الطرح الجيد مرآة الفكر النيّر

"إلى جمهور طلبتنا الأوفياء مصدر تعلمنا المستمر"

سلسلة حاقة للرياضيات

في رحاب الدوال العددية

مجموعة من التمارين المنتقاة والمتنوعة

(جميع الشعب العلمية)

" ازرع جميلا ولو في غير موضعه ... فلا يضيع جميل أينما زرع "

إعداد الأستاذ : محمد حاقة

ثانوية عبد العزيز الشريف - الوادي

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله الذي جعل لنا من العلم نورا نهدي به و بعد...

أتقدم بهذه السلسلة – سلسلة حـاقة للرياضيات ـ إلى طلبتي الأعزاء و إلى كل من يجمعنا بهم رباط العلم من قراء و مدرسين فهذه السلسلة تحتوي على ملخص شامل ومبسط وكم هائل من التمارين المقترحة منها بكالوريات سابقة ومنها تمارين مقترحة ، وقد أرفقت بعضها بالحلول وتعمدت ترك جزء منها دون حل لكي تأخذ الوقت الكافي في التفكير فالمهم أن تأتي بالفكرة وحدك الآن أو غدا فالوقت المخصص للتمرين هو اكتساب مهارة التفكير

نرجو من الأساتذة الكرام و كذلك إخواننا الطلبة أن لا تبخلوا علينا بملاحظاتكم و اقتراحاتكم البناءة لنصوب أخطاءنا و نتفادى زلاتنا و نتلافى العيوب التي يمكن أننا ولا شك وقعنا فيها

و أسال الله عز و جل أن يوفقكم و يجعل النجاح حليفنا....

الأستاذ : محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة

القبة القديمة ـ الجزائر

ملخص شامل ومبسط للدوال العددية

1) تذكير: (حلول معادلة من الدرجة الثانية والتحليل الى جداء عاملين)

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ حيث } a \neq 0$$

إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ **في** $\mathbb{R}$	**لا تقبل حل**	**حل مضاعف** $x_0 = -\frac{b}{2a}$	**حلين هما:** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
يتم تحليل $ax^2 + bx + c = 0$ **على الشكل**	**لا تقبل تحليل**	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

الإشارة:

إذا كان	فان الإشارة كما يلي
$\Delta < 0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ ؛ الإشارة: إشارة a
$\Delta = 0$	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ ؛ الإشارة: إشارة a | إشارة a
$\Delta > 0$	$x_1 < x_2$ ؛ x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ ؛ الإشارة: إشارة a | عكس إشارة a | إشارة a

إشـــارة العبارة $ax + b$ حيث $a \neq 0$

x	$-\infty$	$x_0 = -b/a$	$+\infty$
الإشارة	عكس إشارة a	0	إشارة a

2) تذكير ببعض المتطابقات الشهيرة

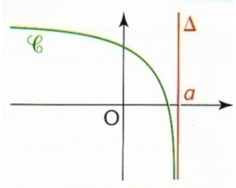
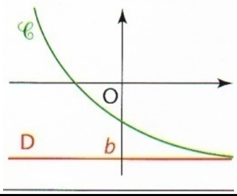
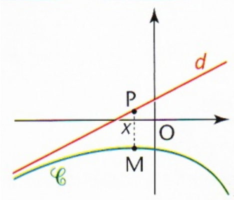
$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$; $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$; $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$; $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$; $\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$

دليـــل الــــدوال العدديـــــة (معارف لابـــد منهـــا)

3) المستقيـمات المقــاربـــة

النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملحوظة: إذا كانت الدالة f من الشكل: $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ فالمستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞

4) دراسة وضعية المنحنى والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$ فإذا كان

$$\boxed{f(x)-(ax+b)}$$

- موجب تماما: (C_f) فـــوق (Δ)
- سالب تماما: (C_f) تحـــت (Δ)
- معدوم: (C_f) يقطـــع (Δ) في النقطة $A(x_0;f(x_0))$

5) تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

$(C_f)\cap(xx')$ يعني: حل المعادلة $f(x)=0$

(إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل معناه (C_f) لا يقطع محور الفواصل)

6) تقاطع (C_f) مع محور التراتيب : $(C_f)\cap(yy')$ يعني: حساب $f(0)$

7) الدالة الزوجية والدالة الفردية

– التأكد من الشرط اللازم، مجموعة التعريف متناظرة مع 0 (غالبا ما يكون محقق إن لم نقل دوما)

أ/ f دالة زوجية يكافئ : $f(-x)=f(x)$ ب/ f دالة فردية يكافئ: $f(-x)=-f(x)$

ملحوظة (1): يكون المنحنى الممثل للدالة الزوجية متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

ملحوظة (2): يكون المنحنى الممثل للدالة الفردية متناظر بالنسبة إلى المبدأ : " O "

8) مركز التناظر

$\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) يعني : $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ أو $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

المسألة العكسية

نأخذ مثال: يطلب منا إثبات أن $f(-2-x)+f(x)=4$ ،ثم فسر النتيجة هندسيا

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة التالية: $\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha=-2\\ 2\beta=4\end{cases}$ ونقول أن النقطة $A(-1;2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

9) محور التناظر

المستقيم $(D): x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) يعني: $f(2\alpha-x)=f(x)$ أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

المسألة العكسية

نأخذ مثال: يطلب منا إثبات أن $f(3-x)=f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة التالية: $2\alpha=3$ ومنه $\alpha=\frac{3}{2}$ ونقول أن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{3}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

10) نقطـة الانعـطاف

نقول أن (C_f) يقبل النقطة $A(x_0;f(x_0))$ كنقطة انعطاف اذا تحقق أحد الشروط التالية

أ/ المشتق الثاني $f''(x)$ ينعدم عند x_0 ، ويغير اشارته عندها

ب/ المشتق الأول $f'(x)$ ينعدم عند x_0، ولا يغير إشارته عندها

ج/ المماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ يخترق المماس (C_f)

11) الاستمرارية

(إثبات الاستمرارية عند قيمة خارج البرنامج حسب التعديل الجديد– سبتمبر 2018)

أ/ المفهوم الحدسي للاستمرارية:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) منحناها البياني في معلم $(O;I,J)$.

نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحناها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر

ب/ ملحوظة: كل الدوال المقررة عليكم في هذا المستوى مستمرة على مجموعة تعريفها

نظرية القيم المتوسطة (الحالة الخاصة) : إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على $[a;b]$

وكان $f(a)\times f(b)<0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α يحقق $f(\alpha)=0$ حيث $\alpha\in\,]a;b[$

نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامة) : خارج البرنامج هذه السنة استثناءا

12) الاشتقاق والتفسير الهندسي

	النهاية	قابلية الاشتقاق	التفسير الهندسي
1	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \neq 0$	f ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل مماسا عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **معامل توجيهه (الميل)** l
2	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	f ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل مماسا عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **أفقي معادلته:** $y=f(x_0)$
3	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	f غير ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل مماسا عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **عمودي معادلته:** $x=x_0$
4	$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$ ، $l_1 \neq l_2$	f ق إ على يمين وعلى يسار x_0 لكن غير ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نصفي مماسين وتسمى النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f)
5	$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ **أو العكس**	f ق إ على يمين x_0 وغير ق إ على يسار x_0 وغير ق إعند x_0	(C_f) **يقبل عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نصفي مماسين وتسمى النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نقطة زاوية للمنحنى** (C_f)
6	$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث النهايتين معا $-\infty$ أو $+\infty$	f غير ق إ على يمين وعلى يسار x_0 و غير ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل مماسا عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته:** $x=x_0$ **وتسمى النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نقطة انعطاف للمنحنى** (C_f)
7	$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث إحدى النهايتين $-\infty$ والأخرى $+\infty$	f غير ق إ على يمين وعلى يسار x_0 و غير ق إ عند x_0	(C_f) **يقبل عند النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نصفي مماسين موازيين لحامل محور التراتيب(عموديان) معادلتيهما:** $x=x_0$ **وتسمى النقطة** $A(x_0;f(x_0))$ **نقطة رجوع للمنحنى** (C_f)

ملحوظة(1):: صيغة أخرى لقانون قابلية الاشتقاق: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ملحوظة(2):: معادلتا **نصفي المماسين** التي ذكرناها في الحالة (4) عند النقطة الزاوية هما:

$$\begin{cases} y = f_g'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ f_g'(x_0) = l_1 \end{cases}$$ و $$\begin{cases} y = f_d'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ f_d'(x_0) = l_2 \end{cases}$$

13) المماس : السؤال وطريقة الإجابة عليه

	الســــــؤال	كيفية البحث عن الفاصلة x_0 لكتابة معادلة المماس
1	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب القانون: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ نعوض x_0 بقيمتها المعطاة
2	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	نحل المعادلة $f(x_0)=y_0$ ، وعند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
3	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) ميله (أو معامل توجيهه) يساوي a	نحل المعادلة $f'(x_0)=a$، وعند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)
4	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ مثل الحالة (3)
5	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	نحل المعادلة: $a.f'(x_0)=-1$ وعند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)
6	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يشمل النقطة $M(\alpha,\beta)$	نحل المعادلة: $\beta=f'(x_0).(\alpha-x_0)+f(x_0)$ عند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)

ملحوظة : في الحالات (3) (4) (5) (6) عدد الحلول يدل على عدد المماسات وإذا لم تقبل المعادلة حل يعني لا يوجد مماس

14) استنتاج تمثيل بياني من أخر

يطلب منا في بعض المسائل استنتاج تمثيل بياني بالاستعانة بتمثيل بياني أخر إما قمنا برسمه أو منحنى دالة مرجعية

السـؤال	استنتـــاج (C_h) مــن (C_f)
$h(x)=\left\|f(x)\right\|$	لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f)، ولما يكون (C_f) تحت محور الفواصل فان $h(x)=-f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx')
$h(x)=f(\left\|x\right\|)$ " h دالة زوجية "	لما $x\geq 0$ فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f) ونكمل رسم (C_h) بالتناظر بالنسبة (yy') لان h زوجية
$h(x)=f(-\left\|x\right\|)$ " h دالة زوجية "	لما $x\leq 0$ فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f) ونكمل رسم (C_h) بالتناظر بالنسبة (yy') لان h زوجية
$h(x)=-f(x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى (xx')
$h(x)=f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى (yy')
$h(x)=-f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم" O "
$h(x)=f(x+a)+b$	(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$

✓ التمرين الأول:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بّين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $0,6<\alpha<0,7$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وفسر النتيجة الأخيرة هندسيا

2) بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بّين أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$ ،ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أنشئ المنحنى (C_f)

✓ الإجابة النموذجية:

I)

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g

- نحسب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=6x^2+2x$ نحل معادلة $6x^2+2x=0$

$$6x^2+2x=0 \Rightarrow 2x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0; x=\frac{-1}{3}$$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لما $x\in\left]-\infty;\frac{-1}{3}\right]\cup\left[0;+\infty\right[$: g متزايدة تماما ولما $x\in\left[\frac{-1}{3};0\right]$: g متناقصة تماما

- جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\quad \frac{-1}{3} \quad$ 0 $\quad +\infty$
$g'(x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
$g(x)$	$-\infty \nearrow -0.9 \searrow -1 \nearrow +\infty$

