تمارين محلولة
في الأعداد والحساب

A≡B[C]　PPCM　PGCD

شعبتي:

رياضي

تقني رياضي

إعداد:

عبد العزيز مصطفاي

التمرين 01:

n عدد صحيح . نضع $a=3n+7$ و $b=n+1$.

ـ أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ: a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4 .

الحل

لدينا d يقسم a و b ومنه d يقسم $a-3b$ ولدينا $a-3b=3n+7-3n-1=4$ إذن d يقسم العدد 4.

التمرين 02:

ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3.

برهن أن: $n+5$ مضاعف لـ $n-2$ إذا وفقط إذا كان $n=3$ أو $n=9$

الحل

$n+5\equiv 0[n-2]$ معناه $n-2+7\equiv 0[n-2]$ أي $7\equiv 0[n-2]$ ومنه $n-2\in\{1,7\}$ أي $n=3$ أو $n=9$.

التمرين 03:

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3.

أ ـ بين أن a يقسم n^2-2n+1.

ب ـ استنتج أن a يقسم $3n+2$.

جـ ـ بين إذن أن a يقسم 5.

د ـ ماهي القيم الصحيحة الممكنة لـ a.

الحل

أ ـ تبيين أن a يقسم n^2-2n+1.

لدينا a يقسم $n-1$ ومنه a يقسم $(n-1)^2$ أي a يقسم n^2-2n+1.

ب ـ استنتاج أن a يقسم $3n+2$.

لدينا a يقسم n^2-2n+1 و يقسم n^2+n+3 ومنه a يقسم $n^2+n+3-(n^2-2n+1)$ أي a يقسم $3n+2$.

جـ ـ تبيين أن a يقسم 5.

a قاسم لـ $3n+2$ و قاسم لـ $n-1$ إذن a قاسم لـ $3n+2-3(n-1)$ أي a قاسم للعدد 5.

لدينا a قاسم للعدد 5 إذن $a\in\{1,5,-1,-5\}$.

التمرين 04:

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

1. $3n\equiv 4[5]$
2. $n^2\equiv 4[5]$
3. $n^2\equiv n[5]$
4. $5n\equiv 2[7]$
5. $n^2-3n+4\equiv 0[7]$
6. $n^2+n\equiv 0[n+2]$.

الحل

.1

$n\equiv$	1	2	3	4	$[5]$
$3n\equiv$	3	1	4	2	$[5]$

$3n\equiv 4[5]$ يعني $n\equiv 3[5]$ أي $n=5p+3$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

طريقة 2: $3n\equiv 4[5]$ معناه $6n\equiv 8[5]$ لكن $6\equiv 1[5]$ و $8\equiv 3[5]$ ومنه $n\equiv 3[5]$ أي $n=5p+3$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

.2

$n\equiv$	1	2	3	4	$[5]$
$n^2\equiv$	1	4	4	1	$[5]$

$n^2 \equiv 4[5]$ يعني $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv 3[5]$ أي $n = 5p+2$ أو $n = 5p+3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

طريقة 2: $n^2 \equiv 4[5]$ يعني $n^2 - 4 \equiv 0[5]$ ومنه $(n-2)(n+2) \equiv 0[5]$ أي $n-2 \equiv 0[5]$ أو $n+2 \equiv 0[5]$ لأن العدد 5 أولي؛ ومنه $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv -2[5]$ وعليه $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv 3[5]$ وبالتالي $n = 5p+2$ أو $n = 5p+3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

.3

$[5]$	4	3	2	1	0	$n \equiv$
$[5]$	1	4	4	1	0	$n^2 \equiv$

$n^2 \equiv n[5]$ يعني $n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 1[5]$ أي $n = 5p$ أو $n = 5p+1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

طريقة 2: $n^2 \equiv n[5]$ يعني $n^2 - n \equiv 0[5]$ ومنه $n(n-1) \equiv 0[5]$ أي $n \equiv 0[5]$ أو $n-1 \equiv 0[5]$ لأن العدد 5 أولي؛ ومنه $n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 1[5]$ وعليه $n = 5p$ أو $n = 5p+1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

.4 لدينا $5n \equiv 2[7]$ و $5+2 \equiv 0[7]$ أي $2 \equiv -5[7]$ ومنه $5n \equiv -5[7]$ وعليه $n \equiv -1[7]$ وبالتالي $n \equiv 6[7]$ أي $n = 7p+6$ مع $p \in \mathbb{N}$.

.5 $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[7]$ و $3+4 \equiv 0[7]$ أي $4 \equiv -3[7]$ ومنه $n^2 + 4n + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $(n+2)^2 \equiv 0[7]$ إذن $n+2 \equiv 0[7]$ ومنه $n \equiv -2[7]$ إذن $n \equiv 5[7]$ أي $n = 7k+5$ مع $k \in \mathbb{N}$.

.6 $n^2 + n \equiv 0[n+2]$ تعني $n(n+1) \equiv 0[n+2]$ والعددان $n+1$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما لأنهما عددان طبيعيان متتابعان إذن حسب مبرهنة غوص يكون $n \equiv 0[n+2]$ ولدينا $n+2 \equiv 0[n+2]$ إذن بالطرح نجد $n+2-n \equiv 0[n+2]$ أي $2 \equiv 0[n+2]$ ومنه $n+2 \in \{1,2\}$ أي $n = 0$. ($n = -1$ مرفوض).

التمرين 05:

n عدد صحيح يختلف عن 1.

نضع $a = 3n+5$ و $b = n-1$.

1– أ- تحقق أن: $a = 3b+8$

ب - جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

2– نفرض أن n عدد طبيعي.

أ - برهن أن $p\gcd(a;b)$ هو قاسم للعدد 8.

ب - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $p\gcd(a;b) = 8$.

الحل

1– أ- التحقق أن: $a = 3b+8$

$a - 3b = 3n+5-3(n-1) = 8$ ومنه $a = 3b+8$.

ب - ايجاد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

لدينا $\frac{a}{b} = \frac{3b+8}{b} = 3 + \frac{8}{b}$.

$\frac{a}{b}$ عدد صحيح معناه $b \in \{1,2,4,8\}$ ومنه $n-1 \in \{1,2,4,8\}$ أي $n \in \{2,3,5,9\}$.

.2 أ - برهان أن $p\gcd(a;b)$ هو قاسم للعدد 8.

نضع $p\gcd(a;b) = d$ لدينا إذن d يقسم a ويقسم b ومنه d يقسم a ويقسم $3b$ فهو يقسم $a-3b$ أي d قاسم للعدد 8.

ب - تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $p\gcd(a;b) = 8$.

$d=8$ معناه كل من a و b مضاعف للعدد 8 ومعناه a مضاعف لـ8 و $2b$ مضاعف لـ8 ومنه $a-2b$ مضاعف لـ8

ولدينا $a-2b=3n+5-2n+2=n+7$ ومنه $n+7=8k$ أي $n=8k-7$ مع $k\in\mathbb{N}^*$.

يمكن الاعتماد على الموافقات.

$d=8$ معناه $\begin{cases}a\equiv0[8]\\b\equiv0[8]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3n+5\equiv0[8]\\n-1\equiv0[8]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}3n\equiv-5[8]\\n\equiv1[8]\end{cases}$ وعليه $\begin{cases}3n\equiv3[8]\\n\equiv1[8]\end{cases}$ أي $n\equiv1[8]$ وبالتالي

$n=8p+1$ مع $p\in\mathbb{N}$.

التمرين 06:

n عدد طبيعي حيث $n\geq5$، نعتبر العددين x و y حيث:

$x=2n^2-7n-4$ ، $y=n^3-n^2-12n$.

1– بين أن كل من العددين x و y يقبل $(n-4)$.

2– نضع : $\alpha=2n+1$ ، $\beta=n+3$ و $d=PGCD(\alpha,\beta)$.

أ ـ عين القيم الممكنة للعدد d.

ب ـ برهن أنه إذا كان: $\alpha\equiv0[5]$ و $\beta\equiv0[5]$ فإن $n-2\equiv0[5]$.

ج ـ عين قيم n التي يكون من أجلها $d=5$.

3– برهن أن: $PGCD(\alpha;n)=1$

4– أ ـ عين حسب قيم العدد $PGCD(x;y)$.

ب ـ تحقق من النتيجة السابقة من أجل $n=7$ ، $n=8$.

الحل

1– **تبيين أن كل من العددين x و y يقبل القسمة على $(n-4)$.**

من أجل $n=4$:

لدينا $x=2\times4^2-7\times4-4=32-28-4=0$ إذن x يقبل القسمة على $(n-4)$.

ولدينا $y=4^3-4^2-12\times4=64-16-48=0$ إذن y يقبل القسمة على $(n-4)$.

2. أ ـ تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا d يقسم α و يقسم β إذن d يقسم أي مزج خطي بين α و β أي يقسم $2\beta-\alpha$ ولدينا $2\beta-\alpha=5$ ومنه d يقسم 5 إذن $d\in\{1,5\}$.

ب ـ برهان أنه إذا كان: $\alpha\equiv0[5]$ و $\beta\equiv0[5]$ فإن $n-2\equiv0[5]$.

$\begin{cases}\alpha\equiv0[5]\\\beta\equiv0[5]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2n+1\equiv0[5]\\n+3\equiv0[5]\end{cases}$ معناه $(2n+1)-(n+3)\equiv0[5]$ أي $n-2\equiv0[5]$

ج ـ تعيين قيم n التي يكون من أجلها $d=5$.

$d=5$ معناه $\alpha\equiv0[5]$ و $\beta\equiv0[5]$ ومنه $n-2\equiv0[5]$ إذن $n\equiv2[5]$ أي $n=5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$.

3– **تبيين أن: $PGCD(\alpha;n)=1$**

تذكير: a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وُجد عددان صحيحان u و v بحيث $ua+vb=1$.

لدينا $\alpha-2n=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو العددان α و n أوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(\alpha;n)=1$.

4– **أ ـ تعيين حسب قيم n العدد $PGCD(x;y)$.**

لدينا $x=(n-4)(n^2+3n)$ ومنه $x=(n-4)n(n+3)$ أي $x=(n-4)n\beta$

و $y=(n-4)(2n+1)$ أي $y=(n-4)\alpha$.

$PGCD(x;y)=PGCD((n-4)n\beta;(n-4)\alpha)$ ومنه $PGCD(x;y)=(n-4)PGCD(n\beta;\alpha)$

ولدينا العددان α و n أوليان فيما بينهما ومنه $PGCD(n\beta;\alpha)=PGCD(\beta;\alpha)$.

إذن $PGCD(x;y)=(n-4)PGCD(\beta;\alpha)$.

لدينا حسب ما سبق إذا كان $n=5k+2$ فإن $PGCD(\beta;\alpha)=5$ ومنه $PGCD(x;y)=5(n-4)$.

