سلاسل المنجد - دروس و تمارين

علوم فيزيائية

2AS

الشعب الرياضية فقط

السلسلة 2-03-1

العمل و الطاقة الحركة الدورانية

عرض نظري و تمارين

يمكن تحميل نسخة من هذا الملف من الموقع :
www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل – تمارين – فيديوهات ......)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في الموقع الإلكتروني

لكي يصلك جديد الموقع تابع صفحة الفايسبوك التالية :
الأستاذ فرقاني فارس أستاذ العلوم الفيزيائية Fergani Fares

الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
fares_fergani@yahoo.fr

الإصدار : نوفمبر/2021

العلوم الفيزيائية

سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثانية ثانوي – الوحدة 03

العمل و الطاقة الحركية الدورانية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

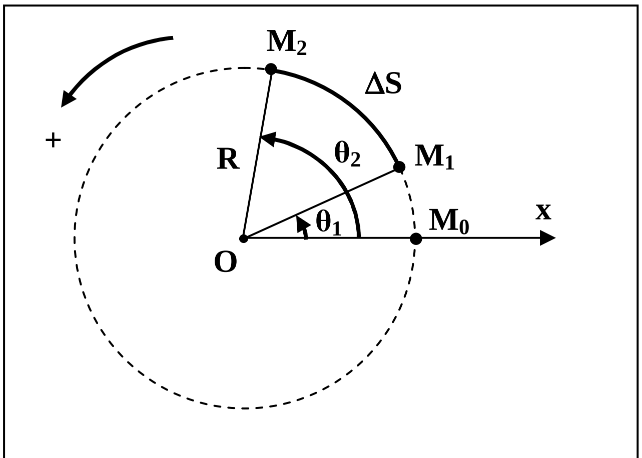
****

السلسلة 2-03 - 01

عرض نظري و تمارين

1- الفاصلة الزاوية و السرعة الزاوية

● الفاصلة المنحنية و الزاوية :



- نعتبر جسم نقطي (أبعاده مهملة) ينتقل على مسار دائري نصف قطره R و مركزه O مارًا بالمواضع M_1 ، M_2 ، ..... عند اللحظات t_1 ، t_2 ، ...... (الشكل)

- الفاصلة المنحنية التي نرمز لها بـ s و تقدر بالمتر (m) هي المسافة المنحنية (على المحيط) بين الموضع M_i و موضع M_0 نعتبره مبدأ للفواصل المنحنية .

- الفاصلة الزاوية التي نرمز لها بـ θ و تقدر بالراديان (rad) هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر (OM_i) المار من الموضع M_i مع نصف القطر (OM_0) المار من O و الذي يعتبر مبدأ للفواصل الزاوية .

- يعبر عن الفاصلة الزاوية θ بدلالة الفاصلة المنحنية s بالعلاقة :

$$\boxed{\theta = \frac{s}{R} \leftrightarrow s = R\,\theta}$$

● السرعة الخطية و الزاوية :

- السرعة الخطية المتوسطة التي نرمز لها بـ v_m و وحدتها المتر/الثانية (m/s) بين لحظتين t_1 ، t_2 هي حاصل قسمة المسافة الخطية المقطوعة بين هاتين اللحظتين على المدة الزمنية Δt الموافقة أي :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

- السرعة الزاوية المتوسطة التي نرمز لها بـ ω_m و وحدتها الراديان/الثانية (rad/s) بين لحظتين t_1 ، t_2 هي حاصل قسمة الزاوية الممسوحة بين هاتين اللحظتين على المدة الزمنية Δt الموافقة أي :

$$\omega_m = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

- السرعة الخطية اللحظية التي يرمز لها بـ v و وحدتها المتر/الثانية (m/s) هي سرعة المتحرك الخطية عند لحظة ما .
- السرعة الزاوية اللحظية التي يرمز لها بـ ω و وحدتها الراديان/الثانية (rad/s) هي السرعة الزاوية للمتحرك عند لحظة ما .
- يعبر عن السرعة الزاوية اللحظية ω بدلالة السرعة الخطية اللحظية v بالعلاقة :

$$\omega = \frac{v}{R} \leftrightarrow v = R\,\omega$$

أمثلة : (حساب بعض السرعات الزاوية)

▪ دوران عقرب الثواني في ساعة حائطية كلاسيكية :

عقرب الثواني في الساعة الحائطية ينجز دورة (أي $\Delta\theta = 2\pi$ rad) خلال 1 دقيقة أي ($\Delta t = 60$ s) لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60} = 0.10 \text{ rad/s}$$

▪ دوران عقرب الدقائق في ساعة حائطية كلاسيكية :

عقرب الدقائق في الساعة الحائطية ينجز دورة (أي $\Delta\theta = 2\pi$ rad) خلال 1 ساعة أي ($\Delta t = 3600$ s) لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3600} = 1.74 . 10^{-3} \text{ rad/s}$$

▪ دوران الأرض حول نفسها :

الأرض تدور حول نفسها خلال 24 ساعة فهي تمسح زاوية ($\Delta\theta = 2\pi$ rad) خلال 24 ساعة أي خلال مدة زمنية قدرها : $\Delta t = 24 . 3600 = 86400$ s

لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 . 10^{-5} \text{ rad/s}$$

▪ دوران الأرض حول الشمس باعتبار السنة تقدر بـ 365.25 يوم :

الأرض تدور حول الشمس خلال سنة فهي تمسح زاوية ($\Delta\theta = 2\pi$ rad) خلال سنة أي خلال مدة زمنية قدرها :

$$\Delta t = 365.25 . 24 . 3600 = 3.15 . 10^{7} \text{ s}$$

لذا يكون :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3.16 . 10^{7}} = 2 . 10^{-7} \text{ rad/s}$$

دور الحركة الدائرية المنتظمة :

- دور الحركة الدائرية المنتظمة الذي يرمز لـه بــ T و وحدته الثانية (s) هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\boxed{T = \frac{2\pi.r}{v}}$$

حيث :

- r : نصف قطر المسار الدائري (يقدر بالمتر m) .
- v : سرعة المتحرك على المسار الدائري (تقدر بالمتر على الثانية m/s) .

مثال-1 :

جسم نقطي (S) ، يتحرك على مسار دائري نصف قطره r = 50 cm بسرعة v = 2 m/s . نحسب دور حركة هذا الجسم .

$$T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi.0.5}{2} = 0.5\,\pi = 1.57\,s$$

مثال-2 :

جسم نقطي (S) ، يدور بمعدل 600 دورة في الدقيقة ، نحسب دور حركة هذا الجسم .

- حسب تعريف الدور و المتمثل في أنه الزمن اللازم لإنجاز دورة واحدة ، يكون حسب القاعدة الثلاثة :

600 دورة $\longrightarrow$ 60 s (1min)

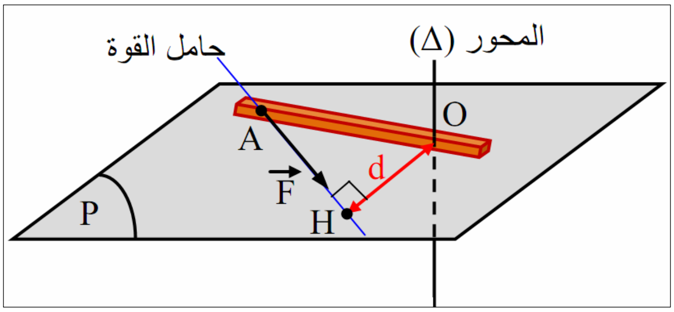
1دورة $\longrightarrow$ T s

و منه :

$$T = \frac{60\,.\,1}{600} = 0.1\,s$$

2- عزم القوة و عزم المزدوجة

• عزم قوة بالنسبة لمحور دوران Δ:



- عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور دوران Δ و الذي يرمز له بـ $M_{/\Delta}(\vec{F})$ و وحدته النيوتن في المتر (N .m) هو مقدار جبري يعبر عن شدة الفعل الدوراني لجسم ، حيث كلما كان مقدار العزم أكبر كان أثر الفعل الدوراني أكبر .

- يحسب عزم قوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور دوران Δ ، بجداء شدة هذه القوة في الذراع d الذي يمثل البعد العمودي بين حامل هذه القوة و محور الدوران Δ (الشكل) .

عزم القوة موجبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير الجسم في الاتجاه الموجب و نكتب في هذه الحالة :

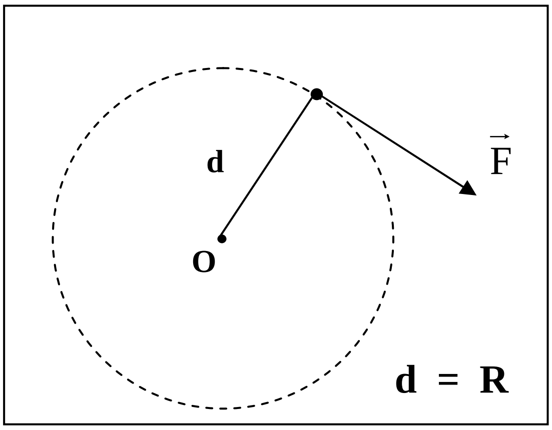
$$\boxed{M_{/\Delta}(\vec{F}) = +\,F.d}$$

و يكون سالبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير الجسم في الاتجاه السالب و نكتب في هذه الحالة :

$$M_{/\Delta}(\vec{F}) = -F.d$$

حالة خاصة :

إذا كانت القوة مماسية للمسار يكون الذراع d مساوي لنصف القطر R (d = R) (الشكل) .

