

**التمرين الأول**

**I** - لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. أدرس تغيّرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. احسب  $g(1)$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$ .

**II** - دالة عددية معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أاحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب - بيّن أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -2x + 2e$  مقاربا مائلا له عند  $+\infty$ .

ج - حدّد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

2. أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3. أ - أثبت أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في المجال  $]0, 4; 0, 5[$ .

ب - أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .



موقع تربية أونلاين

**الحل**

**I** - لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^2 + 2 = 2 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( -2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

الدالة  $g$  تقبل الإشتقاق على  $]0; +\infty[$  ولدينا:  $g'(x) = -4x - \frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $-4x < 0$  و  $-\frac{1}{x} < 0$  عندئذ  $g'(x) < 0$  وبالتالي الدالة  $g$

متناقصة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة  $g$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2. حساب  $g(1)$  ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$ .

$$g(1) = 2(1)^2 + 2 - \ln 1 = 0$$

من أجل  $x \in ]0;1[$  ،  $g(x) > 0$

من أجل  $x \in ]1;+\infty[$  ،  $g(x) < 0$

**II - f** دالة عددية معرفة على المجال  $]0;+\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty \text{ عندئذ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1+\ln x}{x} = -\infty$$

ب - تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -2x + 2e$  مقاربا مائلا له عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

لدينا  $y = -2x + 2e$  مقاربا مائلا له عند  $+\infty$ .

ج - تحديد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ .

$$f(x) - y = \frac{-1+\ln x}{x}$$

$$f(x) - y = 0 \text{ يكافئ } -1 + \ln x = 0 \text{ ويكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$f(x) - y > 0 \text{ يكافئ } -1 + \ln x > 0 \text{ ويكافئ } \ln x > 1 \text{ أي } x > e$$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0
الوضعية النسبية		( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ )
		( $C_f$ ) يقطع ( $\Delta$ )	في النقطة $B(e; 0)$

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0;+\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (-1+\ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $g(x)$ .

من أجل  $x \in ]-\infty;1[$  ،  $f'(x) > 0$  ؛ ومن أجل  $x \in ]1;+\infty[$  ،  $f'(x) < 0$ .

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]-\infty;1[$  ومتناقصة تماما على  $]1;+\infty[$ .

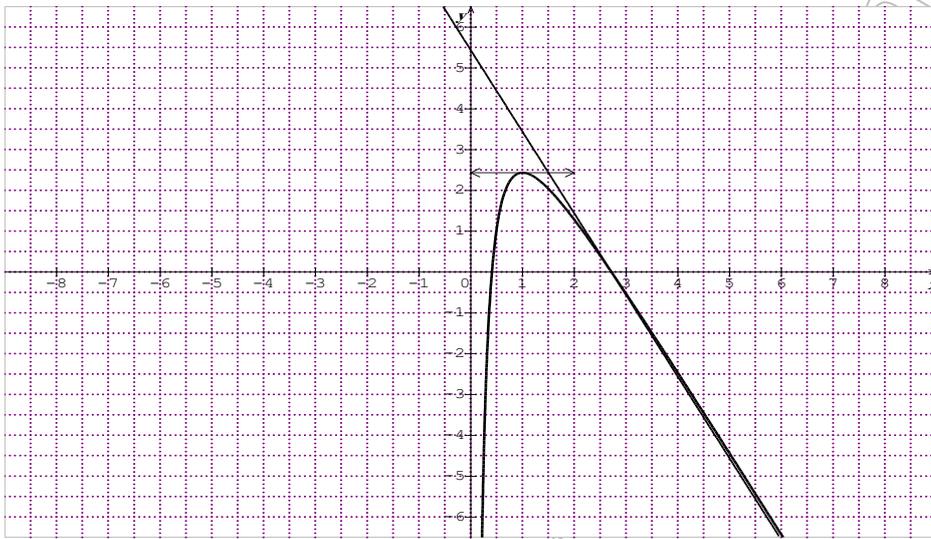
جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$2e-3$	

3. أ- إثبات أنّ المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  في المجال  $]0,4;0,5[$ .

الدالة  $f$  مستمرة ومنتزعة تماما على المجال  $]0;1[$  وخاصة على المجال  $]0,4;0,5[$  ولدينا  $f(0,4) \approx -0,15$  و  $f(0,5) \approx 1,04$  إذن يوجد عدد حقيقي وحيد  $x_0$  من المجال  $]0,4;0,5[$  بحيث  $f(x_0)=0$  وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب- رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .



## التمرين الثاني

I- لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0;+\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيّرات الدالة  $g$  واحسب  $g(1)$ .

2. استنتج أنّه من أجل كل  $x$  من  $]0;+\infty[$  ،  $g(x) > 0$ .

II- دالة عددية معرفة على المجال  $]0;+\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب- بيّن أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقاربا مائلا له عند  $+\infty$ .

ج- حدّد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(D)$ .

2. أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0;+\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$  ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ- بيّن أنّه يوجد مماس وحيد  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  ، مواز للمستقيم  $(D)$ .

ب - اكتب معادلة  $(\Delta)$ .

ج - بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

د - أنشئ المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(D)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

هـ - ناقش بيانها، حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $mx - 2\ln(x) = 0$ .

**الحل** ☺

I - لتكن الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  واحسب  $g(1)$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 = +\infty$  عندئذ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 - 2\ln x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( x + \frac{2}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

لدينا  $x > 0$  ومنه إشارة  $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$  هي من نفس إشارة  $x^2 - 1$

$x$	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		- 0 +	

$$g(1) = 1 + 2 + 2\ln 1 = 3$$

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

2. استنتاج أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$ .

بما أن 3 هي قيمة حدية صغرى للدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$  فإنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،

$g(x) \geq 3$  وبالتالي  $g(x) > 0$ .

II - دالة عددية معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ - حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$  فيكون  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\ln x}{x} = +\infty$

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x}{x} = -\infty$  فيكون  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{2\ln x}{x} = -\infty$



ب - تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقاربا مانلا له عند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

ج - تحديد وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$ .

$$\text{لدينا } f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ ؛ إشارة } f(x) - x \text{ هي من نفس إشارة } \ln x.$$

$$f(x) - x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ يكافئ } \ln x > 0 \text{ ويكافئ } x > 1$$

$$f(x) - x < 0 \text{ يكافئ } \ln x < 0 \text{ ويكافئ } 0 < x < 1$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		-	0
الوضعية النسبية		( $C_f$ ) تحت ( $\Delta$ )	( $C_f$ ) فوق ( $\Delta$ )
		( $C_f$ ) يقطع ( $\Delta$ ) في النقطة $A(1;1)$	

أ.2 - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + 2 \left[ \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} \right] = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $g(x) > 0$  و  $x^2 > 0$  إذن  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

أ.3 - تبين أنه يوجد مماس وحيد  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$ ، مواز للمستقيم  $(\Delta)$ .

$$(T) \text{ يوازي } (\Delta) \text{ يعني } f'(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } \frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ ويكافئ } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ ويكافئ } \ln x_0 = 1 \text{ أي } x_0 = e$$

إذن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا وحيدا  $(T)$  موازيا لـ  $(\Delta)$  في النقطة التي إحداثيتها  $\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$ .

ب - كتابة معادلة  $(\Delta)$ .

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ ومنه } y = (x - e) + e + \frac{2}{e} \text{ أي } y = x + \frac{2}{e}$$

ج - تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 

لدينا الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $]0; +\infty[$  وبالخصوص على المجال  $[0,5; 1]$  و  $f(0,5) \approx -2,27$  ،  $f(1) = 1$  أي  $f(0,5) \times f(1) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]0,5; 1[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$  فإن  $\alpha$  وحيد أي  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $0,5 < \alpha < 1$

د - رسم المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .هـ - المناقشة بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ ،

$$\text{عدد حلول المعادلة : } mx - 2\ln(x) = 0$$

$$mx = 2\ln(x) \text{ تكافئ } mx - 2\ln(x) = 0$$

$$\text{وتكافئ } m = \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين

$$(C_f) \text{ والمستقيم ذي المعادلة } y = x + m$$

بقراءة بيانية:

إذا كان  $m \leq 0$  فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.إذا كان  $0 < m < \frac{2}{e}$  فإن المعادلة تقبل حلين.إذا كان  $m = \frac{2}{e}$  فإن المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً.إذا كان  $m > \frac{2}{e}$  فإن المعادلة لا تقبل حلولاً.حذار: قيم  $m$  لا علاقة لها بمجموعة تعريف الدالة  $f$ .

التمرين الثالث ②

1-  $h$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  :-  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ 1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ 2. بين أنه، من أجل  $x$  من  $]-1; +\infty[$  :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات  $h$ .3. احسب  $h(0)$  واستنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

**II** - دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ .

نسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وفسر النتيجة بيانياً.

ب. باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن:  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .

ج. استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

د. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

هـ. ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بيّن أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات  $f$ .

3. بيّن أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. ارسم  $(C_f)$ .

**الحل** ☺

**I** - دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  ب:  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ .

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty$

2. تبين أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ .

$$h'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1) + 1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $h'(x) > 0$ ، وعليه الدالة  $h$  متزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$ .

جدول تغيّرات  $h$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. حساب  $h(0)$

$$h(0) = 0^2 + 2(0) + \ln(0+1) = 0$$

استنتاج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+

**II** دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ .

نسمي  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ - حساب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  وفسر النتيجة بيانياً.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

ب - باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$  ، برهن أن:  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .

نضع  $u = e^t$  عندئذ  $t = \ln u$  إذا كان  $t$  ينول إلى  $+\infty$  فإن  $u$  ينول إلى  $+\infty$ .

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{u}{\ln u}} = 0 \text{ وعليه } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = +\infty$$

ج - استنتاج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

د - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

$$y = x - 1 \text{ معادلته } (C_f) \text{ ؛ إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

هـ - دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ .

$$\text{لدينا } f(x) - y = \frac{-\ln(x+1)}{x+1} \text{ ؛ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } ]-1; +\infty[ \text{ ، } x+1 > 0 \text{ ومنه إشارة}$$

$$f(x) - y \text{ هي نفس إشارة } -\ln(x+1).$$

$$f(x) - y = 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) = 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) = 0 \text{ ويكافئ } x+1 = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$f(x) - y > 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) > 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) < 0 \text{ ويكافئ } 0 < x+1 < 1 \text{ أي } -1 < x < 0$$

$$f(x) - y < 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) < 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) > 0 \text{ ويكافئ } x+1 > 1 \text{ أي } x > 0$$

$x$	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C <sub>f</sub> ) فوق (Δ)		(C <sub>f</sub> ) تحت (Δ)
	(C <sub>f</sub> ) يقطع (Δ) في النقطة A(0; -1)		

2. تبين أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ .

$$f'(x) = 1 - \left[ \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $h(x)$ .

جدول تغيرات  $f$ .

