

بصفة عامة :

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأول + الحد الأخير}}{2}$$

خاصية3: تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

2 . المتتالية الهندسية :

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p يكون : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن :

$$S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

بصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{\text{الأساس أس عدد الحدود} - 1}{\text{الأساس} - 1}.$$

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن : $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$.

خاصية3: تكون الأعداد غير المعدومة a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

تقارب متتالية عددية

1 . نهاية متتالية عددية :

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) ، في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة . و إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة نقول إنها متباعدة .

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

ملاحظة: العكس غير صحيح .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مفتوح $]\alpha, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- القول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نكتب : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال

من الشكل $]\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

2.نهاية متتالية هندسية:

مبرهنة: (u_n) متتالية هندسية أساسها q.

(1) إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

(2) إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$.

(3) إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

(4) إذا كان $q\le -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية.

متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le A$.نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge B$.نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

مبرهنة: • إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

• إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

الاستدلال بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع:

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

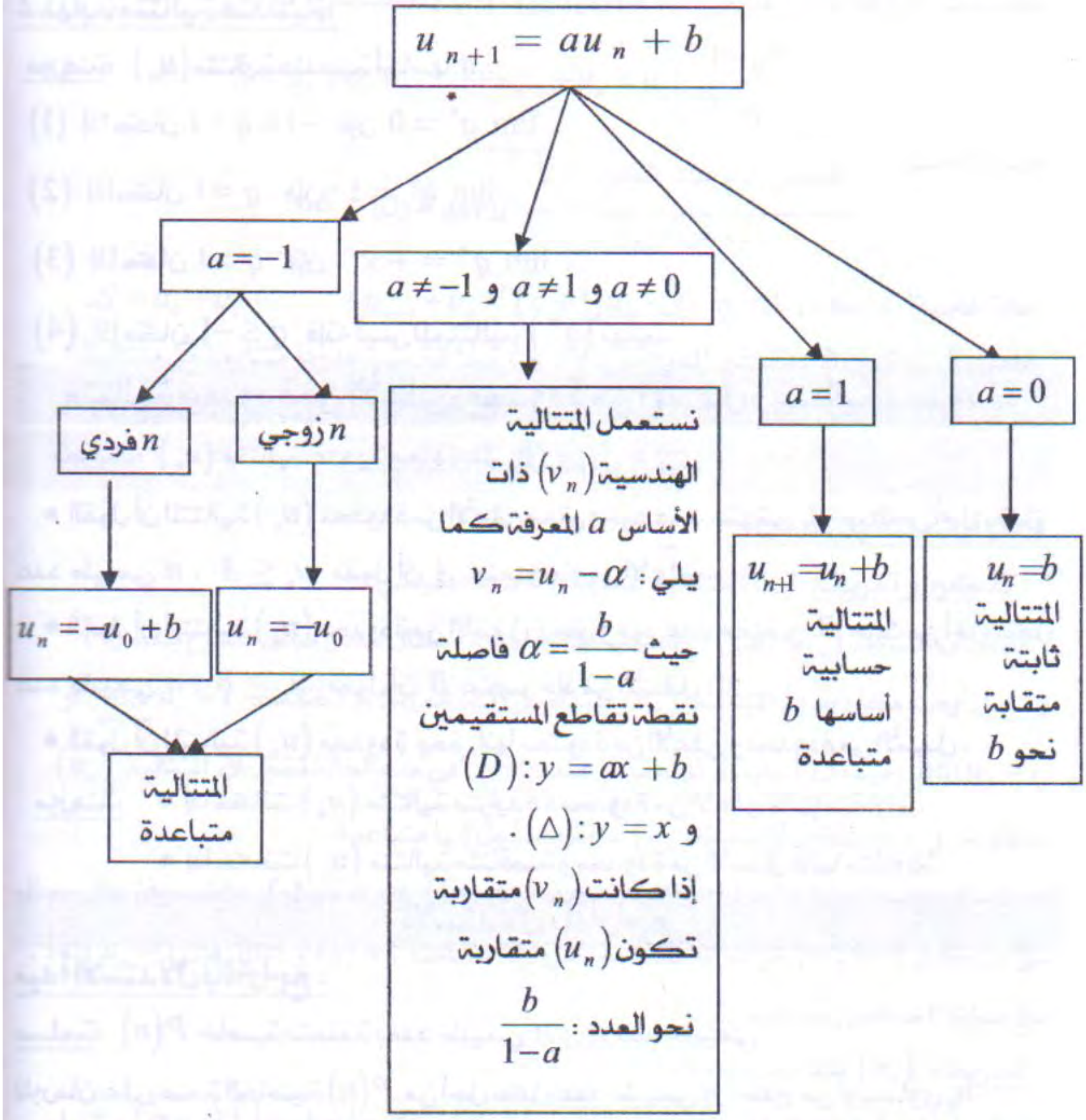
1 . نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2 . نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n_0)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$

المخطط الموالي يلخص طبيعة المتتاليات (u_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية من الشكل :

$u_{n+1} = au_n + b$. حيث a و b عددان حقيقيان .



متتاليتان متجاورتان

<u>تعريف:</u> تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

<u>مبرهنة:</u> إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمارين محلولة

تمرين 01

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{6}{1+e^{-n}}$.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاثة المقترحة مع التبرير في كل حالة :

1. المتتالية (u_n) : ج 1) متزايدة تماما . ج 2) متناقصة تماما . ج 3) ليست رتيبة.
2. المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد: ج1) 0 . ج2) 1 . ج3) 6.
3. $u_n > 5,999$ ابتداءا من : ج1) $n=1$. ج2) $n=9$. ج3) $n=8$.

الحل

1. ج 1) متزايدة تماما :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = f(n)$. حيث f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي :

$f(x) = \dfrac{6}{1+e^{-x}}$. الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ ولدينا :

$$f'(x) = 6\frac{-\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = \frac{6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ ، إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2. ج 3) 6:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-x}\right) = 1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

3. ج 2) $n=11$:

لدينا : $u_n > 5,999$ تكافئ $\dfrac{6}{1+e^{-n}} > 5,999$ أي $n > ln\left(\dfrac{5,999}{0,001}\right) \approx 8,69$

أي $n \geq 9$.

تمرين 02

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1. المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{n^3-n}{5}$ متناقصة .

2. المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\left(\frac{e}{3}\right)^n$ متناقصة.

3. المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n=n-4ln(n)$ متزايدة تماما ابتداءا من رتبة معينة.

4. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\frac{e^n-n}{2^n+1}$ ، لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{e}{2}$.

5. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n=\frac{ln(4n)}{ln(3n)}$ ، لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

الحل

1. خطأ: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^3-(n+1)}{5}-\frac{n^3-n}{5}=\frac{3n^2+3n}{5}\geq 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

2. صحيح: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{e}{3}\right)^n}=\frac{e}{3}<1$

ومنه $v_{n+1}\leq v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) متناقصة.

3. صحيح: لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-4ln\,x$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n=f(n)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=1-\frac{4}{x}=\frac{x-4}{x}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $x-4$. ومنه على $]0;4[$ الدالة f متناقصة تماما و على $]4;+\infty[$ متزايدة تماما ، إذن المتتالية (w_n) متزايدة تماما ابتداءا من الرتبة 4.

4. خطأ: من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n=\frac{e^n\left(1-\frac{n}{e^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}=\left(\frac{e}{2}\right)^n\frac{1-\frac{n}{e^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$

بما أن $\frac{e}{2}>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n=+\infty$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$ ومنه:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

5. **صحيح** : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $v_n = \dfrac{ln(n)+ln4}{ln(n)+ln3}$.

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = f(n)$ حيث f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ :

$f(x) = \dfrac{ln\,x + ln\,4}{ln\,x + ln\,3}$. بما أن $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{ln\,x}}{\cancel{ln\,x}} \left(\frac{1+\frac{ln\,4}{ln\,x}}{1+\frac{ln\,3}{ln\,x}} \right) = 1$ فإن

$\displaystyle \lim_{n \to +\infty} v_n = 1$.

تمرين 03

x	1	5
$f(x)$	2 ↗	4

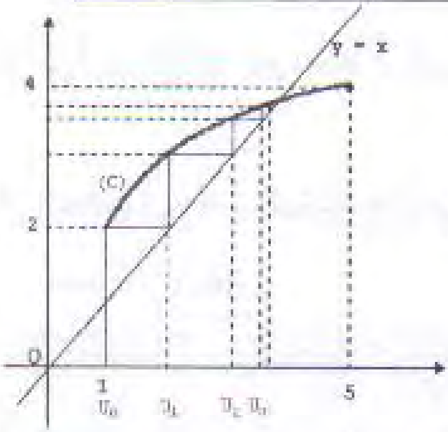
جدول التغيرات المقابل هو لدالة f .

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1 \le u_n \le 5$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \le u_{n+1}$.
3. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f على المجال $[1;5]$

الشكل المقابل يمثل التمثيل البياني للمتتالية المرفقة (u_n)



الحل

1. **صحيح** : نبين ذلك بالتراجع . نضع $p(n)$: " $1 \le u_n \le 5$ " .

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le 5$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1 \le u_n \le 5$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$1 \le u_{n+1} \le 5$. لدينا : $1 \le u_n \le 5$ وبما أن f متزايدة على المجال $[1;5]$ فإن :

$f(1) \le f(u_n) \le f(5)$ أي $2 \le u_{n+1} \le 4$ ومنه : $1 \le u_{n+1} \le 5$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1 \le u_n \le 5$.

2. **صحيح** : $u_n \le u_{n+1}$ تعني ان (u_n) متزايدة .

نبين ذلك بالتراجع . نضع $p(n)$: " $u_n \le u_{n+1}$ " .

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$

بالفعل: $u_1 \ge u_0$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \le u_{n+1}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \le u_{n+2}$. لدينا : $u_n \le u_{n+1}$ وبما أن f متزايدة على المجال $[1;5]$ فإن : $f(u_n) \le f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1} \le u_{n+2}$.

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \le u_{n+1}$.

3 . صحيح : نلاحظ ان حدود المتتالية (u_n) تنشئ على محور الفواصل ابتداءا من الحد الأول $u_0 = 1$ وباستعمال المنحني (C) و المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

تمرين 04

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_4 = 0$ و $u_6 = -1$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1 . أساس المتتالية (u_n) هو $r = -\frac{1}{2}$.

2 . من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = \frac{3-n}{2}$.

3 . من أجل $n \ge 9$ لدينا : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \ge 0$.

4 . لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{1}{n} e^{u_n}$ ، لدينا : $v_n = e^2 \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{n}$

5 . $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

الحل

1 . صحيح: لدينا : $u_6 = u_4 + 2r$ ومنه : $r = \frac{u_6 - u_4}{2} = -\frac{1}{2}$.

2 . خطأ: الحد الأول للمتتالية (u_n) هو $u_0 = u_4 - 4r = 0 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ ، ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ ، إذن: $u_n = 2 + n\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4-n}{2}$.

3 . خطأ: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$.