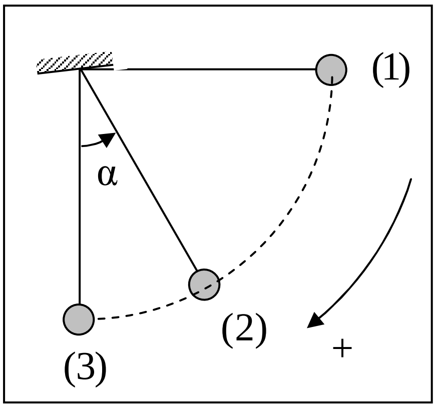


ملاحظة :

عندما يخضع جسم قابل للدوران حول محور ثابت إلى قوتين متعاكستين (وفق جهة الدوران) فإن الجسم لا يتحرك في جهة الشدة الأكبر و إنما يتحرك في جهة القوة ذات العزم الأكبر ، و بالمثل إذا كان الجسم يخضع إلى عدة قوى (منها في الجهة الموجبة و الآخر في الجهة السالبة) فالجسم يتحرك في الجهة التي يكون فيها مجموع العزوم أكبر .

التمرين (1) : (التمرين : 002 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر جسم نقطي (S) كتلته $m = 100\ g$ معلق بخيط طوله $\ell = 40\ cm$. أحسب عزم الثقل $\vec{P}$ في الحالات (1) ، (2) ، (3) المبينة في الشكل التالي :

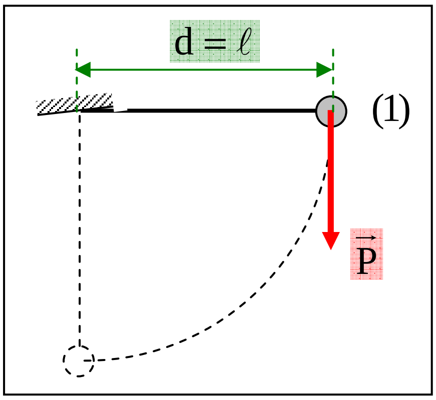


يعطى : $g = 10\ N/kg$ ، $\alpha = 30°$.

الأجوبة :

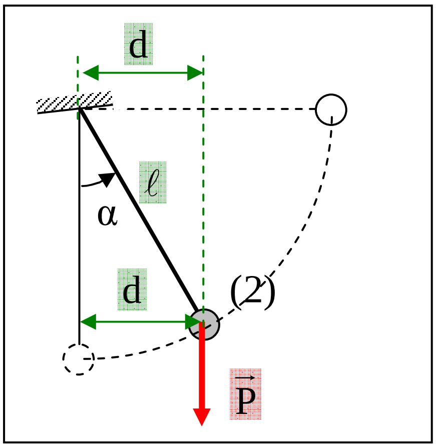
عزم الثقل :

الحالة (1) :



$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P.d = m\,g\,\ell$$
$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = 0.1.10.0.4 = 0.4\ N.m$$

<u>الحالة (2) :</u>



$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P.d$$

من الشكل :

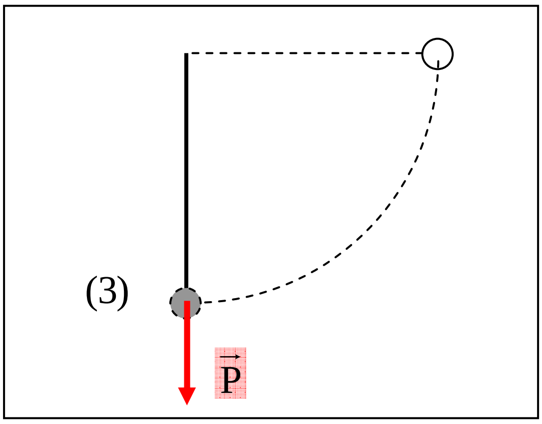
$$\sin\alpha = \frac{d}{\ell} \rightarrow \ell = d\sin\alpha$$

ومنه يصبح :

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P.\ell\sin\alpha = m\,g\,\ell\sin\alpha$$

$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = 0.1.10.0.4.\sin30° = 0.2\ \text{N.m}$$

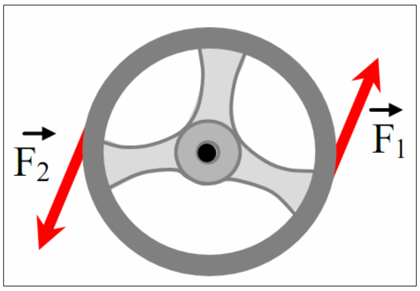
<u>الحالة (3) :</u>



$$M_{/\Delta}(\vec{P}) = P.d\ = 0$$

لأن $\vec{P}$ مارة من مركز الدوران .

● عزم المزدوجة :



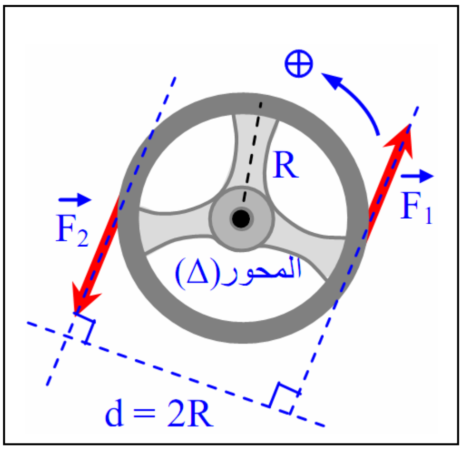
- تدعى جملة قوتين $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ محصلتهما معدومة و ليس لهما نفس الحامل **بالمزدوجة** ، كمثال على ذلك نذكر المزدوجة التي تؤثر بها يدي السائق على مقود السيارة (الشكل) :

- يرجع حساب عزم مزدوجة قوتين $(\vec{F}_1 \text{ ، } \vec{F}_2)$ تؤثر على جسم صلب يدور حول محور Δ إلى حساب المجموع الجبري لـعزمي القوتين أي إذا رمزنا لعزم المزدوجة بـ M نكتب :

$$M = M_{/\Delta}(\vec{F}_1) + M_{/\Delta}(\vec{F}_2) \quad \rightarrow M = F_1.R + F_2.R$$

و حيث أن القوتين المشكلتين للمزدوجة متساويتين في الشدة أي $F_1 = F_2$ يصبح :

$$M = F.R + F.R = 2\,R\,F$$



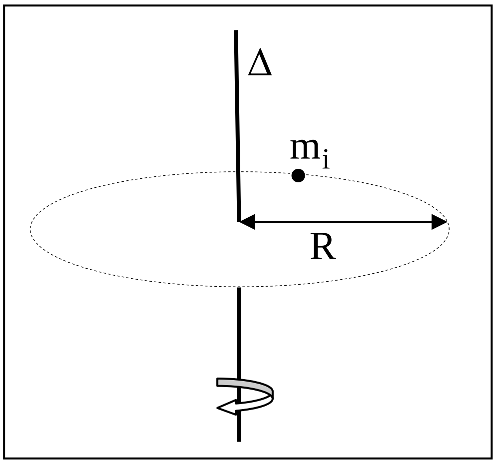
يمثل 2R قطر المسار و نعتبره مساوي لـ d أي d = 2R حيث d يسمى في هذه الحالة **ذراع المزوجة** و منه تكون عبارة عزم المزدوجة كما يلي :

$$\boxed{M = \pm Fd}$$

من خلال عبارة المزدوجة المتحصل عليها نلاحظ أن عزم المزدوجة لا يتعلق بمحور الدوران ، و إنما يتعلق فقط بالبعد بين حاملي القوتين المشكلتين للمزدوجة ، و بالتالي عندما نتكلم عن عزم المزدوجة لا داعي لذكر محور الدوران خلافا عن عزم القوة التي يجب دائما ذكر المحور الذي يحسب بالنسبة إليه العزم .

3- عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور دوران Δ

• عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور Δ :

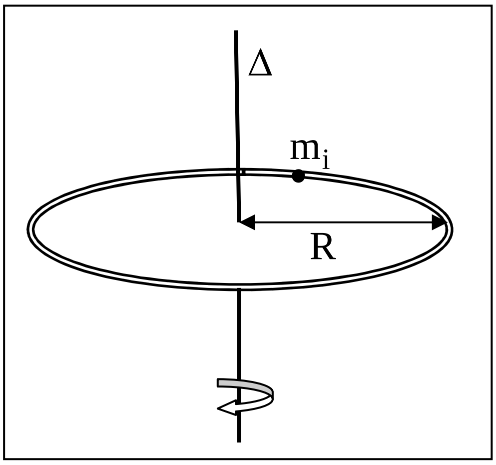


- تقاس العطالة الدورانية لجسم صلب يتحرك بالنسبة لمحور Δ ثابت بمقدار فيزيائي يدعى عزم عطالة الجسم بالنسبة لمحور الدوران Δ .
- يعرف عزم العطالة $J_{/\Delta}$ بالنسبة لمحور Δ لجسم نقطي m و يبعد مسافة d عن هذا المحور بالعبارة التالية :

$$\boxed{J_{/\Delta} = m\, d^2}$$

- وحدة عزم العطالة في النظام الدولي هي $kg\ m^2$.
- يحسب عزم عطالة جملة نقاط مادية كتلة كل نقطة m_1 ، m_2 ، m_3 ...... تبعد كل منها عن محور الدوران على التوالي مسافة d_1 ، d_2 ، d_3 ...... (الشكل) بجمع عزوم عطالة كل نقطة بالنسبة لنفس المحور :

$$\boxed{J_{/\Delta} = \Sigma\, m_1\, d_1^2}$$



مثال :

لحساب عزم عطالة حلقة نصف قطرها R و كتلتها M (الشكل) نتبع الخطوات التالية :
- نقسم الحلقة إلى عناصر صغيرة كتلها m_i يمكن اعتبارها نقاطا مادية تبعد كلها نفس المسافة R عن المحور Δ .
- تعتبر الحلقة جملة نقاط مادية و يحسب عزم عطالتها بالعبارة التالية :

