التمارين:

التمرين الأول:

f الدالة المعرفة كما يلي:
$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}: x\in\left]-\pi,0\right[\cup\left]0,\pi\right[$$
$$f(0)=0$$

1.بين أن f مستمرة عند القيمة 0 .

2)بين أن f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 .

التمرين الثاني:

1.عين جذور كثير الحدود $P(x)$ حيث: $p(x)=x^2+2x-3$ ثم استنتج تحليلا له .

2.ادرس إشارة كل من e^x+3 و e^x-1 من أجل كل عدد حقيقي x .

3.حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{2x}+2e^x-3<0$.

التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$

1) ادرس نهايات الدالة g .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g . شكل جدول التغيرات .

3)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g(x)=0$.

4)استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1-(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\leq 0$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (C) تمثيلها البياني .

1)اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2)احسب النهايات ،ادرس اتجاه التغير و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3)برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=2$ ماذا تستنتج ؟

4)اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5)بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1<\beta<2$.

6)أ-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]$ ماذا تستنتج ؟

ب-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ ماذا تستنتج ؟

7)انشئ (C) .

8)ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $(-x+1)\sqrt{x^2+1}=m\sqrt{x^2+1}-x$.

التمرين الرابع:

I. المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b+e^{-x}$ ، a و b عددان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني .

عين العددين a ، b و علما أن (C_f) يقبل في النقطة O مماسا هو حامل محور الفواصل.

II. نضع : $f(x)=x-1+\dfrac{1}{e^x}$

1)ادرس نهايات الدالة f .

2)ادرس اتجاه تغير الدالة f . شكل جدول التغيرات .

3)بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعين معادلة له .

4)عين إحداثي النقطة A من (C_f) حيث المماس (d) عندها يوازى المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x+1$ ثم اكتب معادلة ل (d) .

5)أنشئ (d) و (C_f) .

التمرين الخامس:

الرسم المرافق يمثل (C) التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. في هذا الجزء ,استخدم البيان المعطى للإجابة على الأسئلة التالية :

1)عين حلول المعادلة : $f'(x)=0$ في المجال $[-2;4]$ ،حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

2)عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;4]$.شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

3)عين عدد حلول المعادلة : $f(x)=0$ في المجال $[-2;4]$.

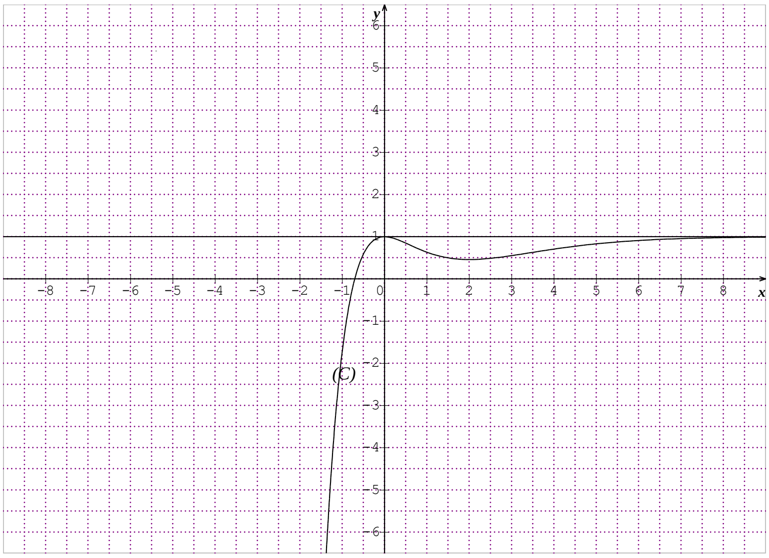
II. المنحنى (C) المعطى هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=1-x^2e^{-x}$

1)اثبت أن (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=1$.

2)نضع : $h(x)=f(x)-x$

أ)شكل جدول تغيرات الدالة h على المجال $[0;2]$.

ب)استنتج أن المعادلة : $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;2]$ نرمز له ب α . (لا يطلب حساب α).



