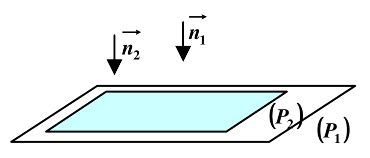
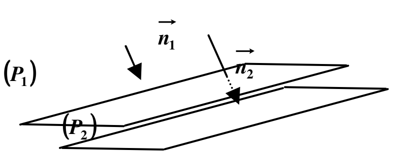
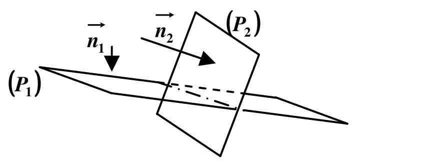
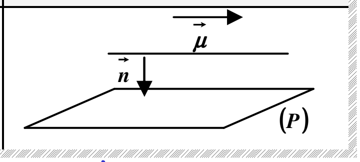
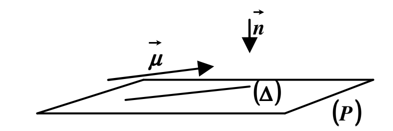
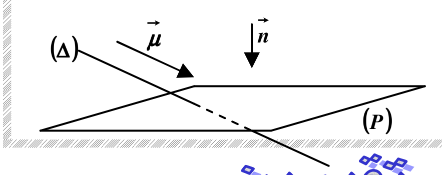
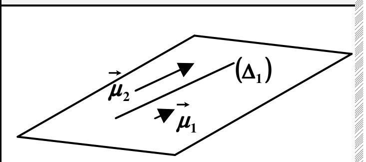
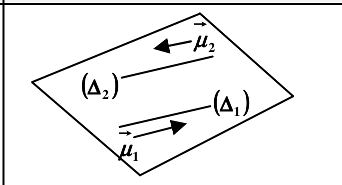
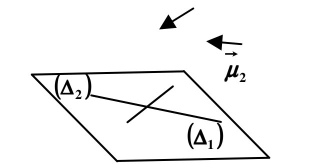
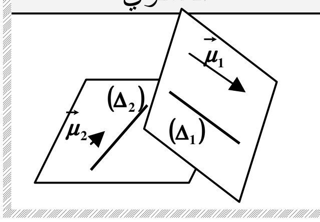
الوضع النسبي لمستويين

مستويان متوازيان منطبقان	مستويان متوازيان منفصلان	مستويان متقاطعان وفق مستقيم
		

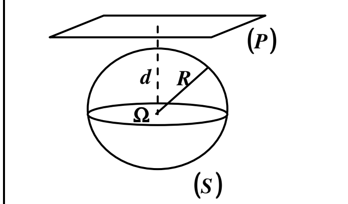
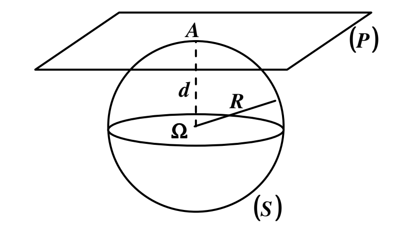
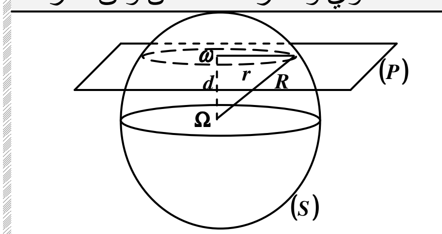
الوضع النسبي لمستوي ومستقيم

المستوي والمستقيم متوازيان (منفصلان)	المستوي والمستقيم متوازيان (المستوي يحوي المستقيم)	المستوي والمستقيم في نقطة
		

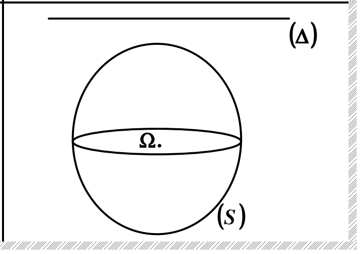
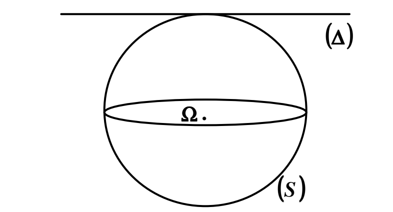
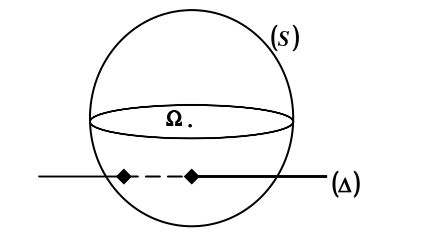
الوضع النسبي لمستقيمين