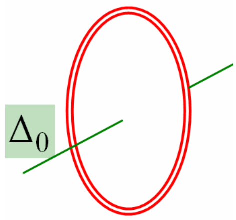
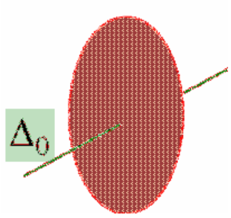
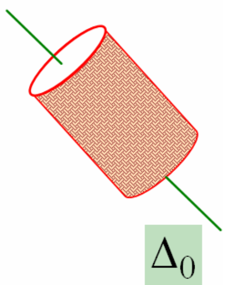
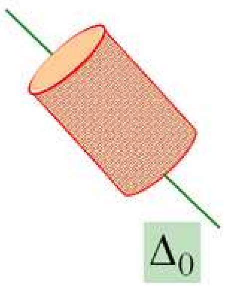
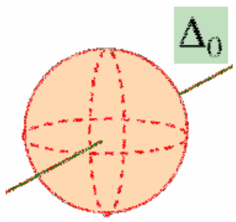
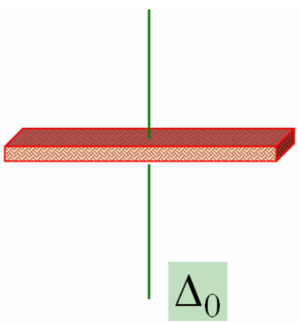
$$J_{/\Delta} = m_1\, R^2 + m_2R^2 + m_3R^2 + \ldots\ldots$$

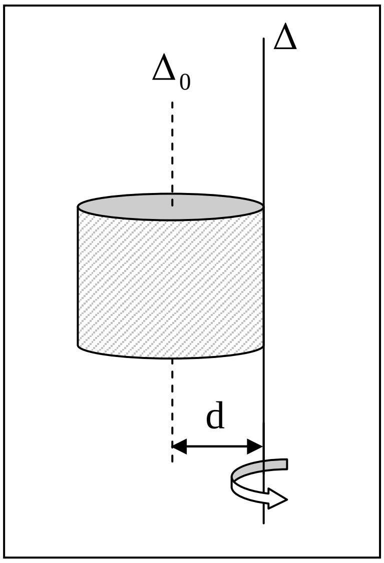
$$J_{/\Delta} = \Sigma\, m_i\, R^2 = (\Sigma\, m_i\,)\, R^2 = MR^2$$

$$\boxed{J_{/\Delta} = MR^2}$$

حيث : $\Sigma\, m_i = M$ هي كتلة الحلقة و المساوية لمجموع كتل النقاط المادية المشكلة لها .

● عزوم عطالة بعض الأجسام الصلبة المتجانسة :

الجسم	عبارة عزم العطالة	الشكل
عزم عطالة حلقة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها	$j_{/\Delta_0} = M R^2$	
عزم عطالة قرص كتلته M و نصف قطره R بالنسبة لمحوره Δ_0 المار من مركزه	$j_{/\Delta_0} = \frac{1}{2} M R^2$	
عزم عطالة اسطوانة مجوفة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها	$j_{/\Delta_0} = M R^2$	
عزم عطالة اسطوانة مملوءة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها و الموازي لها	$j_{/\Delta_0} = \frac{1}{2} M R^2$	
عزم عطالة كرة مملوءة كتلتها M و نصف قطرها R بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من مركزها	$j_{/\Delta_0} = \frac{2}{5} M R^2$	
عزم عطالة ساق كتلتها M و طولها L بالنسبة لمحورها Δ_0 المار من منصفها و عمودي عليها	$j_{/\Delta_0} = \frac{1}{12} M L^2$	



• نظرية هويغنز :

- لحساب عزم عطالة جسم صلب كتلته m يدور حول محور Δ غير منطبق على محوره Δ_0 (الشكل) ، نستعين بنظرية هويجنز .
- تنص نظرية هيوغنز على ما يلي :

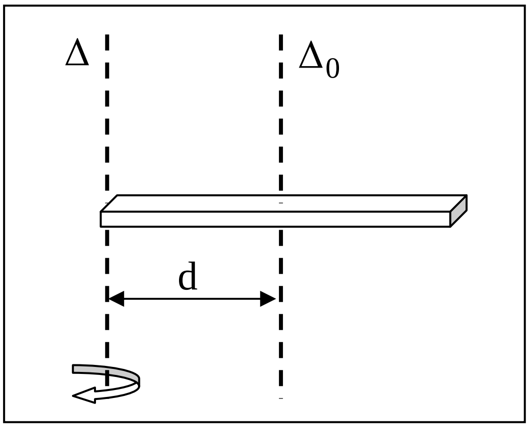
" عزم عطالة جسم صلب بالنسبة للمحور Δ غير منطبق على محور الجسم Δ_0 مساوي لعزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لمحوره Δ_0 مضاف إليه جداء كتلة هذا الجسم في مربع البعد بين محور الجسم Δ_0 و محور الدوران Δ " أي :

$$\boxed{J_{/\Delta} = J_{/\Delta 0} + m\,d^2}$$

ملاحظة :

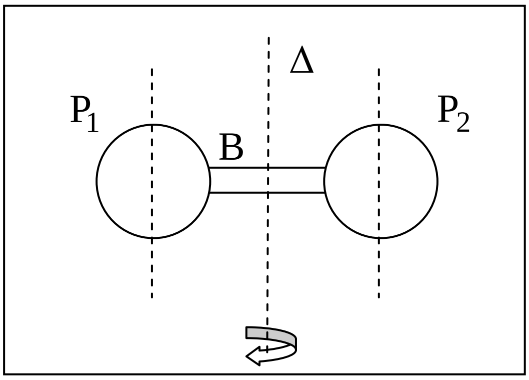
- عزم عطالة جملة ميكانيكية تتكون من عدة أجسام صلبة بالنسبة لمحور (Δ) مساوي لمجموع عزوم عطالة هذه الأجسام بالنسبة لنفس المحور Δ .

التمرين (2) : (التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)



1- قضيب طوله L = 40 cm و كتلته m = 120 g قبل للدور حول محور Δ مار من طرفه (الشكل-1) :

- أكتب عبارة عزم عطالة القضيب بالنسبة للمحور Δ بدلالة m ، L ثم احسب قيمته .



2- جملة ثلاث أجسام ، قضيب (B) كتلته $m_1 = 200$ g و طوله L = 40 cm و كرتين (P_1) ، (P_2) متماثلتين كتلة كل منهما $m_2 = m_3 = m = 100$ g و نصف قطر كل منهما $R_2 = R_3 = R = 20$ cm ملتحمتين بالقضيب B (الشكل-2) .

- أكتب عبارة عزم عطالة كل جسم بالنسبة لمحور الدوران Δ ، و احسب قيمتها .

ب- أحسب عزم عطالة الجملة المتكون من الأجسام الثلاث بالنسبة لمحور Δ .

الأجوبة :

1- عزم عطالة القضيب :

بتطبيق نظرية هويجنز :

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta_0} + m\,d^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12}\,m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; J_{/\Delta} = \frac{1}{12}\,m\,L^2 + \frac{1}{4}\,m\,L^2$$

$$J_{/\Delta}=\frac{mL^2+3mL^2}{12}=\frac{4mL^2}{12}\ \rightarrow\ J_{/\Delta}=\frac{1}{3}m\,L^2$$

$$J_{/\Delta}=\frac{1}{3}.0,6\,(0,5)^2=5.10^{-2}\ kg.m^2$$

2- أ- عزم عطالة (P_1) ، (P_2) ، (B) بالنسبة للمحور Δ :

▪ عزم عطالة القضيب (B) :

المحور Δ منطبق على محور القضيب العمودي
عليه و مار من مركزه ، و عليه :

$$J_{/\Delta}(B)=\frac{1}{12}m_1L^2=\frac{1}{12}0.12\,(0.4)^2=1,6.10^{-3}\ kg.m^2$$

▪ عزم عطالة الكرة (P_1) :

المحور Δ لا يمر من مركز الكرة (P_1) ، و بالتالي نطبق نظرية هويجنز :

$$J_{/\Delta}(P_1)=\frac{2}{5}m\ R^2+m\,d^2$$

من الشكل :

$$d=R+\frac{L}{2}=0,1+\frac{0,4}{2}=0,3\,m$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P)=\frac{2}{5}.0,1.(0,2)^2+0,1(0,3)^2=4,6.10^{-3}\ kg.m^2$$

▪ عزم عطالة الكرة (P_2) :

بنفس الطريقة المتبعة في حساب عزم عطالة الكرة (P_1) يكون :

$$J_{/\Delta}(P_1)=\frac{2}{5}m\ R^2+m\,d^2$$

من الشكل :

$$d=R+\frac{L}{2}=0,1+\frac{0,4}{2}=0,3\,m$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P)=\frac{2}{5}.0,1.(0,2)^2+0,1(0,3)^2=4,6.10^{-3}\ kg.m^2$$

ب- عزم عطالة الجملة المتكونة من القضيب (B) و الكرتين (P_1) ، (P_2) :

عزم عطالة الجملة المتكونة من الأجسام المذكورة بالنسبة للمحور Δ هي مجموع عزوم عطالة هذه الأجسام بالنسبة للمحور Δ و عليه :

$$J_{\Delta}=J_{\Delta}(B)+\ J_{\Delta}(P_1)+\ J_{\Delta}(P_2)$$

$$J_{\Delta}=1,6.10^{-3}+\ 4,6.10^{-3}+\ 4,6.10^{-3}=1,08.10^{-2}\ kg.m^2$$

و منه :

$$J_{/\Delta}(P_1)=\frac{2}{5}.0,1.(0,2)^2+0,1(0,3)^2=4,6.10^{-3}\ kg.m^2$$

4- توازن جسم صلب خاضع إلى قوى

● شرط توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت :

يتوازن جسم صلب قابل للدوران حول محور Δ ثابت و خاضع إلى تأثير قوى خارجية عندما يكون المجموع الجبري لعزوم هذه القوى معدوم أي :