اذا كان $n\neq 5k+2$ فإن $PGCD(\beta;\alpha)=1$ ومنه $PGCD(x;y)=n-4$.

ب ـ التحقق من النتيجة السابقة من أجل $n=7$ ، $n=8$.

من أجل $n=7$ أي $n=5\times 1+2$ إذن $n=5k+2$.

لدينا $x=2\times 7^2-7\times 7-4=45$ و $y=7^3-7^2-12\times 7=210$ إذن $PGCD(x;y)=15$ ومنه $PGCD(x;y)=5(7-4)$ أي $PGCD(x;y)=5(n-4)$.

من أجل $n=8$ أي $n\neq 5k+2$.

لدينا $x=2\times 8^2-7\times 8-4=68$ و $y=8^3-8^2-12\times 8=352$ إذن $PGCD(x;y)=4$ ومنه $PGCD(x;y)=8-4$ أي $PGCD(x;y)=n-4$.

التمرين 07: بكالوريا شعبة رياضيات 2013

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث: $\alpha=2n^3-14n+2$ و $\beta=n+3$.

أ ـ بيّن أنّ: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب ـ ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

جـ ـ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$.

2. أ ـ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب ـ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0[11]\\ n\equiv 2[10]\end{cases}$.

الحل

أ ـ تبيين أنّ: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;14)$.

بإجراء القسمة الإقليدية للعدد α على β نجد $\alpha=\beta(2n^2-6n+4)-10$ وبوضع $2n^2-6n+4=q$ نجد $\alpha=\beta q-10$.

نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta;10)=d'$.

لدينا $\alpha=\beta q-10$ ومنه $10=\beta q-\alpha$.

لدينا d يقسم β ومنه d يقسم βq ويقسم α إذن d يقسم $\beta q-\alpha$ أي d يقسم 10 ومنه d قاسم مشترك للعددين β و 10 وبالتالي d يقسم d'.

ولدينا d' يقسم β ومنه d' يقسم βq ويقسم 10 إذن d' يقسم $\beta q-10$ أي d' يقسم α ومنه d' قاسم مشترك للعددين α و β وبالتالي d' يقسم d وبما أن d يقسم d' فإن $d=d'$ إذن $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;14)$.

ب ـ القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

بما أنّ d يقسم 10 فإنّ $d\in\{1,2,5,10\}$.

جـ ـ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$.

$PGCD(\alpha;\beta)=5$ تعني $PGCD(\beta;10)=5$ إذن β مضاعف للعدد 5 وليس مضاعف للعدد 10 أي $\beta=5k$ و $k=2\lambda+1$ ومنه $\beta=5(2\lambda+1)$ معناه $\beta=10\lambda+5$ إذن $n+3=10\lambda+5$ أي $n=10\lambda+2$ مع $\lambda\in\mathbb{N}$.

2. أ ـ دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

$4^0\equiv 1[11]$ ، $4^1\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ و $4^5\equiv 1[11]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p ؛ $4^{5p}\equiv 1[11]$ ، $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ و $4^{5p+4}\equiv 3[11]$.

ب ـ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n}+4^{n}+n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[10] \end{cases}$.

$\begin{cases} 4^{5n}+4^{n}+n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[10] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 1+4^{10\lambda+2}+10\lambda+2\equiv 0[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 4^{5\times 2\lambda+2}+10\lambda+3\equiv 0[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} 10\lambda\equiv -8[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -\lambda\equiv -8[11] \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} \lambda=11\mu+8 \\ n=10\lambda+2 \end{cases}$ إذن $n=10(11\mu+8)+2$ أي $n=110\mu+82$

حيث μ عدد طبيعي.

التمرين 08:

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^{n} على 11.

2. برهن، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد A حيث $A=15^{5n+1}-2\times 26^{5n+2}+3\times 125^{5n+3}+1$ يقبل القسمة على 11.

3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\begin{cases} 15^{5n+1}+26^{5n+2}+3n\equiv 0[11] \\ 8\le n\le 50 \end{cases}$.

الحل

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^{n} على 11.

$4^{0}\equiv 1[11]$، $4^{1}\equiv 4[11]$، $4^{2}\equiv 5[11]$، $4^{3}\equiv 9[11]$، $4^{4}\equiv 3[11]$ و $4^{5}\equiv 1[11]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p؛ $4^{5p}\equiv 1[11]$، $4^{5p+1}\equiv 4[11]$، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ و $4^{5p+4}\equiv 3[11]$.

2. تبيين، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن العدد $A=15^{5n+1}-2\times 26^{5n+2}+3\times 125^{5n+3}+1$ يقبل القسمة على 11.

لدينا $15\equiv 4[11]$ ومنه $15^{5n+1}\equiv 4^{5n+1}[11]$ أي $15^{5n+1}\equiv 4[11]$

و $26\equiv 4[11]$ ومنه $26^{5n+2}\equiv 4^{5n+2}[11]$ أي $26^{5n+2}\equiv 5[11]$

و $125\equiv 4[11]$ ومنه $125^{5n+3}\equiv 4^{5n+3}[11]$ أي $125^{5n+3}\equiv 9[11]$

إذن $A\equiv 4-2\times 5+3\times 9+1[11]$ ومنه $A\equiv 22[11]$ أي $A\equiv 0[11]$ إذن العدد A يقبل القسمة على 11.

3. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\begin{cases} 15^{5n+1}+26^{5n+2}+3n\equiv 0[11] \\ 8\le n\le 50 \end{cases}$.

$15^{5n+1}+26^{5n+2}+3n\equiv 0[11]$ تعني $4+5+3n\equiv 0[11]$ تكافئ $9+3n\equiv 0[11]$ تكافئ $3(3+n)\equiv 0[11]$ وبما أن العددان 3 و 11 أوليان فيما بينهما فإن $3+n\equiv 0[11]$ ومنه $n\equiv -3[11]$ أي $n\equiv 8[11]$ إذن $n=11k+8$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ولدينا $8\le n\le 50$ معناه $8\le 11k+8\le 50$ يكافئ $0\le 11k\le 42$ أي $0\le k\le 3.8$ ومنه $k\in\{0,1,2,3\}$ أي $n\in\{8,19,30,41\}$.

التمرين 09:

1– عيّن الأعداد الصحيحة x والتي تحقق $x^{2}-x+6\equiv 0[9]$.

2– أ) ادرس تبعا لقيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^{n} على 9، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $7^{2n}\equiv 4^{n}[9]$.

ب) استنتج تبعا لقيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^{n} على 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون: $\begin{cases} 4^{n}+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9] \\ 2010\le\alpha\le 2020 \end{cases}$

3– ما هو باقي قسمة العدد $5^{2010}+25^{2011}$ على 9 ؟

4– عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $7^{2n}-7^{n}+6$ مضاعفا للعدد 9.

5– عين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ بحيث: $7^x+4^y\equiv 2[9]$.

الحل

1– **تعيين الأعداد الصحيحة x والتي تحقق** $x^2-x+6\equiv 0[9]$.

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[9]$
$x^2\equiv$	0	1	4	0	7	7	0	5	1	$[9]$
$x^2-x+6\equiv$	6	6	8	3	0	8	0	4	8	$[9]$

$x^2-x+6\equiv 0[9]$ معناه $x\equiv 4[9]$ أو $x\equiv 6[9]$ أي $x=9k+4$ أو $x=9k+6$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2– **أ) دراسة تبعا لقيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.**

$7^0\equiv 1[9]$ ، $7^1\equiv 7[9]$ ، $7^2\equiv 4[9]$ ، $7^3\equiv 1[9]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p ، $7^{3p}\equiv 1[9]$ ، $7^{3p+1}\equiv 7[9]$ ، $7^{3p+2}\equiv 4[9]$.

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4

تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n}\equiv 4^n[9]$.

لدينا $7^2\equiv 4[9]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $(7^2)^n\equiv 4^n[9]$ أي $7^{2n}\equiv 4^n[9]$.

ب) استنتاج تبعا لقيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9.

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون:
$$\begin{cases}4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9]\\ 2010\leq\alpha\leq 2020\end{cases}$$

$4^n+4^{n+1}+4^{n+2}+\alpha-4\equiv 0[9]$ معناه $4^n(1+4+4^2)+\alpha-5\equiv 0[9]$ ومنه $21\times 4^n+\alpha-5\equiv 0[9]$ ولدينا $21\equiv 3[9]$ إذن $3\times 4^n+\alpha-4\equiv 0[9]$

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7
باقي قسمة 3×4^n على 9	3	3	3

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3\times 4^n\equiv 3[9]$ إذن $3\times 4^n+\alpha-4\equiv 0[9]$ تكافئ $\alpha-1\equiv 0[9]$ أي $\alpha=9p+1$

ولدينا $2010\leq\alpha\leq 2020$ معناه $2010\leq 9p+1\leq 2020$ أي $223.22\leq p\leq 224.33$ وعليه $p=224$ وبالتالي $\alpha=2017$.

3– **تعيين باقي قسمة العدد $5^{2010}+25^{2011}$ على 9.**

نعلم أن $2011=3\times 670+1$ و $2010=3\times 670$.

لدينا $25\equiv 7[9]$ ومنه $25^{2011}\equiv 7^{2011}[9]$ إذن $25^{2011}\equiv 7^{3\times 670+1}[9]$ أي $25^{2011}\equiv 1[9]$.

و لدينا $5+4\equiv0[9]$ ومنه $5\equiv-4[9]$ إذن $5^{2010}\equiv(-4)^{2010}[9]$ وعليه $5^{2010}\equiv4^{3\times670}[9]$ أي $5^{2010}\equiv1[9]$.

إذن $5^{2010}+25^{2011}\equiv1+1[9]$ أي $5^{2010}+25^{2011}\equiv2[9]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $5^{2010}+25^{2011}$ على 9 هو 2.

4– تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9.

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة $7^{2n}-7^n+6$ على 9	6	3	0

إذا كان $n=3p+2$ حيث $p\in\mathbb{N}$ فإن العدد $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9

يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول:

$x^2-x+6\equiv0[9]$ معناه $x\equiv4[9]$ أو $x\equiv6[9]$.

ومنه $7^{2n}-7^n+6$ مضاعفا للعدد 9 معناه $7^n\equiv4[9]$ أي $n=3p+2$ أو $7^n\equiv6[9]$ وهذا غير ممكن لأن بواقي 7^n على 9 هي 1، 7 أو 4.

6– تعيين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ بحيث: $7^x+4^y\equiv2[9]$.

x	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^x على 9	1	7	4

y	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة 4^y على 9	1	4	7

$7^x+4^y\equiv2[9]$ معناه $(x;y)=(3p;3k)$ أو $(x;y)=(3p+1;3k+1)$ أو $(x;y)=(3p+2;3k+2)$ وعليه $(x;y)\in\{(3p;3k),(3p+1;3k+1),(3p+2;3k+2)\}$.