وبما أن : $u_{n-1} = \frac{4-(n-1)}{2} = \frac{5-n}{2}$ ، نجد:

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n}{2}\left(2 + \frac{5-n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{9-n}{2}\right)$ ، ومنه من أجل $n \ge 9$ يكون :

. $u_0+u_1+\ ...\ +u_{n-1}\leq 0$

4. <u>صحيح</u>: من أجل كل n من N^* : $v_n=\frac{1}{n}e^{u_n}=\frac{1}{n}e^{\frac{4-n}{2}}=\frac{1}{n}e^{2-\frac{n}{2}}=e^2\frac{e^{\frac{-n}{2}}}{n}$.

5. <u>خطأ</u>: لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ و $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{u_n}\right)=0$ ولدينا

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ، إذن : $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

تمرين 05

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول : $u_1=2$ و أساسها $q=\frac{1}{3}$. لتكن (v_n) متتالية معرفة

على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n=\ln(u_n)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1 . من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا : $u_n=\frac{2}{3^{n+1}}$.

2 . (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-ln3$.

3 . لدينا: $u_1+u_2+\ ...\ +u_n=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

4 . لدينا: $v_1+v_2+\ ...\ +v_n=n\,ln2-\frac{n(n-1)}{2}ln3$.

5 . لدينا : $u_1\times u_2\times\ ...\ \times u_n=\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

الحل

1 . <u>خطأ</u>: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_n=u_1\,q^{n-1}$ ومنه : $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{3^{n-1}}$.

2 . <u>صحيح</u>: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$ و $v_{n+1}=ln\left(u_{n+1}\right)$ ومنه

$v_{n+1}=ln\left(\frac{1}{3}u_n\right)$ ، لكن : $v_{n+1}=ln\frac{1}{3}+ln\left(u_n\right)=ln\left(u_n\right)-ln3$ ومنه:

$v_{n+1}=v_n-ln3$. إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-ln3$.

3 . <u>خطأ</u>: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$u_1+u_2+\ \dots\ +u_n = u_1\times\frac{1-q^n}{1-q} = 2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

4 . <u>صحيح</u>: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $S=v_1+v_2+\dots+v_n$ ومنه: $S=\frac{n}{2}(v_1+v_n)$

وبما أن: $v_1=ln(u_1)=ln2$ و $v_n=v_1+(n-1)r^*=ln2-(n-1)ln3$ فإن:

$v_1+v_n=2ln2-(n-1)ln3$ ومنه: $S=n\,ln2\ -\ \frac{n(n-1)}{2}ln3$

يمكن تبسيط العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$S=ln\left(2^n\right)-ln\left(3^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=ln\left[\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}\right].$$

5 . من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $S=v_1+v_2+\ \dots\ +v_n$ ومنه:

$S=ln(u_1)+\dots+ln(u_n)$ ومنه: $S=ln(u_1\times u_2\times\dots\times u_n)$. إذن:

$u_1\times u_2\times\dots\times u_n=e^S$ ، وبالتالي: $u_1\times u_2\times\ \dots\ \times u_n=\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

تمرين 06

نعتبر الأعداد المركبة z_n المعرفة بـ: $z_0=1$ ومن أجل من أجل كل عدد طبيعي n :

$z_{n+1}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n$. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

وحدة الطول $1cm$ ، نرمز بـ M_n إلى النقطة ذات اللاحقة z_n .

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة:

1 . $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

2 . $z_3=-8$.

3 . المتتالية (d_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $d_n=M_nM_{n+1}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $\sqrt{3}$.

4 . L طول الخط المنكسر المؤلف من النقاط: $M_0;\ M_1;\dots;M_n$ يساوي:

$$\sqrt{3}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\quad cm.$$

5 . L أكبر من أو يساوي $1Km$ من أجل: $n\geq 16$.

الحل

1. خطأ: $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. صحيح: لدينا: $z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_0=1+i\sqrt{3}=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

و: $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_1=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}=4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

و: $z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_2=2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\times 4\,e^{i\frac{2\pi}{3}}=8\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=8\,e^{i\pi}=8(-1)=-8$

3. صحيح: من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $d_{n+1}=M_{n+1}M_{n+2}=\left|z_{n+2}-z_{n+1}\right|$

ومنه: $d_{n+1}=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z_{n+1}-\left(1+i\sqrt{3}\right)z_n\right|=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|$ ومنه:

$d_{n+1}=\left|1+i\sqrt{3}\right|\times\left|z_{n+1}-z_n\right|=2\,M_nM_{n+1}$، إذن: $d_{n+1}=2\,d_n$. وبالتالي:

المتتالية (d_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $d_n=M_nM_{n+1}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول هو:

$d_0=M_0M_1=\left|z_1-z_0\right|=\left|1+i\sqrt{3}-1\right|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$

4. خطأ: بالسنتمتر لدينا:

$L=M_0M_1+M_1M_2+...+M_{n-1}M_n=d_0+d_1+...+d_{n-1}$، لكن:

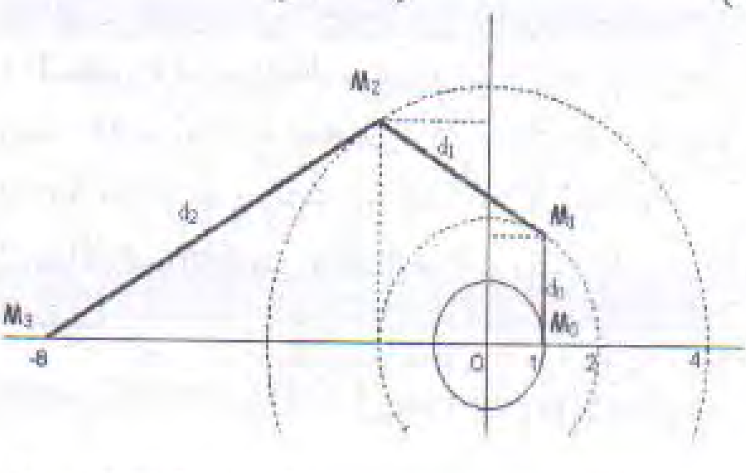
$L=d_0\frac{1-q^n}{1-q}=\sqrt{3}\frac{1-2^n}{1-2}=\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$.

5. صحيح: L أكبر من أو يساوي $1Km$ معناه: $L\ge 10^5$، ومنه: $\sqrt{3}\left(2^n-1\right)\ge 10^5$

أي: $2^n\ge\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1$ ومنه: $\ln\left(2^n\right)\ge\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)$، ومنه: $n\ln 2\ge\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)$، ومنه:

$$n\ge\frac{\ln\left(\frac{10^5}{\sqrt{3}}+1\right)}{\ln 2}$$

إذن: L أكبر من أو يساوي $1Km$ من أجل: $n\ge 16$.



تمرين 07

1 . برهن بالتراجع على أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$$

2 . استنتج قيمة المجموع: $S=1+3+5+...+101$

الحل

1 . نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $1=(0+1)^2=1$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$$1+3+5+...+(2(n+1)+1)=((n+1)+1)^2=(n+2)^2 .$$

لدينا : $1+3+5+...+2n+1+(2(n+1)+1)=(1+3+5+...+2n+1)+2n+3$

$$=(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4$$

$$=(n+2)^2$$

* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

2 . لدينا :

$$S=1+3+5+...+101=1+3+...+(2\times50+1)=(50+1)^2=(51)^2=2601$$

تمرين 08

(u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها الأول $u_0=2$ وبالعلاقة: $u_2+u_5=25$.

1 . عين أساس المتتالية الحسابية (u_n).

2 . أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3 . أحسب قيمة الحد الذي رتبته 11 .

4 . أحسب المجموع: $S=u_1+u_2+...+u_{10}$.

الحل

1 . ليكن r أساس المتتالية، لدينا $u_2=u_0+2r=2+2r$ و $u_5=u_0+5r=2+5r$ ،

ومنه: $u_2+u_5=25$ تكافئ: $2+2r+2+5r=25$ ، ومنه: $r=3$.

2 . $u_n=u_0+nr=2+3n$ ، إذن: $u_n=2+3n$.

3 . بما أن الحد الأول هو u_0 فإن الحد الذي رتبته 11 هو u_{10} ، ولدينا: $u_{10}=2+3\times10=32$.

4 . لدينا :

$$S=u_1+u_2+...+u_{10}=\frac{10}{2}(u_1+u_{10})=5[(u_0+r)+u_{10}]=5[(2+3)+32]=185$$

تمرين 09

(u_n) متتالية حسابية حيث : $(I)...\begin{cases} u_0+u_3=6 \\ u_2+u_5=22 \end{cases}$

1. أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية.
2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .
3. هل العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية ؟
4. ماهي قيمة ورتبة الحد الذي نبدء منه حتى يكون مجموع 20 حدا متتابعا من هذه المتتالية مساويا 1100 ؟.
5. أحسب بدلالة n الجداء : $P_n=2011^1\times2011^5\times2011^9\times...\times2011^{4n+1}$.

الحل

1. لدينا : $u_2=u_0+2r$ و $u_3=u_0+3r$ و $u_5=u_0+5r$ ، بالتعويض في الجملة (I)

نجد : $\begin{cases} 2u_0+3r=6 \\ 2u_0+7r=22 \end{cases}$ ، بحل الجملة الأخيرة نجد : $r=4$ و $u_0=-3$.

2. لدينا : $u_n=u_0+nr=4n-3$ ، إذن : $u_n=4n-3$.

3. $u_n=2013$ تكافئ $4n-3=2013$ ، أي $n=504$. ومنه : $u_{504}=2013$

إذن : العدد 2013 هو حد من حدود المتتالية وهو الحد u_{504} .

4. نرمز بـ u_m إلى الحد الذي نبدء منه ، فيكون الحد العشرون u_{m+19} .

لدينا : $u_m+u_{m+1}+...+u_{m+19}=\frac{20}{2}(u_m+u_{m+19})=10(u_m+u_{m+19})=1100$

لكن : $u_m=4m-3$ و $u_{m+19}=4(m+19)-3=4m+73$ ، ومنه :

$10(u_m+u_{m+19})=1100$ تكافئ $4m-3+4m+73=110$ ، ومنه : $m=5$.

إذن الحد الذي نبدء منه هو u_5 وقيمته : $u_5=4\times5-3=17$.

5. لدينا : $P_n=2011^1\times2011^5\times2011^9\times...\times2011^{4n+1}=2011^{(1+5+9+...+4n+1)}$

لكن : $1+5+9+...+4n+1$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا من حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 4 وحدها الأخير $4n+1$ ، ومنه :

$1+5+9+...+4n+1=\frac{n+1}{2}(1+4n+1)=(n+1)(2n+1)$.

ملاحظة : $1+5+9+...+4n+1=u_1+u_2+...+u_{n+1}$.

ومنه : $P_n=2011^{(n+1)(2n+1)}$.

تمرين 10

(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدها الأول : $u_1=-4$ و $u_2^2+u_3^2=37$.

1. أوجد r أساس هذه المتتالية.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n .

3. هل يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 ؟ ماهي رتبته ؟

4. احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

5. أوجد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = 282$.