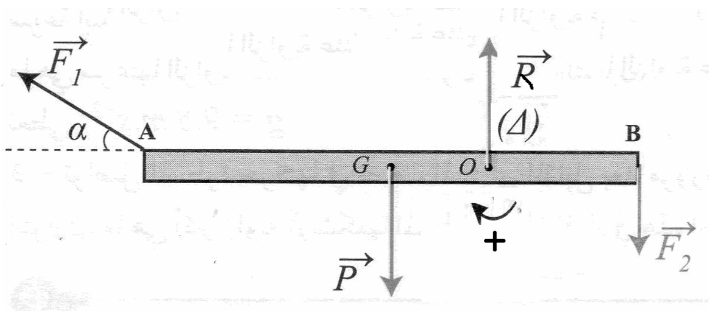
$$\boxed{\sum M_{/\Delta}(\vec{F}_{ext}) = 0}$$

● شرط توازن جسم صلب خاضع إلى قوى متلاقية :

- يتوازن جسم صلب خاضع إلى قوى خارجية متلاقية إذا تحقق :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

التمرين (3) : (التمرين : 018 في بنك التمارين على الموقع) (*)

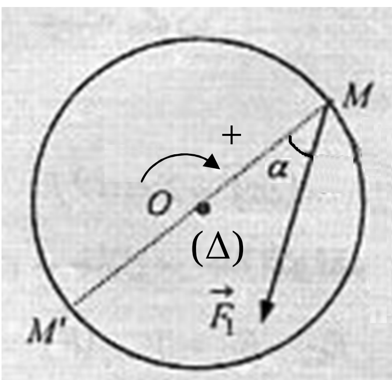


1- قضيب متجانس AB ثقله P = 10 N يمكنه الدوران حول محور أفقي (Δ) . تطبق عند طرفيه A و B قوتان $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ شدتهما : $F_1 = 2\ N$ ، $F_2 = 1,5\ N$ ، و واقعتين في المستوي الشاقولي العمودي على المحور (Δ) .

يعطى : OA = 70 cm ، OB = 30 cm ، OG = 20 cm ، α = 60° .

أ- أحسب مجموع عزوم القوى المطبقة على القضيب .

ب- في أي اتجاه يدور القضيب ؟



2- قرص دائري نصف قطره R = 30 cm ، يستطيع الدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) المار من مركزه في الاتجاه المبين في الشكل .

أ- تؤثر في النقطة (M) من محيط القرص قوة $\vec{F}_1$ شدتها 2N بحيث يصنع حاملها زاوية α = 30° (الشكل) . أحسب عزم هذه القوة بالنسبة لمحور الدوران (Δ) .

ب- حدد جهة القوة $\vec{F}_2$ المماسية لمحيط القرص و التي ينبغي أن تؤثر في النقطة M' نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة (o) حتى يكون القرص في حالة توازن (لا يدور) .

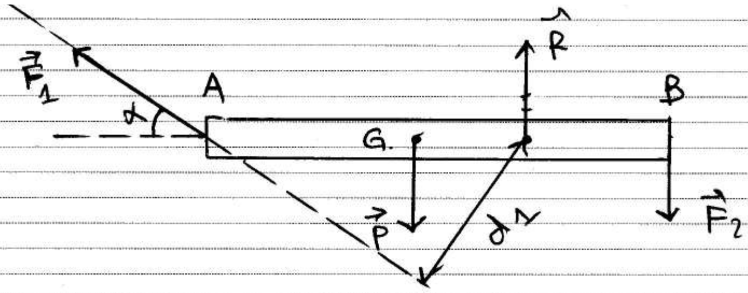
الأجوبة :

1- حساب مجموع عزوم القوى المطبقة :

القوى المطبقة : $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، $\vec{P}$ ، $\vec{R}$.

صفر

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{R})$$



• $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) = F_1 d_1$

من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{d_1}{OA} \rightarrow d_1 = OA.\sin\alpha$$

ومنه :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) = F_1.OA.\sin\alpha = 2\times 0,70.\sin 60^\circ = +1,21\ N.m$$

• $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_2) = F_2\,OB = 1,5\times 0,3 = 0,45\ N.m$

• $\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{P}) = -P.OG = -10\times 0,2 = -2\ N.m$

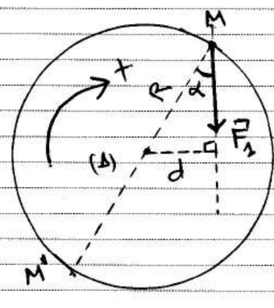
إذن :

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 1,21 + 0,45 - 2 = -0,34$$

2-أ <u>جهة دوران القضيب :</u>

نلاحظ : $\sum \mathcal{M}(\vec{F}) < 0$ ، إذن القضيب يدور في الاتجاه السالب (عكس عقارب الساعة).

ب- <u>عزم القوة $\vec{F}_1$ بالنسبة لمحور الدوران :</u>



$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) = F_1 d$

من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{d}{R} \rightarrow d = R\sin\alpha$$

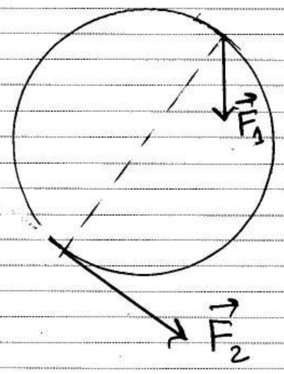
ومنه :

$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) = F_1.R.\sin\alpha$

$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) = 2\times 0,3.\sin 30^\circ = 0,3\ N.m$

4- جهة و شدة القوة $\vec{F_2}$ اللازم تطبيقها في M' حتى يكون القرص في حالة توازن :

- جهة القوة $\vec{F_2}$ تكون في الاتجاه السالب (عكس عقارب الساعة)



الشدة :

شرط توازن الجملة :

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F_1}) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F_2}) = 0$$

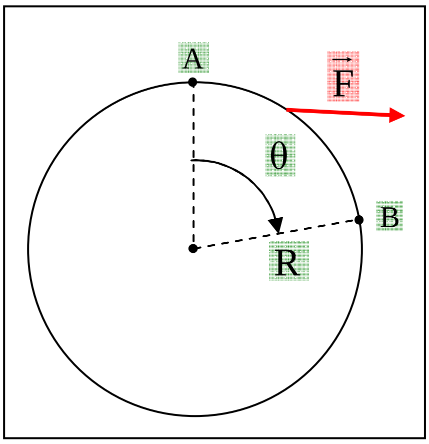
$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F_1}) - F_2 R = 0$$

$$\mathcal{M}(\vec{F_1}) = F_2 R \rightarrow F_2 = \frac{\mathcal{M}(\vec{F_1})}{R}$$

$$F_2 = \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1\ N$$

5- عمل عزم ثابت في مسار دائري

• عبارة عزم ثابت في مسار دائري :



عمل قوة $\vec{F}$ ثابتة أثناء الانتقال على مسار دائري نصف قطره R من موضع A إلى موضع B يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = M_{/\Delta}(\vec{F})\,.\,\theta}$$

حيث : $M_{/\Delta}$ عزم القوة $\vec{F}$ مقدر بالنيوتن في المتر (N.m) ، θ الزاوية الممسوحة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B و التي تقدر بالراديان (rad) .

ملاحظة :
يمكن أيضا تطبيق نفس عبارة العمل السابقة في حالة المزدوجة حيث يعبر عن عمل هذه الأخيرة بالعبارة التالية :

$$\boxed{W = M\,\theta}$$

حيث : W عمل المزدوجة تقدر بالجول (J) ، M عزم المزدوجة تقدر بالنيوتن في المتر $(N.m)$ ، θ الزاوية الممسوحة تقدر بالراديان .

6- الطاقة الحركية الدورانية

• عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية :

الطاقة الحركية الدورانية لجسم صلب يدور حول محور ثابت Δ هو جداء عزم عطالة هذا الجسم بالنسبة لنفس المحور في مربع السرعة الزاوية (السرعة الدروانية) لهذا الجسم :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

• عبارة الطاقة الحركية لجسم صلب في حركة دورانية انسحابية :

إذا كان للجسم الصلب (S) حركة انسحابية و دورانية في آن واحد ، كتدحرج كرة مثلا على مستوي مائل ، تساوي الطاقة الحركية لهذا الجسم ، مجموع طاقتيه الحركية الانسحابية و الدورانية أي :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

ملاحظة :

- الطاقة الحركية لجملة تتكون من عدة أجسام (S_1) ، (S_2) ..... مساوية لمجموع الطاقات الحركية لهذه الأجسام أي :

$$\boxed{E_C = E_C(S_1) + E_C(S_2) + \ldots\ldots}$$

-. الطاقة الحركية لجسم نقطي في حركة دائرية يعطى بالعلاقة :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2}$$

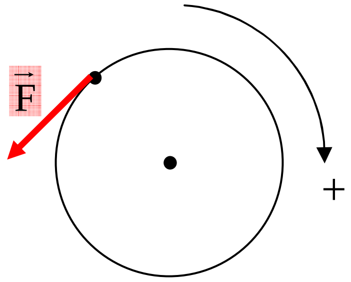
حيث : ω هي السرعة الزاوية ، $v = R\omega$ السرعة الخطية ، R نصف قطر مسار الجسم النقطي .

التمرين (4) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

قرص (D) كتلته $m = 2\ kg$ و نصف قطره $R = 20\ cm$ يدور بمعدل 180 دورة في الدقيقة حول محور Δ مار من مركزه (o) .

1- أوجد السرعة الزاوية للقرص و كذا السرعة الخطية لنقطة من محيطه .

2- نطبق قوة $\vec{F}$ مماسية للقرص و معاكسة لجهة حركته فيتوقف القرص بعد انجازه دورة واحدة .



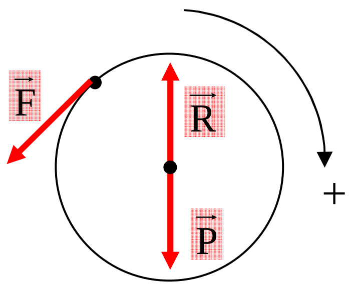
بإهمال احتكاك القرص بمحور الدوران . أوجد شدة القوة $\vec{F}$.