التمرين 10:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .... $(x+1)^2=9+5y$

1. إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E)؛ بين أن $x\equiv1[5]$ أو $x\equiv2[5]$.
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).
3. بين أنه، إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x;y)$ يقسم 8.
4. حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة: $\begin{cases}\overline{121}^x=\overline{59}^y\\ PGCD(x;y)=8\\ x\equiv1[5]\end{cases}$.

الحل

تبيين أن $x\equiv1[5]$ أو $x\equiv2[5]$.

$(x+1)^2=9+5y$ معناه $(x+1)^2=9[5]$ أي $(x+1)^2\equiv4[5]$.

$[5]$	4	3	2	1	0	$x\equiv$
$[5]$	0	4	3	2	1	$x+1$
$[5]$	0	1	4	4	1	$(x+1)^2$

$(x+1)^2 \equiv 4[5]$ معناه $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

إذا كان $x \equiv 1[5]$ أي $x = 5k+1$ لدينا $(5k+1+1)^2 = 9+5y$ ومنه $25k^2+20k+4 = 9+5y$ يكافئ $5y = 25k^2+20k-5$ أي $y = 5k^2+4k-1$ وعليه $(x,y) \in (5k+1, 5k^2+4k-1)$.

إذا كان $x \equiv 2[5]$ أي $x = 5k+2$ لدينا $(5k+2+1)^2 = 9+5y$ ومنه $25k^2+30k+9 = 9+5y$ يكافئ $5y = 25k^2+30k$ أي $y = 5k^2+6k$ وعليه $(x,y) \in (5k+2, 5k^2+6k)$.

3. تبيين أنه، إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x;y)$ يقسم 8.

$(x+1)^2 = 9+5y$ تكافئ $x^2+2x+1 = 9+5y$ تكافئ $x^2+2x-5y = 8$ أي $(x+2)x-5y = 8$.

نضع $PGCD(x,y) = d$.

لدينا d يقسم x ومنه d يقسم $(x+2)x$ ويقسم y إذن d يقسم $(x+2)x-5y$ أي d يقسم 8.

4. حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة: $\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x;y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} \ldots (1)$.

(1) تكافئ $\begin{cases} 1\times x^0 + 2x + 1\times x^2 = 9\times y^0 + 5y \\ PGCD(x;y) = 8 \\ x = 5k+1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 1+2x+x^2 = 9+5y \\ PGCD(x;y) = 8 \\ x = 5k+1 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} (x+1)^2 = 9+5y \ldots\ldots (E) \\ PGCD(x;y) = 8 \\ x = 5k+1 \end{cases}$ وعليه $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ PGCD(x;y) = 8 \end{cases}$.

$PGCD(x,y) = 8$ يعني $x \equiv 0[8]$ و $y \equiv 0[8]$ ومنه $5k+1 \equiv 0[8]$ ومنه $5k \equiv -1[8]$ ومعناه $15k \equiv -3[8]$

ولدينا $15 \equiv -1[8]$ إذن $-k \equiv -3[8]$ أي $k = 8\alpha+3$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ وبالتالي $\begin{cases} x = 5(8\alpha+3)+1 \\ y = 5(8\alpha+3)^2 + 4(8\alpha+3) - 1 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} x = 40\alpha+16 \\ y = 320\alpha^2 + 272\alpha + 56 \end{cases}$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

التمرين 11:

1. عيّن $PGCD(2688;3024)$.
2. أ - تحقق أن المعادلتين $2688x + 3024y = -3360 \ldots (1)$ و $8x+9y = -10 \ldots (2)$ متكافئتان.

   ب - تحقق أن $(1;-2)$ حل للمعادلة (2).
3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتيهما على الترتيب: $x+2y-z = -2$ و $3x-y+5z = 0$.

   أ - بين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d).

   ب - بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)، ثم استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل

1. تعيين $PGCD(2688;3024)$.

لدينا $2688 = 2^7 \times 3 \times 7$ و $3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$ ومنه $PGCD(2688;3024) = 2^4 \times 3 \times 7$ أي $PGCD(2688;3024) = 336$.

2. أ ـ التحقق أن المعادلتين $2688x + 3024y = -3360 ....(1)$ **و** $8x + 9y = -10....(2)$ **متكافئتان.**

(1) تكافئ $336(8x + 9y) = -3360$ تكافئ $8x + 9y = \dfrac{-3360}{336}$ أي $8x + 9y = -10$.

ب ـ التحقق أن $(1;-2)$ **حل للمعادلة** (2)**.**

لدينا $8 \times 1 + 9 \times (-2) = 8 - 18 = -10$ إذن $(1;-2)$ حل للمعادلة (2).

2.أ ـ تبيين أن المستويين (P) **و** (P') **يتقاطعان وفق مستقيم** (d)**.**

لدينا $\vec{n}(1;2;-1)$ و $\vec{n}'(3;-1;5)$ شعاعان ناظميان للمستويين (P) و (P') على الترتيب و $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{1}{3}$ ومنه $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d).

ب ـ تبيين أن إحداثيات نقط (d) **تحقق المعادلة** (2)**.**

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (d)$ معناه $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$ أي $8x + 9y = -10$.

ومنه إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

استنتاج (E) **مجموعة نقط** (d) **التي إحداثياتها أعداد صحيحة.**

نحل المعادلة (2)**.**

لدينا $\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8 \times 1 + 9 \times (-2) = -10 \end{cases}$ بالطرح نحصل على $8(x-1) + 9(y+2) = 0$ أي $8(x-1) = -9(y+2)$ لدينا 9 يقسم $8(x-1)$ والعددان 9 و 8 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 9 يقسم $x-1$ ومنه $x - 1 = 9k$ أي $x = 9k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في $8(x-1) = -9(y+2)$ نجد $8 \times 9k = -9(y+2)$ ومنه $y + 2 = -8k$ أي $y = -8k - 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن إحداثيات النقطة M من الشكل $M(9k+1; -8k-2; z)$ ولدينا $M \in (P)$ معناه $9k + 1 - 16k - 4 - z = -2$ أي $z = -7k - 1$ وبالتالي $M(9k+1; -8k-2; -7k-1)$ حيث k عدد صحيح.

التمرين 12:

1− حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y'): $9x' - 14y' = 13$ علما أن $(3,1)$ حلا لها

2− نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y): $45x - 28y = 130$

. بين أنه إذا كان (x, y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5، ثم حل هذه المعادلة.

3− N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7.

. عيّن α و β، ثم اكتب N في النظام العشري .

الحل

1− حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **المعادلة ذات المجهول** (x', y') **:** $9x' - 14y' = 13$ **علما أن** $(3,1)$ **حلا لها**

لدينا $\begin{cases} 9x'-14y'=13 \\ 9(3)-14(1)=13 \end{cases}$ بالطرح نحصل على $9(x'-3)-14(y'-1)=0$ أي $9(x'-3)=14(y'-1)$ لدينا 14 يقسم $9(x'-3)$ و 14 و9 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص

14 يقسم $x'-3$ ومنه $x'-3=14k$ أي $x'=14k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في $9(x'-3)=14(y'-1)$ نجد

$14(y'-1)=9\times 14k$ ومنه $y'-1=9k$ أي $y'=9k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2– نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x,y): $45x-28y=130$

تبيين أنه إذا كان (x,y) حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.

$45x-28y=130$ تكافئ $45x=28y+130$ أي $45x=2(y+65)$ ومنه 2 يقسم $45x$ والعددان 2 و 45 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2.

وكذلك لدينا $28y=45x-130$ أي $28y=5(x-26)$ ومنه 5 يقسم $28y$ والعددان 5 و 28 لأوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5.

حل المعادلة.

x مضاعف للعدد 2 معناه $x=2x'$ حيث $x'\in\mathbb{Z}$ و y مضاعف للعدد 5 معناه $y=5y'$ حيث $y'\in\mathbb{Z}$

إذن $45x-28y=130$ تكافئ $45\times 2x'-28\times 5y'=130$ تكافئ $10(9x'-14y')=130$ أي $9x'-14y'=13$

وحسب ما سبق $x'=14k+3$ و $y'=9k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وعليه $x=2(14k+3)$ و $y=5(9k+1)$ أي $x=28k+6$ و $y=45k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3– N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و $\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7.

تعيين α و β، ثم كتابة N في النظام العشري.

لدينا $N=3\times 9^0+\alpha\times 9^1+\alpha\times 9^2+2\times 9^3$ ومنه $N=3+9\alpha+81\alpha+1458$ أي $N=90\alpha+1461$ حيث $0\le\alpha\le 8$ ومن جهة أخرى $N=6\times 7^0+\beta\times 7^1+\beta\times 7^2+5\times 7^3$

أي $N=56\beta+1721$ حيث $0\le\beta\le 6$ وعليه $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومنه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$ وحسب ماسبق $\alpha=28k+6$ و $\beta=45k+5$ مع $k\in\mathbb{N}$ ولدينا $0\le\alpha\le 8$ و $0\le\beta\le 6$ معناه $28k+6\le 8$ و $45k+5\le 6$ أي $k\le\frac{1}{14}$ و $k\le\frac{1}{45}$ وعليه $k=0$ وبالتالي $\alpha=6$ و $\beta=5$

إذن $N=90\times 6+1461=2001$.

التمرين 13:

1. من أجل كل عدد حقيقي t أنشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$.
2. a، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a=\overline{102}$، $b=\overline{125}$ و $c=\overline{13154}$.
   - أ ـ علما أنّ $ab=c$ جد قيمة العدد الحقيقي p.
   - ب ـ اكتب كلا من الأعداد a، b و c في النظام العشري.
3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x-53y=15......(1)$
   - أ ـ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $x\equiv 52[53]$
   - ب ـ استنتج حلول المعادلة (1).
4. نعتبر الآن x و y عددان طبيعيان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.
   - أ ـ عيّن القيم الممكنة للعدد d.
   - ب ـ جد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.
5. أ ـ ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.
   - ب ـ من أجل كل $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1)؛ عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x\times 1432^{2y}$ على 7.

الحل

1. نشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$ من أجل كل عدد حقيقي t

$$(t-6)(t^2+1)=t^3+t-6t^2-6$$

2. a، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a=\overline{102}$، $b=\overline{125}$ و $c=\overline{13154}$.

أ ـ علما أنّ $ab=c$ إيجاد قيمة العدد الحقيقي p.

لدينا $a=2\times p^0+0\times p^1+p^2=2+p^2$، $b=5\times p^0+2\times p^1+p^2=5+2p+p^2$

$b=4\times p^0+5\times p^1+p^2+3p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

$ab=c$ معناه $(2+p^2)(5+2p+p^2)=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

ويكافئ $10+4p+2p^2+5p^2+2p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$ ويكافئ $p^3-6p^2+p-6=0$

أي $(t-6)(t^2+1)=0$ ومنه $t=6$.