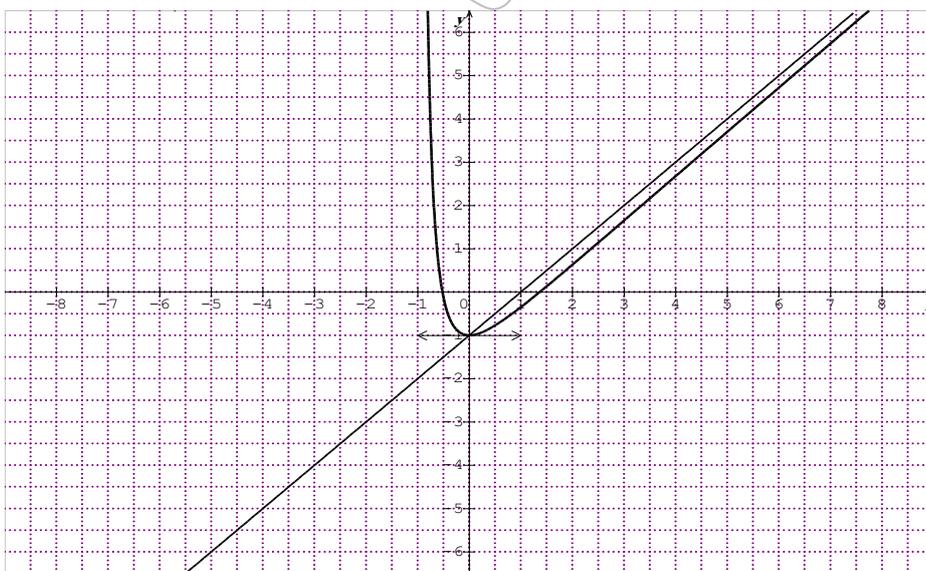
$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

3. تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y=2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[0; +\infty[$  بالتالي هي مستمرة على المجال  $[3,3; 3,4]$  ولدينا  $f(3,3) \approx 1,96$  و  $f(3,4) \approx 2,06$  أي  $f(3,3) < 2 < f(3,4)$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $[3,3; 3,4[$  بحيث  $f(\alpha) = 2$  أي  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y=2$  عند نقطة فاصلتها  $\alpha$  محصورة بين

3,3 و 3,4.

4. رسم  $(C_f)$ .



## التمرين الرابع ☺

I-  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. ادرس تغيّرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدل تغيّراتها.
2. أ) بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على المجال  $]0; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,5 < \alpha < 2$ .  
ب) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

II-  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.  
ب) عبّر عن  $f'(x)$  بدلالة  $g(x)$  واستنتج تغيّرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيّراتها.
2. بيّن أنّ  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$  واستنتج حصر العدد  $f(\alpha)$ .
3. اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.
4. ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $f(x) = \frac{1}{2}x + m$ .

III-  $h$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$

اشرح كيف يمكن رسم  $(C_h)$  منحنى الدالة  $h$  اعتمادا على  $(C_f)$ ، ثم ارسم  $(C_h)$ .

## الحل ☺

I-  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدل تغيّراتها.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 \ln x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = -\infty$$

$$g'(x) = 2x - 2 \left( 2x \ln x + \frac{1}{x} x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $-4x < 0$ ، ومنه إشارة  $g'(x)$  هي عكس إشارة  $\ln x$ .

من أجل  $x \in ]0; 1[$ ،  $\ln x < 0$  ومنه  $g'(x) > 0$

ومن أجل  $x \in ]1; +\infty[$ ،  $\ln x > 0$  ومنه  $g'(x) < 0$

بالتالي الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]0; 1[$  و متناقصة تماما على المجال  $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

2. أ) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على المجال  $]0; +\infty[$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1,5 < \alpha < 2$ .

لدينا الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]0; 1[$  وتأخذ قيمها في المجال  $]1; 2[$  و  $]1; 2[ \ni 0 \notin$  إذن على المجال  $]0; 1[$ ،  $g(x) \neq 0$ .

ولدينا الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماما على المجال  $]1; +\infty[$  وتأخذ قيمها في المجال  $]2; -\infty[$  و  $0 \in ]-\infty; 2[$  إذن

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]1; +\infty[$ ؛ وبما أن  $g(1,5) \approx 1,42$  و  $g(2) \approx -0,55$  أي  $g(1,5) \times g(2) < 0$  فإن  $1,5 < \alpha < 2$ .

ب) استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II- الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  إذن ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = 0$  (محور الترتيب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  إذن ( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 0$  (محور الفواصل) بجوار  $+\infty$ .

ب) التعبير عن  $f'(x)$  بدلالة  $g(x)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{g(x)}{x(x^2 + 1)^2}$$

واستنتاج تغيرات الدالة  $f$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $x(x^2 + 1)^2 > 0$ ، ومنه إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $g(x)$ .

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; \alpha[$  و متناقصة تماما على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

2. تبين أن  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

لدينا  $g(\alpha) = 0$  يكافئ  $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$  أي  $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2(\alpha^2 + 1)} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

استنتاج حصراً للعدد  $f(\alpha)$ .

لدينا  $1,5 < \alpha < 2$  معناه  $2,25 < \alpha^2 < 4$  ويكافئ  $4,5 < 2\alpha^2 < 8$  ويكافئ  $\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{4,5}$  أي

$$0,12 < f(\alpha) < 0,23$$

3. كتابة معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2} \text{ أي } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

4. رسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

5. المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي

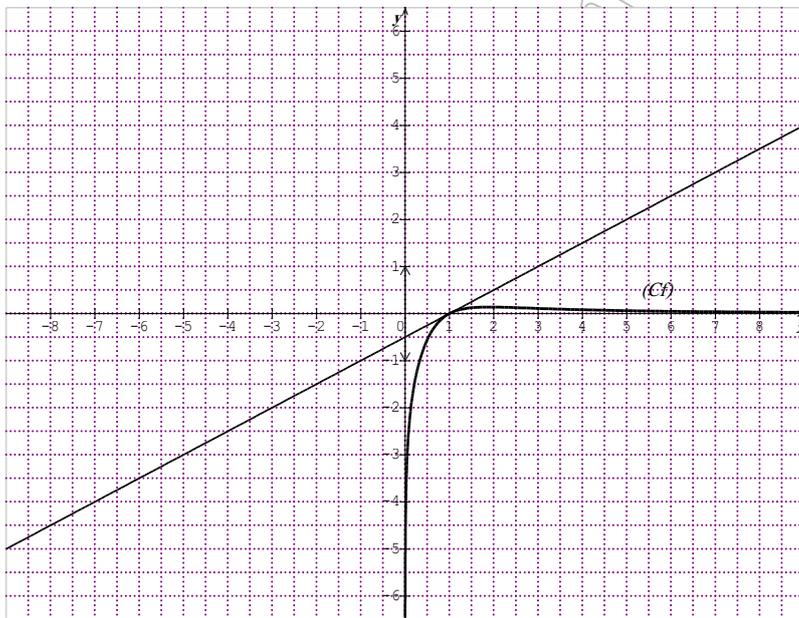
$m$ ، عدد حلول المعادلة:  $f(x) = \frac{1}{2}x + m$ .

إذا كان  $m < -\frac{1}{2}$  فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان  $m = -\frac{1}{2}$  فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً

مضاعفاً.

إذا كان  $m > -\frac{1}{2}$  فإن المعادلة ليس لها حلول.



III-  $h$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$

شرح كيف يمكن رسم  $(C_h)$  منحنى الدالة  $h$  اعتماداً على  $(C_f)$ ،

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) = f(x); x \in [1; +\infty[ \\ h(x) = -f(x); x \in ]0; 1] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} h(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \geq 0 \\ h(x) = \frac{-\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \leq 0 \end{array} \right. \text{ لدينا}$$

إذن في المجال  $[1; +\infty[$  يكون  $(C_h)$  منطبق على  $(C_f)$  وفي المجال  $]0; 1]$ ،  $(C_h)$  يناظر  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل.

### التمرين الخامس ☺

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسمي  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $2cm$

1. أ - احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  وفسر النتيجةين بيانياً.

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

ج - ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها.

2. أ - بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف  $E$  يطلب تعيين إحداثياتها.

ب - اكتب معادلة المماس  $(D)$  للمنحنى  $(C)$  الذي يشمل المبدأ  $O$ .

3. ارسم  $(\Delta)$ ،  $(D)$  و  $(C)$ .

4. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً  $m$ ، عدد حلول المعادلة  $m^x = x$ .

### الحل ☺

$f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسمي  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  وحدة الطول  $2cm$

1. أ - احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

تفسير النتيجةين بيانياً.

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن  $(C)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 0$  (محور الفواصل)

و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  ومنه  $(C)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = 0$  (محور الترتيب)

ب - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ج - دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$

إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $1 - \ln x$ .

$f'(x) = 0$  معناه  $1 - \ln x = 0$  ويكافئ  $\ln x = 1$  أي  $x = e$ .

$f'(x) > 0$  معناه  $1 - \ln x > 0$  ويكافئ  $\ln x < 1$  أي  $0 < x < e$ .

$f'(x) < 0$  معناه  $1 - \ln x < 0$  ويكافئ  $\ln x > 1$  أي  $x > e$ .

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]0; e]$  ومنتقصة تماماً على  $[e; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			$\frac{1}{e}$
	$-\infty$		0

2. أ - تبين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف  $E$  يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  ،  $x^3 > 0$  ، ومنه إشارة  $f''(x)$  هي نفس إشارة  $-3 + 2\ln x$ .

$f''(x) = 0$  معناه  $-3 + 2\ln x = 0$  وتكافئ  $\ln x = \frac{3}{2}$  أي  $x = \sqrt{e^3}$ .

$f''(x) > 0$  معناه  $-3 + 2\ln x > 0$  وتكافئ  $\ln x > \frac{3}{2}$  أي  $x > \sqrt{e^3}$ .

$x$	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

$f''(x)$  تتعدم عند العدد  $\sqrt{e^3}$  وتغير من إشارتها بجوار  $\sqrt{e^3}$  ومنه النقطة  $E(\sqrt{e^3}; f(\sqrt{e^3}))$  هي نقطة انعطاف

للمنحنى (C).

ج - كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ  $O$ .

معادلة المماس من الشكل  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$O \in (D) \text{ معناه } 0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ وتكافئ } -x_0 \left( \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \right) + \frac{\ln x_0}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } -1 + 2\ln x_0 = 0$$



$$\text{وتكافئ } x_0 = \sqrt{e} \text{ أي } \ln x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن معادلة المماس هي } y = f'(\sqrt{e})x \text{ أي } y = \frac{1}{2e}x$$

3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب

تماما  $m$ ، عدد حلول المعادلة  $m^x = x$ .

$$m^x = x \text{ تكافئ } \ln m^x = \ln x \text{ وتكافئ } x \ln m = \ln x$$

$$\text{وتكافئ } \ln m = \frac{\ln x}{x} \text{ أي } f(x) = \ln m$$

إذا كان  $0 < m \leq 1$  فإن  $\ln m \leq 0$  وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان  $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$  فإن  $0 < \ln m < \frac{1}{e}$  وبالتالي المعادلة

تقبل حلين متميزين

إذا كان  $m = e^{\frac{1}{e}}$  فإن  $\ln m = \frac{1}{e}$  وبالتالي المعادلة تقبل

حلا مضاعفا.

إذا كان  $m > e^{\frac{1}{e}}$  فإن  $\ln m > \frac{1}{e}$  وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.

**التمرين السادس** ☺

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ .

1. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$ .

2. احسب  $g(1)$  ثم استنتج تبعا لقيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

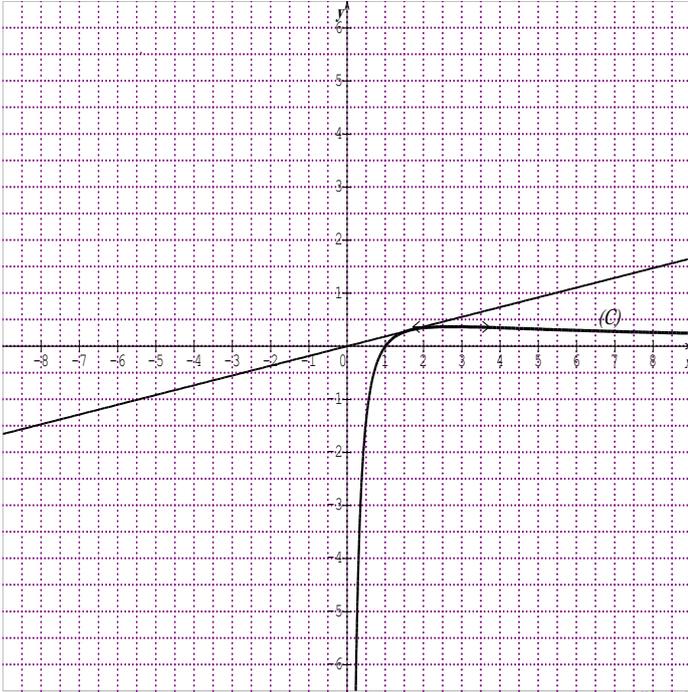
ب- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. أ- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

ب- ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى (D).

4. بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذا المعادلة  $y = x - 1 - \frac{1}{e}$  يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

5. ارسم ( $\Delta$ )، (D) و  $(C_f)$ .



## الحل

(I) الدالة العددية  $g$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ .

1. دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ .

الدالة  $g$  تقبل الإشتقاق على  $]0; +\infty[$  ولدينا:  $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $g'(x) < 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $]0; +\infty[$ .

2. حساب  $g(1)$  واستنتاج تبعا لقيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

$x$	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

ب - حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

تفسير النتيجة هندسيا.

( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = 0$  (محور الترتيب).

2. أ - تبيين أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  فإن  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \left[ \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

إشارة  $f'(x)$  هي عكس إشارة  $g(x)$

من أجل  $x \in ]0; 1[$ ،  $g(x) > 0$  ومنه  $f'(x) < 0$ .

ومن أجل  $x \in ]1; +\infty[$ ،  $g(x) < 0$  ومنه  $f'(x) > 0$ .

إذن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]0; 1[$  و متزايدة تماما على  $]1; +\infty[$ .

ب - جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	↘ 0 ↗	$+\infty$

3. أ- تبين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

ب- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .

$$\text{لدينا } f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x}$$

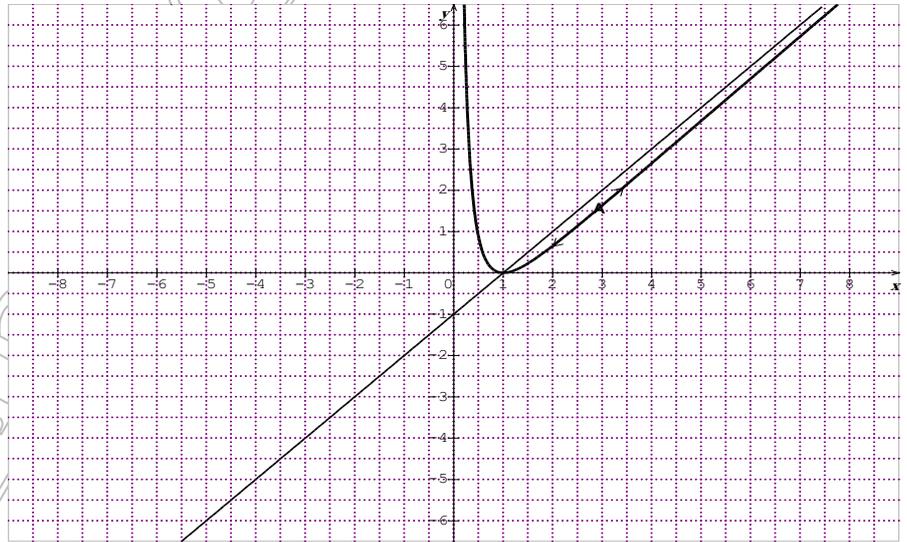
$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0
الوضعية النسبية		$(C_f)$ فوق $(D)$	$(C_f)$ تحت $(D)$
		$(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1;0)$	

4. تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 1 - \frac{1}{e}$  يمسّ المنحنى  $(C_f)$  في نقطة  $A$  يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x_0) = 1 \text{ تعني } \frac{-g(x)}{x^2} = 1 \text{ ويكافئ } x^2 - 1 + \ln x = x^2 \text{ ويكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$\text{ولدينا } f(e) = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ و } y = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ إذن المستقيم } (\Delta) \text{ يمسّ المنحنى } (C_f) \text{ في النقطة } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

5. رسم  $(\Delta)$ ،  $(D)$  و  $(C_f)$ .



التمرين السابع

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسياً.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

- (2) أ) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته:  $y = 1$ .  
 ب) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.  
 ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلاً وحيداً  $\alpha$ ، حيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$ .  
 (3) أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$

- ولیکن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.  
 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h(x) - h(-x) = 0$ . ماذا تستنتج؟  
 ب) أنشئ المنحنى  $(C_h)$  اعتماداً على المنحنى  $(C_f)$ .  
 ج) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $\ln x^2 = (m-1)|x|$ .

### الحل ☺

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

تفسير النتائج هندسياً.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  إذن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = 0$  (محور الترتيب).

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  إذن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 1$  بجوار  $+\infty$ .

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $x^2 > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $1 - \ln x$ .

$$f'(x) = 0 \text{ تعني } 1 - \ln x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$f'(x) > 0 \text{ تعني } 1 - \ln x > 0 \text{ يكافئ } \ln x < 1 \text{ أي } 0 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \text{ تعني } 1 - \ln x < 0 \text{ يكافئ } \ln x > 1 \text{ أي } x > e$$

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]0; e[$  ومتناقصة تماماً على  $]e; +\infty[$ .



$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

$1 + \frac{2}{e}$   
 $-\infty$        $1$

(2) أدراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته:  $y = 1$ .

$$\text{لدينا } f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f(x) - 1 = 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ تكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} > 0 \text{ تكافئ } \ln x > 0 \text{ أي } x > 1$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} < 0 \text{ تكافئ } \ln x < 0 \text{ أي } 0 < x < 1$$

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x) - 1$		-	0 +
الوضعية النسبية		$(C_f)$ تحت $(\Delta)$	$(C_f)$ فوق $(\Delta)$

$(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$   
 في النقطة  $A(1;1)$

(ب) كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = 2(x - 1) + 1 \text{ أي } y = 2x - 1$$

(ج) تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0;1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ ، حيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$ .

الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $]0;1[$  فهي مستمرة على المجال  $[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$  ولدينا  $f(e^{-0.4}) \approx -0,19$

$f(e^{-0.3}) \approx 0,19$  أي  $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال

$[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$  بحيث  $f(\alpha) = 0$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]0;1[$  فإن  $\alpha$  وحيد.

$$(4) \text{ لتكن الدالة } h \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \{0\} \text{ كما يلي: } h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$$

وليكن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h(x) - h(-x) = 0$ . ماذا تستنتج؟

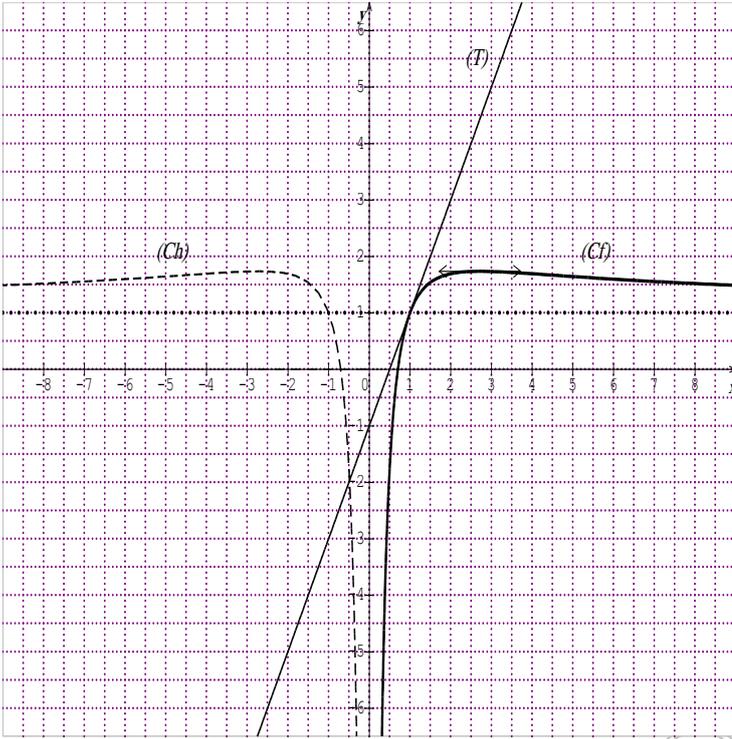
ليكن  $x$  عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln |-x|}{|-x|} = \frac{2 \ln |x|}{|x|} - \frac{2 \ln |x|}{|x|} = 0$$

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}^*$



ولدينا  $h(x) - h(-x) = 0$  ومنه  $h(x) = h(-x)$  إذن الدالة  $h$  زوجية.



ب) الرسم

ج) المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  ،

$$\ln x^2 = (m-1)|x|$$

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \text{ تكافئ } m = \frac{\ln x^2}{|x|} + 1 \text{ تكافئ}$$

$$h(x) = m \text{ أي } m = \frac{2 \ln|x|}{|x|} + 1$$

حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقاط المشتركة

بين  $(C_h)$  والمستقيم الأفقي ذي المعادلة  $y = m$  .

إذا كان  $m \leq 1$  فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان  $1 < m < 1 + \frac{2}{e}$  فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان  $m = 1 + \frac{2}{e}$  فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان  $m > 1 + \frac{2}{e}$  فإن المعادلة ليس لها حلول.

### التمرين الثامن ⑤

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1 + e^{-x})$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. بين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  ، على الشكل:  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1 + e^x)$  .

2. برهن أن الدالة  $f$  زوجية.

3. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

4. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

5. أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يطلب تعيين معادلتيهما.

6. ارسم  $(\Delta)$  ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$  .

7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$  .

أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$  ،  $g(x) = f(\ln x)$  .

- استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  .

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة  $g$  .

## الحل

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. تبين أنه يمكن كتابة  $f(x)$ ، على الشكل:  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$ .

$$\text{لدينا } f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) = f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x - x + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln(e^x + 1)$$

2. إثبات أن الدالة  $f$  زوجية.

من أجل  $x \in \mathbb{R}$  فإن  $-x \in \mathbb{R}$  ولدينا  $f(-x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = f(x)$  ومنه الدالة  $f$  زوجية.

3. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ .

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1-e^x+2e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $2(e^x+1) > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $e^x-1$ .

$$f'(x) = 0 \text{ تعني } e^x - 1 = 0 \text{ ويكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ تعني } e^x - 1 > 0 \text{ ويكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ تعني } e^x - 1 < 0 \text{ ويكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

إذن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$
			$\ln 2$	

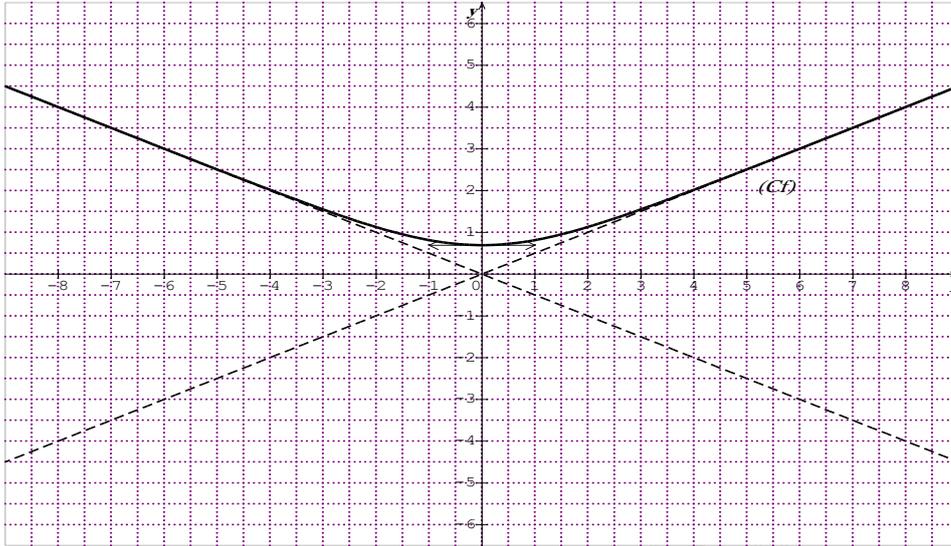
5. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يطلب تعيين معادلتيهما.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$  إذن للمنحنى  $(C_f)$  مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = \frac{1}{2}x$  بجوار  $+\infty$ .