المستقيمان متوازيان منطبقان	المستقيمان متوازيان منفصلان	المستقيمان متقاطعان في نقطة	المستقيمان ليسا من نفس المستوي
			

الوضع النسبي لمستوي وسطح كرة

المستوي والكرة منفصلان	المستوي والكرة متماسان وفق نقطة	المستوي و الكرة متقاطعان وفق دائرة
		

الوضع النسبي لمستقيم وسطح كرة

المستقيم والكرة منفصلان	المستقيم والكرة متماسان وفق نقطة	المستقيم و الكرة متقاطعان وفق نقطتين
		

MEBARKI2016

الوضع النسبي بين مستوي و سطح كرة MEBARKI2016

(P) مستوي معادلته : $ax+by+cz+d=0$ ، (S) سطح الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R.

لدراسة **الوضع النسبي بين** (P) **و** (S) نقوم بحساب المسافة : $d(\Omega,(P))$

إذا كان : $d(\Omega,(P))\rangle R$ فإن $(S)\cap(P)=\Phi$ ، إذا كان : $d(\Omega,(P))=R$ فإن $(S)\cap(P)=\{W\}$

إذا كان : $d(\Omega,(P))\langle R$ فإن $(S)\cap(P)=(C)$

حيث (C) دائرة مركزها W ونصف قطرها r. W هي **المسقط العمودي** للنقطة Ω على (P) (في الحالتين) ،

يتم إيجاد r بتطبيق نظرية فيثاغورس بالعلاقة : $d^2+r^2=R^2$ أي : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

مثال 1 : المستوي وسطح الكرة منفصلان : MEBARKI2016

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p):2x+3y-2z-5=0$

و (S) سطح الكرة حيث : $(S):x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-2=0$

إيجاد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S) **:** لدينا : $(S):x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z-2=0$

ومنه: $(S):(x^2+2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z)=2$ ومنه: $(S):(x^2+2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-6z+9)=16$

أي $(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ أي: (S) سطح كرة مركزها $\Omega(-1;-2;3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{16}=4$

لدراسة الوضع النسبي بين (S) و (p) يكفي حساب $d(\Omega;(p))$.

لدينا: $d=d(\Omega;(p))=\dfrac{|2(-1)+3(-2)-2(3)-5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\dfrac{19}{\sqrt{17}}$

نلاحظ أن : $\dfrac{19}{\sqrt{17}}\rangle 2$ أي : $d\rangle R$ ومنه (S) و (p) منفصلان أي : $(S)\cap(p)=\Phi$

مثال 2 : المستوي و سطح الكرة متماسان (متقاطعان في نقطة وحيدة): MEBARKI2016

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p):x+y+z+1=0$

و (S) سطح الكرة حيث : $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$

إيجاد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S) **:** MEBARKI2016

لدينا : $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$ ومنه : $(S):(x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+6z)=-11$

ومنه : $(S):(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2+6z+9)=3$ أي : $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=3$

أي : (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1;-2;-3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

لدراسة الوضع النسبي بين (S) و (p) يكفي حساب $d(\Omega;(p))$. MEBARKI2016

لدينا : $d=d(\Omega;(p))=\dfrac{|(1)+(-2)+(-3)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

نلاحظ أن $d=R$ ومنه (S) و (p) متماسان وفق نقطة A حيث A هي المسقط العمودي لـ $\Omega(1;-2;-3)$ على (p) :

إيجاد إحداثيات A **:** نفرض $A(\alpha,\beta,\gamma)$ ومنه : $A\in(P)$ و $\overrightarrow{\Omega A}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}(1;1;1)$ الشعاع الناظمي لـ (P).