ب ـ كتابة كلا من الأعداد a، b و c في النظام العشري.

$a=2+6^2=38$، $b=5+2\times6+6^2=53$ و $c=4+5\times6+6^2+3\times6^3+6^4=2014$

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x-53y=15......(1)$

أ ـ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $x\equiv52[53]$

$38x-53y=15$ يكافئ $38x=15+53y$ وهذا يعني أنّ $38x=15[53]$ ولدينا $38=-15[53]$

ومنه $-15x=15[53]$ أي $x=-1[53]$ وعليه $x=52[53]$.

ب ـ استنتاج حلول المعادلة (1).

لدينا $x=53k+52$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في (1) نجد $38(53k+52)-53y=15$ ومنه $y=38k+37$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ من الشكل $(53k+52;38k+37)$ و $k\in\mathbb{Z}$

4. نعتبر الآن x و y عددان طبيعيان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ ـ تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $38x-53y$ أي d يقسم 15 وبالتالي $d\in\{1;3;5;15\}$.

ب ـ إيجاد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.

نضع $x=15x'$ و $y=15y'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما.

نحصل على $38\times15x'-53\times15y'=15$ ومنه $38x'-53y'=1$ لدينا الثنائية $(7;5)$ حلا خاصا للمعادلة

ومنه $\begin{cases}38x'-53y'=1\\38\times7-53\times5=1\end{cases}$ بالطرح نجد $38(x'-7)-53(y'-5)=0$ أي $38(x'-7)=53(y'-5)$

لدينا 53 يقسم $38(x'-7)$ والعددان 53 و 38 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 53 يقسم $x'-7$ ومنه

$x'-7=53\alpha$ أي $x'=53\alpha+7$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبالتعويض في $38(x'-7)=53(y'-5)$ نجد

$38\times53\alpha=53(y'-5)$ ومنه $y'-5=38\alpha$ أي $y'=38\alpha+5$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبما أنّ $38x'-53y'=1$ فإنه

حسب مبرهنة بيزو يكون العددان x' و y' أوليان فيما بينهما وبالتالي $x=15(53\alpha+7)$ أي $x=795\alpha+105$

و $y=15(38\alpha+5)$ أي $y=570\alpha+75$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

5. أ ـ دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

لدينا $4^0\equiv1[7]$، $4^1\equiv4[7]$، $4^2\equiv2[7]$ و $4^3\equiv1[7]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p، $4^{3p}\equiv1[7]$، $4^{3p+1}\equiv4[7]$ و $4^{3p+2}\equiv2[7]$.

ب ـ من أجل كل $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x\times1432^{2y}$ على 7.

$2013^{x}\times1432^{2y}=2013^{53k+52}\times1432^{2(38k+37)}$

لدينا $2013\equiv4[7]$ و $1432\equiv4[7]$ معناه $2013^{x}\times1432^{2y}\equiv4^{53k+52}\times4^{2(38k+37)}[7]$

ويكافئ $2013^{x}\times1432^{2y}\equiv4^{129k+126}[7]$ ويكافئ $2013^{x}\times1432^{2y}\equiv4^{3(43k+42)}[7]$ أي $2013^{x}\times1432^{2y}\equiv1[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^{x}\times1432^{2y}$ على 7 هو 1.

التمرين 14:

1- أثبت أن العدد 1999 أولي.

2- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر الأعداد :

$c_n=2.10^{n}+1$ ، $b_n=2.10^{n}-1$ ، $a_n=4.10^{n}-1$.

أ ـ احسب كلا من a_3 ، b_3 و c_3.

ب ـ أثبت أن العددين a_n ، c_n يقبلان القسمة على 3.

جـ ـ أثبت أن: $b_n c_n=a_{2n}$ ثم استنتج تحليلا لجداء عوامل أولية للعدد a_6.

3- برهن أن $PGCD(b_n,c_n)=PGCD(b_n,2)$ ، ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

4- نعتبر المعادلة : $b_3x+c_3y=1.....(*)$ ذات المجهولين x و y.

ـ باستعمال خوارزمية اقليدس ، عين حلا خاصا للمعادلة $(*)$، ثم عين حلول المعادلة $(*)$.

الحل

1- **إثبات أن العدد 1999 أولي.**

لدينا $\sqrt{1999}\simeq44.7$ والعدد 1999 لايقبل القسمة على كل من الأعداد 1، 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41 و 43 فهو إذن عدد أولي.

2. أ ـ حساب كلا من a_3 ، b_3 و c_3.

$a_3=4\times10^{3}-1=3999$ ، $b_3=2\times10^{3}-1=1999$ و $c_3=2\times10^{3}+1=2001$.

ب ـ إثبات أن العددين a_n ، c_n يقبلان القسمة على 3.

$10\equiv1[3]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $10^{n}\equiv1[3]$ ولدينا $4\equiv1[3]$ إذن $4\times10^{n}\equiv1[3]$ ومنه $4\times10^{n}-1\equiv0[3]$

أي $a_n\equiv0[3]$ وهذا يعني أن a_n يقبل القسمة على 3.

ولدينا $10^{n}\equiv1[3]$ معناه $2\times10^{n}\equiv2[3]$ ومنه $2\times10^{n}+1\equiv3[3]$ أي $c_n\equiv0[3]$ وهذا يعني أنّ c_n يقبل القسمة على 3.

جـ ـ إثبات أن: $b_n c_n=a_{2n}$ واستنتاج تحليلا لجداء عوامل أولية للعدد a_6.

$b_n c_n=(2.10^{n}-1)(2.10^{n}+1)=(2.10^{n})^{2}-1=4.10^{2n}-1=a_{2n}$.

إذن $a_6=a_{2\times3}=b_3c_3=1999\times2001=1999\times3\times23\times29$.

3- **برهان أن** $PGCD(b_n,c_n)=PGCD(c_n,2)$.

لدينا $c_n=b_n+2$ ومنه $PGCD(b_n,c_n)=PGCD(c_n,2)$.

نضع $d=PGCD(b_n,c_n)$ ومنه $d=PGCD(c_n,2)$ لدينا إذن $d\in\{1,2\}$ وبما أن العدد c_n فردي فإن $d=1$ أي أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

التمرين 15:

1. عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x\equiv33[5]$.

2. أ ـ حل في $\mathbb{Z}^{2}$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $4x-5y=33.....(E)$

ب ـ استنتج حلول الجملة $\begin{cases}\lambda\equiv55[5]\\ \lambda\equiv22[4]\end{cases}$ حيث $\lambda\in\mathbb{Z}$.

جـ ـ عين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x+y+3|<27$.

3 أ ـ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^{n} على 11.

ب ـ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$.

جـ ـ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} n-5^n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[5] \end{cases}$.

4. N عدد طبيعي يكتب $\overline{abbaba}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث $a\neq 0$.
عين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33، ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ أن $11\times 3=33$)

الحل

1. تعيين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x\equiv 33[5]$.

لدينا $33\equiv 3[5]$ و $4\equiv -1[5]$ ومنه $4x\equiv 33[5]$ تعني $-x\equiv 3[5]$ تكافئ $x\equiv -3[5]$ ومنه $x\equiv 2[5]$ أي $x=5k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2. أ ـ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $4x-5y=33.....(E)$

(E) تكافئ $4x=33+5y$ ومنه $4x\equiv 33[5]$ أي $x=5k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في (E) نجد $4(5k+2)-5y=33$ ومنه $5y=20k-25$ أي $y=4k-5$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن (E) تكافئ $(x,y)\in\{5k+2,4k-5\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب ـ استنتاج حلول الجملة $\begin{cases} \lambda\equiv 55[5] \\ \lambda\equiv 22[4] \end{cases}$ حيث $\lambda\in\mathbb{Z}$.

$\begin{cases} \lambda\equiv 55[5] \\ \lambda\equiv 22[4] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \lambda=5v+55 \\ \lambda=4u+22 \end{cases}$ ومنه $4u+22=5v+55$ أي $4u-5v=33$ ومنه الثنائية (u,v) حل للمعادلة (E) إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $u=5k+2$ ومنه $\lambda=4(5k+2)+22$ أي $\lambda=20k+30$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

جـ ـ تعيين جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x+y+3|<27$.

$|x+y+3|<27$ تعني $|5k+2+4k-5+3|<27$ ومنه $|9k|<27$ يكافئ $-27<9k<27$ أي $-3<k<3$ ومنه $k\in\{-2,-1,0,1,2\}$ وعليه $(x,y)\in\{(-8,-13),(-3,-9),(2,-5),(7,-1),(12,3)\}$.

3 أ ـ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 11.

لدينا $5^0\equiv 1[11]$، $5^1\equiv 5[11]$، $5^2\equiv 3[11]$، $5^3\equiv 4[11]$، $5^4\equiv 9[11]$ و $5^5\equiv 1[11]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p: $5^{5p}\equiv 1[11]$، $5^{5p+1}\equiv 5[11]$، $5^{5p+2}\equiv 3[11]$، $5^{5p+3}\equiv 4[11]$ و $5^{5p+4}\equiv 9[11]$.

ب ـ بره ان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$.

لدينا $10\equiv -1[11]$ ومنه $10^{10n}\equiv(-1)^{10n}[11]$ أي $10^{10n}\equiv 1[11]$.

و $16\equiv 5[11]$ ومنه $16^{5n-4}\equiv 5^{5n-4}[11]$ يكافئ $16^{5n-4}\equiv 5^{5(n-1)+1}[11]$ إذن $16^{5n-4}\equiv 5^{5p+1}[11]$ أي $16^{5n-4}\equiv 5[11]$.

و $27\equiv 5[11]$ ومنه $27^{5n+2}\equiv 5^{5n+2}[11]$ أي $27^{5n+2}\equiv 3[11]$.

و $38\equiv 5[11]$ ومنه $38^{5n+3}\equiv 5^{5n+3}[11]$ أي $38^{5n+3}\equiv 4[11]$.

و $49\equiv 5[11]$ ومنه $49^{5n-1}\equiv 5^{5n-1}[11]$ يكافئ $49^{5n-1}\equiv 5^{5(n-1)+4}[11]$ إذن $49^{5n-1}\equiv 5^{5p+4}[11]$ أي $49^{5n-1}\equiv 9[11]$

إذن $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 1+5+3+4+9[11]$ ومنه $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 22[11]$ أي $10^{10n}+16^{5n-4}+27^{5n+2}+38^{5n+3}+49^{5n-1}\equiv 0[11]$.

جـ ـ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} n-5^n\equiv 0[11] \\ n\equiv 2[5] \end{cases}$.