الحل

1. ليكن r أساس هذه المتتالية. ومنه: $u_2 = u_1 + r = -4 + r$ و $u_3 = u_1 + 2r = -4 + 2r$

ومنه: $u_2^2 + u_3^2 = 37$ تكافئ $(-4+r)^2 + (-4+2r)^2 = 37$ أي $5r^2 - 24r - 5 = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 676 تقبل حلين متمايزين هما: 5 و $-\frac{1}{5}$.

لكن (u_n) متتالية حسابية متزايدة ومنه: $r > 0$ ، إذن: $r = 5$.

2. لدينا: $u_n = u_1 + (n-1)r$ ، ومنه: $u_n = 5n - 9$.

3. $u_n = 486$ تكافئ $5n - 9 = 486$ ، أي $n = 99$. ومنه: $u_{99} = 486$

إذن: يوجد حد من حدود المتتالية يساوي 486 وهو الحد ذو الرتبة 99 .

4. لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(-4 + 5n - 9) = \frac{n(5n-13)}{2}$

إذن: $S_n = \frac{n(5n-13)}{2}$.

5. $S_n = 282$ تكافئ $\frac{n(5n-13)}{2} = 282$ ، أي: $5n^2 - 13n - 564 = 0$. وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 11449 تقبل حلين متمايزين هما: 12 و $-\frac{47}{5}$. لكن n عدد طبيعي ومنه: $n = 12$.

تمرين 11

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $(I)...\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 6 \end{cases}$

1. عين الحدود v_1 ، v_2 و v_3 للمتتالية وأساسها.

2. أحسب الحد العام v_n بدلالة n .

3. عبر بدلالة n عن المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

4. عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = -21$.

الحل

1. v_2 هو الوسط الحسابي للحدين v_1 و v_3 ومنه: $v_1 + v_3 = 2v_2$ ، ومنه: $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{4}$

تكافئ $3v_2=\frac{3}{4}$ ومنه: $v_2=\frac{1}{4}$. نعوض $v_2=\frac{1}{4}$ في الجملة: (I) نجد الجملة:

$\begin{cases} v_1+v_3=\frac{1}{2} \\ v_1-v_3=5 \end{cases}$، وبحل هذه الجملة الأخيرة نجد: $v_1=\frac{11}{4}$ و $v_3=-\frac{9}{4}$.

لكن r أساس المتتالية، لدينا: $r=u_2-u_1=u_3-u_2=-\frac{5}{2}$، أي: $r=-\frac{5}{2}$.

2. لدينا: $v_n=v_1+(n-1)r$، ومنه: $v_n=\frac{11}{4}+(n-1)\left(-\frac{5}{2}\right)$، أي: $v_n=-\frac{5}{2}n+\frac{11}{4}$.

3. لدينا: $S_n=v_1+v_2+...+v_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=\frac{n}{2}\left(\frac{11}{4}-\frac{5}{2}n+\frac{21}{4}\right)=\frac{n}{2}\left(8-\frac{5}{2}n\right)$.

4. $S_n=-21$ تكافئ $\frac{n}{2}\left(8-\frac{5}{2}n\right)=-21$، أي: $-5n^2+16n+84=0$. وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 1936 تقبل حلين متمايزين هما: 6 و $-\frac{14}{5}$. لكن n عدد طبيعي ومنه: $n=6$.

تمرين 12

(u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى u_0، u_1 و u_2 يساوي 38.

1. احسب الحدود u_0، u_1 و u_2.
2. احسب الحد العام u_n بدلالة n.
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$.

ثم استنتج المجموع S_5 (يعطى S_5 على شكل كسر غير قابل للاختزال)

الحل

1. لدينا: $u_0+u_1+u_2=38$، لكن: $u_1=u_0\times q=u_0\times\frac{3}{2}$ و $u_2=u_0\times q^2=u_0\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$،

ومنه: $u_0+u_1+u_2=38$ تكافئ: $u_0+u_0\times\frac{3}{2}+u_0\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=38$، أي: $\frac{19}{4}u_0=38$

ومنه: $u_0=8$. وينتج: $u_1=8\times\frac{3}{2}=12$ و $u_2=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=18$.

إذن: $u_0=8$، $u_1=12$، $u_2=18$.

2. لدينا: $u_n=u_0\times q^n=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$، إذن: $u_n=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

3 . لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 24\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right]$.

ومنه : $S_5 = 24\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right] = 24 \times \frac{65}{16} = \frac{195}{2}$.

تمرين 13

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الأول u_0 و الأساس q وبحيث :

$8u_6 = 125u_9$.

1 . أحسب الأساس q .

2 . أحسب بدلالة u_0 و n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

3 . عين u_0 بحيث : $\lim_{n \to +\infty} S_n = 150$.

4 . نفرض $u_0 = 90$ ، عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$.

الحل

1 . لدينا : $u_6 = u_0 \times q^6$ و $u_9 = u_0 \times q^9$ ، ومنه : $8u_6 = 125u_9$ تكافئ :

$8u_0 \times q^6 = 125u_0 \times q^9$ ، أي $q^3 = \frac{8}{125} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$ ، إذن : $q = \frac{2}{5}$.

2 . لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}u_0\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

إذن : $S_n = \frac{5}{3}u_0\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$.

3 . بما أن $-1 < \frac{2}{5} < 1$ فإن : $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$ ، ومنه : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{5}{3}u_0$.

إذن : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{5}{3}u_0$ تكافئ $\frac{5}{3}u_0 = 150$ ، ومنه : $u_0 = 90$.

4 . لدينا : $u_n = u_0 \times q^n = 90 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، ومنه : $u_n \leq 10^{-3}$ تكافئ : $90 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$

أي : $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \frac{10^{-3}}{90}$ ، أي : $\ln\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \ln\left(\frac{10^{-3}}{90}\right)$ ، أي : $n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{10^{-3}}{90}\right)$ ، أي :

$\approx 12,44 \frac{\ln\left(\frac{10^{-3}}{90}\right)}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \leq n$ ، إذن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق $u_n \leq 10^{-3}$ هي 13.

تمرين 14

1. أ/ حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة التفاضلية $y' = -2y ...(E)$.

ب/ عين f الحل الخاص للمعادلة (E) الذي يحقق $f(0) = 1$.

2. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = f(n)$.

أ/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أدرس تقارب المتتالية (u_n) .

جـ/ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ، ثم $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n$.

د/ أحسب بدلالة n الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$. ثم عين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $P_n = e^{-12}$.

الحل

1. أ) حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال: $x \mapsto ce^{-2x}$ ، حيث c ثابت حقيقي.

ب) لدينا: $f(x) = ce^{-2x}$ وبما أن $f(0) = 1$ فإن: $ce^{-2\times 0} = 1$ ، أي $c = 1$ ،

إذن: $f(x) = e^{-2x}$.

2. لدينا: $u_n = f(n)$ تكافئ $u_n = e^{-2n}$.

أ) لدينا: $u_{n+1} = e^{-2(n+1)} = e^{-2} \times e^{-2n} = e^{-2} \times u_n$ ، ومنه: (u_n) هندسية أساسها e^{-2} وحدها الأول $u_0 = e^{-2\times 0} = 1$.

ب) لدينا: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} e^{-2n} = 0$ ، ومنه: (u_n) متقاربة نحو العدد: 0 .

جـ) لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = e^{-2} \times \frac{1-(e^{-2})^n}{1-e^{-2}} = \frac{e^{-2}}{1-e^{-2}} \times (1 - e^{-2n})$

لدينا: $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = \frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}$ لأن: $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - e^{-2n}) = 1$.

د) لدينا: $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n = e^{-2\times 1} \times e^{-2\times 2} \times e^{-2\times 3} \times ... \times e^{-2\times n}$

$$= (e^{-2})^1 \times (e^{-2})^2 \times (e^{-2})^3 \times ... \times (e^{-2})^n = \left(e^{-2}\right)^{(1+2+3+...+n)}$$

لكن: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، لأن المجموع: $1+2+3+...+n$ يمثل مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول 1 والحد الأخير في هذا المجموع هو n .

ومنه: $P_n=\left(e^{-2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، ومنه: $P_n=e^{-n^2-n}$.

$P_n=e^{-12}$ تكافئ $e^{-n^2-n}=e^{-12}$ ، أي $-n^2-n=12$ ، أي $n^2+n-12=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية مميزها يساوي 49 تقبل حلين متمايزين هما 3 و -4 (مرفوض)

إذن: $n=3$ ، أي $P_3=e^{-12}$.

تمرين 15

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ و $u_{n+1}=3u_n-6$.

من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_n-3$.

1ـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، ثم عين أساسها و حدها الأول.

2ـ احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3ـ احسب بدلالة n المجموع: $S=v_0+v_1+v_2+......+v_n$ ، ثم استنتج بدلالة n المجموع: $S'=u_0+u_1+u_2+......+u_n$.

الحل

1 . $v_{n+1}=u_{n+1}-3=3u_n-9=3(u_n-3)=3v_n$.

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 .

و حدها الأول $v_0=u_0-3=-2$

2 . عبارة الحد العام لـ (v_n): $v_n=v_0\times q^n=-2\times 3^n$

3 . عبارة الحد العام لـ (u_n): $u_n=v_n+3=-2\times 3^n+3$

4 . المجموع S:

$S=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-2\times\frac{1-3^{n+1}}{1-3}=1-3^{n+1}$ ، إذن: $S=1-3^{n+1}$

استنتاج بدلالة n المجموع S' :

$S'=u_0+u_1+u_2+......+u_n=(v_0+3)+(v_1+3)+(v_2+3)......+(v_n+3)$ ، إذن

$S'=S+3(n+1)$ ، ومنه: $S'=-3^{n+1}+4+3n$.

تمرين 16

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

1. أحسب u_1، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.

2. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :
بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل

أ) $\alpha = 3$ ومنه $u_0 = 3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3$.

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 3$.

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n = 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ ، أي : $u_{n+1} = 3$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ومنه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* الخلاصة: نستنتج ، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3.

ب) $\alpha = 2$ ومنه $u_0 = 2$

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$ ومنه
$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -1$ $(v_0 = u_0 - 3)$.

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وبما أن $u_n = v_n + 3$ فإن

$.u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

3. بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$. نستنتج أن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3 .

4. نلاحظ أن $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ حيث $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+2$. بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0>0$ $\left(u_1-u_0=\frac{2}{3}\right)$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ) $\alpha=6$ ومنه $u_0=6$.

بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0<0$ $(u_1-u_0=-2)$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة .

تمرين 17

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\alpha(u_n-2)$.
حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1 . عين العدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

2 . نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n+4$.

أ) عين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب) من أجل قيمة α المحصل عليها في السؤال أ) أحسب بدلالة n كل من المجموعين :

$$T_n=(v_0)^3+(v_1)^3+(v_2)^3+...+(v_n)^3 \text{ و } S_n=u_0+u_1+......+u_n$$

الحل

1 . (u_n) متتالية ثابتة معناه : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n=u_0$.

$u_{n+1}=u_n=u_0$ تكافئ : $u_0=\alpha(u_0-2)$ ، أي $1=\alpha(1-2)$ ، أي : $\alpha=-1$.