MEBARKI2016

1- $A(\alpha,\beta,\gamma)\in(P)$ معناه : $\alpha+\beta+\gamma+1=0$.

2- $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+2\\ \gamma+3\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ معناه: $\dfrac{\alpha-1}{1}=\dfrac{\beta+2}{1}=\dfrac{\gamma+3}{1}=k/k\in R$ ومنه $\begin{cases}\alpha=k+1\\ \beta=k-2\\ \gamma=k-3\end{cases}$.

ومنه : $(k+1)+(k-2)+(k-3)+1=0$ أي: $3k-3=0$ ومنه $k=1$ إذن نستنتج $\begin{cases}\alpha=(1)+1\\ \beta=(1)-2\\ \gamma=(1)-3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1\\ \gamma=-2\end{cases}$.

إحداثيات A هي $(2,-1,-2)$ أي $(S)\cap(p)=\{A(2;-1;-2)\}$

مثال 3 : المستوي وسطح الكرة متقاطعان وفق دائرة :

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p): x+2y-2z+16=0$

و (S) سطح الكرة حيث : $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-46=0$

إيجاد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S):

لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-46=0$ ومنه : $(S):(x^2-2x)+(y^2+6y)+(z^2+10z)=46$

ومنه : $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z+5)^2=81$ أي : (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1;-3;-5)$ ونصف قطرها $R=9$

لدراسة الوضع النسبي بين (S) و (p) يكفي حساب $d(\Omega;(p))$.

لدينا : $d=d(\Omega;(p))=\frac{|(1)+2(-3)-2(-5)+16|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{21}{3}=7$

نلاحظ أن $d<R$ ومنه (S) و (p) متقاطعان وفق دائرة (C) مركزها A **المسقط العمودي** لـ $\Omega(1;-3;-5)$ على (p) : ونصف قطرها r.

إيجاد r : لدينا حسب نظرية فيثاغورس: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{81-49}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

إيجاد إحداثيات A **:** نفرض $A(\alpha,\beta,\gamma)$ ومنه : $A\in(P)$ و $\overrightarrow{\Omega A}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}(1;2;-2)$ الشعاع الناظمي لـ (P).

1- $A(\alpha,\beta,\gamma)\in(P)$ معناه : $\alpha+2\beta-2\gamma+16=0$.

2- $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+3\\ \gamma+5\end{pmatrix}$ مرتبط خطيا مع $\vec{\eta}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$ معناه: $\frac{\alpha-1}{1}=\frac{\beta+3}{2}=\frac{\gamma+5}{-2}=k / k\in R$ ومنه $\begin{cases}\alpha=k+1\\ \beta=2k-3\\ \gamma=-2k-5\end{cases}$.

ومنه : $(k+1)+2(2k-3)-2(-2k-5)+16=0$ أي: $9k+16=0$ و منه $k=-\frac{16}{9}$

إذن نستنتج $\begin{cases}\alpha=\left(-\frac{16}{9}\right)+1\\ \beta=2\left(-\frac{16}{9}\right)-3\\ \gamma=-2\left(-\frac{16}{9}\right)-5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-\frac{7}{9}\\ \beta=-\frac{59}{9}\\ \gamma=-\frac{13}{9}\end{cases}$. إذن : $A\left(-\frac{7}{9};-\frac{59}{9};-\frac{13}{9}\right)$

ومنه : $(S)\cap(p)=\{(C)\}$ حيث (C) دائرة مركزها $A\left(-\frac{7}{9};-\frac{59}{9};-\frac{13}{9}\right)$ ونصف قطرها $r=4\sqrt{2}$

الوضع النسبي بين مستقيم و سطح كرة

(Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $t\in\Re$ ، $\begin{cases}x=a't+b'\\ y=a''t+b''\\ z=a'''t+b'''\end{cases}$

(S) سطح الكرة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

لإيجاد نقاط تقاطع (Δ) و(S) نقوم بحل الجملة : $\begin{cases}x=a't+b'\\ y=a''t+b''\\ z=a'''t+b'''\\ x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0\end{cases}$

نتحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها t نقوم بحساب Δ :