$n\equiv 2[5]$ معناه $n=5p+2$ ومنه $5^n\equiv 3[11]$ إذن:

$\begin{cases} n-5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ تعني $\begin{cases} n-3 \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 3[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n = 11\alpha+3 \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n = 11\alpha+3 \\ 11\alpha+3 \equiv 2[5] \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} n = 11\alpha+3 \\ 11\alpha \equiv -1[5] \end{cases}$ ولدينا $11 \equiv 1[5]$ و $-1 \equiv 4[5]$ إذن $\begin{cases} n = 11\alpha+3 \\ \alpha \equiv 4[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n = 11\alpha+3 \\ \alpha \equiv 5p+4 \end{cases}$ ومنه

$\begin{cases} n = 11(5p+4)+3 \\ \alpha \equiv 5p+4 \end{cases}$ أي $n = 55p+47$ مع $p \in \mathbb{N}$.

4. تعيين a و b بحيث يكون N قابلا للقسمة على 33 ، ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ أن $11\times3=33$)

$N = \overline{abbaba} = a\times4^0 + b\times4^1 + a\times4^2 + b\times4^3 + b\times4^4 + a\times4^5$

أي $N = 1041a + 324b$.

$N \equiv 0[33]$ يكافئ $N \equiv 0[3]$ و $N \equiv 0[11]$ لأن العددان 3 و 11 أوليان فيما بينهما.

لدينا $N = 1041a + 324b = 3(347a + 108b)$ ومنه N مضاعف للعدد 3.

إذن $N \equiv 0[33]$ معناه $N \equiv 0[11]$ يكافئ $1041a + 324b \equiv 0[11]$ يكافئ $7a + 5b \equiv 0[11]$.

لدينا $1 \le a \le 3$ معناه $7 \le 7a \le 21$ وكذلك $0 \le b \le 3$ معناه $0 \le 5b \le 15$ إذن $1 \le 7a + 5b \le 36$ وهذا يعني أنّ $7a + 5b \in \{11, 22, 33\}$.

الحالة الأولى: $7a + 5b = 11$.

إذا كان $a = 1$ فإن $7 + 5b = 11$ ومنه $b = \frac{4}{5}$ مرفوض.

إذا كان $a = 2$ فإن $14 + 5b = 11$ ومنه $b = -\frac{3}{5}$ مرفوض.

إذا كان $a = 3$ فإن $21 + 5b = 11$ ومنه $b = -2$ مرفوض.

الحالة الثانية: $7a + 5b = 22$

إذا كان $a = 1$ فإن $7 + 5b = 22$ ومنه $b = 3$ ومنه $N = 1041 + 324\times3 = 2013$.

إذا كان $a = 2$ فإن $14 + 5b = 22$ ومنه $b = \frac{8}{5}$ مرفوض.

إذا كان $a = 3$ فإن $21 + 5b = 22$ ومنه $b = \frac{1}{5}$ مرفوض.

الحالة الثالثة: $7a + 5b = 33$

إذا كان $a = 1$ فإن $7 + 5b = 33$ ومنه $b = \frac{26}{5}$ مرفوض.

إذا كان $a = 2$ فإن $14 + 5b = 33$ ومنه $b = \frac{19}{5}$ مرفوض.

إذا كان $a = 3$ فإن $21 + 5b = 33$ ومنه $b = \frac{12}{5}$ مرفوض.

إذن $(a,b) = (1,3)$ و $N = 2013$.

طريقة ثانية

a	1	2	3	
b	0	1	2	3
$7a$	7	14	21	
$5b$	0	5	10	15

$7a + 5b \equiv 0[11]$ معناه $(7a, 5b) = (7, 15)$ أي $(a,b) = (1,3)$.

التمرين 16:

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x-5y=3....(1)$.

2- ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية (p,q) من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

أ - بيّن أنّ الثنائية (p,q) حل للمعادلة (1) ثمّ استنتج أن: $m\equiv 9[40]$

ب - عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 .

3- ليكن k عددا طبيعيا

أ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب - ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟

4- ليكن a و b عددان طبيعيان حيث $0<a\leq 9$ و $b\leq 9$ ونعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل $N=\overline{a00b}$ ؛ ($N=a\times 10^3+b$) نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7 .

أ - تحقق أن: $10^3\equiv -1[7]$.

ب - استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 .

الحل

نلاحظ أن الثنائية $(1,1)$ حل للمعادلة (1) لدينا إذن $\begin{cases}8x-5y=3\\8\times 1-4\times 1=3\end{cases}$ بالطرح نحصل على $8(x-1)-5(y-1)=0$

أي $8(x-1)=5(y-1)$ لدينا 5 يقسم $8(x-1)$ والعددان 5 و 8 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $x-1$ ومنه $x-1=5k$ أي $x=5k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في $8(x-1)=5(y-1)$ نجد $5(y-1)=8\times 5k$ ومنه $y-1=8k$ أي $y=8k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2. أ - تبيين أنّ الثنائية (p,q) حل للمعادلة (1)

لدينا $m=8p+1$ و $m=5q+4$ ومنه $8p+1=5q+4$ أي $8p-5q=3$ وعليه الثنائية (p,q) حل للمعادلة (1).

استنتاج أن: $m\equiv 9[40]$.

(p,q) حل للمعادلة (1) إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $p=5k+1$ ومنه $m=8p+1=8(5k+1)+1$ أي $m=40k+9$ وبالتالي $m\equiv 9[40]$.

ب - تعيين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 .

$m>2000$ معناه $40k+9>2000$ يكافئ $40k>1991$ ومنه $k>\dfrac{1991}{40}$ أي $k>49.7$ وعليه $k=50$ أي $m=40\times 50+9=2009$.

3. أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

لدينا $2^3\equiv 1[7]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k، $\left(2^3\right)^k\equiv 1[7]$ أي $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب - تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟

لدينا $2009=3\times 669+2$.

ولدينا $2^{3\times 669}\equiv 1[7]$ إذن $2^{3(669)}\times 2^2\equiv 2^2[7]$ ومنه $2^{3\times 669+2}\equiv 4[7]$ أي $2^{2009}\equiv 4[7]$ وبالتالي باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 هو 4.

أ - التحقق أن: $10^3\equiv -1[7]$.

لدينا $10^3+1=1001=7\times 143$ ومنه $10^3+1\equiv 0[7]$ أي $10^3\equiv -1[7]$.

ب - استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 .

$N\equiv 0[7]$ معناه $a\times 10^3+b\equiv 0[7]$ ومنه $-a+b\equiv 0[7]$ أي $b\equiv a[7]$ وبما أنّ $0<a\leq 9$ و $b\leq 9$ فإنّ:

$(a,b)\in\{(1,1),(1,8),(2,2),(2,9),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(7,0),(8,8),(8,1),(9,9),(9,2)\}$ ومنه

$N \in \{1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 7000, 8008, 8001, 9009, 9002\}$

التمرين 17: (بكالوريا تقني رياضي 2010).

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي.

1- عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha = 4$، اكتب العدد n في النظام العشري.

الحل

1- تعيين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

لدينا $n = 7^4 + 7^3 + \alpha \times 7^2$ ولدينا $7 \equiv 1[3]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k، $7^k \equiv 1[3]$.

$n \equiv 0[3]$ معناه $7^4 + 7^3 + \alpha \times 7^2 \equiv 0[3]$ ومنه $1 + 1 + \alpha \equiv 0[3]$ وعليه $\alpha \equiv -2[3]$ أي $\alpha \equiv 1[3]$ وبما أن $0 \leq \alpha \leq 6$ فإن $\alpha = 1$ أو $\alpha = 4$.

2- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

لدينا $n = 7^2(7^2 + 7 + \alpha)$ ومنه $n = 7^2(56 + \alpha)$.

$n \equiv 0[5]$ معناه $7^2(56 + \alpha) \equiv 0[5]$ ولدينا 7 و 5 أوليان فيما بينهما ومنه 7^2 و 5 أوليان فيما بينهما إذن $56 + \alpha \equiv 0[5]$ ومنه $1 + \alpha \equiv 0[5]$ أي $\alpha \equiv 4[5]$ وبما أن $0 \leq \alpha \leq 6$ فإنّ $\alpha = 4$.

استنتاج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

من أجل $\alpha = 4$ يكون $n \equiv 0[3]$ و $n \equiv 0[5]$ وبما أن العددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما فإن $n \equiv 0[15]$ أي n يقبل القسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha = 4$، كتابة العدد n في النظام العشري.

$n = 7^4 + 7^3 + 4 \times 7^2 = 2940$.

التمرين 18: (بكالوريا تقني رياضي 2017).

1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k} \equiv 1[11]$.

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

3) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $\left(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1\right)$ يقبل القسمة على 11.

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3\right)$ قابلا للقسمة على 11.

الحل

1) تبيين أنّ: من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k} \equiv 1[11]$.

لدينا $4^5 \equiv 1[11]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k، $\left(4^5\right)^k \equiv 1[11]$ أي $4^{5k} \equiv 1[11]$.

2) استنتاج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي k، $4^{5k} \equiv 1[11]$ ومنه $4 \times 4^{5k} \equiv 4[11]$ أي $4^{5k+1} \equiv 4[11]$ و $4^{5k+2} \equiv 5[11]$ و $4^{5k+3} \equiv 9[11]$ و $4^{5k+4} \equiv 3[11]$.

3) تبيين أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $\left(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1\right)$ يقبل القسمة على 11.

لدينا $2017 \equiv 4[11]$ ومنه $(2017)^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11]$ و $4^{5n+3} \equiv 9[11]$ إذن $(2017)^{5n+3} \equiv 9[11]$ أي $2 \times (2017)^{5n+3} \equiv 7[11]$؛ $1438^{10n} \equiv 8^{10n}[11]$ ومنه $1438^{10n} \equiv \left(2^3\right)^{2(5n)}[11]$ ومنه $1438^{10n} \equiv \left(2^2\right)^{3(5n)}[11]$ أي $1438^{10n} \equiv 4^{5(3n)}[11]$ و $4^{5(3n)} \equiv 1[11]$ إذن $1438^{10n} \equiv 1[11]$ ومنه $3 \times 1438^{10n} \equiv 3[11]$ وعليه:

$2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 7+3+1[11]$ أي $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 0[11]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، $\left(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\right)$ يقبل القسمة على 11.

4) **تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)$ قابلا للقسمة على 11.**

$2017^{5n+2}\equiv 4^{5n+2}[11]$ ومنه $2017^{5n+2}\equiv 5[11]$ أي $2\times 2017^{5n+2}\equiv 10[11]$ إذن $2\times 2017^{5n+2}+n-3\equiv 7+n[11]$.

$\left(2\times 2017^{5n+2}+n-3\right)$ يقبل القسمة على 11 معناه $2\times 2017^{5n+2}+n-3\equiv 0[11]$ ومنه $7+n\equiv 0[11]$ يكافئ $n\equiv -7[11]$ يكافئ $n\equiv 6[11]$ أي $n=11k+6$ مع $k\in\mathbb{N}$.