2) أ/ تبّيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $0,6<\alpha<0,7$

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[0,6;0,7\right]$ و $g(0,6)\simeq -0,2$ ، $g(0,7)\simeq 0,1$ ومنه

حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α يحقق $g(\alpha)=0$ حيث: $\alpha\in\left]0,6;0,7\right[$

ب/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ $\quad \alpha \quad$ $+\infty$
$g(x)$	$- \quad 0 \quad +$

$(II$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ وتفسير النتيجة الأخيرة هندسيا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty$$

إشارة المقام

x	$-\infty$ $\quad < 0 > \quad$ $+\infty$
$3x$	$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

2) تبّيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

نحسب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)(3x)-3(x^3+x^2-1)}{(3x)^2}$$
$$=\frac{9x^3+6x^2-3x^3-3x^2+3}{9x^2}$$
$$=\frac{6x^3+3x^2+3}{9x^2}$$
$$=\frac{2x^3+x^2+1}{3x^2}=\frac{g(x)}{3x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب تماما

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

لما $x \in]\alpha;+\infty[$: f متزايدة تماما ولما $x \in]-\infty;\alpha]-\{0\}$: f متناقصة تماما

تشكيل جدول تغيراتها

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) بّين أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$ ،ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا: $f(x)=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+1}{3\alpha}$.......(1) ومن جهة أخرى $2\alpha^3+\alpha^2-1=0$ ومنه $\alpha^3=\dfrac{-\alpha^2+1}{2}$.....(2)

نعوض (2) في (1) نجد $f(x)=\dfrac{\dfrac{-\alpha^2+1}{2}+\alpha^2+1}{3\alpha}=\dfrac{\dfrac{\alpha^2+3}{2}}{3\alpha}=\dfrac{\alpha^2+3}{6\alpha}=\dfrac{\alpha^2}{6\alpha}+\dfrac{3}{6\alpha}=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$

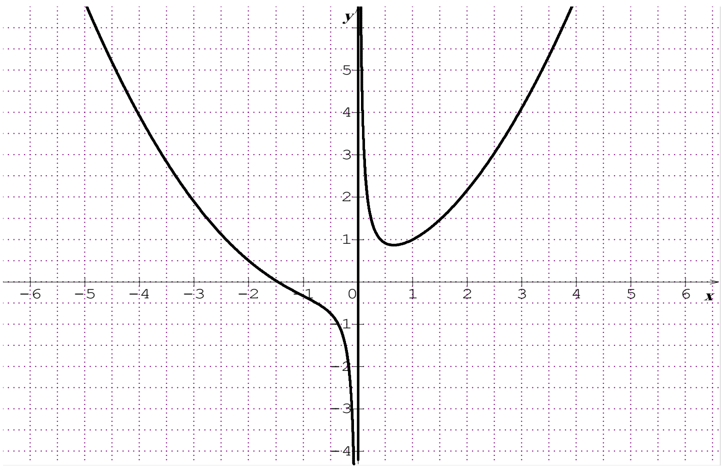
– استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا (1).... $0,6<\alpha<0,7 \Rightarrow \dfrac{0,6}{6}<\dfrac{\alpha}{6}<\dfrac{0,7}{6}$

وأيضا (2).... $0,6<\alpha<0,7 \Rightarrow \dfrac{1}{2\times 0,7}<\dfrac{1}{2\alpha}<\dfrac{1}{2\times 0.6}$ بجمع (1) مع (2) نجد

$$\frac{1}{2\times 0,7}+\frac{0,6}{6}<\frac{1}{2\alpha}+\frac{\alpha}{6}<\frac{1}{2\times 0.6}+\frac{0,7}{6} \Rightarrow 0,8<f(\alpha)<0,9$$

5) أنشئ المنحنى (C_f)



✓ التمرين الثاني:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x-4$

1) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $0,6<\alpha<0,7$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2+2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان ؛ $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

5) تحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$، ثم عّين حصر للعدد $f(\alpha)$

6) برهن أن للمنحنى (C_f) مماسين يوازيان (Δ) (لا يطلب تعيين معادلتيهما)

7) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-1,3<x_0<-1,2$

8) أنشئ (C_f) ، (Δ)

9) ناقش بيانيًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=m$

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=-|f(x)|$

☒ اشرح كيفية رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه

✓ الاجابة النموذجية

$I-1$) دراسة تغيرات الدالة g

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=3x^2+6>0$ ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad\alpha\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

2)

أ/ g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[0,6\,;0,7\right]$ و $g(0,6)\simeq -0,1$ ، $g(0,7)\simeq 0,5$ ومنه

حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α يحقق $g(\alpha)=0$ حيث: $\alpha\in\left]0,6\,;0,7\right[$

ب/ إشارة $g(x)$

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

II- 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

2) أ/ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2)-2x(x^3+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{x^4+6x^2-4x}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^3+6x-4)}{(x^2+2)^2}=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$$

ب/ إشارة $f'(x)$ من إشارة x و $g(x)$ لان المقام موجب تماما

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$

f متزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;0\right]$ و $\left[\alpha;+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[0;\alpha\right]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↘	$f(\alpha)$ ↗	$+\infty$

3) $$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{\alpha.\overbrace{g(\alpha)}^{0}}{(\alpha^2+2)^2}=0$$

تفسر هندسيا: (C_f) يقبل مماسا أفقيا معـادلته $y=f(\alpha)$ عند النقطة $(\alpha\,;f\,(\alpha))$

4) نبين أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=0$

$f(x)-y=\dfrac{x^3+2}{x^2+2}-x=\dfrac{-2x+2}{x^2+2}$ ومنه $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-2x+2}{x^2+2}=0$

وعليه: $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

مما سبق: $f(x)-y=\dfrac{-2x+2}{x^2+2}$ وإشارته من إشارة البسط لان المقام موجب تماما

$-2x+2=0$ معناه $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

6) (1) $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3+2}{\alpha^2+2}$ وأيضا $g(\alpha)=0$ معناه $\alpha^3+6\alpha-4=0$

ومنه (2) $\alpha^3=-6\alpha+4$ نعوض (2) في (1) نجد: (3) $f(\alpha)=\dfrac{-6\alpha+6}{\alpha^2+2}$

نبحث أيضا عن عبارة تعوض α^2

من (2) نجد $\alpha.\alpha^2=-6\alpha+4 \Leftarrow \alpha^2=\dfrac{-6\alpha+4}{\alpha}$ (4) نعوض (4) في (3) نجد

$$f(\alpha)=\frac{-6\alpha+6}{\dfrac{-6\alpha+4}{\alpha}+2}=\frac{\alpha(-6\alpha+6)}{-4\alpha+4}=\frac{6\alpha(-\alpha+1)}{4(-\alpha+1)}=\frac{3}{2}\alpha$$

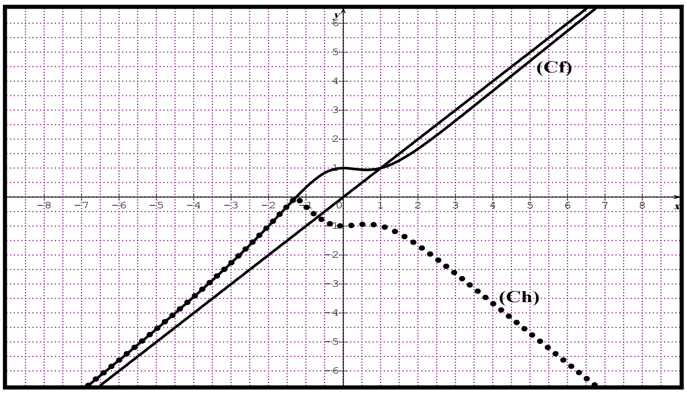
هذه طريقة فقط ويوجد غيرها

7) نبين أن للمعادلة $f'(x_0)=1$ حلين: لدينا $\dfrac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}=1$ ومنه: $x.g(x)=(x^2+2)^2$ بعد النشر والتبسيط نجد: $x^2-2x-2=0$ حيث، $\Delta=2\sqrt{3}$ والحلين هما: $x_0=1-\sqrt{3}$ و $x_1=1+\sqrt{3}$

8) تطبيق نظرية القيم المتوسطة فقط

((C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 معناه $f(x)=0$ تقبل حل وحيد)

9) رسم (C_f) ، (Δ)



10) $f(x) = m$ هي مناقشة أفقية

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي ذا المعادلة $y = m$

$m < f(\alpha)$ يوجد حل وحيد

$m = f(\alpha)$ يوجد حل مضاعف موجب وحل سالب

$f(\alpha) < m < 1$ يوجد حلين موجبين وحل سالب

$m = 1$ يوجد حل مضاعف معدوم وحل موجب

$m > 1$ يوجد حل وحيد موجب

III- $h(x) = -\left|f(x)\right|$

☒ شرح كيفية رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f)

على المجالات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ أي (C_f) تحت محور الفواصل نحصل على $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f)

على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ أي (C_f) فوق محور الفواصل نحصل على $h(x) = -f(x)$

ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل

كما هو موضح في البيان

✓ **التمرين الثالث:**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

1) أحسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{(x-1)^2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب/ أحسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا

2) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فان : $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

ب/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

5) بّين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $-0,2 < x_0 < -0.1$

6) عّين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

7) أحسب $f(0)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ)

8) أ/ ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين؛ $f(x) = m+1$

ب/ ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين؛ $f(x) = x+m$

9) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$

أرسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاًقا من (C_f) منحنى الدالة f

10) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي: $k(x) = |f(x)|$

أرسم (C_k) منحنى الدالة k انطلاًقا من (C_f) منحنى الدالة f

✓ **الإجابة النموذجية**

$(I$

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$: لدينا $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا $g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

نحل المعادلة $g'(x) = 0$: $g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$ نحسب المميز Δ

: $\Delta = 6^2 - 4.(3).(3) = 0$ للمعادلة حل مضاعف ؛ $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = 1$ وإشارة $g'(x)$ كما يلي

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0			$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$-$			0	$+$	$+\infty$

3) حساب $g(3)$: $g(3) = 0$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

ب/ حساب $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ وتفسير النتائج هندسيا : ندرس أولا إشارة المقام

x	$-\infty$ $\quad < 1 > \quad$ $+\infty$
$(x-1)^2$	$+$ $\quad 0 \quad$ $+$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{+4}{{}^{+}0} = +\infty \text{ و } \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{+4}{{}^{+}0} = +\infty$$

تُفسر النتيجتين هندسيا: $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي

لــ (C_f)

ملحوظة : في المستقيم العمودي لا نكتب بجوار $+\infty$ أو $-\infty$

1) إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ ؛ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{(3x^2-10x+7)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3-5x^2+7x+1)}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

$$= \frac{(x-1)\left[(3x^2-10x+7)(x-1) - 2(x^3-5x^2+7x+1)\right]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3x^3-10x^2+7x-3x^2+10x-7-2x^3+10x^2-14x-2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{\overbrace{x^3-3x^2+3x-9}^{g(x)}}{(x-1)^3} = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$ وتشكيل جدول تغيراتها

ملحوظة: $(\text{دالة})^{\text{عدد زوجي}}$ موجبة دوما حتى وان كانت الدالة سالبة
$(\text{دالة})^{\text{عدد فردي}}$ إشارتها من إشارة الدالة

بما أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ فان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و $(x-1)^3$

إشارة $g(x)$ عندنا من " I) (3) " وإشارة $(x-1)^3$ من إشارة $x-1$ كما هو موضح في الجدول التالي