إذا كان : $\Delta<0$ فإن $(S)\cap(\Delta)=\Phi$ ، إذا كان : $\Delta=0$ فإن $(S)\cap(\Delta)=\{A\}$ (لأن يوجد حل مضاعف)

إذا كان : $\Delta>0$ فإن $(S)\cap(\Delta)=\{A,B\}$ (لأن يوجد حلين)

يتم إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع بتعويض قيمة الوسيط في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

مثال 1 : المستقيم وسطح الكرة منفصلان : MEBARKI2016

نعتبر (Δ_1) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ MEBARKI2016

و (S) سطح الكرة حيث : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$

لدراسة الوضع النسبي بين (Δ_1) و (S) نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0 \end{cases}$ MEBARKI2016

ومنه : $(1+2t)^2 + (1+t)^2 + (-3+t)^2 - 2(1+t) + 4(-3+t) + 4 = 0$

أي : $(1 + 4t + 4t^2) + (1 + 2t + t^2) + (9 - 6t + t^2) - 2 - 2t - 12 + 4t + 4 = 0$ ومنه : $6t^2 + 2t + 1 = 0$

حساب Δ : $\Delta = -20 \langle 0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول إذا (S) و (Δ_1) منفصلان أي : $(S) \cap (\Delta_1) = \Phi$

مثال 2 : المستقيم وسطح الكرة متماسان : MEBARKI2016

نعتبر (Δ_2) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$ MEBARKI2016

و (S) سطح الكرة حيث : $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$

لدراسة الوضع النسبي بين (Δ_2) و (S) نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0 \end{cases}$ MEBARKI2016

ومنه : $(3t)^2 + (2)^2 + (-2+t)^2 - 2(2) + 4(-2+t) + 4 = 0$ أي : $(9t^2) + (4) + (4 - 4t + t^2) - 4 - 8 + 4t + 4 = 0$

ومنه : $10t^2 = 0$ أي : $t = 0$ ومنه المعادلة تقبل حل وحيد $t = 0$

ومنه (S) و (Δ_2) متقاطعان في نقطة وحيدة (متماسان في نقطة) وسيطها $t = 0$

أي إحداثيات هذه النقطة : $\begin{cases} x = 3(0) = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 + (0) = -2 \end{cases}$ ومنه $(S) \cap (\Delta_2) = \{D(0;2;-2)\}$ MEBARKI2016

مثال 3 : المستقيم وسطح الكرة متقاطعان : MEBARKI2016

نعتبر (Δ_3) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ و (S) سطح الكرة حيث: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 1 = 0$

لدراسة الوضع النسبي بين (Δ_3) و (S) نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$ MEBARKI2016

ومنه : $(1+2t)^2 + (1+t)^2 + (-3+t)^2 - 2(1+t) + 4(-3+t) - 1 = 0$ MEBARKI2016

أي : $6t^2 + 2t - 4 = 0$ أي $3t^2 + t - 2 = 0$ حساب Δ : $\Delta = 1^2 - 4(3)(-2) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين t_1 و t_2 حيث $t_1 = \frac{-1-5}{6} = -1$ و $t_2 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ومنه (S) و (Δ_3) متقاطعان في نقطتين وسيطيهما $t_1 = -1$ و $t_2 = \frac{2}{3}$ MEBARKI2016

لما $t = -1$: $\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + (-1) = 0 \\ z = -3 + (-1) = -4 \end{cases}$ ، لما $t = \frac{2}{3}$: $\begin{cases} x = 1 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1 + \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \\ z = -3 + \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-7}{3} \end{cases}$

$(S) \cap (\Delta_3) = \left\{ H(-1;0;-4), K\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3};\frac{-7}{3}\right) \right\}$

الوضع النسبي بين مستقيم و مستوي MEBARKI2016

(Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $t\in\Re$ ، $\begin{cases} x = a't + b' \\ y = a''t + b'' \\ z = a'''t + b''' \end{cases}$ ، (P) مستوي معادلته : $ax+by+cz+d=0$

ملاحظة : مركبات شعاع توجيه مستقيم هي معاملات الوسيط MEBARKI2016

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيه(Δ) ، $\vec{n}$ الشعاع الناظمي لـ (P).