2 . أ) لدينا : $v_n=u_n+4$ ، ومنه :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\alpha(u_n-2)+4=\alpha(u_n+4)-6\alpha+4=\alpha\times v_n-6\alpha+4$$

أي : $v_{n+1}=\alpha\times v_n-6\alpha+4$ ، وحتى تكون (v_n) متتالية هندسية يكفي أن يكون :

$-6\alpha+4=0$ ، ومنه : $\alpha=\frac{2}{3}$. إذن : من أجل $\alpha=\frac{2}{3}$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

وحدها الأول : $v_0=u_0+4=1+4=5$.

ب) من أجل $\alpha=\frac{2}{3}$ لدينا : $S_n=u_0+u_1+......+u_n=(v_0-4)+(v_1-4)+...+(v_n-4)$

$$=(v_0+v_1+...+v_n)-4(n+1)=5\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-4(n+1)=15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]-4(n+1)$$

ولدينا: $T_n=(v_0)^3+(v_1)^3+(v_2)^3+....+(v_n)^3=(v_0)^3+(v_0q)^3+(v_0q^2)^3+...+(v_0q^n)^3$

$$=(v_0)^3\left(1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}\right)$$

لكن: $1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}$ يمثل مجموع لـ $(n+1)$ حدا متتابعا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها $q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

ومنه: $1+q^3+q^{3\times2}+...+q^{3n}=1\times\frac{1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$ ، وبالتالي:

$$T_n=125\times\frac{27}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]=\frac{3375}{19}\left[1-\left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين 18

بلغ تعداد سكان بلد 70000000 نسمة في سنة 1995 كما بلغت نسبة النمو الديموغرافي فيه 2% بين سنتي 1995 و 2000.

1. ما هو تعداد سكان هذا البلد سنة 2000؟
2. أ) هل يمكن توقع عدد سكان هذا البلد سنة 2010؟

ب) هل يمكن تعيين السنة التي يتعدى فيها عدد السكان 100000000 نسمة؟

الحل

1. ليكن u_0 عدد سكان هذا البلد سنة 1995 ، أي أن $u_0=70000000$

إذا كان عدد السكان ينمو بنسبة 2% كل سنة فإن $u_1=u_0+\frac{2u_0}{100}$

اي أنه في سنة 1996 يكون عدد السكان هو:

$$u_1=u_0\left(1+\frac{2}{100}\right)=u_0\left(\frac{102}{100}\right)$$

وفي سنة 1997 يكون عدد السكان هو u_2 حيث:

$$u_2=u_1+\frac{2u_1}{100}=u_1\left(1+\frac{2}{100}\right)=u_1\left(\frac{102}{100}\right)=u_0\left(\frac{102}{100}\right)^2$$

أما في سنة 2000 فيكون عدد السكان هو u_5 حيث:

$$u_5 = u_0\left(\frac{102}{100}\right)^5 > 77285656$$

2. أ) في سنة 2010 يكون عدد السكان هو u_{15} حيث :

$$u_{15} = u_0\left(\frac{102}{100}\right)^{15} > 94210783$$

ب) في السنة n يتعدى عدد السكان 100000000 إذا كان : $u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 100000000$

يكفي البحث عن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 10^6$

$u_0\left(\frac{102}{100}\right)^n > 10^6$ تكافئ $\left(\frac{102}{100}\right)^n > \frac{10^6}{u_0}$ أي $ln\left(\frac{102}{100}\right)^n > ln\frac{10^6}{u_0}$

أي $nln\left(\frac{102}{100}\right) > ln\frac{10^6}{u_0}$ ، أي $n > \dfrac{ln\dfrac{10^6}{u_0}}{ln\left(\dfrac{102}{100}\right)}$

وباستعمال آلة حاسبة نجد أن هذا الشرط يتحقق ابتداء من : $n = 19$.

تمرين 19

(v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1} - v_n = 0,02v_n$.

1. أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . ما هو اتجاه تغير هذه المتتالية ؟

ب- عبّر عن v_n بدلالة n و v_0 .

2. نضع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.

أ- أحسب S_n بدلالة n و v_0 .

ب- أحسب $(1,02)^{35}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \geq 50v_0$.

3. بلغ عدد سكان بلد بـ 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000 ، نفرض أن عدد السكان يرتفع كل سنة بنسبة 2% .

- كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020 ؟

الحل

1. أ- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - v_n = 0,02v_n$

معناه $v_{n+1}=1,02v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,02$.

بما أن $q>1$ و v_0 موجب تماما فإن المتتالية (v_n) متزايدة تماما .

ب- لدينا $v_n=v_0q^n$ أي $v_n=v_0(1,02)^n$.

2. أ- $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}=v_0\dfrac{q^n-1}{q-1}$

أي : $S_n=v_0\dfrac{(1,02)^n-1}{0,02}=50v_0\left[(1,02)^n-1\right]$.

ب- $(1,02)^{35}\approx1,9998$.

$S_n\geq50v_0$ معناه $50v_0\left[(1,02)^n-1\right]\geq50v_0$ ومعناه $(1,02)^n-1\geq1$ أي $(1,02)^n\geq2$.

ولدينا $(1,02)^{36}\approx2,0398$ إذن $n\geq36$.

3. نفرض أن عدد السكان هو u_n في السنة n بما أنه يرتفع بنسبة 2% فإن

$u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{100}u_n$ أي $u_{n+1}=1,02u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هي نفسها المتتالية (v_n).

في يوم 1 جانفي 2000 لدينا $v_0=30$ مقدرا بالمليون نسمة، وفي يوم 1 جانفي 2020

يكون v_{20} إذن $v_{20}=v_0(1,02)^{20}=30\times(1,02)^{20}$

أي $v_{20}\approx44,578422$ بالمليون نسمة.

تمرين 20

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}$.

1. أحسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 . (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

2. (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=\dfrac{n}{n+1}$.

أ) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) والحدود الأربعة الأولى للمتتالية (w_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

أ) بين أن: $v_1+v_2+v_3=-\ln 4$.

ب) ليكن S_n المجموع المعرف كما يلي: $S_n=v_1+v_2+...+v_n$

- أكتب S_n بدلالة n. ثم عين نهاية المجموع S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

الحل

1. لدينا: $u_0=0$، $u_1=\dfrac{1}{2-0}=\dfrac{1}{2}$، $u_2=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$، $u_3=\dfrac{1}{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$.

2. أ) لدينا: $w_0=0$، $w_1=\dfrac{1}{2}$، $w_2=\dfrac{2}{3}$، $w_3=\dfrac{3}{4}$.

نلاحظ أن: $u_0=w_0$، $u_1=w_1$، $u_2=w_2$، $u_3=w_3$.

ب) نضع: $p(n)$ " من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=w_n$ ".

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية): لدينا $u_0=w_0$ أي $p(0)$ محققة.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي $u_n=w_n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}=w_{n+1}$، أي نبين أن: $\dfrac{1}{2-u_n}=\dfrac{n+1}{n+2}$.

لدينا: $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n}=\dfrac{1}{2-w_n}=\dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n+2}$

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=w_n$.

3. أ) لدينا: $v_1=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$، $v_2=\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$، $v_3=\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

ومنه: بتطبيق الخاصية الأساسية للدالة اللوغرتمية: ($\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$)

نجد: $v_1+v_2+v_3=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln 3-\ln 4=-\ln 4$

ب) لدينا: $S_n=v_1+v_2+...+v_n=\ln\dfrac{1}{2}+\ln\dfrac{2}{3}+...+\ln\dfrac{n-1}{n}+\ln\dfrac{n}{n+1}$

ومنه: $S_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+...+\ln(n-1)-\ln n+\ln n-\ln(n+1)$

إذن: $S_n=-\ln(n+1)$.

- واضح أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$.

تمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=u_n+2n+3$$

1 . أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

2 . أ / بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > n^2$.

ب / ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3 . خمن عبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن صحة تخمينك الذي وضعته.

الحل

1 . للمقارنة بين u_n و u_{n+1} ، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ لأن $n \geq 0$.

إذن $u_{n+1} > u_n$ ، و بالتالي (u_n) متزايدة تماما .

2 . نبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > n^2$.

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية): من أجل $n = 0$ ، $p(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 > 0^2$.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n > n^2$ ، و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي :

$u_{n+1} > (n+1)^2$.

لدينا $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ ، و لدينا فرضا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > n^2$ ،

نستنتج عندئذ أن : $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ ، و تكتب هذه المتباينة هكذا :

$u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$.

و بما أن $(n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$ ، نستنتج أن : $u_{n+1} > (n+1)^2$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > n^2$.

3 . نعلم أن $u_0 = 1$ ، و باستعمال علاقة التراجع $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

نجد هكذا: $u_1 = 4$ ، $u_2 = 9$ ، $u_3 = 9$ ، $u_4 = 25$.

التخمين: الأعداد : 1 ، 4 ، 9 ، 16 ، 25 هي مربعات لأعداد طبيعية غير معدومة

($1 = 1^2$ ، $4 = 2^2$ ، $9 = 3^2$ ، $16 = 4^2$ ، $25 = 5^2$) ،

و بالتالي يمكن أن نضع التخمين التالي: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (n+1)^2$.

برهان صحة التخمين:

- المرحلة الأولى (الخاصية الإبتدائية): من أجل $n = 0$ ، $p(0)$ محققة لأن $u_0 = 1 = (0+1)^2$.

- المرحلة الثانية (الوراثة): نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n = (n+1)^2$ ، و نبرهن صحة $p(n+1)$

أي : $u_{n+1} = (n+2)^2$.

لدينا $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ ، و لدينا فرضا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (n+1)^2$،

نستنتج عندئذ أن $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3$ أي $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$ أي $u_{n+1} = (n+2)^2$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (n+1)^2$.

تمرين 22

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1 . أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

- أحسب w_n بدلالة n .

2 . أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3 . أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4 . عين u_n و v_n بدلالة n .

5 . استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

الحل

1 . نحسب w_{n+1} بدلالة w_n .

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$$
$$= \frac{1}{12}(u_n - v_n) = \frac{1}{12} w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = 11$. ومنه

$$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

2 . نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \frac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \frac{8(u_n + 3v_n)}{4} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$
$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$

3. لدينا: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\dfrac{2}{3}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة عى $\mathbb{N}$.

لدينا : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4. لدينا: $\begin{cases} u_n - v_n = 11\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n = 4 + 8\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ u_n = 4 - 3\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

5. $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

تمرين 23

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$

1. أحسب الحدود : u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 . (يطلب كتابة هذه الحدود على الشكل 2^α) .
2. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = ln(u_n) - ln4$.

أ / بين أن المتتالية (v_n) هندسية معينا أساسها وحدها الأول .

ب / أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، واستنتج عبارة عبارة u_n بدلالة n .

جـ / أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د / عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يحقق : $u_n > 3{,}96$.

الحل

1. لدينا : $u_2{}^2 = 4\,u_1 = 4$ أي : $u_2 = 2$.

$u_3{}^2 = 4\,u_2 = 8$ أي : $u_3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$.

$u_4{}^2 = 4\,u_3 = 2^2\times2^{3/2} = 2^{7/2}$ إذن : $u_4 = 2^{7/4}$.