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$		$+$

لـما: $x \in]-\infty;1[\cup [3;+\infty[$ ؛ f متزايدة تماما ولـما: $x \in]-1;3]$ ؛ f متناقصة تماما

✓ تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty \quad x_0 \quad 1$	$3 \quad +\infty$
$f'(x)$	$+$ ‖	$-\quad 0 \quad +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$ ‖	$+\infty \searrow f(3)=1 \nearrow +\infty$

3) أ/ تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ فان : $f(x)=x-3+\dfrac{4}{(x-1)^2}$

$$x-3+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x-1)^2+4}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x^2-2x+1)+4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3-2x^2+x-3x^2+6x-3+4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^3-5x^2+7x+1}{(x-1)^2}=f(x)$$

ب/ تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيًما مقاربًا مائل (Δ) ُطلب تعيين معادلة له

بما أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{4}{(x-1)^2}=0$ فان: $y=x-3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: لدينا

$$f(x)-y=f(x)=x-3+\frac{4}{(x-1)^2}-(x-3)=x-3+\frac{4}{(x-1)^2}-x+3$$

$$=\frac{4}{(x-1)^2}>0$$

إذن $f(x)-y>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على $\mathbb{R}-\{1\}$

4) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $-0,2<x_0<-0.1$

f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,2;-0,1[$ و $f(-0,2)\simeq -0,4<0$ و $f(-0,2)\simeq 0,2>0$

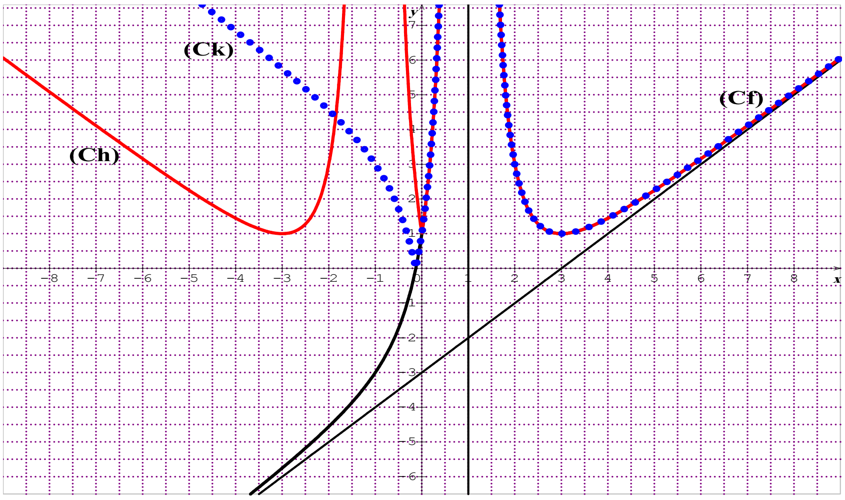
معناه أن $f(-0,2)\times f(-0,1)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد x_0 يحقق $f(x_0)=0$ حيث؛ $x_0\in\,]-0,2;-0,1[$

5) تعيين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

بصفة عامة: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وبصفة خاصة $x_0=-1$ نجد $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$y=2x-5 \Leftarrow y=2(x+1)-3 \Leftarrow \begin{cases} f'(-1)=2 \\ f(1)=-3 \end{cases}$$

6) حساب $f(0)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ) : $f(0)=1$ وهذا يعني أن $(C_f)\cap(yy')=\{(0;1)\}$



7) أ/ ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين؛ $f(x)=m+1$

حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي المتحرك ذا المعادلة $y=m+1$

المناقشــة البيانيـة

$m+1<1 \Leftarrow m<0$ حل وحيد سالب

$m+1=1 \Leftarrow m=0$ حل مضاعف موجب وحل معدوم

$m+1>1 \Leftarrow m>0$ ثلاث حلول موجبة

ب/ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة $y=x+m$ الموازي

لـ (Δ) (لان لهما نفس الميل) وبالتالي نقارن m مع -3

المناقشــة البيانيـة

$m\le -3$ لا يوجد حلول

$-3<m<1$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة

$m=1$ حل سالب والأخر معدوم

$m>1$ حلين موجبين

8) h دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $h(x)=f(|x|)$

المطلوب: رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقًا من (C_f) منحنى الدالة f

h دالة زوجية حتى وان لم يذكر التمرين ذلك لان : $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

ومنه $h(-x)=h(x)$

تذكــــــــر : $|-x|=|x|$

لما $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$ فان $h(x)=f(x)$ لأن $|x|=x$ ومنه المنحنى (C_h) منطبق على (C_f) ونكمل الرسم بالتناظر مع حامل محور التراتيب لأن h دالة زوجية

9) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $k(x)=|f(x)|$

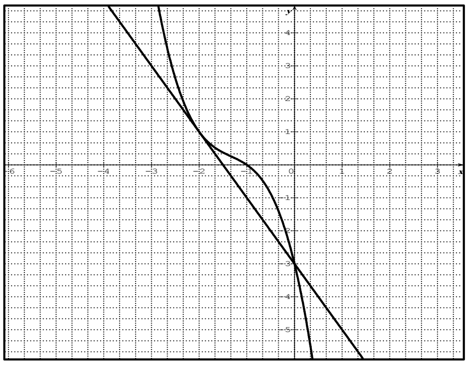
المطلوب: رسم (C_k) منحنى الدالة k انطلاقًا من (C_f) منحنى الدالة f

لدينا: $k(x)=\begin{cases} f(x); f(x)\geq 0 \\ -f(x); f(x)<0 \end{cases}$ ومنه (C_k) منطبق على (C_f) فوق محور الفواصل ونناظر بقية الرسم من (C_f) مع محور الفواصل

✓ التمرين الرابع:

I)نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = ax^3 - 4x^2 - 6x + b$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما في الشكل



بقراءة بيانية

1) أحسب $g'(-2)$ ، ثم اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة -2

2) شكل جدول تغيرات الدالة g

3) عين العددين a و b

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x) = -2x - 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهاية الدالة f عند -1 ثم فسر النتيجة بيانيا

2) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

3) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x) = \dfrac{2x.g(x)}{(x+1)^4}$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

5) بّين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $-1,7 < x_0 < -1,6$

6) بّين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

7) ارسم المنحنى (C_f)

8) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(x+1)^2 + m + mx^2 = -1 - 2mx$

✓ **الإجابة النموذجية:**

I) **بقراءة بيانية**

1°) أ/ $g'(-2)$ تمثل ميل مماس منحنى الدالة g عند $x=-2$

نأخذ نقطتان $A\left(-2;1\right)$ و $B\left(0;-3\right)$ من المماس $g'(-2)=\dfrac{1-(-3)}{-2-0}=-2$

ب/ $y=g'(-2)(x-2)+g(-2)$ و $g'(-2)=-2$ ، $g(-2)=1$

ومنه $y=-2x-3 \Leftarrow y=-2(x+2)+1$

2) جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

3) عين العددين a و b

لدينا: $b=-3 \Leftarrow g(0)=-3$ وأيضا $a=-1 \Leftarrow -a-4+6-3=0 \Leftarrow g(-1)=0$

II) 1)أ/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=1-\dfrac{1}{0^+}=-\left(+\infty\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=1-\dfrac{1}{0^+}=-\left(+\infty\right)=-\infty$

ب/تُفسر هندسيا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{-2x-1}_{+\infty}-\underbrace{\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}}_{0}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{-2x-1}_{-\infty}-\underbrace{\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}}_{0}=-\infty$

3) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{-1\right\}$ ، ولدينا:

$$f'(x)=-2+\frac{2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}=-2+\frac{2}{\left(x+1\right)^3}=\frac{-2\left(x+1\right)^4+2\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^4}$$

$$=\frac{-2x^4-8x^3-12x^2-6x}{\left(x+1\right)^4}$$

$$=\frac{2x\left(-x^3-4x^2-6x-3\right)}{\left(x+1\right)^3}=\frac{2x.g(x)}{\left(x+1\right)^4}$$

4) إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب دوما

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$f'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↗	$f(0)=-2$	↘	$+\infty$

5) f مستمرة متناقصة تماما على المجال $\left[-1,7;-1,6\right]$

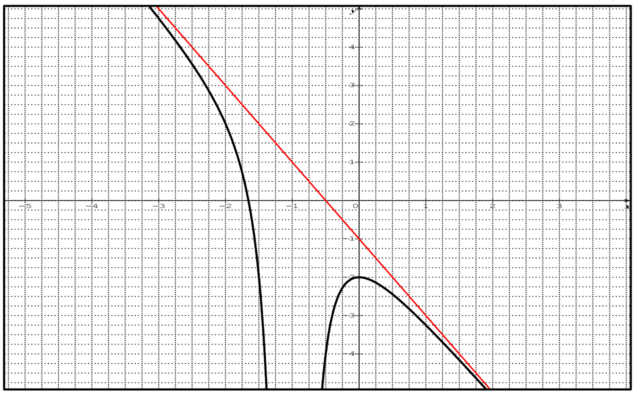
و $\begin{cases} f\left(-1,7\right)=0,3 \\ f\left(-1,6\right)=-0,5 \end{cases} \Leftarrow f\left(-1,7\right)\times f\left(-1,6\right)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد x_0

في المجال $\left]-1,7;-1,6\right[$ يحقق: $f(x_0)=0$

6) بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-1}{\left(x+1\right)^2}=0$ فان $y=-2x-1$

مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$

7) رسم المنحنى $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$



8) $\left(x+1\right)^2+m+mx^2=-1-2mx \Rightarrow m+mx^2-2mx=-1-\left(x+1\right)^2$

$$\Rightarrow m\left(x+1\right)^2=-1-\left(x+1\right)^2$$

$$\Rightarrow m=\frac{-1}{\left(x+1\right)^2}-1$$

$$\Rightarrow -2x+m=-2x-1\frac{-1}{\left(x+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x+m$$

حلول المعادلة $f(x) = -2x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المائل ذا المعادلة $y = x + m$ الموازي (Δ) وبالتالي نقارن m مع -1

$m < -2$ حلين سالبين

$m = -2$ حل مضاعف معدوم وأخر سالب

$-2 < m < -1$ حلين مختلفين في الإشارة

$m > -1$ لا يوجد حل

✓ **التمرين الخامس:**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) بّين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ/ بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربًا مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

3) أ/ بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

6) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $k(x) = f(x) - 2$

ب/ استنتج أن (C_k) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_k)

✓ **الإجابة النموذجية:**

$(I$

1) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

ب/ نحسب $g'(x)$: $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$ ، نحل المعادلة $g(x) = 0$

$6x^2 - 8x + 7 = 0$ ؛ نحسب المميز Δ : $\Delta = -104 < 0$ لا يوجد حل وإشارة المشتقة موجبة دومًا

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
g	$-\infty$ $\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$ $+\infty$

2) أ/ g مستمرة متزايدة تماما على المجال $\left[0,7;0,8\right]$ و $\begin{cases} g(0,7) \approx -0,37 \\ g(0,8) \approx 0,06 \end{cases} \Leftarrow g(0,7) \times g(0,8) < 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $\left]0,7;0,8\right[$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