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$  إذن للمنحنى  $(C_f)$  مستقيم مقارب مائل  $(\Delta')$  معادلته

$y = -\frac{1}{2}x$  بجوار  $-\infty$ .

6. رسم  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .



7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$ .

أ - التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$ ،  $g(x) = f(\ln x)$ .

لدينا  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(e^{\ln x} + 1) = f(\ln x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$ .

نلاحظ أن الدالة  $g$  هي مركب الدالة  $\ln$  متبوعة بالدالة  $f$  ( $g = f \circ \ln$ )

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية  $\ln$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty[$  وتأخذ قيمها في المجال  $[0; +\infty[$  والدالة  $f$

متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماماً على المجال

$[1; +\infty[$  أي الدالة  $g$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty[$ .

ب - جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

التمرين التاسع ☺

I- الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$ .

**II-** الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول  $2cm$ )

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ . فسّر النتيجة بيانياً.

ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) أ) بين أنه، من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث  $f'$  هي مشتقة الدالة  $f$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج) بين أنّ المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن  $0 < \alpha < 0,5$ .

(3) أ) بين أنّ المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

(4) نقبل أنّ المستقيم  $(T)$  ذا المعادلة:  $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة فاصلتها  $x_0$ .

أ) احسب  $x_0$ .

ب) أرسم المستقيمين المقاربيين والمماس  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، بحيث تقبل المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين متمايزين.

**الحل** ☺

**I-** الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) دراسة تغيّرات الدالة  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} 2\ln(x+1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 \left( \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 4x}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1}$$

من أجل كل  $x \in ]-1; +\infty[$ ،  $x+1 > 0$  و  $x+2 > 0$  ومنه إشارة  $g'(x)$  هي نفس إشارة  $x$ .

إذن الدالة  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $]-1; 0[$  و متزايدة تماماً على المجال  $]0; +\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة  $g$ .

$x$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) استنتاج أنه، من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$ .

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي  $g(x) > 0$ .

**II-** الدالة المعرّفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (وحدة الطول  $2cm$ )

(أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  إذن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = -1$ .

(ب) حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

(2) (أ) تبين أنه، من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث  $f'$  هي مشتقة الدالة  $f$ .

$$f'(x) = 1 - \frac{-2(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

(ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

لدينا من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$  و  $(x+1)^2 > 0$  إذن  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة

تماماً على  $]-1; +\infty[$



موقع تربية أونلاين

جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

$x$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

(ج) تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم التحقق أن  $0 < \alpha < 0,5$ .  
الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$  وتأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$  إذن من أجل كل عدد حقيقي  $k$  المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $]-1; +\infty[$  وبالأخص المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$  وبما أن  $f(0) \times f(0,5) < 0$  فإن  $0 < \alpha < 0,5$ .  
(3 أ) تبين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$  ومنه المستقيم  $(\Delta)$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$ .

(ب) دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

لدينا  $f(x) - x = -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = \frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$  ومنه إشارة  $f(x) - x$  هي من نفس إشارة  $2\ln(x+1)-1$   
 $f(x) - x = 0$  معناه  $2\ln(x+1)-1=0$  وتكافئ  $\ln(x+1) = \frac{1}{2}$  أي  $x = \sqrt{e} - 1$   
 $f(x) - x > 0$  معناه  $2\ln(x+1)-1 > 0$  وتكافئ  $\ln(x+1) > \frac{1}{2}$  أي  $x > \sqrt{e} - 1$

$x$	-1	$\sqrt{e} - 1$	$+\infty$
$f(x) - x$	-	0	+
الوضعية	$(C_f)$ تحت $(\Delta)$		$(C_f)$ فوق $(\Delta)$

و  $(C_f)$  يقطع  $(\Delta)$  في النقطة التي إحداثياتها  $(\sqrt{e} - 1; \sqrt{e} - 1)$ .

(4) نقبل أن المستقيم  $(T)$  ذا المعادلة:  $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة فاصلتها  $x_0$ .

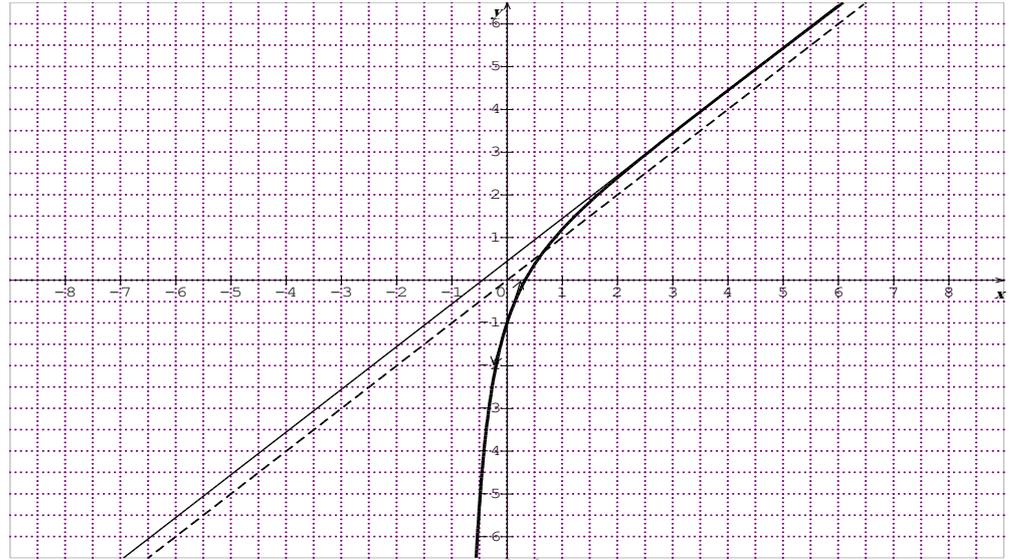
أ) حساب  $x_0$ .

المستقيم  $(T)$  ميله يساوي 1 ومنه  $f'(x_0) = 1$ .

$$f'(x_0) = 1 \text{ معناه } \frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1 \text{ تكافئ } x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0+1) \text{ وتكافئ } \frac{3}{2} = \ln(x_0+1)$$

$$\text{أي } x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

(ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس ( $T$ ) ثم المنحنى ( $C_f$ ).



(ج) تعيين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، بحيث تقبل المعادلة  $f(x) = x + m$  حلين متميزين.

$$\text{المعادلة } f(x) = x + m \text{ تقبل حلين متميزين من أجل قيم } m \text{ من المجال } \left] 0; \frac{2}{\sqrt{e^3}} \right[.$$

### التمرين العاشر ☺

I - لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. ادرس تغيّرات الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

3. تحقق أنّ  $g(1) = 1$  وبيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 1$  تقبل حلاً آخرًا  $\alpha$  حيث  $0,1 < \alpha < 0,3$ .

II - لتكن الدالة  $f$  المعرفة على كما يلي:  $f(x) = x^2 - x \ln x$  و  $f(0) = 0$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; i, j)$ .

1. أ - احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  وفسّر النتيجة هندسياً.

ب -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = g(x)$ .

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج - بيّن أنّ المنحنى ( $C_f$ ) يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيينها.

د - عيّن دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسّر النتيجة بيانياً.

3. أ - أثبت أنّ  $f(x) = x[g(x) - x + 1]$ ، ثم احسب  $f(\alpha)$ .

ب - أعط حصرًا لـ  $f(\alpha)$ .

4. أثبت أنّ المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماسين ( $T$ ) و ( $T'$ ) ميلاهما يساوي 1، يطلب كتابة معادلة كل منهما.

5. ارسم  $(T)$ ،  $(T')$  والمنحني  $(C_f)$ .

**الحل**

I- لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة  $g$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

الدالة  $g$  تقبل الإشتقاق على  $]0; +\infty[$  ولدينا:  $g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$   
إشارة  $g'(x)$  هي نفس إشارة  $2x-1$  لأن  $x > 0$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
			+

الدالة  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $]0; \frac{1}{2}[$  و متزايدة تماماً على المجال  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
			+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

2. استنتاج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا الدالة  $g$  تقبل قيمة حدية صغرى وهي  $\ln 2$  إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$   $g(x) \geq \ln 2$  وبالتالي  $g(x) > 0$ .

3. التحقق أن  $g(1) = 1$

$$g(1) = 2(1) - 1 - \ln 1 = 1$$

تبيين أن المعادلة  $g(x) = 1$  تقبل حلاً آخر  $\alpha$  حيث  $0,1 < \alpha < 0,3$ .

الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $]0; \frac{1}{2}[$  وبالخصوص على المجال  $]0,1; 0,3[$  ولدينا  $g(0,1) \approx 1,5$ ،

$g(0,3) \approx 0,8$  أي  $g(0,3) < 1 < g(0,1)$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]0,1; 0,3[$  بحيث  $g(\alpha) = 1$ .

II- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x^2 - x \ln x$  و  $f(0) = 0$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$1. \text{ أ - حساب } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق على يمين 0 ومنحناها البياني ( $C_f$ ) له نصف مماس مواز لمحور الترتيب

$$\text{ب - حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g(x)$ .

$$f'(x) = 2x - \left[ \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $g(x) > 0$  ومنه  $f'(x) > 0$

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

ج - بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيينها.

لدينا  $f''(x) = g'(x)$  ومنه إشارة  $f''(x)$  هي من نفس إشارة  $g'(x)$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	0
			+

$f''(x)$  تنعدم من أجل  $\frac{1}{2}$  وتغير من إشارتها ومنه النقطة  $\omega \left( \frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right) \right)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى ( $C_f$ ).

د - تعيين دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$  وفسر النتيجة بيانياً.

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  وبالأخص عند  $\alpha$  ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$$

ميله يساوي 1.

3. أ - إثبات أن  $f(x) = x [g(x) - x + 1]$

$$f(x) = x^2 - x \ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x [g(x) - x + 1]$$

حساب  $f(\alpha)$ .

$$f(\alpha) = \alpha [g(\alpha) - \alpha + 1] = \alpha(1 - \alpha + 1) = \alpha(2 - \alpha)$$

ب. حصر  $f(\alpha)$ .

$$0,1 < \alpha < 0,3 \text{ معناه } -0,1 < -\alpha < -0,3 \text{ يكافئ } 1,7 < 2 - \alpha < 1,9$$

$$\text{ومنه } 1,7 \times 0,1 < \alpha(2 - \alpha) < 1,9 \times 0,3 \text{ أي } 0,17 < f(\alpha) < 0,57$$

4. إثبات أن المنحني  $(C_f)$  يقبل مماسين  $(T)$  و  $(T')$  ميلاهما يساوي 1.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } g(x_0) = 1 \text{ ومنه } x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = \alpha$$

إذن  $(C_f)$  يقبل مماسين  $(T)$  و  $(T')$  ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و  $\alpha$ .