الأجوبة :

1- السرعة الزاوية و الخطية :

- $\omega = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{180 \,.\, 2\pi}{60} = 6\pi\ rad/s$
- $v = R\omega = 0.2 \,.\, 6\pi = 3.77\ m/s$

2- شدة القوة $\vec{F}$:



- الجملة المدروسة : (قرص) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : ثقل القرص $\vec{P}$ ، قوة رد فعل محور الدوران $\vec{R}$ ، القوة المعاكسة للحركة $\vec{F}$.

حيث : $W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = 0$ ، $W_{A\text{-}B}(\vec{R}) = 0$.

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضع (A) الذي طبقت فيه القوة $\vec{F}$ على القرص و الموضع (B) الذي توقف فيه القرص عن الدوران .

$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$

$E_{CA} - \left| W_{A\text{-}B}(\vec{F}) \right| = E_{CB}$

- $E_{CA} = \dfrac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_A{}^2$
- $W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = M_{/\Delta}(\vec{F}).\theta = -F.R.\theta$
- $E_{CB} = 0 \quad (\omega_B = 0)$

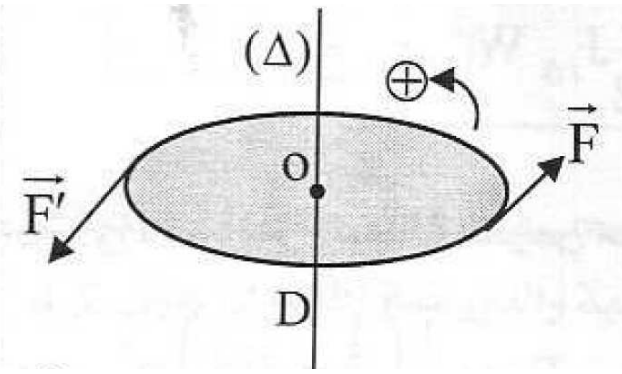
يصبح لدينا :

$$\frac{1}{2} J_{/\Delta}\omega^2 - F.R.\theta = 0 \quad \to \quad \frac{1}{2}(\frac{1}{2} mR^2)\omega^2 = F.R.\theta \quad \to \quad \frac{1}{4} mR^2\omega^2 = F.R.\theta$$

$$\frac{1}{4} mR\omega^2 = F.\theta \quad \to \quad F = \frac{m \,.\, R \,.\omega^2}{4\,\theta} \quad \to \quad F = \frac{2 \,.\, 0.2\,(6\pi)^2}{4 \,.\, 2\pi} = 5.65\ N$$

التمرين (5) : (التمرين : 010 في بنك التمارين على الموقع) (**)

نؤثر على قرص (D) ، نصف قطره R = 20 cm و كتلته m = 314 g بمزدوجة قوى $(\vec{F}, \vec{F}')$ فنجعله يدور حول محور (Δ) يمر من مركزه ابتداء من السكون من موضع نعتبره A إلى موضع نعتبره B ، يمسح عندها القرص 20 دورة .



1- أوجد ما يلي :

أ- عزم مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F})$ بالنسبة للمحور Δ علما أن : F = F' = 10 N .

ب- عمل هذه المزدوجة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B ماسحا الزاوية θ المذكورة .

2- مثل الحصيلة الطاقوية للجملة (قرص) بين A و B .

3- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (قرص) بين A و B أوجد السرعة الزاوية للقرص عند الموضع B .

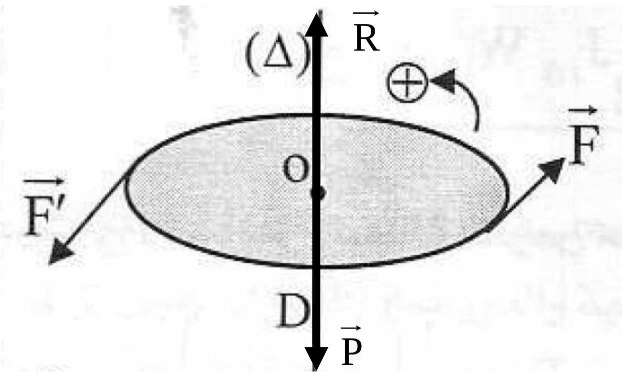
الأجوبة :

1- أ- عزم مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F}')$:

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = F.d = F\,(2R) = 2\,F.R$$
$$M(\vec{F}, \vec{F}') = 10 \,.\, 2 \,.\, 0{,}2 = 4\ N.m$$

- عمل المزدوجة :

$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = M_{/\Delta}(\vec{F}, \vec{F}')$$
$$W_{AB}(\vec{F}, \vec{F}') = 4 \,.\, 20 \,.\, 2\pi = 502{,}4\ J$$

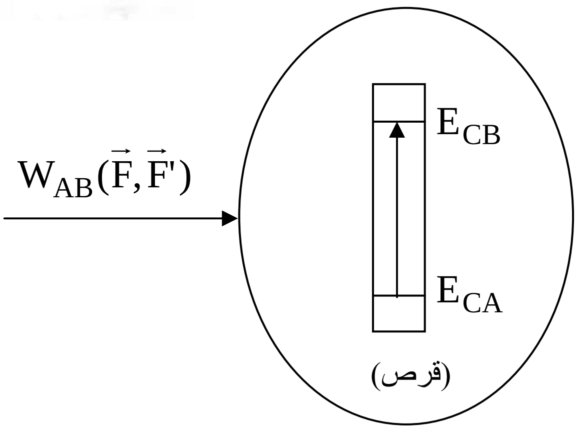


2- الحصيلة الطاقوية للجملة (قرص) بين A و B :

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، مزدوجة القوى $(\vec{F}, \vec{F}')$.

- أشكال الطاقة : حركية E_C متزايدة .



3- السرعة الزاوية عند B :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (قرص) بين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

بالاعتماد على الحصيلة الطاقوية السابقة :

$$E_{CA} + W_{AB}(\vec{F},\vec{F}') = E_{CB}$$

- $E_{CA} = 0 \quad (\omega_A = 0)$
- $E_{CB} = \frac{1}{2}J\omega_B^2$

يصبح لدينا :

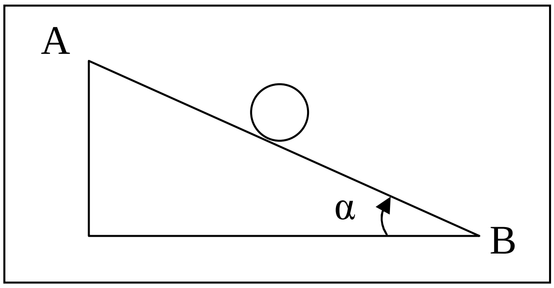
$$W_{AB}(\vec{F},\vec{F}') = \frac{1}{2}J\omega_B^2 \quad \rightarrow \quad W_{AB}(\vec{F},\vec{F}') = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\omega_B^2$$

$$W_{AB}(\vec{F},\vec{F}') = \frac{1}{4}mR^2\omega_B^2 \quad \rightarrow \quad \omega_B = \sqrt{\frac{4\,W_{AB}(\vec{F},\vec{F}')}{5.R^2}}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{4.502,4}{0,314.(0,2)^2}} = 400\ \text{rad/s}$$

التمرين (6) : (التمرين : 007 في بنك التمارين على الموقع) (*)

من نقطة A أعلى مستوي مائل طوله AB = 5.04 m و يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ ، نترك بدون سرعة ابتدائية كرة كتلتها m = 400 g و نصف قطرها R = 20 cm تتدحرج دون احتكاك باتجاه نقطة B أسفل المستوي المائل .



1- أحسب عزم عطالة الكرة بالنسبة لمحور دورانها .

2- أكتب بدلالة v ، m ، عبارة الطاقة الحركية للكرة .

3- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة ، أوجد سرعة مركز الكرة عن الموضع B .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- عزم عطالة الكرة بالنسبة لمحور دورانها :

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{2}{5}.0.4\,(0.2)^2 = 6.4.10^{-3}\ Kg.m^2$$

2- عبارة الطاقة الحركية للكرة بدلالة v ، m :

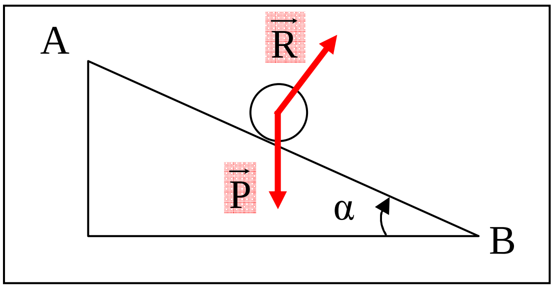
تدحرج الكرة هو حركة انسحابية دورانية لذا يكون :

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}J_{/\Delta}\omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}mR^2)(\frac{v}{R})^2 \quad \rightarrow E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{5}(mR^2)\frac{v^2}{R^2}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{5}mv^2 \quad \rightarrow E_C = \frac{5\,mv^2 + 2mv^2}{10} \rightarrow \ E_C = \frac{7}{10}m\,v^2$$

3- سرعة مركز الكرة عن الموضع B :



- الجملة المدروسة : (كرة) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، حيث : $W_{A\text{-}B}(\vec{R}) = 0$ لأن $\vec{R} \perp \vec{AB}$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B .