التمرين 19:

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $3x-7y=14....(1)$

أ- بين أن الثنائية $(7,1)$ حلا للمعادلة (1).

ب - عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1).

جـ - ماهي القيم الممكنة لـ $(x;y)$ حتى يكون y قاسما لـ x ؟

2. أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب - ماهو باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 ؟

3. ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n=4^n-n+1$.

أ - عين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7.

ب - استنتج باقي قسمة $A_{2010}-A_{2009}$ على 7.

الحل

1. أ- تبيين أن الثنائية $(7,1)$ حلا للمعادلة (1).

لدينا $3\times 7-7\times 1=21-7=14$ ومنه الثنائية $(7,1)$ حل للمعادلة (1).

ب - تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1).

لدينا $\begin{cases}3x-7y=14\\3\times 7-7\times 1=14\end{cases}$ بالطرح نحصل على $3(x-7)-7(y-1)=0$ أي $3(x-7)=7(y-1)$ لدينا 7 يقسم $3(x-7)$ والعددان 7 و 3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 7 يقسم $x-7$ ومنه $x-7=7k$ أي $x=7k+7$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في $3(x-7)=7(y-1)$ نجد $7(y-1)=3\times 7k$ ومنه $y-1=3k$ أي $y=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

إذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ من الشكل $(7k+7,3k+1)$.

جـ - تعيين القيم الممكنة لـ $(x;y)$ حتى يكون y قاسما لـ x ؟

y قاسم لـ x معناه $x\equiv 0[y]$ يكافئ $7k+7\equiv 0[3k+1]$ ومنه $\begin{cases}7k+7\equiv 0[3k+1]\\3k+1\equiv 0[3k+1]\end{cases}$ وعليه

$\begin{cases}21k+21\equiv 0[3k+1]\\21k+7\equiv 0[3k+1]\end{cases}$ بالطرح نجد $14\equiv 0[3k+1]$ إذن $3k+1\in\{1,-1,2,-2,7,-7,14,-14\}$.

$3k+1=1$ ومنه $k=0$.

$3k+1=-1$ ومنه $k=\frac{-2}{3}$ مرفوض.

$3k+1=2$ ومنه $k=\frac{1}{3}$ مرفوض.

$3k+1=-2$ ومنه $k=-1$.

$3k+1=7$ ومنه $k=2$.

$3k+1=-7$ ومنه $k=\frac{-8}{3}$ مرفوض.

$3k+1=14$ ومنه $k=\frac{13}{3}$ مرفوض.

$3k+1=-14$ ومنه $k=-5$.

وعليه $k\in\{0,-1,2,-5\}$ ومنه $(x,y)\in\{(7,1),(0,-2),(21,7),(-28,-14)\}$.

2. **أ ـ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.**

$4^0\equiv 1[7]$ ، $4^1\equiv 4[7]$ ، $4^2\equiv 2[7]$ و $4^3\equiv 1[7]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي α ، $4^{3\alpha}\equiv 1[7]$ ، $4^{3\alpha+1}\equiv 4[7]$ و $4^{3\alpha+2}\equiv 2[7]$.

ب ـ تعيين باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 ؟

بما أنّ $2010=3\times 670$ فإن $4^{2010}\equiv 1[7]$ ومنه $3\times 4^{2010}\equiv 3[7]$ ولدينا $1945=3\times 648+1$ ومنه $4^{1945}\equiv 4[7]$ أي $2\times 4^{1945}\equiv 1[7]$ إذن $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}\equiv 3-1[7]$ أي $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}\equiv 2[7]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $3\times 4^{2010}-2\times 4^{1945}$ على 7 هو 2.

3. **أ ـ تعيين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7.**

A_n يقبل القسمة على 7 معناه $4^n-n+1\equiv 0[7]$.

نعلم أن كل عدد طبيعي n يكتب من الشكل $n=21p+\lambda$ حيث $\lambda\in\{0,1,2,3,....,20\}$ و $p\in\mathbb{N}$.

إذن $4^n-n+1\equiv 0[7]$ تعني $4^{21p+\lambda}-(21p+\lambda)+1\equiv 0[7]$ لكن $4^{21p+\lambda}\equiv 4^{21p}\times 4^{\lambda}[7]$ أي $4^{21p+\lambda}\equiv 4^{\lambda}[7]$ لأن $4^{21p}\equiv 1[7]$ و لدينا $21p+\lambda\equiv\lambda[7]$ إذن $4^{\lambda}-\lambda+1\equiv 0[7]$ حيث $\lambda\in\{0,1,2,3,....,20\}$.

$\lambda=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$4^{\lambda}\equiv$	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2
$\lambda\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
$4^{\lambda}-\lambda+1\equiv$	2	4	1	6	1	5	3	5	2	0	2	6	4	6	3	1	3	0	5	0	4

إذن $A_n\equiv 0[7]$ معناه $\lambda=9$ أو $\lambda=17$ أو $\lambda=19$ أي $n=21p+9$ أو $n=21p+17$ أو $n=21p+19$ مع $p\in\mathbb{N}$.

طريقة 2:

A_n يقبل القسمة على 7 معناه $4^n-n+1\equiv 0[7]$.

- إذا كان $n=3\alpha$ يكون $4^{3\alpha}-3\alpha+1\equiv 0[7]$ ومنه $1-3\alpha+1\equiv 0[7]$ يكافئ $3\alpha\equiv 2[7]$ ومنه $15\alpha\equiv 10[7]$ ولدينا $15\equiv 1[7]$ و $10\equiv 3[7]$ إذن $\alpha\equiv 3[7]$ أي $\alpha=7p+3$ وبالتالي $n=3(7p+3)=21p+9$ مع $p\in\mathbb{N}$.
- إذا كان $n=3\alpha+1$ يكون $4^{3\alpha+1}-(3\alpha+1)+1\equiv 0[7]$ ومنه $4-3\alpha\equiv 0[7]$ يكافئ $3\alpha\equiv 4[7]$ ومنه $3\alpha\equiv -3[7]$ وعليه $\alpha\equiv -1[7]$ أي $\alpha\equiv 6[7]$ ومنه $\alpha=7p+6$ وبالتالي $n=3(7p+6)+1=21p+19$ مع $p\in\mathbb{N}$.
- إذا كان $n=3\alpha+2$ يكون $4^{3\alpha+2}-(3\alpha+2)+1\equiv 0[7]$ ومنه $2-3\alpha-1\equiv 0[7]$ يكافئ $3\alpha\equiv 1[7]$ ومنه $15\alpha\equiv 5[7]$ وعليه $\alpha\equiv 5[7]$ أي $\alpha=7p+5$ وبالتالي $n=3(7p+5)+2=21p+17$ مع $p\in\mathbb{N}$.

لدينا $2010=21\times 95+5$ أي $2010=21p+5$ ومنه $A_{2010}\equiv 5[7]$ ولدينا $2009=21\times 95+4$ أي $2009=21p+4$ ومنه $A_{2009}\equiv 4[7]$ إذن $A_{2010}-A_{2009}\equiv 5-4[7]$ أي $A_{2010}-A_{2009}\equiv 1[7]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $A_{2010}-A_{2009}$ على 7 هو 1.

التمرين 20: (بكالوريا 2015 تقني رياضي)

1) أ) عيّن، حسب قيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

ب) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n، حتى يكون: $(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$.

الحل

1) **أ) تعيين، حسب قيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.**

لدينا $8^0\equiv 1[13]$، $8^1\equiv 8[13]$، $8^2\equiv 12[13]$ ومنه $8^2\equiv -1[13]$ أي $8^4\equiv 1[13]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p، $8^{4p}\equiv 1[13]$، $8^{4p+1}\equiv 8[13]$، $8^{4p+2}\equiv 12[13]$، $8^{4p+3}\equiv 5[13]$.

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

2) **استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13.**

لدينا $42\equiv 3[13]$ و $138\equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015}\equiv 8^{2015}[13]$ أي $138^{2015}\equiv 8^{4\times 503+3}[13]$ ولدينا $8^{4p+3}\equiv 5[13]$

إذن $138^{2015}\equiv 5[13]$ وعليه $42\times 138^{2015}\equiv 3\times 5[13]$ أي $42\times 138^{2015}\equiv 2[13]$.

و $2014\equiv 12[13]$ أي $2014\equiv -1[13]$ ومنه $2014^{2037}\equiv(-1)^{2037}[13]$ وعليه $2014^{2037}\equiv -1[13]$ أي $2014^{2037}\equiv 12[13]$.

إذن $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 2+12-3[13]$ أي $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3\equiv 11[13]$.

2) **أ) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.**

لدينا $5+8\equiv 0[13]$ معناه $5\equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n}\equiv(-8)^{2n}[13]$ أي $5^{2n}\equiv 8^{2n}[13]$ و $5^3\equiv -5[13]$

وعليه $5^{2n}\times 5^3\equiv -5\times 8^{2n}[13]$ أي $5^{2n+3}\equiv -5\times 8^{2n}[13]$ معناه $-5^{2n+3}\equiv 5\times 8^{2n}[13]$ يكافئ

$(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+1)64^n+5\times 8^{2n}[13]$ ويكافئ $(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+1)8^{2n}+5\times 8^{2n}[13]$

أي $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

ب) تعيين مجموعة قيّم العدد الطبيعي n، حتى يكون: $(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$.

$(5n+1)64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$ معناه $(5n+6)8^{2n}\equiv 0[13]$ وبما أن 8 و 13 أوليان فيما بينهما فإن 8^{2n} و 13 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $5n+6\equiv 0[13]$ يكافئ $5n\equiv -6[13]$ يكافئ $5n\equiv 20[13]$ أي $n\equiv 4[13]$

إذن $n=13p+4$ حيث $p\in\mathbb{N}$.

التمرين 21: (بكالوريا 2016 شعبة رياضيات)

1) أ) ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $7x-3y=8$ حيث x و y عددان طبيعيان.

أ) حل المعادلة (E).

ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

ـ ما هي القيم الممكنة للعدد d.

ـ عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

جـ) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

الحل

1) **أ) دراسة، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.**

$3^0\equiv 1[11]$، $3^1\equiv 3[11]$، $3^2\equiv 9[11]$، $3^3\equiv 5[11]$، $3^4\equiv 4[11]$ و $3^5\equiv 1[11]$

إذن من أجل كل عدد طبيعي k، $3^{5k}\equiv 1[11]$ ومنه $3\times 3^{5k}\equiv 3[11]$ أي $3^{5k+1}\equiv 3[11]$.

و $3\times 3^{5k+1}\equiv 9[11]$ أي $3^{5k+2}\equiv 9[11]$ و $3\times 3^{5k+2}\equiv 5[11]$ أي $3^{5k+3}\equiv 5[11]$ و $3\times 3^{5k+3}\equiv 4[11]$ أي $3^{5k+4}\equiv 4[11]$.