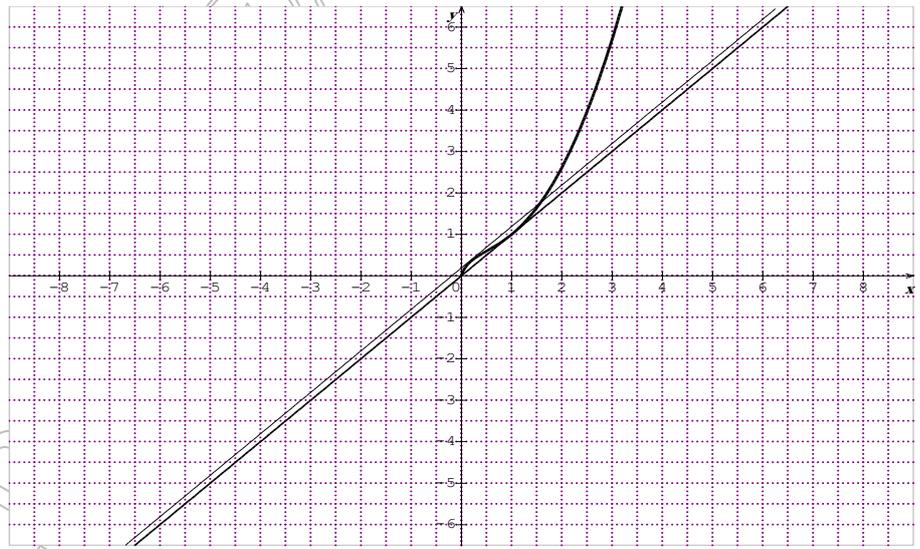
كتابة معادلة كل منهما.

معادلة المماس  $(T)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = (x - 1) + 1 \text{ أي } y = x$$

معادلة المماس  $(T')$  عند النقطة ذات الفاصلة  $\alpha$ .

$$(T'): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) \text{ ومنه } y = (x - \alpha) + \alpha(2 - \alpha) \text{ أي } y = x - \alpha^2 + \alpha$$

5. رسم  $(T)$ ،  $(T')$  والمنحني  $(C_f)$ .

التمرين الحادي عشر

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة:  $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .1. ادرس تغيّرات الدالة  $f$ .2. أثبت أن المنحني  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $y = 1$ :  $(\Delta)$  في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.3. احسب  $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

4. بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]-0,71; -0,70[$
5. أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمسّ المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس  $(T)$ .
6. أرسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .
7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط/الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة:  $f(x) = mx + 1$

8.  $h$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  حيث:  $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

- (أ) بيّن أن  $h$  دالة زوجية.
- (ب) دون دراسة تغيّرات  $h$ ، أرسم  $(C_h)$ ، علل ذلك.

**الحل** ☺

- لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعبارة:  $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$
- $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. دراسة تغيّرات الدالة  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = -\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = -\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $\ln x^2 - 2$ .

$f'(x) = 0$  معناه  $\ln x^2 - 2 = 0$  ويكافئ  $\ln x^2 = 2$  ويكافئ  $x^2 = e^2$  أي  $x = e$  أو  $x = -e$

$f'(x) > 0$  معناه  $\ln x^2 - 2 > 0$  ويكافئ  $\ln x^2 > 2$  ويكافئ  $x^2 > e^2$  أي  $x > e$  أو  $x < -e$

إشارة  $f'(x)$ .

$x$	$-\infty$	$-e$	$0$	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

الدالة  $f$  متزايدة على كل من  $]-\infty; -e[$  و  $[e; +\infty[$  و متناقصة على كل من  $]-e; 0[$  و  $]0; e]$ .

جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-e$	$0$	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{e+2}{e}$	$-\infty$	$\frac{e-2}{e}$	1

2. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $y=1$  في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$$f(x) = 1 \text{ معناه } 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1 \text{ يكافئ } \ln x^2 = 0 \text{ ويكافئ } x^2 = 1 \text{ أي } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

$$\text{إذن } (C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$$

3. حساب  $f(-x) + f(x)$ .

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $x \in \mathbb{R}^*$  ولدينا  $f(-x) + f(x) = 2$  وعليه النقطة  $\omega(0;1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

4. تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-0,71; -0,70[$

الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-0,71; -0,70[$  ولدينا  $f(-0,71) \approx 0,04$ ،  $f(-0,70) \approx -0,02$  أي  $f(-0,70) \times f(-0,71) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  في المجال  $]-0,71; -0,70[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$ .

5. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمسّ المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين.

لدينا معادلة المماس  $(T)$  من الشكل:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$A(0;1) \in (T) \text{ معناه } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ وتكافئ } 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1$$

$$\text{وتكافئ } \left( \frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \frac{-2\ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ ومنه } x_0^2 = e$$

أي  $x_0 = \sqrt{e}$  أو  $x_0 = -\sqrt{e}$ . إذن  $(C_f)$  يقبل مماسين يشمّلان النقطة  $A(0;1)$  عند النقطتين اللتين فاصلتيهما  $\sqrt{e}$  و  $-\sqrt{e}$

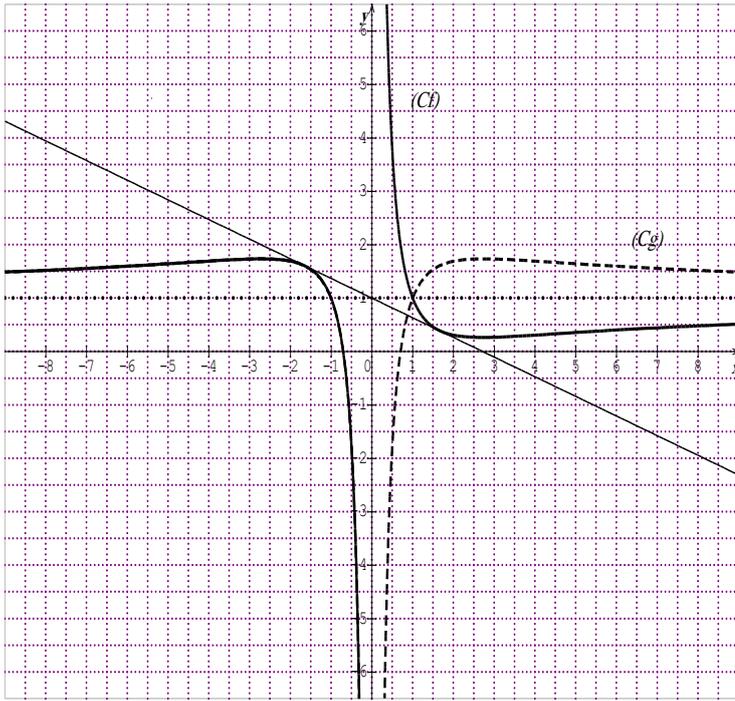
ولدينا  $f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$  و  $f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$  إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أن المنحنى  $(C_f)$

يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمسّ المنحنى  $(C_f)$  في النقطتين اللتين إحداثيتيهما  $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$  و  $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$

$$\cdot (-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$$

كتابة معادلة المماس  $(T)$ .

$$y = \frac{-1}{e}x + 1 \text{ ومنه } y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$



6. رسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

7. المناقشة بيانياً، وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$

عدد حلول المعادلة:  $f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  والمستقيم

ذي المعادلة  $y = mx + 1$ .

إذا كان  $m < -\frac{1}{e}$  فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان  $m = -\frac{1}{e}$  فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان  $-\frac{1}{e} < m < 0$  فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان  $m \geq 0$  فإن المعادلة تقبل حلين.

8.  $h$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  حيث:  $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

(أ) تبين أن  $h$  دالة زوجية.

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}^*$ .

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x) \text{ ولدينا}$$

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$  في المجال  $]-\infty; 0[$  وبما أن  $h$  زوجية فإن  $(C_h)$  متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.

**التمرين الثاني عشر**

(I) الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. احسب نهاية الدالة  $f$  عند 0 وعند  $+\infty$  وفسر النتيجة هندسياً.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

3. اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة ذات الترتيب 0.

4. بيّن أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.

5. بيّن أنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) إذا المعادلة  $y = \frac{1}{2}$  في نقطتين فاصلتاها  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $0,4 < \alpha < 0,5$  و  $5,3 < \beta < 5,4$ .

6. ارسم كلا من (T) و (C).

نعتبر الدالة g المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$ . وليكن ( $\gamma$ ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أنّ الدالة g فردية.
2. بيّن أنّ  $g(x) = f(x)$  على مجال يطلب تحديده.
3. دون دراسة الدالة g شكل جدول تغيّراتها.
4. اعتماداً على المنحنى (C) اشرح كيفية رسم المنحنى ( $\gamma$ )، ثم ارسمه.

**الحل**

(I) الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. حساب نهاية الدالة f عند 0 وعند  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تفسير النتيجة هندسيا

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته  $x = 0$  (حامل محور الترتيب)

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = 0$  (حامل محور الفواصل)

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2} \text{ ولدينا: } ]0; +\infty[ \text{ ولدينا: } ]0; +\infty[$$

إشارة  $f'(x)$  هي عكس إشارة  $\ln x$ .

من أجل  $x \in ]0; 1[$ ،  $\ln x < 0$  ومنه  $f'(x) > 0$

ومن أجل  $x \in ]1; +\infty[$ ،  $\ln x > 0$  ومنه  $f'(x) < 0$  و  $f'(1) = 0$ .

إذن الدالة f متزايدة تماماً  $]0; 1[$  على و متناقصة تماماً على  $]1; +\infty[$ .

جدول التغيّرات.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	↗ 1 ↘	0

3. كتابة معادلة المماس ( $T$ ) للمنحنى ( $C$ ) عند النقطة ذات الترتيب 0.

$$f(x_0) = 0 \text{ معناه } \frac{1 + \ln x_0}{x_0} = 0 \text{ تكافئ } 1 + \ln x_0 = 0 \text{ أي } x_0 = e^{-1}$$

$$\text{ومنه } y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) \text{ أي } y = e^2(x - e^{-1}) + e \text{ وعليه } (T): y = e^2x - e$$

4. تبين أن المنحنى ( $C$ ) يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3}$$

الدالة  $f$  تقبل الإشتقاق مرتين على  $]0; +\infty[$  ولدينا إشارة  $f''(x)$  هي من نفس إشارة  $-1 + 2 \ln x$ .

$$f''(x) = 0 \text{ معناه } -1 + 2 \ln x = 0 \text{ ويكافئ } \ln x = \frac{1}{2} \text{ أي } x = \sqrt{e}$$

$$f''(x) > 0 \text{ معناه } -1 + 2 \ln x > 0 \text{ ويكافئ } \ln x > \frac{1}{2} \text{ أي } x > \sqrt{e}$$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

$f''(x)$  تتعدم عند العدد  $\sqrt{e}$  وتغير من إشارتها بجوار  $\sqrt{e}$  ومنه النقطة  $\omega(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$  هي نقطة انعطاف للمنحنى ( $C$ ).

5. تبين أن المنحنى ( $C$ ) يقطع المستقيم ( $d$ ) ذا المعادلة  $y = \frac{1}{2}$  في نقطتين فاصلتهما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:

$$0,4 < \alpha < 0,5 \text{ و } 5,3 < \beta < 5,4$$

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $]0; 1[$  وبالخصوص على المجال  $]0,4; 0,5[$  ولدينا  $g(0,4) \approx 0,20$  ،

$g(0,5) \approx 0,61$  إذن  $f(0,4) < \frac{1}{2} < f(0,5)$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \text{ المجال } ]0,4; 0,5[ \text{ بحيث}$$

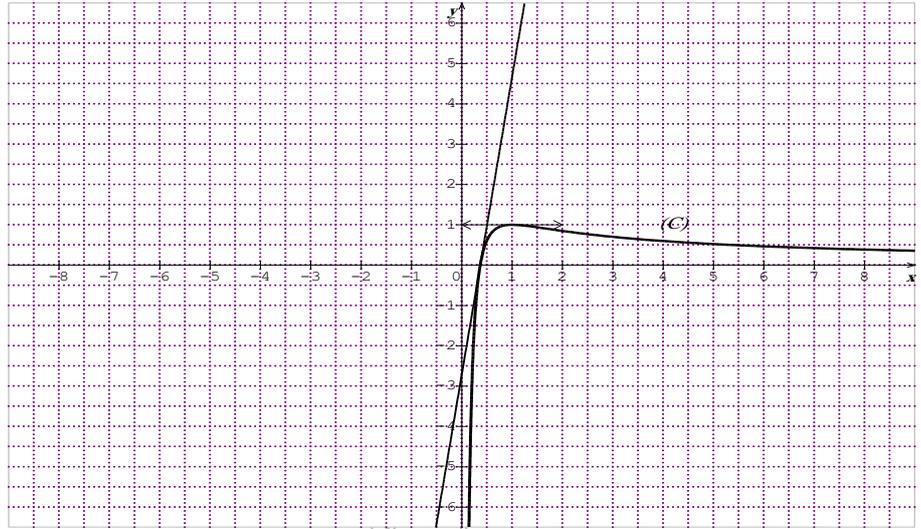
ولدينا الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $]1; +\infty[$  وبالخصوص على المجال  $]5,3; 5,4[$  ولدينا

$g(5,3) \approx 0,503$  ،  $g(5,4) \approx 0,497$  إذن  $f(5,4) < \frac{1}{2} < f(5,3)$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

حقيقي وحيد  $\beta$  من المجال  $]5,3; 5,4[$  بحيث  $f(\beta) = \frac{1}{2}$  وبالتالي المنحنى ( $C$ ) يقطع المستقيم ( $d$ ) ذا المعادلة

$$y = \frac{1}{2} \text{ في نقطتين فاصلتهما } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث: } 0,4 < \alpha < 0,5 \text{ و } 5,3 < \beta < 5,4$$

## 6. رسم كلا من (T) و (C).



نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$ . وليكن  $(\gamma)$  منحناها البياني في المعلم السابق.