$u_5{}^2 = 4\,u_4 = 2^2\times2^{7/4} = 2^{15/4}$ إذن : $u_5 = 2^{15/8}$.

2. أ / لدينا : $v_n = ln\,(u_n) - ln\,4 = ln\,\dfrac{u_n}{4}$ ومنه :

$$v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - ln4 = ln(2u_n^{\frac{1}{2}}) - ln4 = ln2 + \frac{1}{2}lnu_n - ln4 = \frac{1}{2}lnu_n + ln2 - 2ln2$$

$$= \frac{1}{2}lnu_n - ln2 = \frac{1}{2}lnu_n - ln4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(lnu_n - ln4) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = ln(u_1) - ln4 = -ln4$

ب/ لدينا: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -\ln 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{\ln 4}{2^{n-1}}$.

ومنه: $v_n = \ln\frac{u_n}{4}$ تكافئ $e^{v_n} = \frac{u_n}{4}$ أي $u_n = 4e^{v_n}$.

إذن: $u_n = 4e^{v_n} = 4e^{-\frac{\ln 4}{2^{n-1}}} = 4e^{-\frac{1}{2^{n-1}}\ln 4} = 4e^{\ln 4^{-\frac{1}{2^{n-1}}}} = 4\times 4^{-\frac{1}{2^{n-1}}} = 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$

جـ/ لدينا: $\lim_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ ، إذن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} = 4$.

د/ لدينا: $u_n > 3,96$ تكافئ $4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} > 3,96$ أي $\ln 4^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} > \ln 3,96$ أي

$\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\ln 4 > \ln 3,96$ أي $1-\frac{1}{2^{n-1}} > \frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $-\frac{1}{2^{n-1}} > \frac{\ln 3,96}{\ln 4} - 1$ ، أي

$\frac{1}{2^{n-1}} < 1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $2^{1-n} < 1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}$ أي $\ln 2^{1-n} < \ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)$ ، أي

$(1-n)\ln 2 < \ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)$ أي $1-n < \frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2}$ ، أي

$n-1 > -\frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2}$ أي $n > 1 - \frac{\ln\left(1-\frac{\ln 3,96}{\ln 4}\right)}{\ln 2} \approx 8,1078$.

إذن: $u_n > 3,96$ من أجل $n \geq 9$.

تمرين 24

1. (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما وبحيث:

$\ln u_3 - \ln u_4 = -1$ و $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$.

أ) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_1 .

ب) اكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$

2. (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\ln S_n = 0$.

الحل

1. أ) ليكن q أساس المتتالية (u_n) ، لدينا: $\ln u_3 - \ln u_4 = -1$

تكافئ $\ln\left(\frac{u_3}{u_4}\right) = -1$ ، ومنه: $\frac{u_3}{u_4} = e^{-1}$ ، أي: $q = e = \frac{u_4}{u_3}$.

ومن جهة: $\ln u_3 + \ln u_4 = 5$ تكافئ: $\ln(u_3 \times u_4) = 5$ ، أي:

$u_3 \times u_4 = e^5$ ، أي: $(u_1 \times q^2) \times (u_1 \times q^3) = e^5$ ، أي: $u_1^2 \times e^5 = e^5$

أي: $u_1 = 1$ أو $u_1 = -1$ (مرفوض) ، ومنه: $q = e$ ، $u_1 = 1$.

ب) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$ ومنه: $u_n = e^{n-1}$.

ومنه: $P_n = \underbrace{u_1 \times u_2 \times ... \times u_n}_{n \text{ عـــاملا}}$

$$P_n = u_1 \times (u_1 \times q) \times (u_1 \times q^2) \times (u_1 \times q^3) \times ... \times (u_1 \times q^{n-1})$$

$$= u_1^n \times q^{1+2+3+...+n-1} = u_1^n \times q^{\left[\frac{(n-1)}{2} \times (1+n-1)\right]} = e^{\left[\frac{n}{2}(n-1)\right]}$$

2. أ) $v_n = \ln u_{n+1} - 2\ln u_n = \ln(e^{(n+1)-1}) - 2\ln e^{(n-1)} = n - 2(n-1) = -n + 2$

ومنه: $v_n = -n + 2$ ، ولدينا: $v_{n+1} - v_n = -(n+1) + 2 - (-n+2) = -1$.

ومنه: (v_n) حسابية أساسها: -1 ، وحدها الأول : $v_1 = -1 + 2 = 1$

ب) $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(1 - n + 2) = \frac{n}{2}(-n + 3)$

جـ) $\ln S_n = 0$ تكافئ $\frac{n}{2}(-n+3) = 1$ أي: $n^2 - 3n + 2 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية

تقبل حلين : 1 و 2 ، إذن : $n = 1$ أو $n = 2$.

تمرين 25

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ و $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$.

1. احسب u_1 و u_2.

2. أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل.

3. ا) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$.

ب) استنتج أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الحل

1. $u_1 = u_0^2 + \frac{u_0}{2} = \frac{3}{16}$ ، $u_2 = u_1^2 + \frac{u_1}{2} = \frac{33}{256}$.

2. ا) نضع $P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$.

- الخاصية الابتدائية: $P(0)$: $0 < u_0 \leq \frac{1}{4}$، أي $0 < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ محققة.

- الوراثة: نفرض صحة $P(n)$ أي $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$.

لدينا: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ ومنه: $0 < \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{8} \ldots(1)$، ولدينا: $0 < u_n^2 \leq \frac{1}{16} \ldots(2)$، بجمع (1) و (2) طرفا بطرف نجد: $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$.

ب) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

بما أن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ فإن: $-\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} < 0$ ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$، إذن (u_n) متناقصة تماما.

- طريقة أخرى: استعمال البرهان بالتراجع.

جـ) (u_n) محدودة من الأدنى ومتناقصة تماما فهي متقاربة.

3. ا) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n = u_n^2 + \frac{u_n}{2} - \frac{3}{4}u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$.

وبما أن: $0 < u_n \leq \frac{1}{4}$ فإن $u_n - \frac{1}{4} \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - \frac{3}{4}u_n \leq 0$.

- طريقة أخرى: استعمال البرهان بالتراجع.

ب) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$ ومنه:

$$u_n \le \frac{3}{4}u_{n-1}$$

$$u_{n-1} \le \frac{3}{4}u_{n-2}$$

$$u_{n-2} \le \frac{3}{4}u_{n-3}$$

$$\vdots$$

$$u_2 \le \frac{3}{4}u_1$$

$$u_1 \le \frac{3}{4}u_0$$

بضرب المتباينات طرفا بطرف نجد :

$$u_n \times \cancel{u_{n-1}} \times \cancel{u_{n-2}} \times ... \times \cancel{u_2} \times \cancel{u_1} \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \cancel{u_{n-1}} \times \cancel{u_{n-2}} \times ... \times \cancel{u_1} \times u_0$$

ومنه: $u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$.

- طريقة أخرى : استعمال البرهان بالتراجع .

بما أن: $0 < u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0$ و $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لأن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$)

فحسب مبرهنة الحصر نجد: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

تمرين 26

1 . لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 5cm$).

أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) أنشئ المنحني (C) .

د) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلين .

هـ) حل المعادلة $f(x) = m$ في الحالتين : $m = 0$ و $m = \frac{1}{e}$.

2 . (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ حيث $0 < \alpha < 1$.

أ) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 0$.

ب) أثبت ان المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها .

3 . (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = \ln u_n$.

أ) أثبت أنه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

جـ) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

الحل

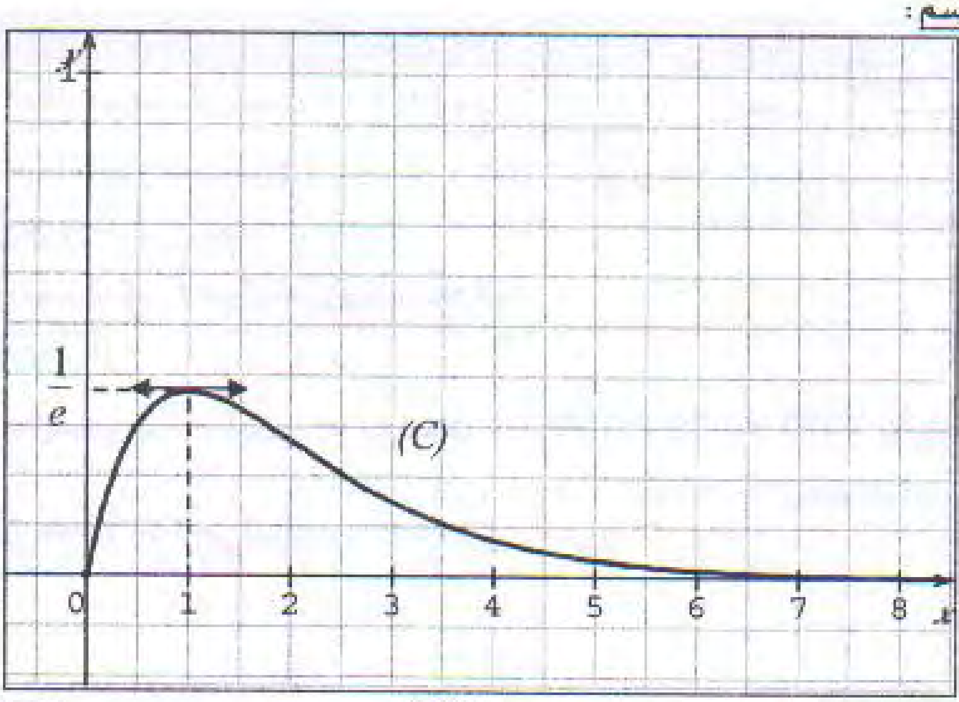
1 . أ) لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} -Xe^{X} = 0$

ب) لدينا : $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

إن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $(1-x)$. فيكون جدول تغيرات الدالة f

x	0 $\qquad\qquad$ 1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad\qquad$ $-$
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{e} \searrow 0$

جـ) الرسم :



د) يظهر من البيان أن من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$ المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع المنحني (C) في نقطتين وبالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين.

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $\left]0;\frac{1}{e}\right[$:

الدالة f على المجال $]0;1[$ مستمرة ومتزايدة تماما.

الدالة f على المجال $]1;+\infty[$ مستمرة ومتناقصة تماما.

هـ) من جدول التغيرات نلاحظ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0 ،

و $f(x)=\frac{1}{e}$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 1 .

2. $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=u_n e^{-u_n} \end{cases}$.

أ) نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

* المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $P(0)$ محققة لأن $u_0=\alpha>0$.

* المرحلة 2: نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n>0$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي: $u_{n+1}>0$.

لدينا : $u_n>0$ و $e^{-u_n}>0$ ومنه $u_n e^{-u_n}>0$ أي $u_{n+1}>0$.

ب) لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_ne^{-u_n}-u_n=u_n(e^{-u_n}-1)$. لكن:

$u_n>0$ ومنه : $-u_n<0$ ومنه $e^{-u_n}<1$ ومنه $e^{-u_n}-1<0$. إذن : $u_n(e^{-u_n}-1)<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$. وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ) المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الادنى بالعدد 0 فهي متقاربة، لتكن l نهايتها.