a) إذا كان : $\vec{u}.\vec{n}=0$ فإن : $(\Delta)//(P)$: MEBARKI2016

نأخذ نقطة A من (Δ) إذا كانت: $A\in(P)$ فإن : $(\Delta)\cap(P)=(\Delta)$ وإذا كانت $A\notin(P)$: فإن : $(\Delta)\cap(P)=\Phi$

b) إذا كان : $\vec{u}.\vec{n}\neq 0$ فإن : $(P)\cap(\Delta)=\{A\}$ حيث وسيط إحداثيات النقطة A حل الجملة : $\begin{cases} x=a't+b' \\ y=a''t+b'' \\ z=a'''t+b''' \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$

مثال 1 : المستوي يحوي المستقيم : MEBARKI2016

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p):2x+3y-2z-5=0$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 \\ z = 2t \end{cases}$

لدينا : $\vec{n}(2;3;-2)$ الشعاع الناظمي لـ(p) و $\vec{u}(2:0:2)$ شعاع توجيه(Δ) MEBARKI2016

لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=(2)(2)+(0)(3)+(2)(-2)=0$ ومنه(p) و(Δ) متوازيان. هل (p) يحوي (Δ) أو (p) و(Δ) منفصلان؟

نأخذ نقطة من (Δ). لتكن $t=1$ و منه $A(0;3;2)\in(\Delta)$. MEBARKI2016

هل $A\in(p)$ ؟: لدينا $2(0)+3(3)-2(2)-5=9-4-5=0$ ومنه $A\in(p)$ اذن : (p)يحوي(Δ) أي : $(p)\cap(\Delta)=(\Delta)$

مثال 2 : المستوي و المستقيم منفصلان: MEBARKI2016

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p):x+2y-z-4=0$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 6 \\ z = 3t \end{cases}$

لدينا : $\vec{n}(1;2;-1)$ الشعاع الناظمي لـ(p) و $\vec{u}(3:0:3)$ شعاع توجيه(Δ) MEBARKI2016

لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=(3)(1)+(0)(2)+(3)(-1)=0$ ومنه(p) و(Δ) متوازيان. هل (p) يحوي (Δ) أو (p) و(Δ) منفصلان؟

نأخذ نقطة من (Δ). لتكن $t=0$ و منه $B(-2;6;0)\in(\Delta)$ هل $B\in(p)$ ؟ $(-2)+2(6)-(0)-4=-2+12-4=6\neq 0$

ومنه $B\notin(p)$ اذن : (p) و(Δ)منفصلان أي : $(p)\cap(\Delta)=\Phi$ MEBARKI2016

مثال 3 : المستوي والمستقيم متقاطعان وفق نقطة: MEBARKI2016

ليكن (p) المستوي الذي معادلته : $(p):2x+3y-z+4=0$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8 + t \end{cases}$

لدينا : $\vec{n}(2;3;-1)$ الشعاع الناظمي لـ(p) و $\vec{u}(1:1:1)$ شعاع توجيه(Δ)

لدينا : $\vec{u}.\vec{n}=(1)(2)+(1)(3)+(1)(-1)=4\neq 0$ ومنه (p) و(Δ) متقاطعان وفق نقطة

وسيطها t يحقق الجملة : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 8 + t \\ 2x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$ أي : $2(t)+3(t)-(8+t)+4=0$ MEBARKI2016

أي : $4t-4=0$ ومنه $t=1$ بالتعويض نجد : $\begin{cases} x = t = 1 \\ y = t = 1 \\ z = 8 + t = 9 \end{cases}$ ومنه $(p)\cap(\Delta)=\{C(1;1;9)\}$

طريقة ثانية لإيجاد الوضع النسبي بين مستقيم و مستوي MEBARKI2016

(Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $t \in \Re$ ، $\begin{cases} x = a't + b' \\ y = a''t + b'' \\ z = a'''t + b''' \end{cases}$ ، (P) مستوي معادلته : $ax + by + cz + d = 0$

لإيجاد الوضع النسبي بين (Δ)و (P) نقوم بتعويض x ، y و z للتمثيل الوسيطي (Δ) في معادلة المستوي (P):

نتحصل على معادلة من الشكل : $at = b$: MEBARKI2016

إذا كان : $a = 0$ و $b = 0$ فإن (P) يحوي (Δ) MEBARKI2016

إذا كان : $a = 0$ و $b \neq 0$ فإن (P) و (Δ) متوازيان منفصلان .