$E_A + E_{مكتسبة} - E_{مقدمة} = E_B$

$$E_{CA} + W_{A\text{-}B}(\vec{P}) + W_{A\text{-}B}(\vec{R}) = E_{CB}$$

- $E_{CA} = 0$
- $W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = mgh$

من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \ \rightarrow\ h = AB\sin\alpha$$

و منه تصبح عبارة عمل الثقل :

$$W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = m.g.AB.\sin\alpha$$

- $E_{CB} = \frac{7}{10}mv_B{}^2$

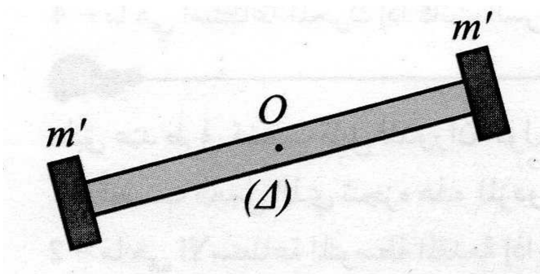
يصبح لدينا :

$$m.g.AB.\sin\alpha = \frac{7}{10}mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10.g.AB.\sin\alpha}{7}}$$

$$v = \sqrt{\frac{10.10.5,04.\sin 30}{7}} = 6\ m/s$$

5- تمارين متنوعة

التمرين (7) : (التمرين : 014 في بنك التمارين على الموقع) (**)



تتشكل الجملة المبينة في الشكل المقابل من قضيب (B) ، كتلته $m = 200\ g$ ، طوله $L = 50\ cm$ و قابل للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من مركزه . يثبت بطرفي القضيب جسمان نقطيان متماثلان (S_1) ، (S_2) كتلة كل منهما $m' = 150\ g$.

1- نُدير الجملة حول المحور (Δ) بمعدل 100 دورة في الدقيقة لمدة 2 min . جِد :

أ- السرعة الزاوية للجملة ω_0 .

ب- الزاوية الممسوحة θ أثناء هذه الحركة و كذا عدد الدورات المنجزة n .

جـ- عزم عطالة الجملة $J_{/\Delta}$ بالنسبة لمحور الدوران (Δ) .

د- الطاقة الحركية للجملة E_{C0} .

2- بعد مدة 2 min من حركة الجملة ، نتركها لحالها فتتباطأ نتيجة قوى الاحتكاك التي تعيقها ، فتتوقف خلال مدة 10 min ، نرمز لعمل قوة الاحتكاك بـ W_f .

أ- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة أثناء تباطئها حتى توقفها .

ب- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة $(S_2 + S_1 + B)$ بين لحظة بداية تباطأ حركة الجملة حتى لحظة توقفها ، أحسب عمل الاحتكاك أثناء هذا الانتقال الذي نعتبره ثابتا .

جـ- أحسب الاستطاعة المحولة من الجملة إلى الوسط الخارجي بفعل الاحتكاك .

3- يتوقف القضيب بعد أن يكون قد أنجز 500 دورة ، أحسب عزم قوى الاحتكاك M_f باعتباره ثابتا .

الأجوبة :

1- أ- السرعة الزاوية للجملة :

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\Delta t}$$

$$\omega_0 = \frac{100 \times 2\pi}{60} = 10,47\ rad/s$$

ب- الزاوية الممسوحة θ و

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\Delta t} \rightarrow \theta = \omega_0 \Delta t$$

$$\theta = 10,47 \times 2 \times 60 = 1256,4\ rad$$

- عدد الدورات المنجزة n

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1256,4}{2\pi} \approx 200\ tr$$

جـ- عزم عطالة الجملة :

الجملة تتكون من القضيب (B) والجسمان النقطيان المتماثلان (S_1) ، (S_2) لذا يكون :

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta}(B) + J_{/\Delta}(S_1) + J_{/\Delta}(S_2)$$

- القضيب يدور حول محوره ومنه :

$$J_{/\Delta}(B) = \frac{1}{12} mL^2$$

- الجسمان النقطيان يبعدان عن محور الدوران بمقدار $\frac{L}{2}$ ومنه :

$$J_{/\Delta}(S_1) = J_{/\Delta}(S_2) = m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

إذن :

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m'\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m'\frac{L^2}{4} + m'\frac{L^2}{4}$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{1}{4} m'L^2 + \frac{1}{4} m'L^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{2}{4} mL^2$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} \cdot 0{,}2(0{,}5) + \frac{1}{2}(0{,}15)(0{,}5)^2 = 2{,}29 \cdot 10^{-2}\ Kg.m^2$$

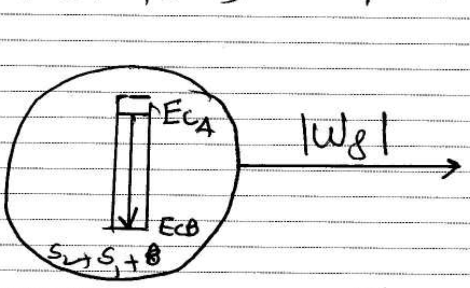
د- الطاقة الحركية للجملة :

$$E_{c} = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_0^2$$

$$E_{c0} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}29 \cdot 10^{-2} (10{,}47)^2 = 1{,}26 J$$

جـ - 1- مخطط الحصيلة الطاقوية :

تتباطأ حركة الجملة (S_2+S_1+B) نتيجة وجود الاحتكاك لذلك يكون :



ب- عمل قوى الاحتكاك :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (S_2+S_1+B) بين لحظة بداية التباطؤ (الوضع A) و لحظة التوقف (الوضع B)

$$E_A + E_{مكتسبة} - E_{مفقودة} = E_B$$

$E_{cA} - |W_f| = \cancel{E_{cB}}^{0} \rightarrow |W_f| = E_{c0} = 1,26\,J$

وكون أن الاحتكاك معيق للحركة يكون $W_f < 0$ ومنه

$W_f = -1,26\,J$

حـ- الاستطاعة المحولة بفعل الاحتكاك:

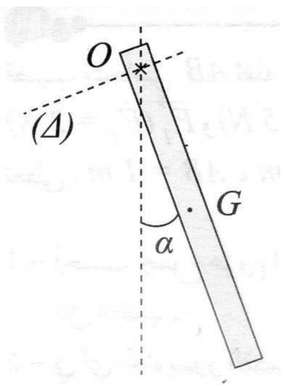
$P = \frac{|W_f|}{\Delta t} = \frac{|-1,26|}{10\times 60} = 2,1.10^{-3}\,W$

3- عزم قوة الاحتكاك:

$W_f = \mathcal{M}_{\Delta F}\,\theta \rightarrow \mathcal{M}_{\Delta F} = \frac{W_f}{\theta}$

$\mathcal{M}_{\Delta F} = \frac{-1,26}{500\times 2\pi} \approx -4.10^{-4}\,N.m$

التمرين (8) : (التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع) (**)



مسطرة مسطحة متجانسة يمكنها الدوران بدون إحتكاك في مستوي شاقولي حول محور أفقي (Δ) يمر من الطرف (o) للمسطرة . طول المسطرة L = 50 cm و كتلتها m .

1- أوجد عبارة عزم عطالة المسطرة بالنسبة للمحور (Δ) .

2- تزاح المسطرة عن وضع توازنها بزاوية α = 30° ثم تترك لحالها بدون سرعة ابتدائية .

أ- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة مسطرة بين لحظة تركها (الوضع A) و لحظة مرورها بوضع التوازن (الوضع B) .

ب- أحسب سرعتها الزاوية عند مرورها بوضع التوازن .

يعطى : $g = 9,8\ s/m^2$.

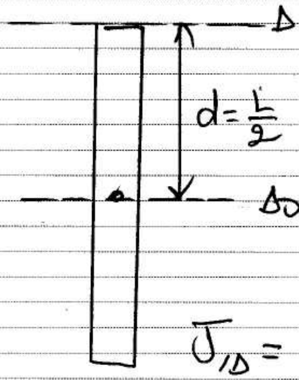
3- تواصل المسطرة حركتها في نصف المستوي المقابل بعد مرورها بوضع التوازن . جِد أكبر زاوية β تشكلها المسطرة مع الشاقول في هذه الحالة ؟

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- عبارة عزم عطالة المسطرة بالنسبة للمحور (Δ):

تطبيق نظرية هويجنز:



$J_{/\Delta} = J_{/\Delta_0} + md^2$

d هو بعد محور المسطرة Δ_0 المار من منتصفها ومحور الدوران (Δ) وبالتالي

يكون: $d = \frac{L}{2}$

إذن:

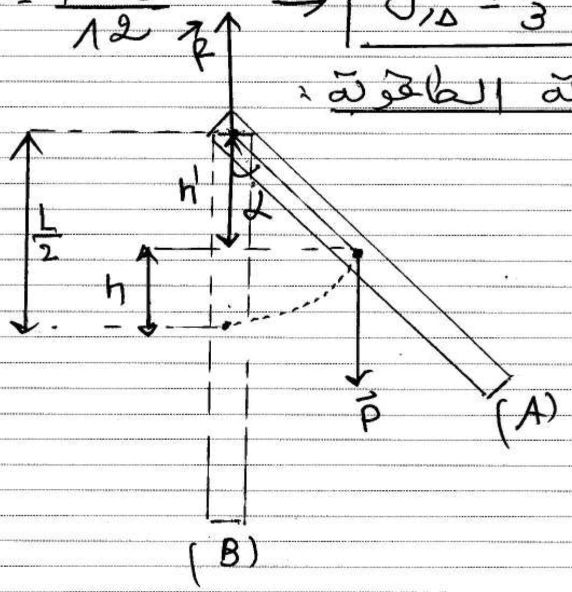
$J_{/\Delta} = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{12} mL^2 + m\frac{L^2}{4}$$

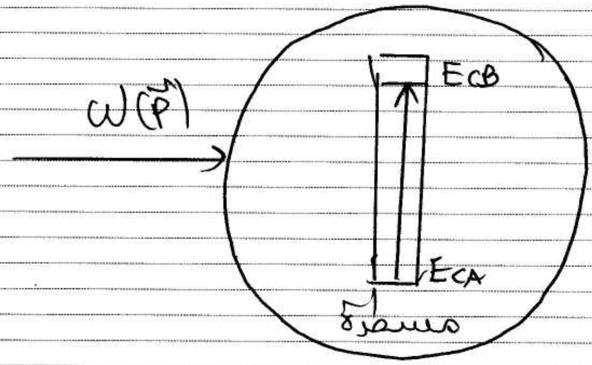
$$J_{/\Delta} = \frac{mL^2 + 3mL^2}{12}$$

$$J_{/\Delta} = \frac{4mL^2}{12} \rightarrow \boxed{J_{/\Delta} = \frac{1}{3} mL^2}$$