إن l يحقق: $le^{-l}=l$ أي $(l-1)e^{-l}=0$ أي $l=0$ أو $l=1$ (مرفوض).

ومنه: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0$

3. $w_n=\ln u_n$.

أ) لدينا : $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$ تكافئ $\ln u_{n+1}=\ln u_n+\ln e^{-u_n}=\ln u_n-u_n$ أي

$w_{n+1}=w_n-u_n$ ومنه : $u_n=w_n-w_{n+1}$.

ب) لدينا :

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=w_0-w_1+w_1-w_2+...+w_{n-1}-w_n+w_n-w_{n+1}=w_0-w_{n+1}$$

جـ) لدينا : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n=+\infty$

ما يجب أن يعرف

الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال :

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f. من أجل كل x من I لدينا : $F'(x)=f(x)$

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة :

خواص: * إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير:

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I، x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$ $a\in\mathbb{R}^*$ ، $b\in\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$ $a\in\mathbb{R}^*$ ، $b\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} $a\in\mathbb{R}^*$ ، $b\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$x\ln x-x+c$	$]0;+\infty[$
$a\in\mathbb{R}$ ، $\ln(x-a)$	$(x-a)\ln(x-a)-x+c$	$]a;+\infty[$

2. خواص: u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
($n\in\mathbb{N}^*$) $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
($n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N}$) $\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	

المعادلات التفاضلية

1. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$. مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة :إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تمارين محلولة

تمرين 01

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك :

1) دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة f المعرفة ب: $f(x)=\dfrac{3x^3-2}{2x^2}$ هي الدالة F المعرفة ب: $F(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{x}$.

2) f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على هذا المجال ، إذن: F متزايدة تماما على D.

3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة ب:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

إذا كانت F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f فإن $F(\alpha)$ قيمة حدية صغرى لـ F على $\mathbb{R}$.

4) الدالتان F و G المعرفتان على $]0;+\infty[$ ب: $F(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ و $G(x)=x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ دالتان أصليتان لنفس الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

5) f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ ب: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ، الدالة f تقبل دالة أصلية F على المجال $]0;+\infty[$ منحناها يمر من النقطة: $A(3;0)$.

الحل

1) صحيح :

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{3}{4}\times 2x-\frac{1}{x^2}=\frac{3x}{2}-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^3-2}{2x^2}=f(x)$$

طريقة أخرى: نعين دالة أصلية للدالة f.

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\dfrac{3x^3-2}{2x^2}=\dfrac{3x^3}{2x^2}+\dfrac{-2}{2x^2}=\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{x^2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2) صحيح :

F دالة أصلية للدالة f ، ومنه من أجل كل x من D : $F'(x)=f(x)$ ، وبالتالي

إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ على D. بما أن f موجبة على D، فإن: F متزايدة تماما على D.

3) خطأ:

F دالة أصلية للدالة f، ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=f(x)$، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$. من جدول إشارة $f(x)$ يكون جدول تغيرات الدالة F كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	

وبالتالي $F(\alpha)$ قيمة حدية كبرى لـ F على $\mathbb{R}$.

4) خطأ:

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$F(x)-G(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=-x$$

ومنه: $F(x)-G(x)=-x$، أي: $F(x)=G(x)-x$، إذن الدالتان F و G لا تختلفان بثابت حقيقي.

5) صحيح:

من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{1}{x-2}=\frac{(x-2)'}{x-2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(x-2)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]2;+\infty[$.

ولدينا: $F(3)=\ln(3-2)=\ln 1=0$.

تمرين 02

عين دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 2) $f(x)=3x^3-\frac{2}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-3$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 4) $f(x)=-3\sin x+2\cos x+1$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin(\pi+x)$ ، $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=x^2+2x-e^x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 7) $f(x)=2x+\ln x$ ، $I=]0;+\infty[$

8) $f(x)=x^2+\ln(x-1)$ ، $I=]1;+\infty[$

الحل

1) الدالة F حيث: $F(x)=-\dfrac{1}{x}+x^2$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{2}{x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+2\sqrt{x}-3x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) الدالة F حيث: $F(x)=3\cos x+2\sin x+x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

5) الدالة F حيث: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-2\cos(\pi+x)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

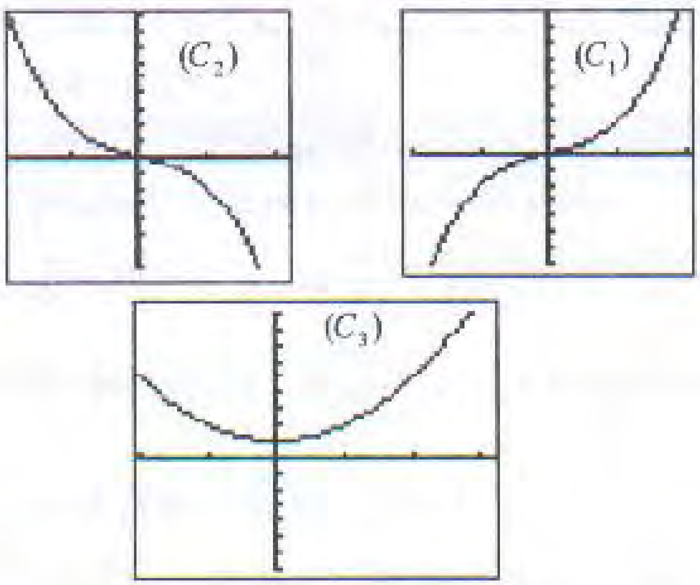
6) الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

7) الدالة F حيث: $F(x)=x^2+x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

8) الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+(x-1)\ln(x-1)-x$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-1-x^2$. أحد المنحنيات التالية (C_1) ، (C_2) و (C_3) هو منحني بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، عينه مع التبرير.

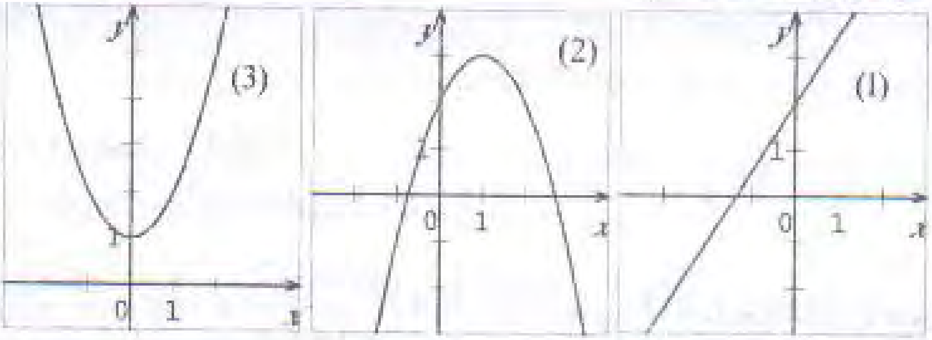


الحل

لتكن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:
$F'(x)=f(x)$ ، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، على $\mathbb{R}$.
من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=-1-x^2=-(1+x^2)<0$ ، ومنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)<0$ ، وبالتالي الدالة F متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
إذن: (C_2) هو منحني بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين 04

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (1) و F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.أحد المنحنيين (2) أو (3) هو للدالة F ما هو؟ برر.



الحل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، على $\mathbb{R}$.
من المنحني (1) نلاحظ أن: $f(x)\leq 0$ من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، و: $f(x)\geq 0$ من أجل $x\in[\alpha;+\infty[$ ، حيث α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-2;-1[$ ، وبالتالي تكون الدالة F متناقصة تماما ثم متزايدة تماما ، إذن: المنحني (3) هو للدالة F .

تمرين 05

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I :

1) $f(x)=(4x^3+1)(x^4+x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ، $I=]0;+\infty[$.

3) $f(x)=3(3x+4)^4$ ، $I=\mathbb{R}$. 4) $f(x)=(2x+7)^6$ ، $I=\mathbb{R}$.

5) $f(x)=16(4x-1)^3$ ، $I=\mathbb{R}$. 6) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$ ، $I=]0;+\infty[$. 8) $f(x)=xe^{-x^2}$ ، $I=\mathbb{R}$.

9) $f(x)=e^x(e^x+2)^3$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=(4x^3+1)(x^4+x+2)=(x^4+x+2)'(x^4+x+2)$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{(x^4+x+2)^2}{2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\ln x=(\ln' x)\times\ln x$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{\ln^2 x}{2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=3(3x+4)^4=(3x+4)'(3x+4)^4$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{(3x+4)^{4+1}}{4+1}=\dfrac{(3x+4)^5}{5}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=4\times4\times(4x-1)^3=4\times(4x-1)'\times(4x-1)^3$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=4\dfrac{(4x-1)^{3+1}}{3+1}=(4x-1)^4$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

5) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=(2x+7)^6=\dfrac{1}{2}\times(2x+7)'\times(2x+7)^6$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(2x+7)^{6+1}}{6+1}=\dfrac{(2x+7)^7}{14}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

6) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5=(3x^2-2x+3)'\times(3x^2-2x+3)^5$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\dfrac{(3x^2-2x+3)^{5+1}}{5+1}=\dfrac{(3x^2-2x+3)^6}{6}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

7) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=-\left[-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4\right]=-\left(1+\frac{1}{x}\right)'\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4+1}}{4+1}=-\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5}{5}$ هي دالة أصلية للدالة f على

المجال I .

8) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=xe^{-x^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-x^2)'\times e^{-x^2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

9) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=e^x(e^x+2)^3=(e^x+2)'(e^x+2)^3$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{(e^x+2)^{3+1}}{3+1}=\frac{(e^x+2)^4}{4}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

تمرين 06

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$. 2) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^3}$ ، $I=]3;+\infty[$. 4) $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^4}$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}$ ، ومنه: الدالة F حيث:

$F(x)=-\frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ ، ومنه: الدالة F حيث:

$F(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

2) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^3}=2\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^3}=2\times\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-5x+6)^3}$ ، ومنه:

الدالة F حيث: $F(x)=2\times\left[-\frac{1}{(3-1)\left(x^2+x+1\right)^{3-1}}\right]=-\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^4}$ ، ومنه:

الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{(4-1)(e^x+1)^{4-1}}=-\frac{1}{3(e^x+1)^3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I .

تمرين 07

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$. 3) $f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$ ، $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=e^{2x+3}$ ، $I=\mathbb{R}$. 4) $f(x)=3^x-2^x$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=-\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-e^{\frac{1}{x}}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

(أنظر جدول الدوال الأصلية لدوال مألوفة)

3) من أجل كل x من المجال I لدينا:

$$f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}=-\frac{1}{2}(2x-1)e^{x^2-x-3}=-\frac{1}{2}(x^2-x-3)'e^{x^2-x-3}$$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-\frac{1}{2}e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=3^x-2^x=e^{x\ln 3}-e^{x\ln 2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{2^x}{\ln 2}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 08

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f المعرفة و الموجبة تماما على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ، $I=]-2;+\infty[$. 3) $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$. 4) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{(x+2)'}{x+2}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(x+2)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}=(-2)\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=-2\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin' x}{\sin x}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=\ln(\sin x)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 09

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ، $I=]1;+\infty[$. 2) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، $I=]2;+\infty[$.

3) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$. 4) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{(x-1)'}{\sqrt{x-1}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x^2-4)'}{\sqrt{x^2-4}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{x^2-4}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

3) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=2\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\frac{(e^x-1)'}{\sqrt{e^x-1}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\times2\sqrt{e^x-1}=4\sqrt{e^x-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

4) من أجل كل x من المجال I لدينا: $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}=\dfrac{\ln' x}{\sqrt{\ln x}}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=2\sqrt{\ln x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I.

تمرين 10

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ يكون:

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ والتي تأخذ القيمة 6 من أجل القيمة $\frac{1}{2}$.

الحل

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا:

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{ax^2-2ax+a+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

$$=f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+b=0\\-2a=2\\a=-1\end{cases}$، ومنه: $\begin{cases}-1+b=0\\a=-1\end{cases}$، ومنه: $a=-1$، $b=1$، وبالتالي:

$$f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا:

$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}$، ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f

على المجال $]0;1[$ هي الدوال: $x\to\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+k$، حيث k ثابت حقيقي.

الدالة F تحقق: $F(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+k$ و $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=6$.

$F\left(\frac{1}{2}\right)=6$ تكافئ: $\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+k=6$ ، أي: $k=2$ ، إذن: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+2$

تمرين 11

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{ae^x}{e^x-1}+\frac{be^x}{e^x+1}$$

2) استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

الحل

1) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{ae^x}{e^x-1}+\frac{be^x}{e^x+1}=\frac{ae^x(e^x+1)+be^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}=\frac{ae^{2x}+ae^x+be^{2x}-be^x}{(e^x)^2-1^2}$$

$$=\frac{(a+b)e^{2x}+(a-b)e^x}{(e^x)^2-1^2}=f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a+b=0\\a-b=6\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=-b\\-b-b=6\end{cases}$ ، ومنه: $a=3$ ، $b=-3$. وبالتالي:

$$f(x)=\frac{3e^x}{e^x-1}-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

2) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\frac{3(e^x-1)'}{e^x-1}-\frac{3(e^x+1)'}{e^x+1}$

ومنه: الدالة F حيث: $F(x)=3\ln(e^x-1)-3\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$. ولدينا: $F(x)=3\left[\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)\right]=3\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x-1}\right)$

تمرين 12

حل المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{2}{x^2}+x$ ، حيث: $y(1)=0$.

الحل

$y'=\frac{2}{x^2}+x$ تعني: $y=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+k$ ، حيث k ثابت حقيقي.

بما أن: $y(0)=1$ فإن: $-\frac{2}{1}+\frac{1^2}{2}+k=0$ ، ومنه: $k=\frac{3}{2}$. وبالتالي الحل المطلوب هو:

$y=-\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$.

تمرين 13

حل المعادلة التفاضلية: $y''=e^{3x+1}$ ، حيث: $y(-1)=0$ و $y'(0)=0$.

الحل

لدينا : $y''=e^{3x+1}$ ، ومنه: $y'=\frac{1}{3}e^{3x+1}+c_1$ ، ومنه: $y=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}e^{3x+1}+c_1x+c_2$

إذن: $y=\frac{1}{9}e^{3x+1}+c_1x+c_2$ ، حيث c_1 و c_2 ثابتان حقيقيان.

بما أن: $y'(0)=0$ فإن: $\frac{1}{3}e^{3\times0+1}+c_1=0$ ، ومنه: $c_1=-\frac{e}{3}$

وبما أن: $y(-1)=0$ ، فإن: $\frac{1}{9}e^{3(-1)+1}-c_1+c_2=0$ ، ومنه: $\frac{1}{9}e^{-2}+\frac{e}{3}+c_2=0$ ، ومنه:

$c_2=-\frac{1}{9}e^{-2}-\frac{e}{3}$ وبالتالي الحل المطلوب هو: $y=\frac{1}{9}e^{3x+1}-\frac{e}{3}x-\frac{1}{9}e^{-2}-\frac{e}{3}$

تمرين 14

1) حل المعادلة التفاضلية : $9y''+4y=0...(E)$.

2) عين الحل الخاص f للمعادلة (E) والذي يحقق ما يلي: المنحني الممثل للدالة f يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$ ويقبل عند النقطة A مماسا معامل توجيهه: $-\frac{2}{3}$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

4) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة: $f(x)=0$.

الحل

1) لدينا: (E) تكافئ $y''+\frac{4}{9}y=0$ ، أي: $y''+\left(\frac{2}{3}\right)^2y=0$ ، ومنه:

$y=c_1\sin\frac{2}{3}x+c_2\cos\frac{2}{3}x$.

2) الدالة f تحقق: $f(x)=c_1\sin\frac{2}{3}x+c_2\cos\frac{2}{3}x$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ تكافئ $c_1\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)+c_2\cos\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ ، أي:

$c_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ ، أي: $c_1 \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}c_2=\sqrt{3}$ ، أي: $\sqrt{3}c_1+c_2=2\sqrt{3}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=\frac{2}{3}c_1 \cos\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}c_2 \sin\frac{2}{3}x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ تكافئ $\frac{2}{3}c_1 \cos\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}c_2 \sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ ، أي:

$c_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-c_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ ، أي: $\frac{1}{2}c_1-\frac{\sqrt{3}}{2}c_2=-1$ ، أي: $c_1-\sqrt{3}c_2=-2$.

وبالتالي نحل الجملة: $\begin{cases}\sqrt{3}c_1+c_2=2\sqrt{3}\\ c_1-\sqrt{3}c_2=-2\end{cases}$ ،وبحل هذه الجملة نجد: $c_1=1$ و $c_2=\sqrt{3}$.

ومنه: $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)\times\frac{1}{2}\right]=\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$$

$$=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)=f(x)$$

4) $f(x)=0$ تكافئ: $2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ، ومنه: $\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ، ومنه:

$\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ، أي: $x=\pi+\frac{3\pi k}{2}$ ، وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$S=\left\{\pi+\frac{3\pi k}{2}\right\}$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين 15

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+2)e^x$.

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$F(x)=(ax+b)e^x$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ومنه: $F'(x)=f(x)$. لدينا:

$$F'(x)=(ax+b)'\times e^x+(ax+b)\times\left(e^x\right)'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$$

$F'(x)=f(x)$ معناه: $(ax+a+b)e^x=(x+2)e^x$ ، ومنه: $ax+a+b=x+2$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}a=1\\1+b=2\end{cases}$ ، ومنه: $a=1$ ، $b=1$. وبالتالي:

$F(x)=(x+1)e^x$.

تمرين 16

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$.

1) أحسب الدالة المشتقة الثانية f'' للدالة f .

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$.

3) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل

1) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين ولدينا:

$$f'(x)=(2x^2-7x+5)'\times e^x+(2x^2-7x+5)\times\left(e^x\right)'$$
$$=(4x-7)e^x+(2x^2-7x+5)e^x=(2x^2-7x+5+4x-7)e^x=(2x^2-3x-2)e^x$$

ومنه: $f'(x)=(2x^2-3x-2)e^x$.

ولدينا: $f''(x)=(2x^2-3x-2)'\times e^x+(2x^2-3x-2)\times\left(e^x\right)'$
$$=(4x-3)e^x+(2x^2-3x-2)e^x=(2x^2-3x-2+4x-3)e^x=(2x^2+x-5)e^x$$

ومنه: $f''(x)=(2x^2+x-5)e^x$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$4e^x+2f'(x)-f''(x)=4e^x+2(2x^2-3x-2)e^x-(2x^2+x-5)e^x$$
$$=(4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x=(2x^2-7x+5)e^x=f(x)$$

3) بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$ ، فإن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=4e^x+2f(x)-f'(x)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ،

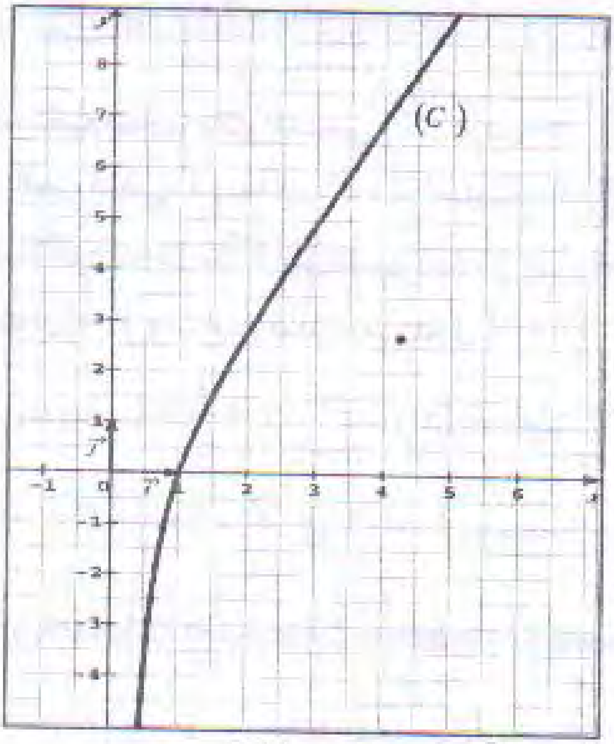
ومنه: $F(x)=4e^x+2(2x^2-7x+5)e^x-(2x^2-3x-2)e^x$
$$=(4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x=(2x^2-11x+16)e^x$$

إذن: $F(x)=(2x^2-11x+16)e^x$

تمرين 17

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x^2}$ وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل الموالي).

الجزء الأول



1) أ/ باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ أثبت صحة هذا التخمين.

2) بقراءة بيانية حدد إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3) أ/ باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول نهاية f عند 0.

ب/ أثبت صحة هذا التخمين.

4) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

الجزء الثاني

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ بحيث: $F(1)=-2$.

1) استنتج من الجزء الأول اتجاه تغير الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.

2) عين عبارة $F(x)$ بدلالة x.

3) أدرس نهايتي الدالة F عند 0 و عند $+\infty$.

4) شكل جدول تغيرات الدالة F .

5) أرسم في معلم متعامد و متجانس (Γ) التمثيل البياني للدالة F .

الحل

الجزء الأول 1) أ/ نخمن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

الاثبات: الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا:

$f'(x)=(2x-1)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'=2-\left(\frac{-2}{x^3}\right)=2+\frac{2}{x^3}>0$ ، ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2) إشارة $f(x)$ موضحة في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3) نخمن أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$.

الاثبات: لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(2x-1)=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ ، ومنه: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(2x-1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

إذن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$.

4) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$ ومنه: $(\Delta): y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

الجزء الثاني: 1) بما أن: F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ فإن: $F'(x)=f(x)$، وبالتالي إشارة $F'(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$، ومنه: F متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

2) لدينا: $F(x)=x^2-x+\frac{1}{x}+k$، حيث k ثابت حقيقي، وبما أن: $F(1)=-2$ فإن: $1^2-1+\frac{1}{1}+k=-2$، أي: $k=-3$، ومنه: $F(x)=x^2-x+\frac{1}{x}-3$.