و إذا كان : $a \neq 0$ فإن (P) و (Δ) متقاطعان وفق نقطة وسيطها $t = \frac{b}{a}$ MEBARKI2016

الوضع النسبي بين مستويين MEBARKI2016

(P) مستوي معادلته : $ax + by + cz + d = 0$ ، $\vec{n}$ شعاعه الناظمي MEBARKI2016

(P')مستوي معادلته : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ، $\vec{n'}$ شعاعه الناظمي

1/ إذا كان $\vec{n}$و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا أي يوجد عدد حقيقي k حيث : MEBARKI2016

$a' = ka$ ، $b' = kb$ ، $c' = kc$) أي $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$) فإن $(P)//(P')$ ،

إذا كان $d' = kd$) أي $\frac{d'}{d} = k$) فإن : $(P) \cap (P') = (P)$

وإذا كان $d' \neq kd$) أي $\frac{d'}{d} \neq k$) فإن : $(P) \cap (P') = \Phi$.

2/ إذا كان $\vec{n}$و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا فإن (P) و (P') يتقطعان وفق مستقيم (Δ) يتم إيجاد تمثيله الوسيطي

بحل جملة المعادلتين : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ MEBARKI2016

وذلك بتثبيت أحد المجاهيل وتعويضه بوسيط ثم إيجاد المجهولين المتبقين بدلالة هذا المجهول.

مثال 1 : مستويان منطبقان : MEBARKI2016

ليكن (p_1) و (p_2) مستويان حيث : $(p_1): 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ و $(p_2): -4x + 6y - 8z + 10 = 0$

لدينا : $\vec{n_1}(2;-3;4)$ و $\vec{n_2}(-4;6;-8)$ الأشعة الناظمية لـ (p_1) و (p_2) على الترتيب . MEBARKI2016

لدينا: $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{-8}{4} = -2$ ومنه $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطان خطيا أي (p_1) و (p_2) متوازيان.هل هما منطبقان أو منفصلان ؟

لدينا $\frac{10}{-5} = -2$ ومنه (p_1) و (p_2) منطبقان.أي $(p_1) \cap (p_2) = (p_1)$ MEBARKI2016

مثال 2: مستويان منفصلان: MEBARKI2016

ليكن (p_1) و (p_2) مستويان حيث : $(p_1): 7x + 5y - 4z - 5 = 0$ و $(p_2): 21x + 15y - 12z + 1 = 0$

لدينا : $\vec{n_1}(7;5;-4)$ و $\vec{n_2}(21;15;-12)$ الأشعة الناظمية لـ (p_1) و (p_2) على الترتيب . MEBARKI2016

لدينا : $\frac{21}{7} = \frac{15}{5} = \frac{-12}{-4} = 3$ ومنه $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطان خطيا أي (p_1) و (p_2) متوازيان . هل هما منطبقان أو منفصلان ؟

لدينا $\frac{1}{-5} \neq 3$ ومنه (p_1) و (p_2) منفصلان أي $(p_1) \cap (p_2) = \Phi$. MEBARKI2016

مثال 3 : مستويان متقاطعان وفق مستقيم MEBARKI2016

ليكن (p_1) و (p_2) مستويان حيث : $(p_1): x+2y-z-4=0$ و $(p_2): 2x+3y-2z-5=0$

لدينا : $\vec{n_1}(1;2;-1)$ و $\vec{n_2}(2;3;-2)$ الأشعة الناظمية لـ (p_1) و (p_2) على الترتيب. MEBARKI2016

لدينا : $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$ ومنه $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطان خطيا أي (p_1) و (p_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

يتم إيجاد تمثيله الوسيطي بحل الجملة : $\begin{cases} 2x+3y-2z-5=0 \\ x+2y-z-4=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 2x+3y=2z+5 ...\times 1 \\ x+2y=z+4 ....\times -2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x+3y=2z+5 \\ -2x-4y=-2z-8 \end{cases}$ بالجمع : $-y=-3$ أي: $y=3$ MEBARKI2016

لدينا : $\begin{cases} 2x+3y=2z+5 ...\times 2 \\ x+2y=z+4 ....\times -3 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 4x+6y=4z+10 \\ -3x-6y=-3z-12 \end{cases}$ بالجمع: نجد $x=z-2$.