ب/ استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

$II)$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$

2) أ/

$$\frac{1}{2}\left(x+1\right) + \frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)} = \frac{\left(x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right)}{2\left(2x^2-2x+1\right)} + \frac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$$

$$= \frac{2\left(x^3 - 2x + 1\right)}{2\left(2x^2-2x+1\right)} = f(x)$$

ب/ بما أن: $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)} = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{-3}{4x} = 0$ فان $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ مقارب مائل لـ (C_f)

بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج/ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: لدينا $f(x)-y=\dfrac{1-3x}{2\left(2x^2-2x+1\right)}$

المقام موجب لأنه معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ سالب ومعامل x^2 موجب، ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط $1-3x=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

3) أ/ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$\frac{\left(3x^2-2\right)\left(2x^2-2x+1\right)-\left(4x-2\right)\left(x^3-2x+1\right)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{4\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

$$=\frac{x\left(2x^3-4x^2+7x-4\right)}{4\left(2x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x.g(x)}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$

ب/ إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لان المقام موجب دوما وعليه

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ/ $f(1)=0$

ب/ $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=0\Rightarrow x^3-2x+1=0$

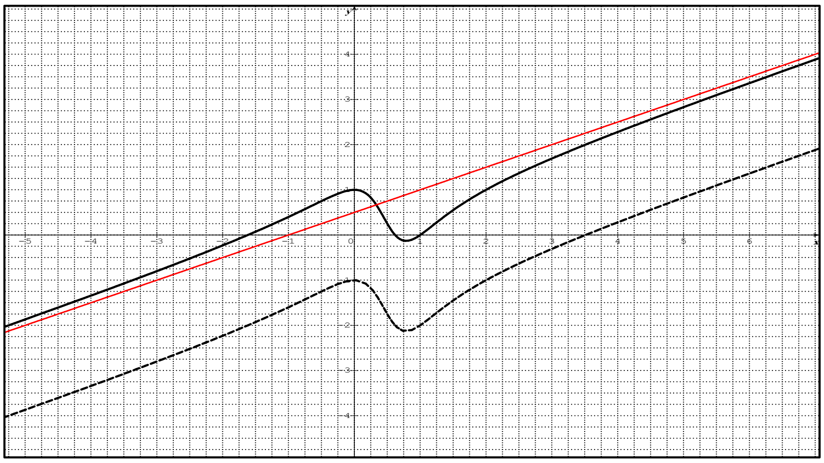
بما أن 1 جذر (حل) للمعادلة $x^3-2x+1=0$

نستخدم القسمة الإقليدية أو خوارزمية هورنر نجد $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$

إما $x-1=0$ أي $x=1$ وإما $x^2+x-1=0$ $\Leftarrow$ $\Delta=5$ يوجد حلين هما $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

أو $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



6°) أ/ $$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$
$$=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

ب/ تذكير: إذا كان $h(x)=f(x+a)+b$ فان (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$

لدينا: $k(x)=f(x+0)-2$ وبالتالي (C_k) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$

✓ التمرين السادس:

f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على كلا من $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ جدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f(x)	4 ↘	1 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	0 ↘	-2

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) فسر بيانيا ، كل نهاية لـ f ، ثم عيّن نهاية $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$.

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)};x\neq 2$ و $g(2)=0$

أ/ عين نهايات الدالة g عند $+\infty$، $-\infty$ و 3

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة g

✓ **الإجابة النموذجية:**

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ تُفسر هندسيا: (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=4$ بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ تُفسر هندسيا: (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=-2$ بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ وتُفسر هندسيا: (C) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=2$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)=f(0)=1$$

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)};x\neq 2$ و $g(2)=0$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)=4}=\dfrac{1}{4}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)=-2}=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\dfrac{1}{f(x)=0^-}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\dfrac{1}{f(x)=0^+}=+\infty$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة g

- نحسب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ ، ولدينا: $g'(x)=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$

ومنه إشارة $g'(x)$ معاكسة لإشارة $f'(x)$ إذن:

x	$-\infty$ 1 2 3 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ | $+$ || $+$
$f(x)$	$0,25\nearrow 1 \searrow 0 \nearrow +\infty$ || $-\infty \nearrow +\infty$

✓ **التمرين السابع:**

f دالة معرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

نقبل أن الدالة f معرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}$، حيث a ، b و c أعداد حقيقية

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2) بالاستعانة بجدول التغيرات، عيّن الأعداد a ، b و c

3) عيّن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

4) استنتج معادلة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$

5) اذكر عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

6) أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير

أ/ $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

ج/ $f'(3) > 0$

7) نأخذ فيما يلي: $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = 1$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

أ/ بّين أن $\left(C_f\right)$ يقبل المستقيم $\left(D\right)$ ذا المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب/ أدرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(D\right)$

ج/ بّين أن $f(-x) + f(x) = -6$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

د/ نأخذ الحل الثاني للمعادلة $f(x) = 0$ ، $\beta \approx 2{,}6$ أنشئ $\left(C_f\right)$

هـ/ عّين قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة: $\left|f(x)\right| = m^2$ ثلاث حلول

8) h دالة معرفة على $\mathbb{R} - \left\{1\right\}$ بـ: $h(x) = \left[f(x)\right]^2$

أ/ باستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $h'(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة h **دون دراسة تغيراتها**

✓ **الإجابة النموذجية:**

f دالة معرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

1) $f'(x) = a - \dfrac{c}{x^2}$

2) $f'(-1) = 0 \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c$ و $\begin{cases} f(-1) = -5 \Rightarrow -a + b - c = -5 \ldots\ldots (1) \\ f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1 \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

بجمع (1) مع (2) نجد $b = -3$ بالتعويض في(1) أو (2) نجد $-a - c = -2$ وبما أن $a = c$

فان $-2a = -2$ أي $a = 1$ وأيضا $c = 1$

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$

تُفسر هندسيا: $x = 0$ (محور التراتيب) هو معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

4) بما أن $f'(-1) = 0$ فان المماس عند $x_0 = -1$ أفقي ومعادلته $y = f(-1) = -5$

5) للمعادلة $f(x) = 0$ حلين

6)

أ/ $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ خطأ لأن f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي لا تحافظ على اتجاه المتباينة

ب/ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ صحيح (شروط ن ق م محققة)

ج/ $f'(3) > 0$ صحيح لان المشتقة موجبة على المجال $]1;+\infty[$ و $3 \in [1;+\infty[$

7°) فيما يلي: $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$

أ/ $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ومنه $y = x - 3$ هو معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب/ لدينا: $f(x) - y = \frac{1}{x}$ وعليه يكون الوضع النسبي كما يلي:

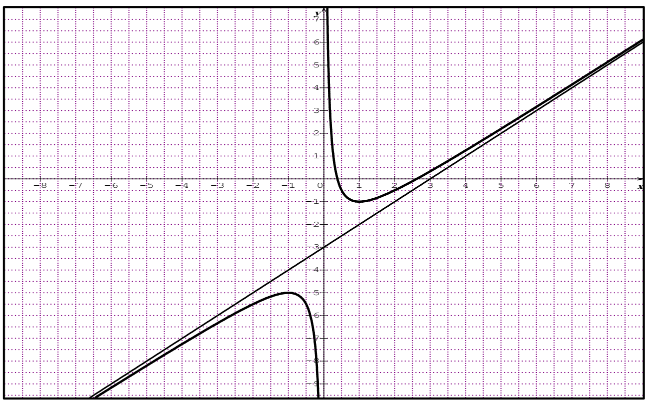
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

ج/ $f(-x) + f(x) = -x - 3 - \frac{1}{x} + x - 3 + \frac{1}{x} = -6$

تُفسر هندسيا: نجري المطابقة التالية $\begin{cases} f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \\ f(-x) + f(x) = -6 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = -6 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -3 \end{cases}$

ومنه النقطة $A(0;-3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f)

د/ $\beta \approx 2,6$ إنشاء



هـ/ وحلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي ذا المعادلة $y = m^2$

$m^2 < 1 \Leftarrow -1 < m < 1$ و $m \neq 0$ للمعادلة ثلاث حلول

°8) h دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $h(x) = \left[f(x)\right]^2$

أ/ $h'(x) = 2f'(x).f(x)$

ب/ إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$ و $f'(x)$ وعليه:

x	$-\infty$		-1		0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	25	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f^2(\alpha)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f^2(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

✓ **التمرين الثامن:**

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$ و (C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2) أ/ برهن أن ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$

ب/ استنتج جدول تغيرات الدالة f

3) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - (-3x)\right)$ ، ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا

ب/ بّين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ')،الذي معادلته $y = -3x$

4) أنشئ (C_f) ،(Δ) و (Δ')

✓ **الإجابة النموذجية:**

I) 1) أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x-\sqrt{1+x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{1+x^2} = +\infty-\infty$ ح ع ت

إزالتها: نستعمل طريقة المرافق والاختزال: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3x-\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)} = +\infty$$

2) نحسب $g'(x)$: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $g'(x) = 2-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 2-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

لأن: لما $x \leq 0$ لدينا $x < \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \Rightarrow 2-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

ولما $x > 0$ لدينا: $x^2 < 1+x^2 \Rightarrow x < \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1 \Rightarrow 2-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$ ↗ −	0	+ ↗ $+\infty$

3) g مستمرة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$ ومنه ح ن ق م يوجد حل وحيد α

في $\mathbb{R}$ يحقق: $g(\alpha) = 0$

نحل المعادلة $g(x) = 0$ أي $2x-\sqrt{1+x^2} = 0 \Rightarrow 2|x| = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow 4x^2 = 1+x^2 \Rightarrow 3x^2 = 1$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

ومنه إما $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة $2x = \sqrt{1+x^2}$

4) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad +\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

II) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x = +\infty$

ح ع ت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x = +\infty - \infty$

إزالتها: نستعمل طريقة المرافق والاختزال نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x^2} - x = +\infty$

2) أ/ $f'(x) = \cancel{2}.\frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ ومنه:

ب/ جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad +\infty$
$g'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $1,7$ $\nearrow$ $+\infty$

3°) أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - (-3x)\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{1+x^2} + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{2\sqrt{1+x^2} - 2x} = 0$

تُفسر هندسيا: $y = -3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x^2} - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{2\sqrt{1+x^2} + 2x} = 0$ ومنه $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

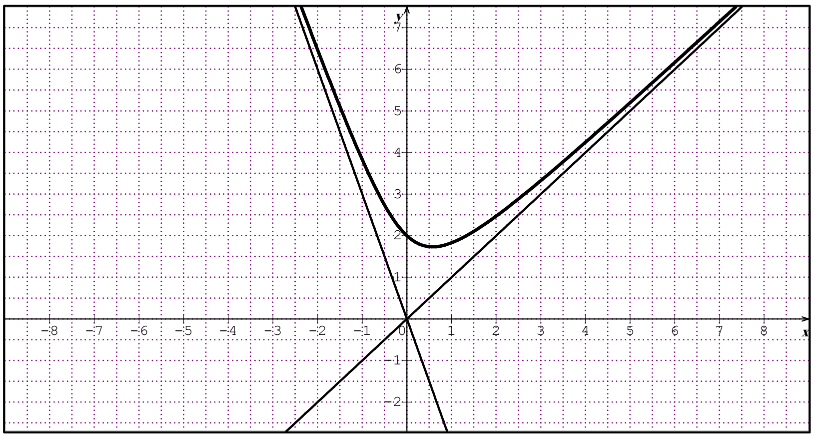
ج/ لدينا $f(x) - (-3x) = \frac{4}{2\sqrt{1+x^2} - 2x} > 0$ لان $x \le 0$ يصبح المقام موجب تماما