حلول التمارين

حل التمرين الأول:

.1 الدالة f **مستمرة عند القيمة 0 لان:** $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = 0$

و $f(0)=0$ اي

.2 الدالة f **تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لان:**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)\ .$$

حل التمرين الثاني:

.1جذرا $p(x)$ **هما 1 و3-** و بالتالي: $p(x)=(x-1)(x+3)$

.2) $x\in\mathbb{R} : e^x+3>0$ **)** و $e^x-1=0$) **يكافئ** $x=0$ و $e^x-1<0$ **تكافئ** $x<0$ و $e^x-1>0$ **تكافئ** $x>0$

.3 $e^{2x}+2e^x-3<0$ **تكافئ** $(e^x-1)(e^x+3)<0$ **تكافئ** $e^x-1<0$ **معناه** $x<0$ أي $x\in\left]-\infty,0\right]$.

حل التمرين الثالث:

I. 1. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

.2 $x\in\mathbb{R} : g'(x) = \frac{-3x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$. **الدالة** g **متزايدة تماما على** $\left]-\infty;0\right]$ **.متناقصة تماما على** $\left[0;+\infty\right[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

3)المعادلة : $g(x)=0$ **تكافئ** $x=0$

4) من جدول التغيرات نلاحظ أن :0 $g(x)\leq 0$

(II 1) الدالة المشتقة : $x\in\mathbb{R} : f'(x) = -1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$$x\in\mathbb{R} : f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

الدالة f **متناقصة تماما على** $\mathbb{R}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

(3 $f(x)+f(-x)=-x+1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+x+1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}:x\in\mathbb{R}$ **نستنتج أن** $\omega(0;1)$ **مركز تناظر للمنحنى**

$f(x)+f(-x)=2:x\in\mathbb{R}$

(4 $(D):y=1$ **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .**

(5المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا محصورا بين 1و2 لأن الدالة** f **مستمرة متناقصة تماما على المجال** $[1;2]$ **و** $f(1)\times f(2)<0$ **حيث**

$f(1)\simeq 0.71$ **و** $f(2)\simeq -0.11$

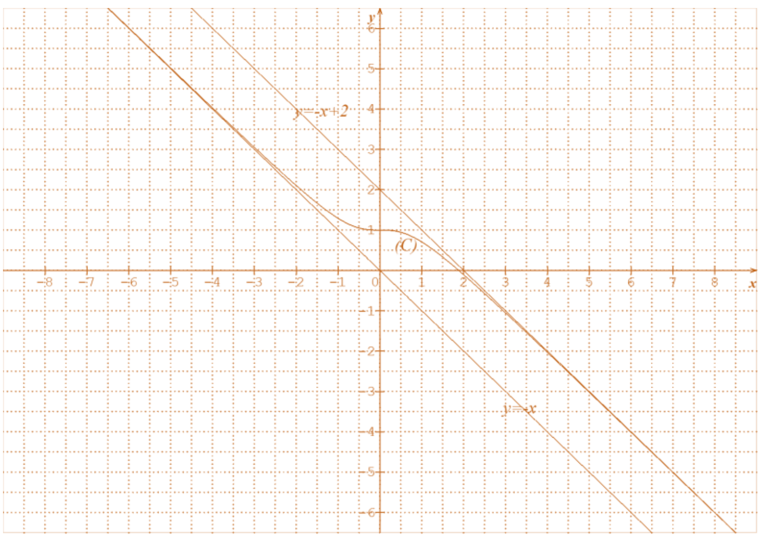
(6 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x-2]=\lim_{x\to+\infty}(-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\lim_{x\to+\infty}(-1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}})=0$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=-x+2$ **مقارب مائل بجوار** $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}})=0$$

المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ **مقارب مائل بجوار** $-\infty$

(7إنشاء (C) **:**



(8المناقشة حسب قيم الوسيط m **عدد وإشارة الحلول :** $(-x+1)\sqrt{x^2+1}=m\sqrt{x^2+1}-x$ **تكافئ** $y=f(x)$ **معناه عدد حلولها هو عدد فواصل نقط تقاطع** (C) **مع المستقيم** (D_m) **الذي معادلته** $y=m$ **الموازي لمحور الفواصل.**

و لدينا : $m\in]-\infty;1[$ **المعادلة لها حل واحد موجب.** $m=1$ **حل مضاعف** $x=0$ **.** $m\in]1:+\infty[$ **حل واحد سالب.**

حل التمرين الرابع:

I.