نفرض أن $z=t$ ومنه : $(p_1)\cap(p_2)=(\Delta)$ حيث : $(\Delta): \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\Re$ MEBARKI2016

الوضع النسبي بين مستقيمين MEBARKI2016

(Δ_1) و (Δ_2) المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين الآتيين :

$(\Delta_1): \begin{cases} x=at+a' \\ y=bt+b' \\ z=ct+c' \end{cases}$ $(\Delta_2): \begin{cases} x=a_1t+a_1' \\ y=b_1t+b_1' \\ z=c_1t+c_1' \end{cases}$ ، $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ أشعة توجيههما على الترتيب MEBARKI2016

1/ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ مرتبطان خطيا فإن $(\Delta_1)//(\Delta_2)$. نأخذ نقطة A من (Δ_1)

إذا كانت : $A\in(\Delta_2)$ فإن $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=(\Delta_1)$ وإذا كانت $A\notin(\Delta_2)$: فإن : $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\Phi$.

2/ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان في نقطة أو ليسا من نفس المستوي. MEBARKI2016

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} at+a'=a_1\lambda+a_1' \\ bt+b'=b_1\lambda+b_1' \\ ct+c'=c_1\lambda+c_1' \end{cases}$ نختار معادلتين ونقوم بإيجاد حليهما ثم نتحقق من أن الحلين هما حلا المعادلة الثالثة.

إذا كانا حلا المعادلة الثالثة فإن (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان في نقطة (يتم إيجاد إحداثياتها بتعويض كل وسيط في التمثيل المناسب)

و إذا كانا لا يحققانها فإن (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي. MEBARKI2016

مثال 1 : مستقيمان منطبقان : MEBARKI2016

ليكن (Δ_1) و (Δ_2) المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين الآتيين : $(\Delta_1): \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=2t-1 \end{cases}$ و $(\Delta_2): \begin{cases} x=-4\lambda-7 \\ y=-6\lambda-14 \\ z=-4\lambda-9 \end{cases}$

لدينا : $\vec{u_1}(2;3;2)$ و $\vec{u_2}(-4;-6;-4)$ أشعة التوجيه لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب. MEBARKI2016

لدينا : $\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-4}{2}=-2$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا أي (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان. هل هما منطبقان أو منفصلان ؟

نأخذ نقطة من (Δ_1). لتكن $t=0$ و منه $A(1;-2;-1)\in(\Delta_1)$. هل $A\in(\Delta_2)$ ؟ MEBARKI2016

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 1=-4\lambda-7 \\ -2=-6\lambda-14 \\ -1=-4\lambda-9 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \lambda=-2 \\ \lambda=-2 \\ \lambda=-2 \end{cases}$ ومنه $A\in(\Delta_2)$ أي (Δ_1) و (Δ_2) منطبقان ومنه $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=(\Delta_1)$

مثال 2 :مستقيمان متوازيان منفصلان: MEBARKI2016

ليكن (Δ_1) و (Δ_2) المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين: $(\Delta_1):\begin{cases} x=-t+4 \\ y=2t+5 \\ z=-2t+3 \end{cases}$ و $(\Delta_2):\begin{cases} x=-2\lambda+4 \\ y=4\lambda+1 \\ z=-4\lambda+7 \end{cases}$

لدينا : $\vec{u_1}(-1;2;-2)$ و $\vec{u_2}(-2;4;-4)$ أشعة التوجيه لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب. MEBARKI2016

لدينا : $\frac{-2}{-1}=\frac{4}{2}=\frac{-4}{-2}=2$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطيا أي (Δ_1) و (Δ_2) متوازيان. هل هما منطبقان أو منفصلان ؟

نأخذ نقطة من (Δ_1). لتكن $t=0$ و منه $A(4;5;3)\in(\Delta_1)$.