$7^0\equiv 1[11]$، $7^1\equiv 7[11]$، $7^2\equiv 5[11]$، $7^3\equiv 2[11]$، $7^4\equiv 3[11]$، $7^5\equiv 10[11]$ ومنه $7^5\equiv -1[11]$ وهذا يعني $(7^5)^2\equiv 1[11]$ أي $7^{10}\equiv 1[11]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k، $7^{10k}\equiv 1[11]$ و $7\times 7^{10k}\equiv 7[11]$ أي $7^{10k+1}\equiv 7[11]$ و $7\times 7^{10k+1}\equiv 5[11]$ أي $7^{10k+2}\equiv 5[11]$، $7^{10k+3}\equiv 2[11]$، $7^{10k+4}\equiv 3[11]$، $7^{10k+5}\equiv 10[11]$، $7^{10k+6}\equiv 4[11]$، $7^{10k+7}\equiv 6[11]$، $7^{10k+8}\equiv 9[11]$، $7^{10k+9}\equiv 8[11]$.

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
باقي قسمة 3^n على 11	1	3	9	5	4

n	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
باقي قسمة 7^n على 11	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

لدينا $1437\equiv 7[11]$ ومنه $1437^{10n+4}\equiv 7^{10n+4}[11]$ و $7^{10n+4}\equiv 3[11]$ إذن $1437^{10n+4}\equiv 3[11]$.

ولدينا $2016^{5n+4}\equiv 3^{5n+4}[11]$ ومنه $2016^{5n+4}\equiv 4[11]$ أي $2\times 2016^{5n+4}\equiv 8[11]$ إذن $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}\equiv 8+3[11]$ أي $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}\equiv 0[11]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) **أ) حل المعادلة (E).**

لدينا $7\times 2-3\times 2=8$ ومنه الثنائية $(2;2)$ حلا خاصا للمعادلة ومنه $\begin{cases}7x-3y=8\\ 7\times 2-3\times 2=8\end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-2)-3(y-2)=0$ أي $7(x-2)=3(y-2)$.

لدينا 3 يقسم $7(x-2)$ والعددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x-2$ ومنه $x-2=3\alpha$ أي $x=3\alpha+2$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبالتعويض في $7(x-2)=3(y-2)$ نجد $7\times 3\alpha=3(y-2)$ ومنه $y-2=7\alpha$ أي $y=7\alpha+2$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ من الشكل $(3\alpha+2;7\alpha+2)$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.

ب) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $7x-3y$ أي d يقسم 8 وبالتالي $d\in\{1;2;4;8\}$.

Mostefai
A/Elaziz

تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d=4$.

$d=4$ معناه كل من x و y مضاعفين للعدد 4 وليسا مضاعفين للعدد 8 وهذا يعني $\begin{cases}x\equiv4[8]\\y\equiv4[8]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}3\alpha+2\equiv4[8]\\7\alpha+2\equiv4[8]\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}3\alpha-2\equiv0[8]\\7\alpha-2\equiv0[8]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}9\alpha-6\equiv0[8]\\-\alpha-2\equiv0[8]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}9\alpha\equiv6[8]\\\alpha\equiv-2[8]\end{cases}$ ومنه $\alpha\equiv6[8]$ أي $\alpha=8p+6$ مع $p\in\mathbb{N}$

وبالتالي $x=3\alpha+2=3(8p+6)+2=24p+20$ و $y=7\alpha+2=7(8p+6)+2=56p+44$ مع $p\in\mathbb{N}$.

طريقة ثانية:

نضع $x=4x'$ و $y=4y'$ مع x' و y' أوليان فيما بينهما.

$7x-3y=8$ معناه $7\times4x'-3\times4y'=8$ تكافئ $7x'-3y'=2$ نلاحظ أن الثنائية $(2;4)$ حلا خاصا للمعادلة ومنه

$\begin{cases}7x'-3y'=2\\7\times2-3\times4=2\end{cases}$ بالطرح نجد $7(x'-2)-3(y'-4)=0$ أي $7(x'-2)=3(y'-4)$.

لدينا 3 يقسم $7(x'-2)$ والعددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x'-2$ ومنه

$x'-2=3\beta$ أي $x'=3\beta+2$ حيث $\beta\in\mathbb{N}$ وبالتعويض في $7(x'-2)=3(y'-4)$ نجد $7\times3\beta=3(y'-2)$ ومنه

$y'-4=7\beta$ أي $y'=7\beta+4$ حيث $\beta\in\mathbb{N}$

نضع $d'=PGCD(x';y')$ لدينا إذن d' يقسم x' و يقسم y' إذن d' يقسم $7x'-3y'$ أي d' يقسم 2 وبالتالي $d'\in\{1,2\}$

نريد تعيين x' و y' بحيث $d'=1$ أي x' و y' أوليان فيما بينهما.

$d'=2$ معناه $\begin{cases}x'\equiv0[2]\\y'\equiv0[2]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}3\beta+2\equiv0[2]\\7\beta+4\equiv0[2]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}3\beta\equiv0[2]\\7\beta\equiv0[2]\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\beta\equiv0[2]\\\beta\equiv0[2]\end{cases}$ إذن من أجل β زوجي

يكون $d'=2$ وبالتالي $d'=1$ معناه β فردي أي $\beta=2p+1$ ومنه $x'=3(2p+1)+2=6p+5$ و

$y'=7(2p+1)+4=14p+11$ وعليه $x=4x'=4(6p+5)=24p+20$ و

$y=4y'=4(14p+11)=56p+44$ مع $p\in\mathbb{N}$.

جـ) ايجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv0[11]$.

لدينا $2016\equiv3[11]$ ومنه $2016^{7x}\equiv3^{7x}[11]$ و $1437^{3y}\equiv7^{3y}[11]$ إذن $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv3^{7x}+7^{3y}[11]$

أي $3^{7x}+7^{3y}=3^{7(3\alpha+2)}+7^{3(7\alpha+2)}$ أي $3^{7x}+7^{3y}=3^{21\alpha+14}+7^{21\alpha+6}$.

لدينا $21\alpha\equiv\alpha[5]$ و $14\equiv4[5]$ ومنه $21\alpha+14\equiv\alpha+4[5]$ إذن يوجد عدد طبيعي u بحيث $21\alpha+14=5u+4+\alpha$

ومنه $3^{21\alpha+14}=3^{5u+4+\alpha}$ أي $3^{21\alpha+14}=3^{5u+4}\times3^{\alpha}$ وعليه $3^{21\alpha+14}\equiv3^{5u+4}\times3^{\alpha}[11]$ أي $3^{21\alpha+14}\equiv4\times3^{\alpha}[11]$

وكذلك لدينا $21\alpha+6=10\times2\alpha+\alpha+6$ أي $21\alpha+6=10u+6+\alpha$ إذن $7^{21\alpha+6}\equiv7^{10u+6+\alpha}[11]$ يكافئ

$7^{21\alpha+6}\equiv7^{10u+6}\times7^{\alpha}[11]$ أي $7^{21\alpha+6}\equiv4\times7^{\alpha}[11]$ وهذا يعني أن $3^{7x}+7^{3y}\equiv4\times3^{\alpha}+4\times7^{\alpha}[11]$

إذن $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv0[11]$ معناه $3^{7x}+7^{3y}\equiv0[11]$ يكافئ $4\times3^{\alpha}+4\times7^{\alpha}\equiv0[11]$ يكافئ

$4(3^{\alpha}+7^{\alpha})\equiv0[11]$ أي $3^{\alpha}+7^{\alpha}\equiv0[11]$ لأن العددان 4 و 11 أوليان فيما بينهما.

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{5k}\equiv1[11]$ إذن $(3^{5k})^2\equiv1[11]$ أي $3^{10k}\equiv1[11]$ ومنه $3\times3^{10k}\equiv3[11]$ أي

$3^{10k+1}\equiv3[11]$ و $3\times3^{10k+1}\equiv9[11]$ أي $3^{10k+2}\equiv9[11]$ و $3\times3^{10k+2}\equiv27[11]$ أي $3^{10k+3}\equiv5[11]$ و

$3\times3^{10k+3}\equiv15[11]$ أي $3^{10k+4}\equiv4[11]$ و $3\times3^{10k+4}\equiv12[11]$ أي $3^{10k+5}\equiv1[11]$ و $3\times3^{10k+5}\equiv3[11]$ أي

$3^{10k+6}\equiv 3[11]$ و $3\times 3^{10k+6}\equiv 9[11]$ أي $3^{10k+7}\equiv 9[11]$ و $3\times 3^{10k+7}\equiv 27[11]$ أي $3^{10k+8}\equiv 5[11]$ و $3\times 3^{10k+8}\equiv 15[11]$ أي $3^{10k+9}\equiv 4[11]$.

α	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
$3^{\alpha}\equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4
$7^{\alpha}\equiv$	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
$3^{\alpha}+7^{\alpha}\equiv$	2	10	3	7	7	0	7	4	3	1

إذا كان $\alpha=10k+5$ فإن $3^{\alpha}+7^{\alpha}\equiv 0[11]$ إذن $x=3\alpha+2=30k+17$ و $x=7\alpha+2=70k+37$ مع $k\in\mathbb{N}$

التمرين 22:

نعتبر المعادلة $(E)\ ....7x-3y=10$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) عيّن الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق: $\begin{cases}x_0-1\equiv 0[3]\\-2<x_0<4\end{cases}$.

ثمّ حل المعادلة (E).

2) بفرض أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان ؛

عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases}2^x+y+n^2-2\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$.

3) جد الثنائية الوحيدة $(x;y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين x و y هو 2139.

الحل

1) **تعيين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق:** $\begin{cases}x_0-1\equiv 0[3]\\-2<x_0<4\end{cases}$.

لدينا $x_0-1\equiv 0[3]$ معناه $x_0\equiv 1[3]$ إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $x_0=3k+1$ وبما أنّ $-2<x_0<4$ هذا معناه $-2<3k+1<4$ ومنه $-3<3k<3$ يكافئ $-1<k<1$ وعليه $k=0$ إذن $x_0=3\times 0+1$ أي $x_0=1$ وبالتعويض عن x_0 في (E) نجد $7\times 1-3y_0=10$ ومنه $y_0=-1$ وعليه $(x_0;y_0)=(1;-1)$.

حل المعادلة (E).

لدينا $\begin{cases}7x-3y=10\\7\times 1-3\times(-1)=10\end{cases}$ بالطرح نحصل على $7(x-1)-3(y+1)=0$ أي $7(x-1)=3(y+1)$ لدينا 3 يقسم $7(x-1)$ والعددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x-1$ ومنه $x-1=3k$ أي $x=3k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ بالتعويض في $7(x-1)=3(y+1)$ نجد $7\times 3k=3(y+1)$ ومنه $y+1=7k$ أي $y=7k-1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقق الجملة التالية: $(*)\begin{cases}2^x+y+n^2-2\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$.