ومنه (C_f) فوق (Δ')

وأيضا: $f(x) - x = \frac{4}{2\sqrt{1+x^2} + 2x} > 0$ لان $x \ge 0$ يصبح المقام موجب تماما

ومنه (C_f) فوق (Δ)

4) إنشاء (C_f) ،(Δ) و (Δ')



✓ التمرين التاسع:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب/ أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بّين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

4) أ/أثبت أن المستقيمين $(\Delta): y=x+1$ و $(\Delta'): y'=-x-1$ مقاربين مائلين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) و (Δ')

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $0,7<\alpha<0,8$ و $-1,9<\beta<-1,8$

6) أنشئ (Δ) ،(Δ') و (C_f)

7) نعتبر المستقيم (D_m) ذا المعادلة: $y=mx+1$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بّين أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ فان (D_m) يشمل نقطة يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}-mx=1$

✓ الاجابة النموذجية:

1)أ/

$$f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1}\ ; x\in\,]-1;1[\,\cup\,]1;+\infty[\\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}; x\in\,]-\infty;-1[\end{cases}$$

ب/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left|x+1\right| + \frac{x}{x^2-1} = \left|-\infty\right| + \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{0} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left|x+1\right| + \frac{x}{x^2-1} = \left|+\infty\right| + \underbrace{\frac{x}{x^2-1}}_{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x) = \left|-1+1\right| + \frac{-1}{0^-} = +\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x) = \left|-1+1\right| + \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x) = \left|1+1\right| + \frac{+1}{0^+} = +\infty \text{ و } \lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x) = \left|1+1\right| + \frac{+1}{0^-} = -\infty$$

2) حساب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{-1,1\right\}$، ولدينا:

لما $x \in \left]-1;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ نجد $f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$ وإشارتها من إشارة البسط

$x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0$ ومنه $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$ مرفوض

لأن $-\sqrt{3} \notin \left]-1;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ والإشارة كما يلي:

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

لما $x \in \left]-1;1\right[\cup \left]1;\sqrt{3}\right]$: f متناقصة تماما ولما $x \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$: f متزايدة تماما

لما $x \in \left]-\infty;-1\right[$ نجد: $f'(x) = \frac{-x^4+x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$ وإشارتها من إشارة البسط

$-x^4+x^2-2=0$ لا تقبل حلول (يكفي وضع $X=x$) وإشارتها سالبة دوما

x	$-\infty$		-1
$f'(x)$		$-$	‖

ومنه f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-1\right[$

الخلاصة : إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\left\{-1,1\right\}$ نلصق الجدول الأول مع الثاني

جدول التغيرات يكون كما يلي

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘				$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘		$3,6$	↗	$+\infty$

3) من خلال جدول إشارة $f'(x)$ نجد $f'(x)=0$ عند $x=0$ ولا تغير الإشارة وبالتالي النقطة $\left(0;f(0)=1\right)$ هي نقطة انعطاف لـ $\left(C_f\right)$

4)أ/ لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1+\dfrac{x}{x^2-1}+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$ ومنه $\left(\Delta'\right): y'=-x-1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$

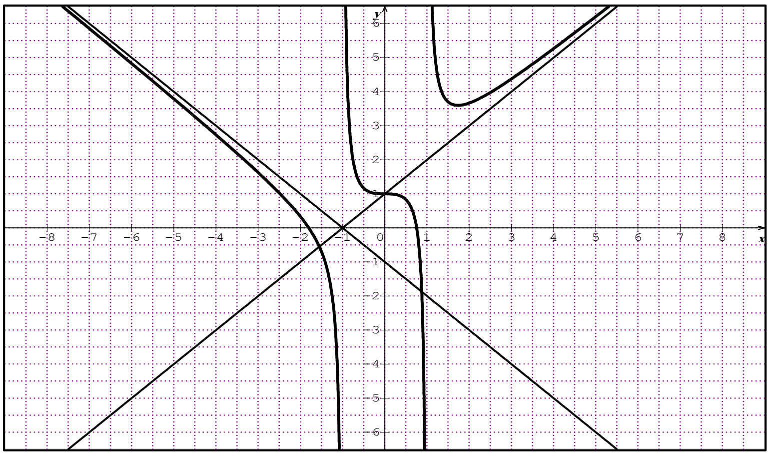
و $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\dfrac{x}{x^2-1}+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$ ومنه $\left(\Delta\right): y=x+1$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$

ب/ ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ في الحالتين، لدينا $f(x)-y=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ')		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

5) نظرية القيم المتوسطة تطبق مرتين على α و β (بسيطة)

6) أنشئ (Δ)، (Δ') و $\left(C_f\right)$



7) أ/ نفرض أن $A\left(\alpha;\beta\right)\in\left(D_m\right)$ إذن هي تحقق المعادلة: $\beta=m\alpha+1$ أي $m\alpha-\beta+1=0$

المتغير هنا هو m والعوامل هي α و $-\beta+1$ وكما نعلم ينعدم كثير حدود اذا انعدمت كل معاملته وبالتالي:

$$\begin{cases}\alpha=0\\-\beta+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=1\end{cases}$$ ومنه $A\left(0;1\right)$

ب/ $|x+1|+\frac{x}{x^2-1}-mx=1 \Rightarrow |x+1|+\frac{x}{x^2-1}=mx+1 \Rightarrow f(x)=mx+1$

وحلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f)مع المستقيم ذا المعادلة $y=mx+1$ الذي يدور بتغير ميله m

المناقشة البيانية

$m \leq -1$ يوجد ثلاث حلول

$-1<m<0$ يوجد أربعة حلول

$0 \leq m \leq 1$ يوجد حلين

$m>1$ يوجد ثلاث حلول

✓ **<u>التمرين العاشر:</u>**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x-4$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بّين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $[2,1;2,2]$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)$، $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا

2) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) عـّين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة هندسيا

5) أ/ بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فان : $f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$

ب/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) ُطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

6) بّين أنّ : $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha+2$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-1})

7) أنشئ (C_f) و (Δ)

8) أ/ عين فواصل النقط من المنحنى (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذا المعادلة $y=x+2$

ب/ ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين؛ $f(x)=m$

9) عيّن بيانيا، إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

10) h دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$، كما يلي: $h(x)=[f(x)]^2$

أ/ أحسب $h'(x)$ (حساب عبارة $h(x)$ غير مطلوب)

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

✓ **الإجابة النموذجية:**

I) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=(-\infty)^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=(+\infty)^3=+\infty$ (نعوض في أكبر درجة)

2) لدراسة اتجاه تغير الدالة g

أ/ نحسب $g'(x)$ ، لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، لأنها دالة كثير حدود ولدينا: $g'(x)=3x^2-3$

ب/ نحل المعادلة $g'(x)=0$ لاستخراج إشارتها $g'(x)=0 \Leftarrow 3x^2-3=0 \Leftarrow x^2=1$ ومنه

إما $x=-1$ أو $x=1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الخلاصة: g متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$

ج/ جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$2{,}1<\alpha<2{,}2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)=-2$	$\searrow$	$f(1)=-6$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ/ g مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $[2{,}1;2{,}2]$ من خلال جدول التغيرات و

$\begin{cases} g(2{,}1)\approx-1{,}03 \\ g(2{,}2)\approx 0{,}04 \end{cases} \Leftarrow g(2{,}1)\times g(2{,}2)<0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على

المجال $]2{,}1;2{,}2[$ يحقق، $g(\alpha)=0$

ب/ إشارة $g(x)$ ، تُستنتج من خلال جدول التغيرات كما هو موضح

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II)

1) أ/ حساب النهايات : (نأخذ أكبر درجة في البسط على أكبر درجة في المقام عند ∞)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

ب/ إشارة المقام

x	$-\infty$		$<-1>$		$<1>$		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

و $$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي: $x=-1$ و $x=1$ مستقيمان مقاربان عموديان لـ (C_f)

2) f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة، ولدينا

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-(2x)(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2+4x^3-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{x.(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$$

3) إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لان المقام موجب دوما وعليه: $x.g(x)=0 \Leftarrow x=0$ أو $g(x)=0$

وإشارة $g(x)$ موجودة مسبقا(وهذا من بين أسباب دراسة الدالة الأولى)

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$f(0)=0$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) $$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = \frac{\alpha.g(\alpha)}{\left(\alpha^2-1\right)^2} = 0$$ لان $g(\alpha)=0$

تُفسر هندسيا :منحنى الدالة f يقبل مماسا أفقيا عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته $y=f(\alpha)$

5) أ/ توحيد مقامات فقط وليست الطريقة الوحيدة:
$$x+2+\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x+2}{x^2-1}$$
$$=\frac{(x+2)(x^2-1)+x+2}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^3-x+2x^2-2+x+2}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=f(x)$$

ب/ بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فان $(\Delta): y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=\frac{x+2}{x^2-1}$

نشكل جدول فيه إشارة البسط والمقام ثم الجداء بينهما فنحصل على

$f(x)-y>0$ على المجالين $]-2;-1[$ و $]1;+\infty[$ وبالتالي (C_f) فوق (Δ) على هذين المجالين

$f(x)-y<0$ على المجالين $]-1;1[$ و $]-\infty;-2[$ وبالتالي (C_f) تحت (Δ) على هذين المجالين

وعند الفاصلة -2 ، (C_f) يقطع (Δ)

6) تبيان أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha+2$ ؛ نبين أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha-2=0$ (وتوجد طرق أخرى لكن أرى أن هذه الأسهل)

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha-2=\frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1}-\frac{3}{2}\alpha-2=\frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1}-\frac{3}{2}\alpha\times\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}-2\times\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}$$
$$=\frac{2(\alpha^3+2\alpha^2)-3\alpha(\alpha^2-1)-2\times2(\alpha^2-1)}{2(\alpha^2-1)}$$
$$=\frac{-\alpha^3+3\alpha+4}{2(\alpha^2-1)}=\frac{-\overbrace{(\alpha^3-3\alpha-4)}^{=g(\alpha)=0}}{2(\alpha^2-1)}=\frac{0}{2(\alpha^2-1)}=0$$

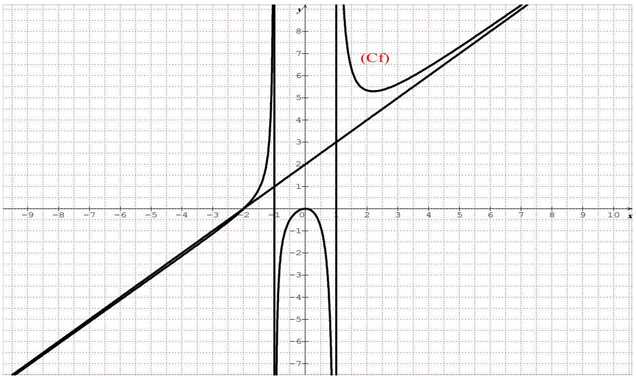
إذن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha-2=0$ وبالتالي $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha+2$

تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$

لدينا $\alpha\in]2{,}1;2{,}2[$ ومنه $2{,}1<\alpha<2{,}2$ نضرب أطراف المتباينة في العدد الموجب $\frac{3}{2}$ ونضيف العدد 2 نجد