جـ- مخطط الحصيلة الطاقوية :



- الجملة المدروسة : مسطرة
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{P}$ ، R



ب- السرعة الزاوية للمسطرة عند مرورها بوضع التوازن :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة مسطرة بين الوضعين (A) و (B) :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$\cancel{E_{CA}} + W_{A\to B}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$mgh = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_B^2$$

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cancel{m}L^2\right)\omega_B^2$$

$$gh = \frac{1}{6}L^2\omega_B^2$$

$$6gh = L^2\omega_B^2$$

من الشكل:

$$\begin{cases} h = \frac{L}{2} - h' \\ \cos\alpha = \frac{h'}{\frac{L}{2}} \rightarrow h' = \frac{L}{2}\cos\alpha \end{cases}$$

ومنه

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\alpha = \frac{L}{2}(1-\cos\alpha)$$

يصبح لدينا:

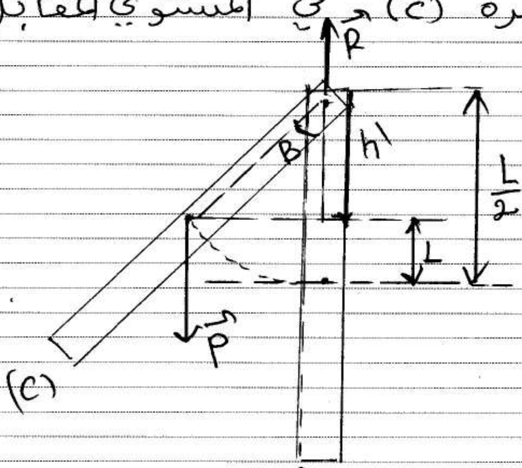
$$6g\cdot\frac{L}{2}(1-\cos\alpha) = L^2\omega_B^2$$

$$3g(1-\cos\alpha) = L\omega_B^2 \rightarrow \omega_B = \sqrt{\frac{3g(1-\cos30°)}{0,5}}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{3\times9,8(1-\cos30°)}{0,5}} = 2,81 \text{ rad/s}$$

3- أكبر زاوية B تشكلها المسطرة:

تشكل المسطرة أكبر زاوية لها عند انعدام سرعتها الزاوية في وضع نعتبره (C) في المستوي المقابل بعد مرورها بوضع التوازن:



- الجملة المدروسة: مسطرة
- مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية: $\vec{R}$ ، $\vec{P}$
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضعين B و C :

$$E_B + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_C$$

$$E_{cB} - |W(\vec{P})| = \cancel{E_{cc}}$$

$$\frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_B^2 - |-mgh| = 0$$

$$\frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_B^2 - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} J_{/\Delta} \omega_B^2 = mgh$$

من الشكل :

$$h = \frac{L}{2} - h'$$

$$\cos B = \frac{h'}{\frac{L}{2}} \rightarrow h' = \frac{L}{2}\cos B$$

ومنه

$$h = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos B$$

يصبح :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega_B^2 = mg\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos B\right)$$

$$\frac{1}{6}\cancel{m}L^2\omega_B^2 = \cancel{m}g\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos B\right)$$

$$\frac{1}{6}L^2\omega_B^2 = g\frac{L}{2} - g\frac{L}{2}\cos B$$

$$\frac{2}{6}L^2\omega_B^2 = gL - gL\cos B$$

$$\frac{1}{3}L^2\omega_B^2 = g - g\cos B$$

$$gL\cos B = g - \frac{1}{3}L\omega_B^2$$

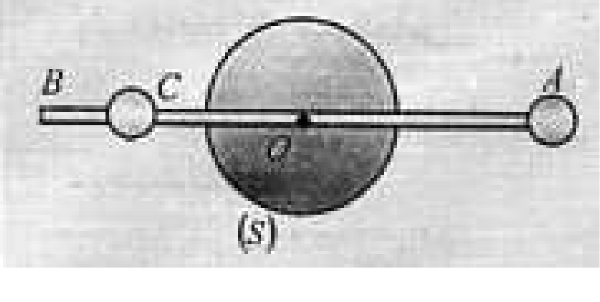
$$\cos B = \sqrt{\frac{g - \frac{1}{3}L\omega_B^2}{g}}$$

$$\cos B = \sqrt{\frac{9{,}8 - \frac{1}{3}\times 0{,}5\,(2{,}81)^2}{9{,}8}}$$

$$\cos B = 0{,}87 \longrightarrow \alpha = 30°$$

التمرين (9) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (**)

قرص متجانس (S) كتلته $m = 100\ g$ و نصف قطره $r = 10\ cm$ ، يمكنه الدوران في مستوي شاقولي حول محور أفقي مار من منصفه (o) ، يثبت على امتداد أحد أقطاره ساق AB مهملة الكتلة طولها $AB = L = 40\ cm$ بحيث ينطبق مركزها على مركز القرص و هي تحمل بنهايتها (A) كتلة نقطية $m_1 = 40\ g$ و تثبت كتلة أخرى m_2 قيمتها $m_2 = 80\ g$ بنقطة أخرى (C) من الساق بحيث تبقى الجملة متوازنة أفقيا .



1- أوجد موضع الكتلة m_2 من الساق .

2- نفصل الكتلة m_2 عن الساق و هي في وضع أفقي و من دون سرعة ابتدائية .

أ- ماذا يحدث للجملة المتبقية ؟

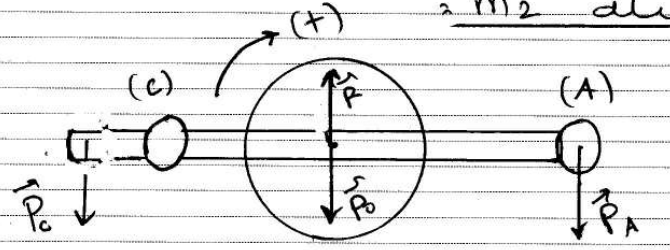
ب- أحسب عمل قوة ثقل الكتلة m_1 أثناء الانتقال من الوضع الأفقي للساق إلى الوضع الشاقولي .

جـ- أحسب الطاقة الحركية للجملة (قرص S + كتلة m_1) عند المرور بوضع التوازن و كذلك السرعة الزاوية .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- موضع الكتلة m_2 :



شرط توازن الجملة :

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec F) = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec P_A) + \mathcal{M}(\vec P_c) + \cancel{\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec P_0)}^{\,0} + \cancel{\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec R)}^{\,0}$$

$$P_A . OA - P_c . OC = 0$$

$$m_A g.OA - m_c g.OC = 0$$

$$m_A \cancel{g}.OA = m_c \cancel{g}.OC$$

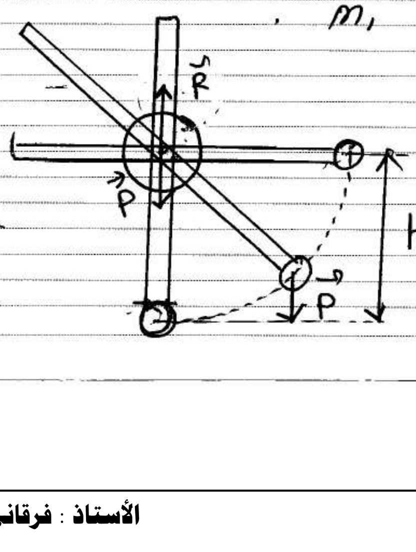
$$m_A . OA = m_c . OC$$

$$m_A . \ell = m_2\, OC \longrightarrow OC = \frac{m_1 . g . \ell}{m_2}$$

$$OC = \frac{0{,}04 \times 10 \times 0{,}02}{0{,}08} = 0{,}1\ m = 10\ cm .$$

2- أ- عندما تنفصل الكتلة m_2 عن الساق AB يختل توازن الجملة المتبقية وتخضع لعزم ثقل الكتلة m_1 مايجعلها تدور في جهة نزول الكتلة m_1 .

ب- عمل ثقل الكتلة m_1 :



$$W_{1-2}(\vec P) = m_1 g h$$

من الشكل $h = \frac{L}{2}$ وعليه

$$W(\vec P) = m_1 g \frac{L}{2} = 0{,}04 \times 10 \times 0{,}02 = 8.10^{-3}\ J$$

جـ- الطاقة الحركية للجملة عند المرور بوضع التوازن :

- الجملة المدروسة : (قرص s + كتلة m)

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي

- القوى الخارجية: $\vec{R}$ ، $\vec{P_0}$ ، $\vec{P_1}$.

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضع (1) أين تكون الساق أفقية والوضع (2) أين تكون الساق شاقولية .

$$E_1 + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_2$$

$$E_{c1} + W(\vec{P}) = E_{c2}$$

$$E_{c2} = W(\vec{P}) = 8.10^{-3} J$$

وهي الطاقة الحركية للجملة (قرص + كتلة m_2) عند المرور بوضع التوازن .