(C_f) **يقبل مماسا في النقطة 0 هو** (xx') **معناه** $f'(0)=0$ **و** $f(0)=0$ **نجد** $a=1;b=-1$

II.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty; \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f'(x)=1-e^{-x} : x\in\mathbb{R}$ **. الدالة** f **متزايدة تماما على المجال** $[0;+\infty[$ **و متناقصة تماما على** $]-\infty;0]$

جدول التغيرات:

x	-∞		0		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)	+∞	↘	0	↗	+∞

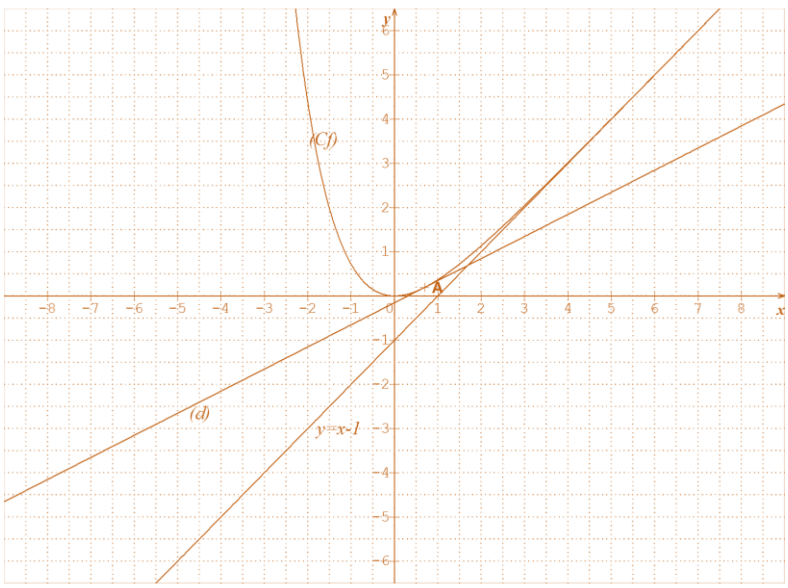
3)المستقيم (Δ) **الذي معادلته :** $y=x-1$ **مقارب مائل للمنحنى** (C_f) **بجوار ∞+ لان :**

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{e^x})=0$$

4)) (d) **يوازي المستقيم ذو المعادلة** $y=\frac{1}{2}x+1$ **)معناه** $f'(x)=\frac{1}{2}$ **تكافئ** $e^{-x}=\frac{1}{2}$ **ونجد** $x=Ln2$ **و** $A(Ln2;\ln 2-\frac{1}{2})$ **و**

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}:(d)$$

5)انشاء (d) **و** (C_f) **:**



حل التمرين الخامس:

.I

1) **حلول المعادلة** $f'(x)=0$ **في المجال** $[0;2]$ **:**

هي فواصل نقط المنحنى (C) **التي يكون معامل توجيه المماس فيها معدوما و هي: 0، 2.**

2) **الدالة** f **متزايدة تماما على كل من المجالين** $[-2;0]$ **و** $[2;4]$ **.** f **متناقصة تماما على المجال** $[0;2]$ **.**

جدول تغيرات f **على** $\mathbb{R}$ **:**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0.5	↗	1

3)**عدد حلول المعادلة** $f(x)=0$ **على المجال** $[-2;4]$ **هي فواصل نقط تقاطع** (C) **مع القطعة المستقيمة** $[AB]$ **حيث** $A(-2,0)$ **و** $B(4,0)$
يوجد حل وحيد و هو -0.75 .

.II

.1 $y=1$ **معادلة مستقيم مقارب للمنحنى** (C) **بجوار** $+\infty$ **لأن :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

أو $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-1)=0$

2) **جدول تغيرات الدالة** h **على المجال** $[0;2]$ $\quad h'(x)=xe^{-x}(x-2)-1 : x\in[0;2]$

$h'(x)<0 : x\in[0;2]$ **لأن** $x\geq 0; x-2\leq 0; e^{-x}>0 : x\in\mathbb{R}$

الدالة h **متناقصة تماما على المجال** $[0;2]$

x	0		2
$h'(x)$		-	
$h(x)$	1	↘	$-\frac{4}{e^2}-1$

المعادلة $f(x)=x$ **تقبل حلا وحيدا في** $[0;2]$ **لأن** $f(x)=x$ **تكافئ** $f(x)-x=0$ **تكافئ** $h(x)=0$ **و الدالة** h **مستمرة و رتيبة تماما(متناقصة تماما) على** $[0;2]$ **و** $h(0)=1, h(2)=-1-\frac{4}{e^2}$ **(** $h(0)\times h(2)<0$ **)**

إذن يوجد α **حيث 2 >** α **> 0 يحقق** $h(\alpha)=0$ **.**