1. تبين أن الدالة  $g$  فردية.

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}^*$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم  $x$ :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \frac{\ln(-x)^2}{-2x} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}\right) = -g(x)$$

ومنه الدالة  $g$  فردية .

2. تبين أن  $g(x) = f(x)$  على مجال يطلب تحديده.

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1+\ln x}{x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1+\ln(-x)}{x}; x < 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{2x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln(-x)}{2x}; x < 0 \end{cases}$$

لدينا  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln|x|}{2x}$  ومنه

إذن من أجل  $x \in ]0; +\infty[$  :  $g(x) = f(x)$

3. جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$		$0$	
$g(x)$	$0$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			$-1$	$1$	$0$
				$-\infty$	

4. شرح كيفية رسم المنحنى  $(\gamma)$

$(\gamma)$  ينطبق على  $(C_f)$  في المجال  $]0; +\infty[$  وبما أن  $g$  فردية فإن  $(\gamma)$  متناظر بالنسبة إلى  $O$  مبدأ المعلم.

التمرين الثالث عشر:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة 5cm

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} \quad ]0; +\infty[ \text{ب:}$$

$$1. \text{ بيّن أنه، من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ : g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

2. ادرس إشارة  $g'(x)$  حسب قيم  $x$ .

3. شكل جدول تغيّرات الدالة  $g$ .

4. برهن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

5. حدد إشارة  $g(x)$ .

II- 1. أ. بيّن أنه، من أجل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = g(x)$   
ب. استنتج إتجاه تغيّر الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

$$2. \text{ أ. احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) \text{ ؛ يمكن وضع } t = \frac{1}{x^2}$$

ب. استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3. أ. بيّن أنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

$$\text{ب. احسب } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

ج. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 0.

4. أنشئ جدول تغيّرات الدالة  $f$ ، ثم ارسم (C). نأخذ  $0,8 \square f(\alpha)$ .

الحل ☺

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right.$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . الوحدة 5cm

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} \quad ]0; +\infty[ \text{ب:}$$

$$1. \text{ تبيين أنه، من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[ : g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2x}{x^4} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{x(x^2 + 1)} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} + \frac{4x^2}{x(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

2. دراسة إشارة  $g'(x)$  حسب قيم  $x$ .

من أجل كل عدد حقيقي من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $x(x^2+1)^2 > 0$ ، ومنه إشارة  $g'(x)$  هي نفس إشارة  $x^2 - 1$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

3. جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	0	$\alpha$	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	-	0	+
$g(x)$		$+\infty$	0	$\ln 2 - 1$	0

4. تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

5. تحديد إشارة  $g(x)$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$g(x)$		+	0	-

II-1. تبين أنه، من أجل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ ،  $f'(x) = g(x)$ .

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^2+1} \cdot x$$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} \cdot x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $g(x)$

ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]0; \alpha[$  ومتناقصة تماما على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

2. أ. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$  ؛ يمكن وضع  $t = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع  $t = \frac{1}{x^2}$  إذا كان  $x$  يتحول إلى  $+\infty$  فإن  $t$  يتحول إلى 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ ومنه}$$

ب. استنتاج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$$

3. أ. تبين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = x (\ln(x^2 + 1) - \ln x^2) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$$

ب. حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x = 0$$

ج. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 0.

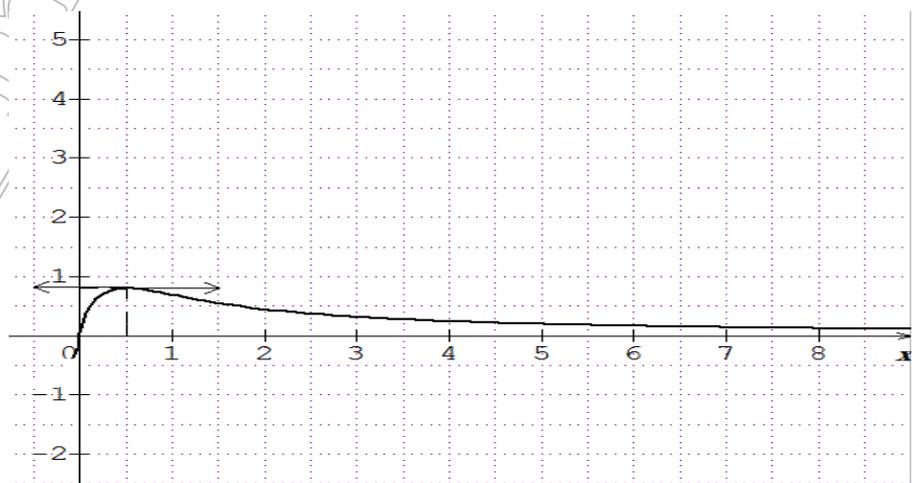
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

إذن الدالة  $f$  لا تقبل الإشتقاق 0.

4. جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

رسم (C).



موقع تربية أونلاين

## التمرين الرابع عشر

I-  $g$  هي الدالة المعرفة على  $]-1;3]$  كما يلي:  $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة:  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر  $\alpha$  يحقق  $-0,8 < \alpha < -0,7$ .

(3) عيّن، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(4)  $h$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1;3]$  ب:  $h(x) = [g(x)]^2$ .

(أ) احسب  $h'(x)$  بدلالة كل من  $g(x)$  و  $g'(x)$ .

(ب) عيّن إشارة  $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $h$ .

II-  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1;3]$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}$ ,  $x \neq 0$   
 $f(0) = 0$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- بيّن أنّ الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة  $T$  مماس ( $C_f$ ) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بيّن أنّه، من أجل كل  $x$  من  $]-1;0[ \cup ]0;3]$ ،  $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$

ب) بيّن أنّ:  $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصار  $f(\alpha)$ .

ج) احسب  $f(3)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1;3]$  فإن:  $x - \ln(x+1) \geq 0$ .

ب) ادرس وضعية ( $C_f$ ) بالنسبة إلى المماس ( $T$ ).

4- عيّن معادلة للمستقيم ( $T'$ ) الموازي لـ ( $T$ ) والذي يتقاطع مع ( $C_f$ ) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5- ارسم ( $T$ )، ( $T'$ ) و ( $C_f$ ).

6- ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $f(x) = x + m$ .

## الحل

I-  $g$  هي الدالة المعرفة على  $]-1;3]$  كما يلي:  $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ .

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} [2(x+1)\ln(x+1) - x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1)\ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1} 2t \ln t = 0$$

$$g(3) = 2\ln 4 - \frac{3}{4}$$

الدالة  $g$  تقبل الاشتقاق على  $]-1;3]$  ولدينا:



$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة  $g'(x)$  هي من نفس إشارة  $2x+1$ .

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	3
$g'(x)$	-	0	+

نستنتج هكذا أن الدالة  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $]-1; -\frac{1}{2}[$  و متزايدة تماماً على المجال  $]-\frac{1}{2}; 3]$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	-1	$\alpha$	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$				$4\ln 2 - \frac{3}{4}$
			$-2\ln 2 + 1$		

(2) تبين أن المعادلة:  $g(x) = 0$  تقبل حلين أحدهما مغدوم والآخر  $\alpha$  يحقق  $-0,8 < \alpha < -0,7$ .

الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $]-1; -\frac{1}{2}[$  وتأخذ قيمها في المجال  $]-2\ln 2 + 1; +\infty[$  و

$0 \in ]-2\ln 2 + 1; +\infty[$  إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $]-1; -\frac{1}{2}[$  وكذلك لدينا الدالة  $g$

مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $]-\frac{1}{2}; 3]$  وتأخذ قيمها في المجال  $]-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$  و

$0 \in ]-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$  إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  في المجال  $]-\frac{1}{2}; 3]$ . وبما أن

$$g(0) = 2\ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{فإن } \beta = 0 \text{ ولدينا } g(-0,8) \approx 0,8 \text{ و } g(-0,7) \approx -0,8 \text{ أي}$$

$$-0,8 < \alpha < -0,7 \text{ و } g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$$

(3) تعيين، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

$x$	-1	$\alpha$	0	3
$g(x)$	+	0	-	+

(4)  $h$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1; 3]$  بـ:  $h(x) = [g(x)]^2$ .

أ) حساب  $h'(x)$  بدلالة كل من  $g(x)$  و  $g'(x)$ .

$$h'(x) = 2g'(x) \times g(x)$$

(ب) تعيين إشارة  $h'(x)$ .

$x$	-1	$\alpha$	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g(x)$		+	-	0	+
$g'(x)$		-	-	0	+
$h'(x)$		-	+	0	+

الدالة  $h$  متزايدة تماماً على كل من  $[\alpha; -\frac{1}{2}]$  و  $[0; 3]$  ومتناقصة تماماً على كل من  $]-1; \alpha]$  و  $]-\frac{1}{2}; 0]$ .

جدول تغيرات الدالة  $h$ .

$x$	-1	$\alpha$	$-\frac{1}{2}$	0	3			
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$			$(-2\ln 2 + 1)^2$				$h(3)$

**II-  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]-1; 3]$  كما يلي:**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- تبين أن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

إذن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 0.

كتابة معادلة لـ ( $T$ ) مماس ( $C_f$ ) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y = x \quad \text{ومنه} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$2- \text{ أ) بيّن أنه، من أجل} \quad f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

من أجل  $x \in ]-1; 0[ \cup ]0; 3]$  لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} x^2}{(\ln(x+1))^2} = \frac{x \left[ 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right]}{(\ln(x+1))^2} = \frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ 

$x$	-1	$\alpha$	0	3
$g(x)$	+	0	-	+
$x$	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	+

نستنتج هكذا أن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على المجال  $]-1; \alpha]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; 3]$ .

(ب) تبين أن:  $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ .

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{2\ln(\alpha+1)}{2(\alpha+1)} = 0 \text{ تكافئ } \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \text{ تكافئ } \frac{1}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$$

$$\text{ومنه } f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1) \text{ أي } \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha} = 2\alpha(\alpha+1)$$

تعيين حصر  $f(\alpha)$ .

$$-0,8 < \alpha < -0,7 \text{ معناه } -1,6 < 2\alpha < -1,4 \text{ ويكافئ (1) } 1,4 < -2\alpha < 1,6$$

$$\text{ولدينا (2) } 0,2 < \alpha+1 < 0,3$$

$$\text{إذن } 0,28 < -2\alpha(\alpha+1) < 0,48 \text{ ومنه } -0,28 < 2\alpha(\alpha+1) < -0,48 \text{ أي } -0,48 < f(\alpha) < -0,28$$

(ج) حساب  $f(3)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

$$f(3) = \frac{3^2}{\ln(3+1)} = \frac{9}{\ln 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = 0$$

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	-1	$\alpha$	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$\frac{9}{\ln 4}$

3- أ) تبين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; 3]$  فإن:  $x - \ln(x+1) \geq 0$ .

$$\text{نضع } u(x) = x - \ln(x+1)$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } ]-1; 3] \text{ لدينا : } u'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

إشارة  $u'(x)$  هي نفس إشارة  $x$ .

$$\text{من أجل } ]-1; 0[ \text{ ، } u'(x) < 0 \text{ ومن أجل } ]0; 3[ \text{ ، } u'(x) > 0$$

إن الدالة  $u$  متناقصة تماماً على المجال  $]-1;0]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[0;3]$  ولها قيمة حدية صغيرة على المجال  $]-1;3]$  وهي  $u(0)=0$  إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1;3]$  ،  $u(x) \geq 0$  أي  $x - \ln(x+1) \geq 0$ .

ب) دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المماس  $(T)$ .

$$f(x) - x = \frac{x^2}{\ln(x+1)} - x = \frac{x^2 - x \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$\ln(x+1) > 0$  يكافئ  $x+1 > 1$  أي  $x > 0$   
 $\ln(x+1) < 0$  يكافئ  $0 \leq x+1 < 1$  أي  $-1 < x < 0$

$x$	-1	0	3
$x$	-	0	+
$u(x)$	+	0	+
$\ln(x+1)$	-	0	+
$f(x) - x$	+	0	+
الوضعية	(T) فوق $(C_f)$		(T) فوق $(C_f)$
	(T) يمس $(C_f)$ في النقطة O		

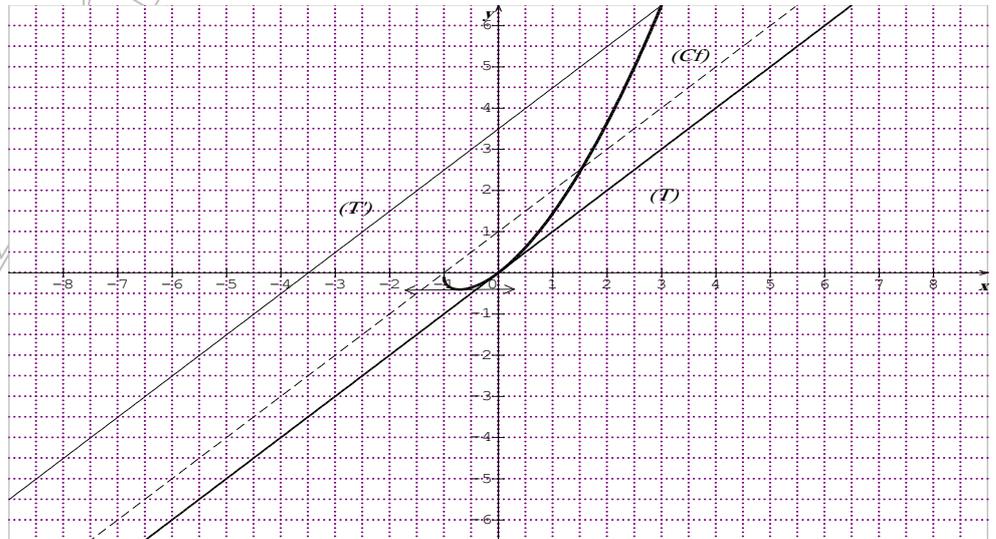
4- تعيين معادلة للمستقيم  $(T')$  الموازي لـ  $(T)$  والذي يتقاطع مع  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 3.

معادلة المستقيم  $(T')$  من الشكل  $y = x + b$  وبما أنه يتقاطع مع  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 3 فهو يشمل النقطة

$$A \left( 3; \frac{9}{\ln 4} \right) \text{ إذن } \frac{9}{\ln 4} = 3 + b \text{ ومنه } b = \frac{9}{\ln 4} - 3$$

وعليه معادلة المستقيم  $(T')$  هي  $y = x + \frac{9}{2 \ln 2} - 3$

5- رسم  $(T)$ ،  $(T')$  و  $(C_f)$ .



6- المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $f(x) = x + m$ .  
حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقط المشتركة بين  $(C_f)$  والمستقيم ذي المعادلة  $y = x + m$ .

إذا كان  $m < 0$  أو  $m > \frac{9}{2\ln 2} - 3$  فإن المعادلة لا تقبل حلاً.

إذا كان  $m = 0$  فإن المعادلة لها حلاً واحداً مضاعفاً.

إذا كان  $0 < m < 1$  فإن المعادلة لها حلان مختلفان.

إذا كان  $1 \leq m \leq \frac{9}{2\ln 2} - 3$  فإن المعادلة لها حل وحيد.

### التمرين الخامس عشر

$f$  دالة معرفة بـ:  $f(x) = \ln(x + e^{-x})$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ - بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون  $x + e^{-x} \geq 1$ .

ب - استنتج أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

2. أ - تحقق من صحة المعلومات التالية:

- من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$ .

- من أجل كل  $x > 0$ ، لدينا  $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$ .

ب - عيّن نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

ج - استنتج من السؤال السابق أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

3. ماهي نهاية  $[f(x) - \ln x]$  عند  $+\infty$ ؛ ماذا تستنتج؟

4. ادرس تغيّرات الدالة  $f$  وشكل جدول تغيّراتها.

5. ارسم  $(d)$ ،  $(C)$  و  $(\Gamma)$  حيث  $(\Gamma)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$ .

### الحل:

$f$  دالة معرفة بـ:  $f(x) = \ln(x + e^{-x})$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ - تبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكون  $x + e^{-x} \geq 1$ .

نضع  $g(x) = x + e^{-x}$

الدالة  $g$  تقبل الإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:  $g'(x) = 1 - e^{-x}$ .

$g'(x) = 0$  معناه  $1 - e^{-x} = 0$  ويكافئ  $e^{-x} = 1$  أي  $x = 0$

$g'(x) > 0$  معناه  $1 - e^{-x} > 0$  ويكافئ  $e^{-x} < 1$  ويكافئ  $-x < 0$  أي  $x > 0$

$g'(x) < 0$  معناه  $1 - e^{-x} < 0$  ويكافئ  $e^{-x} > 1$  ويكافئ  $-x > 0$  أي  $x < 0$ .

إذن الدالة  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  ولها قيمة حدية صغرى وهي

$g(0) = 1$  وعليه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) \geq 1$  أي  $x + e^{-x} \geq 1$ .

ب - استنتج أن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $x + e^{-x} \geq 1$  ومنه  $x + e^{-x} > 0$  إذن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

## أ.2 - التحقق من صحة المعلومات التالية :

- من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا  $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$ .

$$f(x) = \ln(x + e^{-x}) = \ln e^{-x} (xe^x + 1) = \ln e^{-x} + \ln(xe^x + 1) = -x + \ln(xe^x + 1)$$

- من أجل كل  $x > 0$  ، لدينا  $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$ .

$$f(x) - \ln x = \ln(x + e^{-x}) - \ln x = \ln\left(\frac{x + e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ب - تعيين نهايات الدالة  $f$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \ln(xe^x + 1) = +\infty$$

ج - استنتاج من السؤال السابق أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + 1) = 0$  ومنه المستقيم  $(d)$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$

4. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x + e^{-x} > 0$  ومنه إشارة هي نفس إشارة  $1 - e^{-x}$ .

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

$$f'(x) > 0 \text{ يكافئ } x > 0$$

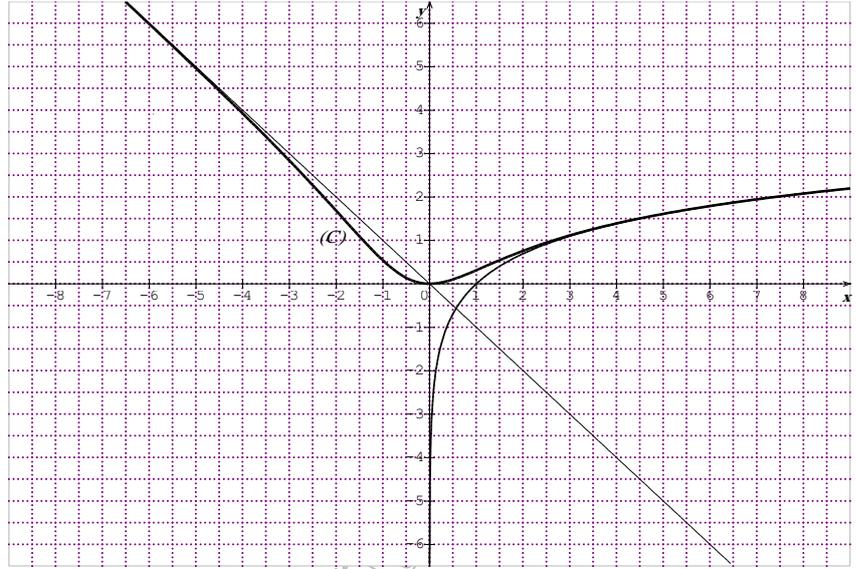
$$f'(x) < 0 \text{ يكافئ } x < 0$$

إذن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

5. رسم  $(d)$ ،  $(C)$  و  $(\Gamma)$  حيث  $(\Gamma)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$ .



### التمرين السادس عشر (٢)

I- الدالة  $g$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ .

- 1- ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .
- 2- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $0,31 < \alpha < 0,32$  وأن:  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ .
- 3- استنتج، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$ .

$(C_f)$  منحنى  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

2- أثبت أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ .

3- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن:  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

5- مثل المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-1; 2]$ .

III- المنحنى الممثل للدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $h(x) = \ln(x+1)$ .

$A$  النقطة ذات الإحداثيتين  $(-1; 2)$  و  $M$  نقطة من  $(\Gamma)$  فاصلتها  $x$ .

1- أثبت أن المسافة  $AM$  تعطى بالعلاقة  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

2- الدالة  $k$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $k(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ- بين أن للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]-1; +\infty[$ .

ب- عين إحداثيتي النقطة  $B$  من  $(\Gamma)$ ، بحيث تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

ج- بين أن:  $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$ .

## الحل

I- الدالة  $g$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ .

1- دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

الدالة  $g$  تقبل على الإشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ولدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $x+1 > 0$  و  $\frac{1}{x+1} > 0$  ومنه  $g'(x) > 0$  إذن الدالة  $g$  متزايدة

تماما على  $]-1; +\infty[$ .

2- تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث:  $0,31 < \alpha < 0,32$  وأن:  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ .

الدالة  $g$  مستمرة على  $]-1; +\infty[$  لأنها تقبل الإشتقاق على  $]-1; +\infty[$  وهي متزايدة تماما على هذا المجال وخاصة على

المجال  $[0,31; 0,32]$  ولدينا  $g(0,31) \approx -0,01$ ،  $g(0,32) \approx 0,02$  أي  $g(0,32) \times g(0,31) < 0$  ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]0,31; 0,32[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0 \text{ أي } (\alpha+1)^2 - 2 - \ln(\alpha+1) = 0.$$

3- استنتاج، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

من أجل  $x \in ]-1; \alpha[$  لدينا  $g(x) < g(\alpha)$  أي  $g(x) < 0$

ومن أجل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  لدينا  $g(x) > g(\alpha)$  أي  $g(x) > 0$  و  $g(\alpha) = 0$

II- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$ .

$(C_f)$  منحنى  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

2- إثبات أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$

الدالة  $f$  تقبل الإشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ولدينا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2 \left( \frac{-1}{x+1} \right) (2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ .

من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $\frac{2}{x+1} > 0$  ، ومنه إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $g(x)$ .