هل $A\in(\Delta_2)$ ؟ MEBARKI2016

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 4=-2\lambda+4 \\ 5=4\lambda+1 \\ 3=-4\lambda+7 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=1 \\ \lambda=1 \end{cases}$ ومنه $A\notin(\Delta_2)$ أي (Δ_1) و (Δ_2) منفصلان

ومنه $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\Phi$

مثال 3 :مستقيمان متقاطعان: MEBARKI2016

ليكن (Δ_1) و (Δ_2) المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين الآتيين : $(\Delta_1):\begin{cases} x=2t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-t+3 \end{cases}$ و $(\Delta_2):\begin{cases} x=-3\lambda-2 \\ y=\lambda+5 \\ z=2\lambda+6 \end{cases}$

لدينا : $\vec{u_1}(2;2;-1)$ و $\vec{u_2}(-3;1;2)$ أشعة التوجيه لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب. MEBARKI2016

لدينا : $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{2}$ ومنه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا أي (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 2t+2=-3\lambda-2 \\ 2t+1=\lambda+5 \\ -t+3=2\lambda+6 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 2t+3\lambda=-4 \\ 2t-\lambda=4 \\ -t-2\lambda=3 \end{cases}$ MEBARKI2016

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 2t+3\lambda=-4 ...(1) \\ 2t-\lambda=4 .....(2) \end{cases}$

بالطرح نجد : $4\lambda=-8$ ومنه $\lambda=-2$ MEBARKI2016

$\begin{cases} 2t+3\lambda=-4 ...(\times 1) \\ 2t-\lambda=4 .....(\times 3) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2t+3\lambda=-4 \\ 6t-3\lambda=12 \end{cases}$

بالجمع نجد: $8t=8$ ومنه $t=1$. أي $\{t=1;\lambda=-2\}$

بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد : $-(1)-2(-2)=-1+4=3$

بما أن $\{t=1;\lambda=-2\}$ حققا المعادلة الثالثة فإن (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان وفق نقطة الـ $(4;3;2)$

ومنه $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\{(4;3;2)\}$

لأن : $\begin{cases} x=2(1)+2=4 \\ y=2(1)+1=3 \\ z=-(1)+3=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-3(-2)-2=4 \\ y=(-2)+5=3 \\ z=2(-2)+6=2 \end{cases}$. MEBARKI2016

MEBARKI2016

مثال 4 :مستقيمان ليسا من نفس المستوي:

ليكن (Δ_1) و(Δ_2) المستقيمان المعرفان بتمثيليهما الوسيطيين الآتيين : $(\Delta_1):\begin{cases} x = 2t+1 \\ y=-3t-2 \\ z=-t-1 \end{cases}$ و $(\Delta_2):\begin{cases} x=-\lambda+2 \\ y=2\lambda+1 \\ z=\lambda \end{cases}$

لدينا : $\overrightarrow{u_1}(2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{u_2}(-1;2;1)$ أشعة التوجيه لـ (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب. لدينا : $\frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{2}$

ومنه $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا أي (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 2t+1=-\lambda+2 \\ -3t-2=2\lambda+1 \\ -t-1=\lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 2t+\lambda=1 \\ -3t-2\lambda=3 \\ -t-\lambda=1 \end{cases}$

نقوم بحل الجملة : $\begin{cases} 2t+\lambda=1 ...(\times 3) \\ -3t-2\lambda=3 ..(\times 2) \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 6t+3\lambda=3 \\ -6t-4\lambda=6 \end{cases}$

بالجمع : $-\lambda=9$ أي : $\lambda=-9$

$\begin{cases} 2t+\lambda=1 ...(\times 2) \\ -3t-2\lambda=3 ..(\times 1) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 4t+2\lambda=2 \\ -3t-2\lambda=3 \end{cases}$

بالجمع نجد : $t=5$

أي $\{t=5;\lambda=-9\}$.

بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد $-(5)-(-9)=-5+9=4\neq 1$

بما أن $\{t=5;\lambda=-9\}$ لم يحققا المعادلة الثالثة فإن (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي

أي $(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\Phi$

MEBARKI2016

انتظروا الجديد

M EBARKI
ENACER
AYAR
AYA