$5{,}15<\overbrace{\frac{3}{2}\alpha+2}^{f(\alpha)}<5{,}3$ وبالتدوير إلى 10^{-1} نجد $5{,}2<f(\alpha)<5{,}3$ و هـ م

7)إنشاء (Δ) (C_f)



8) أ/ نحل معادلة $f'(x)=1$ توضيح (ميل $(\Delta)=f'(x)$)

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}=1$$

$$\Rightarrow x.g(x)=(x^2-1)^2$$

$$\Rightarrow x^4-3x^2-4x=x^4-2x^2+1$$

$$\Rightarrow x^2+4x+1=0$$

نحسب المميز Δ ، $\Delta=12>0 \Leftarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$

يوجد حلين متمايزين $x_1=-2-\sqrt{3}$ و $x_2=-2+\sqrt{3}$ وبالتالي يوجد مماسين (عدد الحلول هو عدد المماسات)

ب/ المناقشة البيانية

*/ حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي (المتحرك) ذا المعادلة $y=m$ وعليه

$m<0$ يوجد ثلاث حلول حل موجب وحلان سالبان

$m=0$ يوجد حل مضاعف معدوم وأخر سالب

$0<m<f(\alpha)$ يوجد حل سالب

$m=f(\alpha)$ يوجد حل مضاعف موجب

$m>f(\alpha)$ يوجد حلان موجبان

9) إشارة $f(x)$

(لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل تكون $f(x)$ موجبة ولما يكون (C_f) تحت محور الفواصل تكون $f(x)$ سالبة)

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	

10) أ/ حساب $h'(x)$ ؛ h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ وهي مركب دالتين هما الدالة f والدالة " مربع "

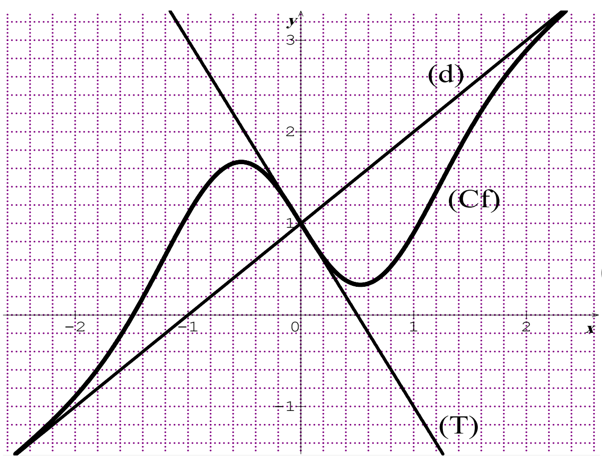
ولدينا: $h'(x)=2f(x).f'(x)$ (تذكير: $\left(f^{n}\right)'=n\times f^{n-1}\times f'$)

ب/ إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$ و $f'(x)$ ومنه

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-2)=0$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$h(0)=0$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$h(\alpha)$	↗	$+\infty$

القراءة البيانية (تمرين شامل مرفق بحل نموذجي)



نص التمرين

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ، (T) مماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

علما أن: $f(0,5)=0,5$ ، $f(-0,5)=1,5$ و $f'(-0,5)=f'(0,5)=0$

I) بقراءة بيانية: أجب عن الأسئلة التالية

1) عيّن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) عيّن إشارة $f(-2)$ و $f(-1)$ ثم استنتج أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-2;-1[$

4) استنتج إشارة $f(x)$

5) عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم المقارب (d) والمماس (T)

6) استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)

7) أثبت أن النقطة A هي نقطة انعطاف لـ (C_f)

II) نعرف على المجال $]-1;+\infty[$ الدالة g كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1) أحسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

2) استنتج اتجاه تغير الدالة g ،ثم شكل جدول تغيراتها

الإجابة النموذجية

I) **القراءة بيانية:**

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) استنتاج إشارة $f'(x)$: كما نعلم أن فواصل القيم الحدية هي انعدام للمشتقة الأولى ، و (C_f) يحوي قيمتين حديتين وعليه تكون الإشارة كالتالي :

x	$-\infty$		$-0,5$		$-0,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

*/ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$-0,5$		$0,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(-2) < 0$ (سالبة تماما) و $f(-1) > 0$ (موجبة تماما)

استنتاج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-2;-1[$: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل (xx') في المجال وبالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وبما أن (C_f) يقطع (xx') فان الحل وحيد

4) استنتاج إشارة $f(x)$

تذكير $f(x) > 0$ (موجبة تماما) عندما يكون منحناها فوق محور الفواصل
$f(x) < 0$ (سالبة تماما) عندما يكون منحناها تحت محور الفواصل
$f(x) = 0$ (معدومة) لما يقطع منحناها محور الفواصل

وعليه تكون الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5) تعيين معادلة ديكارتية للمستقيم المقارب (d) والمماس (T): لكل مستقيم معادلة من الشكل

$\boxed{y = ax + b}$ (1)

أ/ بالنسبة لـ (d): نأخذ نقطتين من المستقيم مثلا $(0;1)$ و $(-1;0)$ ، نعوض إحداثي النقطتين في (1)

نجد $\boxed{b = 1}$ و $-a + b = 0$ معناه $a = b$ ومنه $\boxed{a = 1}$ وعليه معادلة المستقيم المقارب هي $\boxed{(d); y = x + 1}$

ب/ بالنسبة لـ(T): نأخذ نقطتين من المماس مثلا $(0;1)$ و $B(-1;3)$ ، نعوض إحداثي النقطتين في (1) نجد $\boxed{b=1}$

و $-a+b=3$ معناه $a=b-3$ ومنه $\boxed{a=-2}$ وعليه معادلة المماس هي $\boxed{(T);y=-2x+1}$

6) استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)

على المجال $\left]-\infty;0\right[$: (C_f) تحت (T)

على المجال $\left]0;+\infty\right[$: (C_f) فوق (T)

(C_f) يقطع (T) عند النقطة $A(0;1)$

7) أثبت أن النقطة A هي نقطة انعطاف لـ (C_f): $A(0;1)$ نقطة انعطاف لـ (C_f)

تبرير وتذكير : نسمي النقطة التي يخترق فيها المماس منحنى الدالة بنقطة انعطاف

II) المعطيات : $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ ، $D_g=\left[-1;+\infty\right[$

1) حساب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$: g قابلة للاشتقاق على D_g لأنها مقلوب دالة قابلة للاشتقاق ومنه

$$\boxed{g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة g : إشارة $g'(x)$ معاكسة لإشارة $f'(x)$ لان المقام موجب تماما والبسط $-f'(x)$

وعليه جدول تغيراتها يكون كالتالي:

x	-1		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(-1)$	↘	$2/3$	↗	2	↘	0

توضيح كيفية ملأ الجدول

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \text{و} \quad g\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$$

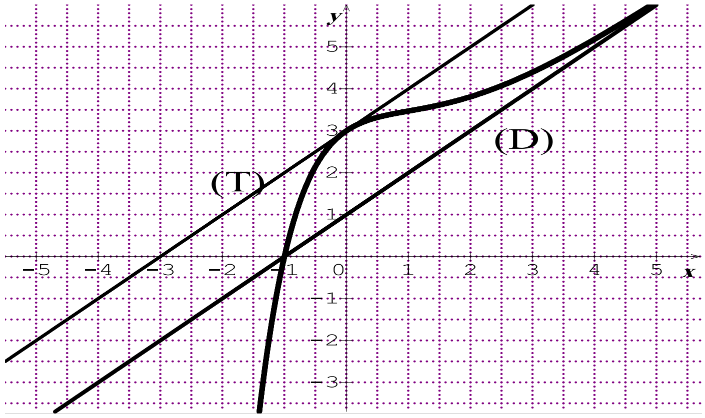
بنفس الكيفية تم حساب $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

المناقشة البيانية (كل أنواع المناقشات البيانية)

1) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد وإشارة حلول المعادلة: $\boxed{f(x) = x + m}$

علما أنّ: $(D) : y = x + 1$ و $(T) : y = x + 3$



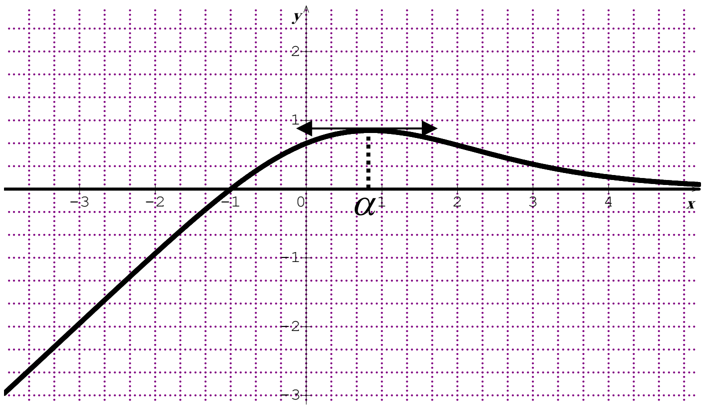
2) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد وإشارة حلول المعادلة: $\boxed{f(x) = m(x-2)}$

علما أنّ: $(T) : y = \dfrac{-4}{e}x + \dfrac{8}{e}$

3) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m

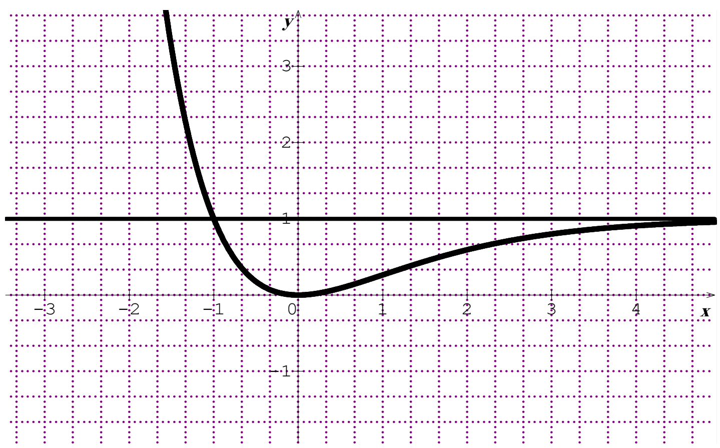
عدد وإشارة حلول المعادلة $\boxed{f(x) = f(m)}$



4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m

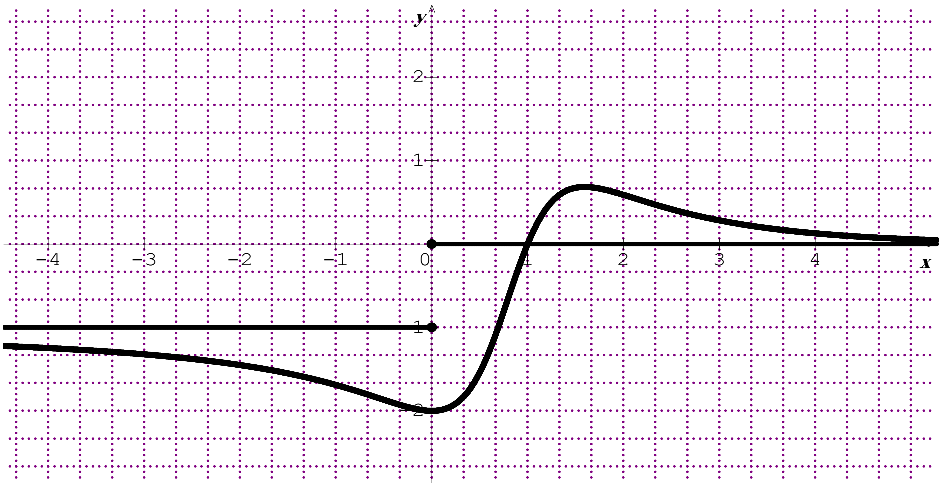
عدد وإشارة حلول المعادلة

أ/ $\boxed{f(x) = |m|}$ ب/ $\boxed{f(x) = m^2}$



استنتــــاج منحنى مــن أخــر (معظم الحالات)