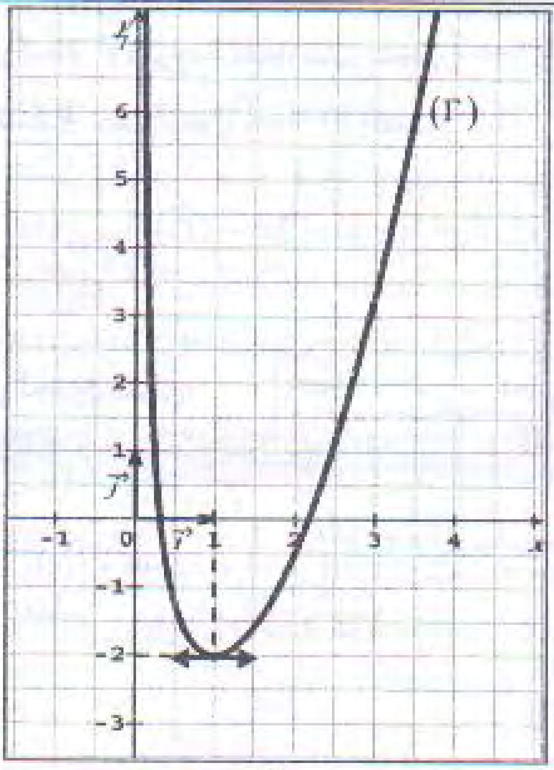
3) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}F(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x^2-x+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+\frac{1}{x}-3\right)=+\infty$

4) جدول تغيرات الدالة F:

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

5) رسم (Γ):



تمرين 18

I. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

1) بين أن f زوجية ثم أدرس اتجاه تغيراتها.

2) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=1+\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x+2}$ ، حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f.

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) بين أن g فردية ثم أدرس اتجاه تغيراتها.

2) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجالات مجموعة التعريف ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

3) بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له .

4) ارسم المنحني (C) .

5) أ / احسب مشتقة الدالة h المعرفة من أجل كل $x\neq -a$ حيث :

$h(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$ ، حيث a عدد حقيقي .

ب / استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]2;+\infty[$.

الحل

1.I) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي الى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ولدينا:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2}{x^2-4}=f(x)$ ، و منه f دالة زوجية .

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$ ، إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $-8x$ و الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$ 0 $-$	‖	$-$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و متزايدة على المجالين على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;0]$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$$1+\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+\alpha(x+2)+\beta(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-4+(\alpha+\beta)x+2\alpha-2\beta-4}{(x-2)(x+2)}=f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha-2\beta-4=0\end{cases}$ ، أي: $\begin{cases}\beta=-\alpha\\ 2\alpha-2\beta-4=0\end{cases}$ ، ومنه: $\begin{cases}\beta=-\alpha\\ 4\alpha=4\end{cases}$ ، ومنه:

$\alpha=1$ ، $\beta=-1$ ، إذن: $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

3.) من الكتابة $f(x)=1+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ تكون مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي:

$F(x)=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+k$ ، k ثابت حقيقي

II .1) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ، $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ولدينا:

$$g(-x)=-x+\ln\left|\frac{-x-2}{-x+2}\right|=-x+\ln\left|\frac{-(x+2)}{-(x-2)}\right|=-x+\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$$

$$=-x+\ln\left|\frac{1}{\frac{x-2}{x+2}}\right|=-x-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=-\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-g(x)$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$g(x)=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|$ ، ومنه: $g'(x)=f(x)$

وبالتالي إشارة $g'(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$ الموضحة في الجدول التالي:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2		+	‖	+	0	+	‖	+	
x^2-4		+	‖	−	0	−	‖	+	
$f(x)$		+	‖	−	0	−	‖	+	

ومنه: $g'(x)$ تنعدم عند 0 ، تكون موجبة على $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ وسالبة على $]-2;0[$ و $]0;2[$. إذن: g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]2;+\infty[$ و متناقصة تماما على كل من المجالين $]-2;0[$ و $]0;2[$.

2) ـ لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=1$ ، وبما أن: $\lim_{X\to1}\ln X=0$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0$ ، ومنه:

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-\infty$. إذن: $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$.

ولكون g دالة فردية نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

ـ لدينا: $\lim_{x\to2}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0^+$ ، وبما أن: $\lim_{X\overset{>}{\to}0}\ln X=-\infty$ ، فإن: $\lim_{x\to2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=-\infty$ ، ومنه:

$\lim_{x\to2}\left(x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)=-\infty$. إذن: $\lim_{x\to2}g(x)=-\infty$. ولكون g دالة فردية نستنتج أن:

$\lim_{x\to-2}g(x)=+\infty$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	‖	− 0 −	‖	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

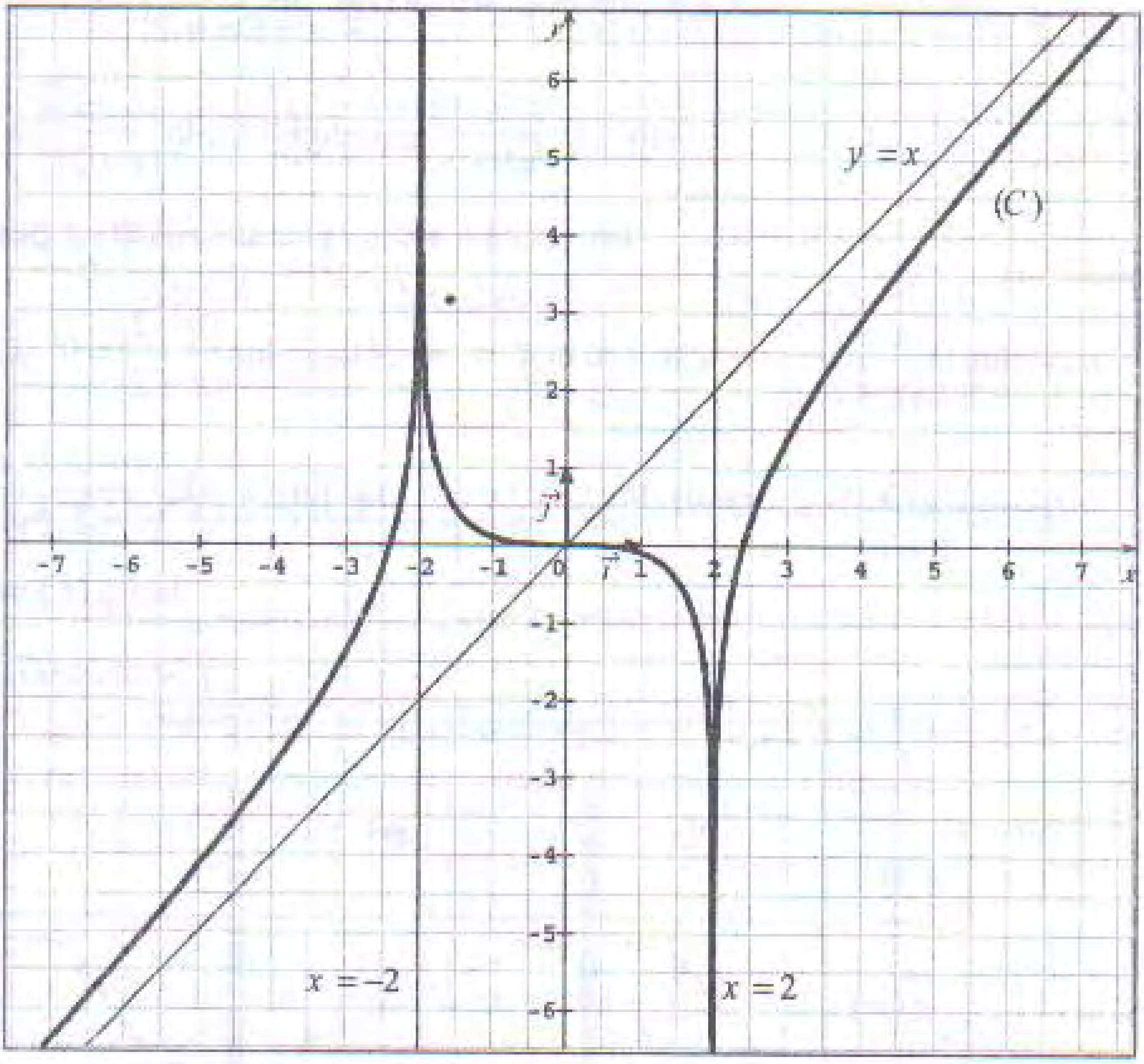
3) لدينا : $g(x)-x=x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-x=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ ،

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=1$ ، وبما أن: $\lim_{X\to1}\ln X=0$ ، فإن: $\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0$ ، ومنه:

$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-x]=0$ وبنفس الكيفية نجد: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x]=0$

إذن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

4) الرسم:



5) أ/ من أجل كل $x \neq -a$ لدينا :

$$h'(x) = (x+a)' \times \ln|x+a| + (x+a) \times \ln'|x+a| - (x)'$$

$$= \ln|x+a| + (x+a) \times \frac{1}{x+a} - 1 = \ln|x+a|$$

ومنه: $h'(x) = \ln|x+a|$

ب/ نستنتج ان دالة أصلية للدالة g على $]2;+\infty[$ هي :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln|x-2| - (x+2)\ln|x+2|$$

تمرين 19

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2) نفرض أن : $F(0) = 0$

عين معادلة للمماس (T) للمنحني (C) الممثل للدالة F عند النقطة O التي فاصلتها 0.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة F على $\mathbb{R}$.

4) ادرس إشارة F على $\mathbb{R}$.

5) احسب F'' المشتقة الثانية للدالة F على $\mathbb{R}$.

6) أ/ ادرس إشارة $F''(x)$.

ب/ استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (T) .

الحل

1) الدالة f هي مركب الدالة $x \to x^2+1$ المستمرة على $\mathbb{R}$ ، متبوعة بالدالة $x \to \sqrt{x}$ ، ومنه الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، فهي تقبل دالة أصلية F على $\mathbb{R}$.

2) معادلة (T) من الشكل: $y = F'(0)(x-0)+F(0)$ ، حيث: $F(0)=0$ وبما أن F دالة أصلية للدالة f فإنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ومنه:

$F'(0)=f(0)=\sqrt{0^2+1}=1$ ، إذن: $y=1(x-0)+0$ ، أي: $(T): y=x$

3) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)>0$ ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4) بما أن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $F(0)=0$ تكون إشارة $F(x)$ كما في الجدول الموالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	

5) من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $F'(x)=f(x)$ ، ومنه: $F''(x)=f'(x)$ ، ومنه:

$$F''(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ ، إذن: $$F''(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

6) أ/ إشارة $F''(x)$ هي نفس إشارة x ، لأن: $\sqrt{x^2+1}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	

ب/ الدالة F'' تنعدم عند العدد 0 فاصلة النقطة O مغيرة إشارتها ومنه النقطة O هي نقطة انعطاف للمنحني (C) ، ومن إشارة $F''(x)$ نستنتج أن:

- على المجال $]-\infty;0[$: المنحني (C) يقع تحت المماس (T) .
- على المجال $]0;+\infty[$: المنحني (C) يقع فوق المماس (T) .
- المماس (T) يخترق المنحني (C) في النقطة O .