أي  $f'$  سالبة على  $]-1; \alpha[$  وموجبة على  $]\alpha; +\infty[$

نستنتج هكذا أنّ الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]-1; \alpha[$  و متزايدة تماما على  $]\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيّرات الدالة  $f$ :

$x$	$-1$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4-تبيين أنّ:  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$ 

لدينا  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$  إذن  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

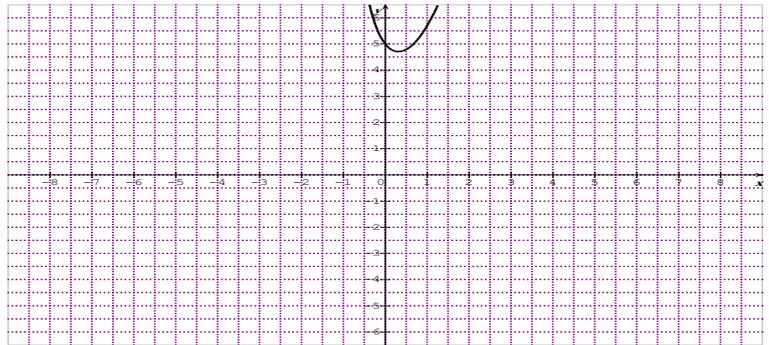
$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$$

استنتج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

$0,32 < \alpha < 0,32$  معناه  $1,32 < \alpha+1 < 1,31$  يكافئ  $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$  ويكافئ

$2,7161 < 1+(\alpha+1)^2 < 2,7424$  ومنه  $1,7424 \times 2,7424 < (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2) < 1,7161 \times 2,7161$  أي

$$4,6611 < f(\alpha) < 4,7789$$

5-تمثيل المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-1; 2]$ .III- المنحنى الممثل للدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $h(x) = \ln(x+1)$ .

$A$  النقطة ذات الإحداثيتين  $(-1; 2)$  و  $M$  نقطة من  $(\Gamma)$  فاصلتها  $x$ .

1-إثبات أنّ المسافة  $AM$  تعطى بالعلاقة  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

لدينا  $M(x; \ln(x+1))$  ومنه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2- الدالة  $k$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $k(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ- تبين أن للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]-1; +\infty[$ .

الدالة  $f$  تقبل الإشتقاق على  $]-1; +\infty[$  وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة  $k$  تقبل الإشتقاق على  $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا } k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $2\sqrt{f(x)} > 0$ ، ومنه إشارة  $k'(x)$  هي نفس إشارة  $f'(x)$  وبالتالي للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]-1; +\infty[$ .

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب- تعيين إحداثيتي النقطة  $B$  من  $(\Gamma)$ ، بحيث تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة  $k$  متناقصة تماماً على  $]-1; \alpha[$  ومنتزيدة تماماً على  $[\alpha; +\infty[$  فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال

$]-1; +\infty[$  تبلغها من أجل  $x = \alpha$  ومنه  $AM$  تكون أصغر ما يمكن من أجل  $x = \alpha$  أي عند النقطة  $B(\alpha; \ln(\alpha+1))$

ج- تبين أن:  $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$ .

$$AB = k(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{(\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)} = (\alpha+1)\sqrt{1 + (\alpha+1)^2}$$

**التمرين السابع عشر** ☺

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$ .

1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

2- ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  وشكل جدول تغيراتها.

3- استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

II- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل:  $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$ .

1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (يمكن وضع  $t = \frac{1}{e^x}$ ).

2- بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$ .

- استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

3- ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

- استنتج مجموعة صور  $\mathbb{R}$  بواسطة الدالة  $f$ .

4- بيّن أن المعادلة:  $f(x) = \frac{1}{2}$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$ .

5- ارسم  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  في مستوٍ مزدود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

6- ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة:  $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$ .



موقع تربية أونلاين

**الحل:**

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$ .

1- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$

الدالة  $g$  تقبل الإستقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1-e^x+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g'(x) < 0$  وبالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$0$

3- استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة  $g$  أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) > 0$ .

II- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل:  $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$ .

1- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

نضع  $t = \frac{1}{e^x}$  عندئذ  $e^x = \frac{1}{t}$  إذا كان  $x$  يتوّل إلى  $+\infty$  فإن  $t$  يتوّل إلى  $0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$ .

$$\text{لدينا } f(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) = e^x \ln(e^{-x}(e^x+1)) = e^x [-x + \ln(e^x+1)] = -xe^x + e^x \ln(e^x+1)$$

- استنتاج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x+1) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ .

$$f'(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) e^x = e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} = g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $g(x) > 0$ ، ومنه  $f'(x) > 0$  إذن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .  
جدول تغيّرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	1

- استنتاج مجموعة صور  $\mathbb{R}$  بواسطة الدالة  $f$ .

الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماما على  $\mathbb{R}$  ولدينا  $f(]-\infty; +\infty[) = ]1; 2[$

4- تبين أن المعادلة:  $f(x) = \frac{1}{2}$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ .

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  وتأخذ قيمها في المجال  $]1; 2[$  و  $\frac{1}{2} \in ]1; 2[$  إذن المعادلة  $f(x) = \frac{1}{2}$  تقبل حلا

وحيدا  $\alpha$ .

5- رسم  $(C_f)$

6- المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد

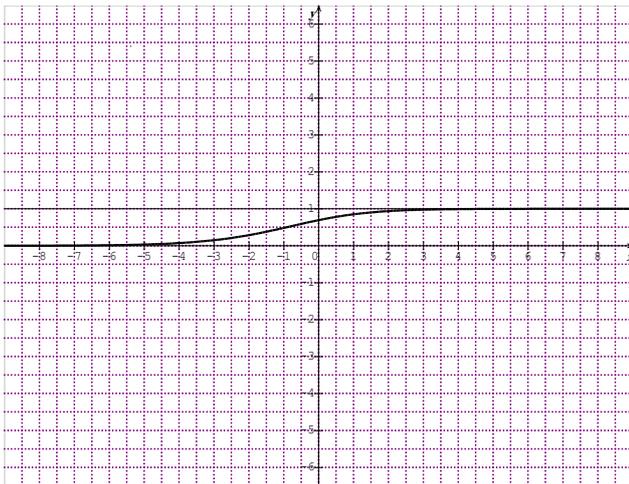
حلول المعادلة:  $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$ .

أي  $e^x \ln(1+e^{-x}) = m$  تكافئ  $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$

$f(x) = m$

إذا كان  $m \leq 0$  أو  $m \geq 1$  فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان  $0 < m < 1$  فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.



### التمرين الثامن عشر

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي:  $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ ;  $x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$   
 $f(0) = -1$

نسمة  $(C_f)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$  (يمكن وضع  $t = \ln x$ ) ثم أدرس استمرارية الدالة  $f$  عند 0 من اليمين.

ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$  ثم فسر النتيجة هندسيا.

$$(3) \text{ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ ، حيث } x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[ \text{ ، } f'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(5) \text{ بين أنه من أجل } x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[ \text{ ، } f''(x) = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3} \text{ ، ثم استنتج أن المنحني } (C_f) \text{ يقبل نقطة}$$

انعطاف يطلب تعيينها .

(6) أحسب  $f(4)$  أرسم  $(T)$  و  $(C_f)$  .

(7) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-e; e\}$  :  $g(x) = f(|x|)$  .

أ) بين أن الدالة  $g$  زوجية .

ب) اشرح كيفية الحصول على  $(C_g)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  ثم ارسم  $(C_g)$  .

**الحل** ☺

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة بما يلي : } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}; x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[ \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

نسمي  $(C_f)$  المنحني الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) تبين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$  ثم أدرس استمرارية الدالة  $f$  عند 0 من اليمين .

نضع  $t = \ln x$  إذا كان  $x \xrightarrow{x>0} 0$  فإن  $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1-t} = -1$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$  فإن الدالة  $f$  مستمرة على اليمين 0.

$$\text{ب) حساب } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\frac{\ln x}{1-\ln x} + 1}{x} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{1}{1-\ln x} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} (x - x \ln x) = 0^+$$

**التفسير:** الدالة  $f$  لا تقبل الإشتقاق عند 0 ومنحناها البياني يقبل حامل محور الترتيب مماساً له عند النقطة التي إحداثياتها  $(0; -1)$

(2) تبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$  و تفسير النتيجة هندسياً .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{1-t} = -1$$

**التفسير:**  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب معادلته  $y = -1$  بجوار  $+\infty$  .

$$(3) \text{ أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ حيث } x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[ , f'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) + \frac{1}{x} \ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x + \ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$

من أجل كل  $x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$  يكون  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]0; e[$  و  $]e; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1
		$-\infty$	

4) كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ ومنه } y = 1(x-1) + f(1)$$

5) تبين أنه من أجل  $x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$  ،  $f''(x) = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$  ثم استنتج أن المنحني  $(C_f)$  يقبل نقطة

انعطاف يطلب تعيينها .

$$\text{تذكير: } \left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

من أجل  $x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$  لدينا:

$$f''(x) = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 + 2x \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-(1-\ln x)(1-\ln x - 2)}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

إشارة  $f''(x)$  هي نفس إشارة  $1+\ln x$  لأن  $x^2(1-\ln x)^3 > 0$  من أجل كل  $x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

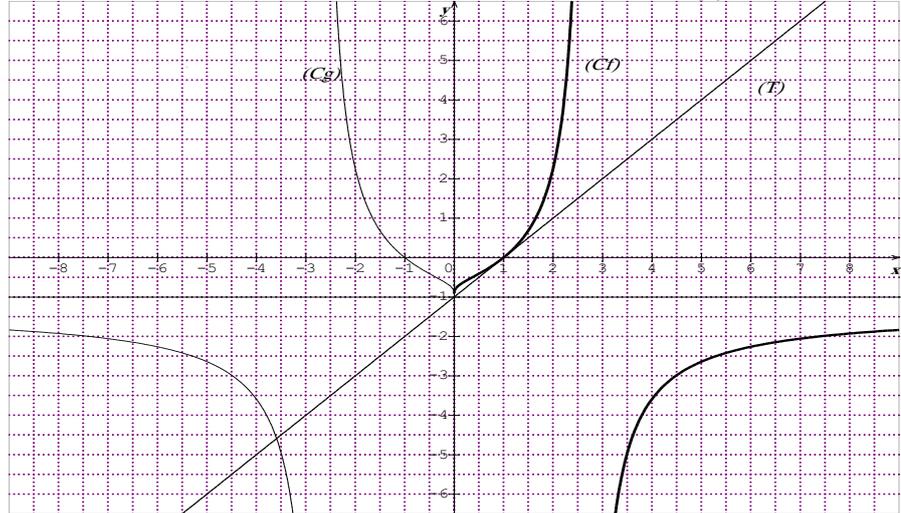
$$f''(x) = 0 \text{ تعني } 1+\ln x = 0 \text{ وتكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) > 0 \text{ تعني } 1+\ln x > 0 \text{ وتكافئ } \ln x > -1 \text{ أي } x > \frac{1}{e}$$

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$  تنعدم عند العدد  $\frac{1}{e}$  وتغير من إشارتها و منه النقطة ذات الإحداثيتين  $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{2}\right)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .

(6) حساب  $f(4)$  ثم ارسم  $(T)$  و  $(C_f)$ .



(7) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{-e; e\}$  بـ :  $g(x) = f(|x|)$ .

(أ) تبين أن الدالة  $g$  زوجية .

لدينا  $D_g$  متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

(ت) شرح كيفية الحصول على  $(C_g)$  انطلاقاً من  $(C_f)$  ثم ارسم  $(C_g)$ .

$$\begin{cases} g(x) = f(x); x \in [0; e[ \cup ]e; +\infty[ \\ g(x) = f(-x); x \in ]-\infty; -e[ \cup ]-e; 0] \end{cases}$$

لما  $x \in [0; e[ \cup ]e; +\infty[$  يكون  $(C_g)$  منطبق على  $(C_f)$  وبما أن الدالة  $g$  زوجية فإن  $(C_g)$  يكون متناظر بالنسبة لمحور الترتيب



موقع تربية أونلاين