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) الممثل للدالة f



استنتج (C_g) التمثيل البياني للدالة g في كل حالة مما يلي

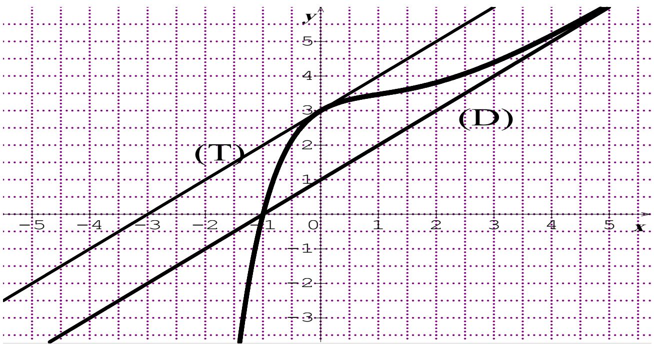
(1) $g(x) = f\left(\left|x\right|\right)$ (2) $g(x) = f(-x)$ (3) $g(x) = \left|f(x)\right|$ (4) $g(x) = -f(x)$

(5) $g(x) = f(x-1)+1$

حل نموذجي لتمارين المناقشة البيانية (كل أنواع المناقشات البيانية)

1) المناقشة البيانية،للمعادلة: $\boxed{f(x) = x + m}$ m وسيط الحقيقي ،علما أنّ: $(D) : y = x + 1$

و $(T) : y = x + 3$



حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم المائل $y = x + m$ الموازي لـ $(D) : y = x + \boxed{1}$

و $(T) : y = x + \boxed{3}$ وبالتالي نقارن m مع 1 و 3

- ✓ $m \leq 1$ حل وحيد سالب
- ✓ $1 < m < 3$ حلين مختلفين في الإشارة
- ✓ $m = 3$ حل وحيد معدوم مضاعف
- ✓ $m > 3$ لا يوجد حل

2) المناقشة البيانية،للمعادلة: $\boxed{f(x) = m(x-2)}$ m وسيط الحقيقي ،علما أنّ: $(T) : y = -4e^{-1}x + 8e^{-1}$

قبل بداية المناقشة وجب توضيح بعض النقاط

أولا: المستقيم العمودي معامل توجيهه (ميله) مالانهاية (إن صَحّ التعبير الرياضي)

ثانيا: كيفية معرفة النقطة الثابتة التي تشملها كل المستقيمات $(\Delta_m) : y = m(x-2)$

نأخذ قيمتين لـ m مثلا 0 و 1 نجد المعادلتين على الترتيب $(\Delta_1) : y = 0$ و $(\Delta_2) : y = x-2$

ومنه $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{(2;0)\}$ (هذه الطريقة لمعرفة النقطة لتبدأ المناقشة أما...)

ثالثا: يطلب منا في سؤال تعيين النقطة الثابتة التي تشملها كل المستقيمات $(\Delta_m) : y = m(x-2)$

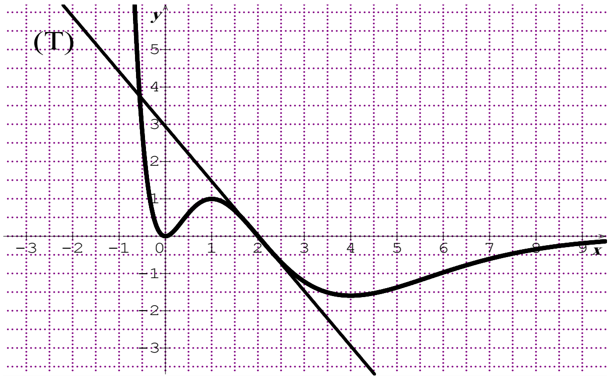
نفرض أن هذه النقطة هي $A(\alpha;\beta)$

ومنه $A(\alpha;\beta) \in (\Delta_m) \Rightarrow \beta = m(\alpha-2) \Rightarrow \boxed{(\alpha-2)m-\beta=0}$

ملحوظة: ينعدم كثير حدود إذا انعدمت كل معاملاته وعليه $(\alpha-2)m-\beta=0$ معناه

$\alpha-2=0$ أي $\boxed{\alpha=2}$ و $-\beta=0$ أي $\boxed{\beta=0}$ ومنه إحداثيي النقطة هي $A(2;0)$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الدوار $y = m(x-2)$

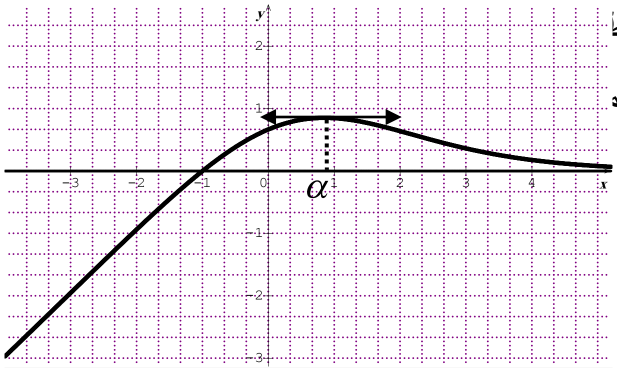


- ✓ $m \le -4e^{-1}$ حل موجب وحل سالب
- ✓ $-4e^{-1} < m < 0$ ثلاث حلول موجبة وحل سالب
- ✓ $m = 0$ حل موجب وحل معدوم
- ✓ $m > 0$ حل وحيد موجب

3) المناقشة البيانية،للمعادلة: $\boxed{f(x)=f(m)}$ m وسيط

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع

المستقيم الأفقي $y = f(m)$



- ✓ $m \in]-\infty;-1]$ حل وحيد
- ✓ $m \in]1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ يوجد حلين
- ✓ $m = \alpha$ يوجد حل وحيد معدوم

4) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين $\boxed{f(x)=|m|}$ و $\boxed{f(x)=m^2}$

✓ ميزة في هذه مناقشة القيمة المطلقة والمربع أنها تبدأ من صفر ($m=0$) معناه في الرسم أول موضع هو محور الفواصل

✓ الأسلحة (خواص القيمة المطلقة + التربيع)

$|x| = a$ معناه $x = \pm a$

$|x| < a$ معناه $-a < x < a$

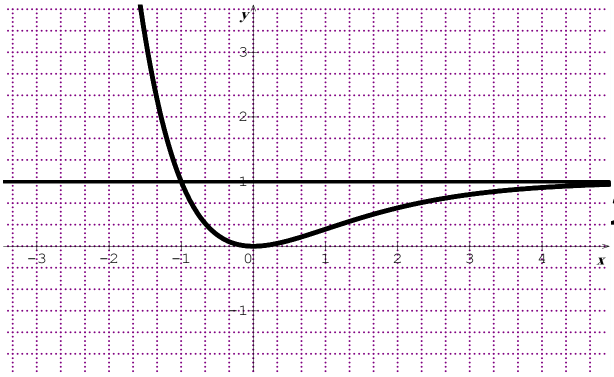
$|x| > a$ معناه $x > a$ أو $x < -a$

$x^2 = a$ معناه $x = \pm\sqrt{a}$

$x^2 < a$ معناه $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$

$x^2 > a$ معناه $x > \sqrt{a}$ أو $x < -\sqrt{a}$

أ/ $\boxed{f(x) = |m|}$: حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي $y = |m|$



$|m| = 0$ أي $m = 0$ حل وحيد معدوم

$|m| < 1$ أي $-1 < m < 1$ و $m \neq 0$ حلين مختلفين في

$|m| > 1$ أي $m > 1$ أو $m < -1$ حل وحيد سالب

ب/ $\boxed{f(x) = m^2}$: حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي $y = |m|$

$m^2 = 0$ أي $m = 0$ حل وحيد معدوم

$m^2 < 1$ أي $-\sqrt{1} < m < \sqrt{1} \Leftarrow -1 < m < 1$ و $m \neq 0$ حلين مختلفين في الإشارة

$m^2 > 1$ أي $m > \sqrt{1}$ أو $m < -\sqrt{1}$ أي $m > 1$ أو $m < -1$ حل وحيد سالب

✓ **التمرين الأول:**

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x^3-3x^2-1$

3) أدرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $1,6<\alpha<1,7$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. وحدة الرسم $4cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وأعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين

2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ فان ؛ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) عين معادلة لـ(Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;1[$، $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ) . ماذا تلاحظ ؟

6) بّين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

7) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

✓ **التمرين الثاني:**

$I-$ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x-6$

1) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $1,2<\alpha<1,3$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

$II-$نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+4}{x^2+1}$

(C_f)المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان ؛ $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x-1\right]$ وفسر النتيجة هندسيا

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة؛ $y = x + 1$

5) تحقق أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{2+3\alpha}{2}$ ، ثم عّين حصر للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-1})

6) أحسب؛ $f(-2)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ)

1) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m + 1$

✓ **التمرين الثالث:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x-3}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب/ أحسب نهاية الدالة f عند 3 وفسر النتيجة هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{3\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ أثبت وجود عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{3\}$فان : $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{x-3}$

ب/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيًما مقارًبا مائل (Δ) ُيطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

4) عّين A نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحنى (C_f)

5) أ/ أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي -3 ، يطلب تعيين إحداثيات نقطتي التماس B و C

ب/ برهن أن النقطتين B و C متناظرتان بالنسبة إلى A

6) أنشئ (C_f) والمماسين

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{|x-3|}$

أ/ أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$

ب/ ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة gاعتمادا على (C_f)

✓ **التمرين الرابع:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + x + 3}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسـيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=1$

4) بّين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-1-x)=f(x)$ فسر النتيجة هندسيا

5) عّين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

6) أنشئ (C_f) و (d) ثم استنتج بيانيا إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|f(x)|$

أ/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 3 و -4

ب/ أنشئ (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f)

✓ التمرين الخامس:

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x

من $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$ ، $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$

2) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

ب/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

4) (D) مستقيم معادلته $y=3$. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

5) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2,-1\}$ ، $f(-3-x)=f(x)$ ماذا يمكن أن تستنتج؟

6) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل

7) أنشئ (C_f)

✓ التمرين السادس:

f دالة معرفة بجدول تغيراتها التالي، f' دالتها المشتقة

I) نقبل أن الدالة f معرفة على $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية

x	$-\infty$		$0,5$		1		$1,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c

2) بالاستعانة بجدول التغيرات، عّين الأعداد a ، b و c

3) عّين: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

4) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ بالدالة f مبررا إجابتك

5) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$

II) نأخذ فيما يلي: $a=1$ ، $b=1$ و $c=\frac{1}{4}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بّين أن (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$

2) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

3) بّين أن النقطة $A(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4) عّين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أنشئ (C_f)

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=|m|$

6) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=[f(x)]^2$

أ/ باستعمال مشتق مركب دالتين أحسب $g'(x)$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة g **(دون دراسة تغيراتها)**

7) نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ/ أحسب $h'(x)$ مشتق الدالة h بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها **(دون دراسة تغيراتها)**

✓ **<u>التمرين السابع</u>:**

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=3x+2-\frac{10}{x+1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب/ أحسب $\lim_{x\to-1} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيًما مقارًبا مائل (Δ) ُيطلب تعيين معادلة له

ب/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

4) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(-1-x)+f(-1+x)=-2$

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

5) أنشئ (C_f) و (Δ)

6) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $3x^2+(5-m)x-8-m=0$

7) تعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3|x|+2-\dfrac{10}{|x|+1}$

أ/ أثبت أن g دالة زوجية

ب/ ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g اعتمادا على (C_f)

☒ اشرح كيفية رسم (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه

✓ **التمرين الثامن:**

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ اثبت أن الدالة f فردية

ب/ اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=1+\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

ج/ ادرس تغيرات الدالة f

2) أ/ اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

ج/ بّين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$، ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الأخر

د/ ارسم (d) ، (d') و (C_f)

3) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=|x|\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

أ/ بّين أن g دالة زوجية

ب/ انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g

✓ **التمرين التاسع:**

f دالة معرفة على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أدرس شفعية الدالة f ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغيراتها $]-\infty;-1]$ وشكل جدول تغيراتها

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذي المعادلة؛ $y=\frac{5}{2}$ في نقطة وحيدة فاصلتها αحيث: $1<\alpha<2$

5) أرسم المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f)

✓ **التمرين العاشر:**

f دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) أ/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (d) معادلته؛ $y=x$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (d)

3) أ/ بّين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3<x_0<1,4$

ب/ عّين معادلة(Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

ج/ أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم

4) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$ ، (C_g)منحنى الدالة gفي المعلم السابق

أ/ بّين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)

ب/ ارسمه في نفس المعلم السابق

5) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $g(x)=m^2$

✓ **التمرين الحادي عشر:**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x^2+12x+7$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(-1)$ واستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x)=x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2(x+2)^2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} -2} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -2} f(x)$ ،ثم فسر النتيجة هندســيا

3) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)^3}$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

5) بّين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $]-3;-2,5[$

6) بّين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+\frac{3}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

7) أنشئ المنحنى (C_f)

8) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m-1$

9) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=x+m$

10) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ: $h(x)=f(x^2)$

أ/ أحسب $h'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة h **(حساب عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)**

ب/ استنتج نهايات الدالة h، ثم شكل جدول تغيراتها

✓ **التمرين الثاني عشر:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا

2) أثبت أن المستقيم ذا المعادلة : $x=-\frac{1}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3) أ/ عّين العدد الحقيقي a بحيث: $f(x)=1+\frac{a}{x^2+x-2}$

(خاص بشعبتي الرياضيات والتقني رياضي)

ب/ استنتج مجموعة النقط $M(x;y)$ من (C_f) التي إحداثياتها أعداد صحيحة

4) نعتبر من أجل كل عدد حقيقي m الدالة h_m حيث: $h_m(x)=\frac{x^2+mx-6}{x^2+mx-2}$ و (H_m) تمثيلها البياني

أ/ ادرس تغيرات الدالة h_m

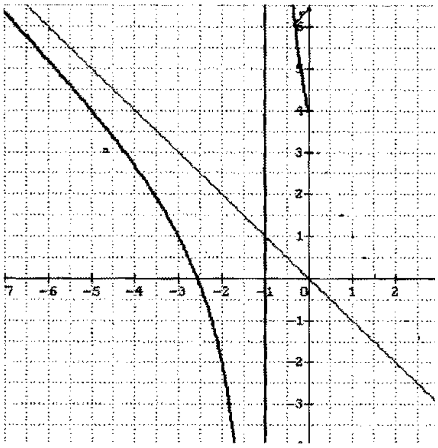
ب/ بين أن جميع المنحنيات (H_m) تشمل نقطة وحيدة A ، يطلب تعيين إحداثياتها

ج/ أكتب معادلة للمماس (d) للمنحنى (H_m) عند النقطة A

د/ عين المنحنى (H_m) الذي يشمل النقطة $\left(-2;\frac{5}{3}\right)$

✓ التمرين الثالث عشر:

I) f دالة معرّفة على المجال $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.كما هو مبين في الشكل.



1) أ/ أحسب نهايات الدالة f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب/ بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغير الدالة f شكل جدول تغيراتها

2) g دالة معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

أ/ أحسب نهاية g عند $+\infty$

ب/ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

ج/ أدرس تغيرات الدالة g

II) k دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

2) أكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$

3) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k)

✓ التمرين الرابع عشر:

f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=x^3-x^2+1$

أ/ أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]-1;-0.5[$

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية هندسيا

ب/ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ج/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب تماما x ، $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^3}$.ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أ/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$

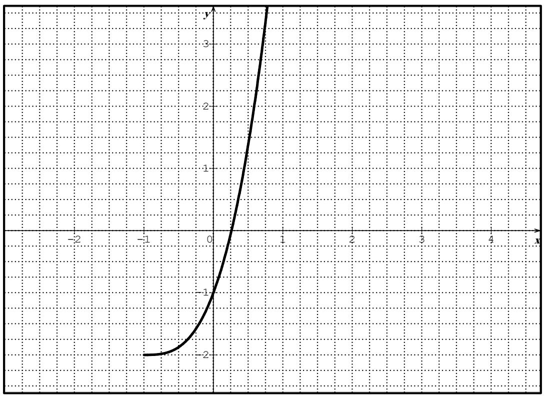
ب/ عين معادلة المماس (d) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها -1

4) أرسم (Δ)، (d) و (C_f)

✓ **<u>التمرين الخامس عشر:</u>**

I) المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$



<u>بقراءة بيانية</u>

1) شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$

يحقق: $g(\alpha)=0$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و (Γ) المنحنى البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ وفسر النتيجة الثانية هندسيا

2) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و وفسر النتيجة هندسيا

3) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

4) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

5) عّين ، دون حساب، $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وفسر النتيجة هندسيا

6) أ/ نأخذ $\alpha\approx0{,}26$ عّين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2} ب/ ارسم المنحنى (Γ)

✓ **<u>التمرين السادس عشر:</u>**

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ وفسر النتائج هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة

4) أ/ بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ فان : $f(x)=x+1+\frac{x}{x^2-1}$

ب/ بّين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المقارب المائل (Δ)

5) بّين أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

6) بّين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$

7) أنشئ (Δ) و (C_f)

✓ **التمرين السابع عشر:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0,4\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x-2}{x(x-4)}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

ب/ أحسب نهاية الدالة f عند 0 و 4 وفسر النتيجتين هندسيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{0,4\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) بّين أن النقطة $w(2;0)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4) أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة w

5) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)،ثم استنتج أن w نقطة انعطاف لـ (C_f)

تذكر أن: $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

6) ارسم (T) و (C_f)

✓ **التمرين الثامن عشر:**

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ يرمز (C_f)إلى تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x+2]$ وفسر النتيجتين هندسيا

3) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) أنشئ (C_f) والمستقيمات المقاربة

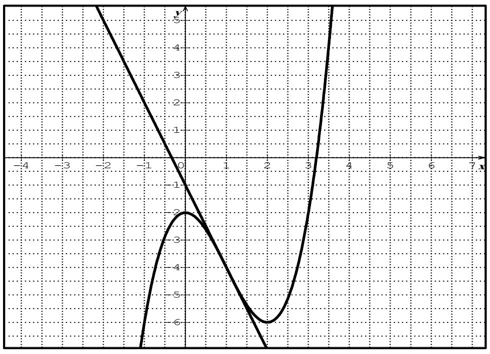
5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=mx-2$

6) g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=f(x-2)-1$ ، (C_g)منحنى الدالة gفي المعلم السابق

بين أن (C_g) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم أرسمه في نفس المعلم السابق

✓ التمرين التاسع عشر:

I) المنحنى الموالي هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-3x^2-2$



بقراءة بيانية

1) حل المتراجحة $g'(x)\geq 0$

2) أحسب $g'(1)$ و $g''(1)$

3) شكل جدول تغيرات الدالة g

4) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $]3,1;3,2[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ،ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيًا

2) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)g(x)}{(x-1)^4}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4) أثبت أنّ : $f(\alpha)=3+\dfrac{6\alpha}{(\alpha-1)^2}$ ،ثم أحصر العدد $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-1}

5) أ/ بّين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

6) برهن أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) ،يطلب إعطاء معادلة له

7) جد إحداثيات نقطتي تقاطع (C_f) مع محوري الفواصل والتراتيب

8) أنشئ (Δ)، (T) و (C_f)

9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة؛ $f(x)=x+m$

✓ التمرين العشرون:

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-3;1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، فسر النتائج المحصل عليها هندسيا

2) أحسب $f'(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) بّين أنه من أجل كل x من D ، $f(-2-x)+f(x)=0$ ، فسر النتيجة هندسيًا

4) أوجد إحداثيات A و B نقطتي تقاطع (C_f) مع محور الفواصل والتراتيب على الترتيب

5) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A

6) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) ، ماذا تستنتج ؟(لاحظ أنّ : $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$)

7) أنشئ (C_f) و (Δ)

8) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $mx^2+2(m-1)x-3m-2=0$

9) لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x)=|f(x)|$

أ/ أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب/ ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g اعتمادا على (C_f)

✓ **التمرين الواحد و العشرون:**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x-16$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) أ/ بّين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $2,1<\alpha<2,2$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{x-8}{x^2+1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ/ تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان ؛ $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2+1)^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) عّين؛ دون حساب، $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسر النتيجة هندسيا

4) بّين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

5) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) تحقق أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{3(8-\alpha)}{\alpha^2+1}$ ، ثم عّين حصر للعدد $f(\alpha)$

7) عّين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

8) أحسب $f(-2)$ أنشئ (C_f) ، (T) و (Δ) (نأخذ : $f(\alpha)\approx 3$)

9) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=m-1$

✓ **التمرين الثاني و العشرون:**

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\left|x+1\right|-\dfrac{4}{x-1}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

2) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

3) أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها ، ثم شكل جدول التغيرات

4) بّين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) بجوار $+\infty$ و (Δ') بجوار $-\infty$

5) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ و (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$

أ/ أحسب $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

ج/ أكتب معادلتي نصفي المماسين (T_1) و (T_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$

6) أنشئ (C_f) ، (Δ) ، (Δ') ونصفي المماسين

7) ناقش بيانًيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=m+1$

✓ **التمرين الثالث و العشرون:**

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

2) بّين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $\alpha\in]-1{,}48;-1{,}47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) بّين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان ؛ $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) بّين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5) أنشئ (C_f) والمستقيم (Δ)

✓ **التمرين الرابع و العشرون:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^3}$

(C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{x^4}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f(x)=x-\dfrac{2x^2-1}{x^3}$

4) أ/ بّين أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل يطلب تعيين معادلته

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المقارب المائل (Δ)

5) أرسم (Δ) و (C_f)

6) ناقش بيانًيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx$

همسة في أذن كل طالب علم طمح ثم حاول ثم فشل ثم يأس
لا تيأس...... وكن طموحا
فالناجحون يطمحون ، ثم بعد ذلك ينجحون

✍ إعداد الأستاذ محمد حاقة