$\begin{cases}2^x+y+n^2-2\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2^{3k+1}+7k-1+n^2-2\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2\times 2^{3k}+7k+n^2-3\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$

لدينا $2^3\equiv 1[7]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي ، $2^{3k}\equiv 1[7]$ ومنه $2\times 2^{3k}\equiv 2[7]$ ولدينا $7k\equiv 0[7]$ إذن

$(*)$ تكافئ $\begin{cases}n^2-1\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}(n-1)(n+1)\equiv 0[7]\\0<n<18\end{cases}$ ومنه $n-1\equiv 0[7]$ أو $n+1\equiv 0[7]$ و $0<n<18$

ومنه $n=7p+1$ أو $n=7p+6$ مع $p\in\mathbb{N}$ و $0<n<18$ وعليه $n\in\{1;6;8;13;15\}$.

3) **ايجاد الثنائية الوحيدة** $(x;y)$ **حل المعادلة** (E) **بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين** x **و** y **هو** 2139.

نضع $m = ppcm(x;y)$ و $d = p\gcd(x;y)$.

ونضع $x = dx'$ و $y = dy'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما لدينا $m = \frac{xy}{d}$ ومنه $m = \frac{d^2x'y'}{d}$ ومنه $dx'y' = m$

أي $dx'y' = 2139$.

لدينا d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $7x - 3y$ أي d يقسم 10 ومنه $d \in \{1;2;5;10\}$

بما أن $dx'y' = 2139$ فإن d يقسم 2139 والأعداد 10، 5 و 2 لا تقسم العدد 2139 إذن $d = 1$ وعليه $x'y' = 2139$

و x' و y' أوليان فيما بينهما وعليه:

$x' = 1$ و $y' = 2139$ أي $x = 1$ و $y = 2139$

$x' = 31$ و $y' = 69$ أي $x = 31$ و $y = 69$

$x' = 23$ و $y' = 93$ أي $x = 23$ و $y = 93$

$x' = 713$ و $y' = 3$ أي $x = 713$ و $y = 3$

$x' = 3$ و $y' = 713$ أي $x = 3$ و $y = 713$

$x' = 93$ و $y' = 23$ أي $x = 93$ و $y = 23$

$x' = 69$ و $y' = 31$ أي $x = 69$ و $y = 31$

$x' = 2139$ و $y' = 1$ أي $x = 2139$ و $y = 1$

الثنائية الوحيدة $(x;y)$ من الثنائيات السابقة حل للمعادلة (E) هي $(31;69)$ لأنّ $7\times31 - 3\times69 = 10$.

☯ التمرين 23:

1) حل، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2x - 5y = 4$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

a و b عددان صحيحان غير معدومين و (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = au_n + b - 2$.

أ ـ عين $(b;a)$ التي من أجلها تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 (ارشاد: استعمل السؤال الأوّل).

ب ـ اكتب v_n بدلالة n، a و b وبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \equiv 0[7]$.

جـ ـ بين أنه عندما يكون $a \equiv 0[5]$ فإنه لكل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5.

☸الحل☸

$2x - 5y = 4$ معناه $2x = 5y + 4$ ومنه $2x \equiv 4[5]$ أي $x \equiv 2[5]$ إذن $x = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في المعادلة نجد $2(5k+2) - 5y = 4$ أي $y = 2k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2) **أ ـ تعيين** $(b;a)$ **التي من أجلها تكون** (v_n) **متتالية هندسية أساسها 3.**

ليكن n عددا طبيعيا؛ $v_{n+1} = au_{n+1} + b - 2 = a(3u_n + 5) + b - 2 = 3au_n + 5a + b - 2$

ولدينا $v_n = au_n + b - 2$ ومنه $au_n = v_n - b + 2$ إذن $v_{n+1} = 3(v_n - b + 2) + 5a + b - 2$ ومنه $v_{n+1} = 3v_n - 2b + 5a + 4$.

(v_n) متتالية هندسية معناه $-2b + 5a + 4 = 0$ أي $2b - 5a = 4$ وحسب السؤال الأول $b = 5k + 2$ و $a = 2k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ب ـ كتابة v_n **بدلالة** n، a **و** b.

(v_n) متتالية هندسية إذن $v_n = v_0(3)^n$ لدينا $v_0 = a + b - 2$ ومنه $v_n = (a+b-2)(3)^n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

لدينا $a + b - 2 = 2k + 5k + 2 - 2 = 7k$ ومنه $a + b - 2 \equiv 0[7]$ وهذا يعني $(a+b-2)3^n \equiv 0[7]$ أي $v_n \equiv 0[7]$

جـ ـ تبيين أنه عندما يكون $a \equiv 0[5]$ **فإنه لكل** n **من** $\mathbb{N}$: v_n **يقبل القسمة على 5.**

لدينا $b-2=5k$ ومنه $b-2\equiv 0[5]$ و بما أن $a\equiv 0[5]$ فإن $a+b-2\equiv 0[5]$ إذن $(a+b-2)3^n\equiv 0[5]$ أي من أجل كل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 24: (بكالوريا شعبة رياضيات 2015)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\right]$ على 7.

2) أ) بيّن أن 89 عدد أولي

ب) عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

جـ) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

عين x و y علما أن: $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$.

4) a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أوّلي مع b و a أوّلي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أوّلي مع $b\times c$.

ب) باستعمال الإستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD\left(a;b^n\right)=1$.

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

جـ) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

الحل

1) **أ) تعيين، حسب قيّم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.**

لدينا $2^0\equiv 1[7]$، $2^1\equiv 2[7]$، $2^2\equiv 4[7]$ و $2^3\equiv 1[7]$.

وعليه من أجل كل عدد طبيعي k، $2^{3k}\equiv 1[7]$، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$.

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
باقي قسمة العدد 2^n على 7.	1	2	4

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $\left[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\right]$ على 7.

لدينا $1962\equiv 2[7]$ ومنه $1962^{1954}\equiv 2^{1954}[7]$ ولدينا $1954=3\times 651+1$ ومنه $2^{1954}\equiv 2[7]$ إذن $1962^{1954}\equiv 2[7]$

ولدينا $1954\equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962}\equiv 1[7]$ و $2015+1\equiv 0[7]$ معناه $2015\equiv -1[7]$ أي $2015^{53}\equiv -1[7]$.

وعليه $\left[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\right]\equiv 2-1-1[7]$ أي $\left[1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\right]\equiv 0[7]$.

2) **أ) تبيين أنّ 89 عدد أولي.**

لدينا $\sqrt{89}<11$ والأعداد الأولية الأصغر من 11 هي 2، 3، 5 و 7.

ولدينا $89=2\times 44+1$، $89=3\times 29+2$، $89=5\times 17+4$ و $89=7\times 12+5$

العدد 89 لا يقبل القسمة على 2 ولا 3 ولا 5 ولا على 7 إذن فهو عدد أولي.

ب) تعيين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

لدينا $7832=2^3\times 11\times 89$ ومنه عدد قواسم العدد 7832 هو $(3+1)(1+1)(1+1)$ أي 16 قاسما.

وعليه $D_{7832}=\{1,2,4,8,11,22,44,88,89,178,356,712,979,1958,3916,7832\}$.

جـ) تبيين أنّ العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين 981 و 977 إذن d يقسم 981 ويقسم 977 فهو يقسم $981-977$

أي d يقسم 4 ومنه $d\in\{1;2;4\}$ وبما أن 981 و 977 فرديان فإن $d=1$ أي العددان 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

تعيين x **و** y **علما أنّ** $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$

نضع $x=2x'$ و $y=2y'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما.

$\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8[22] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 4x'^2-4y'^2=31328 \\ 2x'-2y'\equiv 8[22] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x'^2-y'^2=7832 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ أي

$\begin{cases} (x'+y')(x'-y')=7832 \\ x'-y'\equiv 4[11] \end{cases}$ بما أن العددان x' و y' طبيعيان فإن $x'+y'>x'-y'$.

$x'+y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	
$x'-y'$	1	2	4	8	11	22	44	88	
$x'-y'\equiv$	1	2	4	8	0	0	0	0	$[11]$

ومنه $\begin{cases} x'+y'=1958 \\ x'-y'=4 \end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد $2x'=1962$ أي $x=1962$ وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد $2y'=1954$ أي $y=1954$.

4) a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c.

أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهان أنّ a **أولي مع** $b\times c$.

بما أنّ a أولي مع b و a أولي مع c فإنه يوجد عددان صحيحان α و β حيث $\alpha a+\beta b=1$ ويوجد عددان صحيحان α' و β' بحيث $\alpha' a+\beta' c=1$ ومنه $(\alpha a+\beta b)(\alpha' a+\beta' c)=1$ يكافئ $\alpha\alpha' a^2+\alpha\beta' ac+\beta b\alpha' a+\beta b\beta' c=1$ أي $(\alpha\alpha' a+\alpha\beta' c+\beta b\alpha')a+(\beta\beta')bc=1$ إذن يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $ua+v\times bc=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو a أولي مع $b\times c$.

خلاصة: إذا كان a أولي مع b و a أولي مع c فإن a أولي مع $b\times c$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $PGCD(a;b^n)=1$.

لدينا $PGCD(a;b^1)=PGCD(a;b)=1$ ومنه خاصية الإبتداء محققة.

ليكن n عددا طبيعيا

نفرض أن $PGCD(a;b^n)=1$ ونبرهن أن $PGCD(a;b^{n+1})=1$ أي نفرض أن a أولي مع b^n ونبرهن أن a أولي مع b^{n+1}.

a أولي مع b^n ولدينا a أولي مع b إذن حسب السؤال السابق a أولي مع $b\times b^n$ أي a أولي مع b^{n+1} ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $PGCD(a;b^n)=1$.

جـ) استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} **و** 1954^{1962}.

لدينا $1954=2\times977$ ومنه $1954^{1962}=2^{1962}\times977^{1962}=2^{1954}\times2^8\times977^{1962}$ و $1962=2\times981$ ومنه $1962^{1954}=2^{1954}\times981^{1954}$ وعليه:

$PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=PGCD(2^{1954}\times2^8\times977^{1962};2^{1954}\times981^{1954})=2^{1954}PGCD(2^8\times977^{1962};981^{1954})$

لدينا $PGCD(977;981)=1$ ومنه $PGCD(977^{1962};981^{1954})=1$ وكذلك $PGCD(2;981)=1$ ومنه $PGCD(2^8;981^{1954})=1$ إذن 981^{1954} أولي مع 977^{1962} و 981^{1954} أولي مع 2^8 و بالتالي 981^{1954} أولي مع $2^8\times977^{1962}$ أي $PGCD(2^8\times977^{1962};981^{1954})=1$ وعليه $PGCD(1954^{1962};1962^{1954})=2^{1954}$.