د- السرعة الزاوية للجملة عند المرور بوضع التوازن :

الطاقة الحركية للجملة (قرص + كتلة m_1) مساوية لمجموع الطاقتين الحركيتين للقرص (s) والكتلة m_2 أي :

$$E_{c2} = E_c(s) + E_c(m_2)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} J_{(s)} \omega^2 + \frac{1}{2} J_{(m_1)}$$

$$\bullet J_{(s)} = \frac{1}{2} m_s r^2$$

$$\bullet J_{(m_1)} = m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

يصبح :

$$E_{c2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_s r^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \omega^2$$

$$E_{c2} = \frac{1}{4} m_s r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{L^2}{4} \omega^2$$

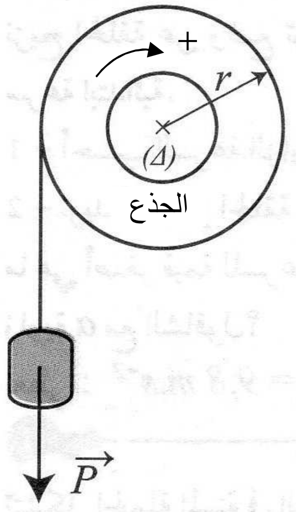
$$E_{c2} = \frac{1}{4} m_s r^2 \omega^2 + \frac{1}{8} m_1 L^2 \omega^2$$

$$E_{c2} = \left(\frac{1}{4} m_s r^2 + \frac{1}{8} m_1 L^2\right) \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E_{c2}}{\frac{1}{4} m_s r^2 + \frac{1}{8} m_1 L^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{8.10^{-3}}{0,25 \times 0,1 (0,1)^2 + 0,125 \cdot 0,04 (0,4)^2}} = 2,76 \ rad/s$$

التمرين (10) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (**)

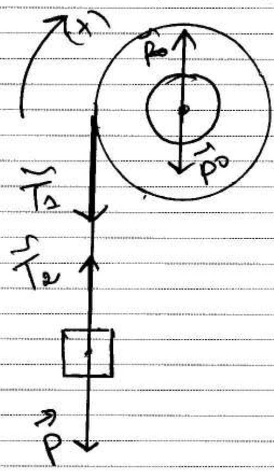


يدار ملفاف بواسطة جذع محرك يطبق على المحور (Δ) مزدوجة عزمها M_Δ . يلتف حول الأسطوانة حبل يستعمل في رفع جسم (S) ثقله 2000 N بسرعة ثابتة ، نصف قطر اسطوانة الملفاف R = 30 cm .

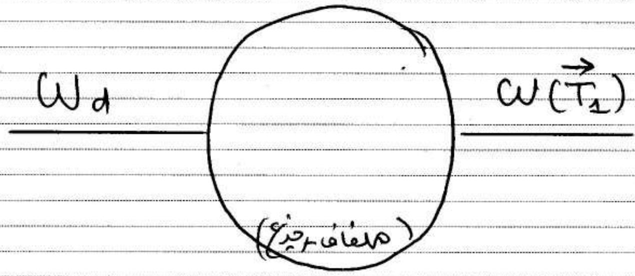
1- مثل مخطط الحصيلة الطاقوية للجملة (ملفاف + جذع) أثناء رفع الحمولة .
2- أحسب عزم المزدوجة المحركة .
3- أحسب عمل المزدوجة المحركة عندما يدور الملفاف 25 دورة .
4- ما هو الارتفاع الذي يصعده الجسم (S) من أجل 25 دورة . أحسب عمل ثقل الجسم (S) أثناء هذا الانتقال .
5- ما هي استطاعة المحرك إذا كانت السرعة الزاوية لدوران إذا كان الملفاف يدور بمعدل 1 دورة في الدقيقة .

الأجوبة :

1- مخطط الحصيلة الطاقوية :



- الجملة المدروسة : (ملفاف + جذع)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي ،
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{P_0}$ ، $\vec{R}$ ، $\vec{T_1}$



2- عزم المزدوجة المحركة:

حركة الجملة دورانية منتظمة لذا يكون:

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta} + \mathcal{M}(\vec{T_1}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta} - T_1 r = 0 \quad --- (1)$$

حركة الجسم (S) مستقيمة منتظمة لذا يكون:

$$T_2 = P$$

وكون أن $T_2 = T_1$ نكتب:

$$T_1 = P \quad ---- (2)$$

- بتعويض (2) في (1):

$$\mathcal{M}_{/\Delta} - Pr = 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{/\Delta} = P.r$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta} = 2000 \times 0,3 = 600\ N.m$$

3- عمل المزدوجة:

بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (ملفاف + جزع) بين لحظتين t_1 ، t_2 وبالاعتماد على مخطط الحصيلة الطاقوية:

$$W_d - |W(\vec{T_1})| = 0$$

$$W_d - |\mathcal{M}(T_1).\theta| = 0$$

$$W_d - |-T_1.d.\theta| = 0$$

$$W_d - T_1.d.\theta = 0$$

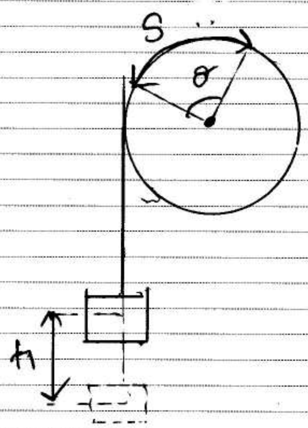
$$W_d = T_1.d.\theta$$

لدينا سابقا: $T_1 = P$ ومنه:

$$W_d = P.d.\theta$$

$$W_d = 2000 \times 0,3 \times 2,5 \times 2\pi = 9,42.10^3\ J$$

4- الارتفاع الذي يصعده الجسم ؟



عندما يدور الملفاف زاوية θ تقطع نقطة من محيط الاسطوانة مسافة خطية قدرها $S = R\theta$ وهي نفس الارتفاع الذي يصعده الجسم أي :

$$h = S = R\theta$$

$$h = 0{,}3 \times 2{,}5\pi = 4{,}71 \text{ m}.$$

- عمل ثقل الحمولة ؟

$$W(\vec{P}) = -Ph = -2000 \times 4{,}71 = -9{,}42 \cdot 10^{3} \text{ J}$$

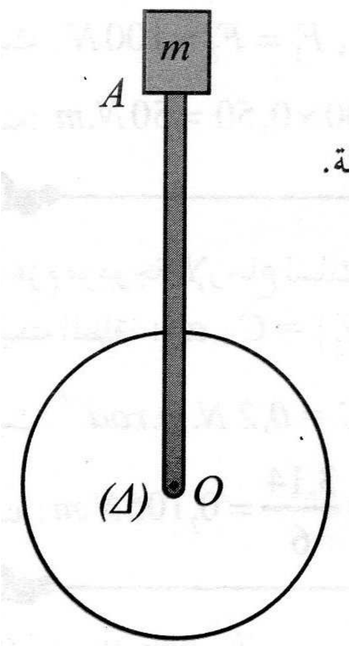
5- استطاعة المحرك ؟

$$P = \frac{\text{عمل مزدوجة المحرك}}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\mathcal{M}_{/\Delta} \times \theta}{\Delta t} = \mathcal{M}_{/\Delta} \cdot \frac{\theta}{\Delta t} \rightarrow P = \mathcal{M}_{/\Delta}\, \omega$$

$$P = 600 \times \frac{2\pi}{1} = 3769 \text{ W}$$

التمرين (11) : (التمرين : 022 في بنك التمارين على الموقع) (**)



تتشكل الجملة المبينة في الشكل المقابل من أسطوانة (C) متجانسة كتلتها $M = 50$ kg و نصف قطرها $R = 20$ cm و هي قابلة للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من مركزها (o) تلتحم مع الأسطوانة ساق OA كتلتها مهملة و طولها $L = 60$ cm و قد ثبت عند طرفها A جسم (S) نعتبره نقطي كتلته $m = 5$ kg .

توجد الساق في وضع شاقولي و من فوق محور الدوران (Δ) ، تترك الجملة (الساق + الأسطوانة) لحالها بدون سرعة ابتدائية .

1- بإهمال الاحتكاكات ، أحسب السرعة الخطية الأعظمية التي تبلغها الحمولة .

2- في الحقيقة ، السرعة الأعظمية للحمولة هي 3 m/s .

أ- أحسب عمل قوى الاحتكاك .

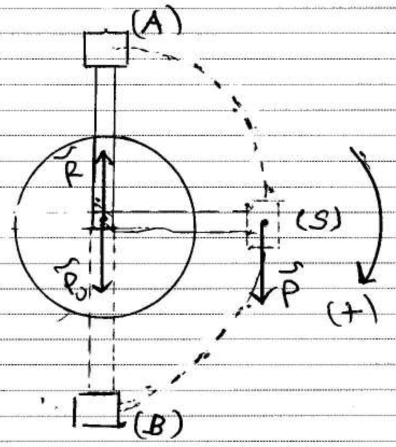
ب- إذا افترضنا أن عزم القوى ثابت ، أحسب قيمته .

يعطى :

عزم عطالة الأسطوانة بالنسبة لمحورها : $J_{/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$. ، $g = 10 \text{ m/s}^2$.

الأجوبة :

1- السرعة الخطية الأعظمية التي يبلغها الجسم :



- يبلغ الجسم النقطي (S) سرعته الأعظمية عند مروره بوضع التوازن أين تكون الساق شاقولية (الشكل)
- الجملة المدروسة : (اسطوانة + جسم)
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : $\vec{P}$ ، $\vec{P_0}$ ، $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الوضعين (A) و (B) :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$\cancel{E_{cA}}^{\text{صفر}} + W(\vec{P}) = E_{cB}$$

$$mgh = \frac{1}{2} J_{/\Delta}\omega^2$$

$$2mgh = J_{/\Delta}\omega^2$$

من الشكل : $h = 2L$ ومنه

$$2mg(2L) = J_{/\Delta}\omega^2$$

$$4mgL = J_{/\Delta}\omega^2$$

- الجسم النقطي (S) والاسطوانة لهما نفس السرعة الزاوية لذا نعبر عن سرعة الجسم النقطي الخطية كما يلي :

$$v = L\omega^2 \rightarrow \omega = \frac{v}{L}$$

- لدينا أيضا :

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta}(C) + J_{/\Delta}(S)$$

$$J_{/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 + mL^2$$

يصبح لدينا :

$$4mgL = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2\right)\frac{v^2}{L^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgL^3}{\frac{1}{2}MR^2 + mL^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4\times5\times10(0{,}6)^3}{\frac{1}{2}\cdot50(0{,}2)^2 + 5(0{,}6)^2}} = 3{,}93\ m/s$$

2 - أ - عمل قوى الاحتكاك :

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (اسطوانة + جسم) ، بين الوضعين (A) و (B) وبنفس الطريقة السابقة مع أخذ قوى الاحتكاك بعين الاعتبار ،

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$\cancel{E_{CA}}^{0} + W(\vec{P}) - |W_{A-B}(\vec{f})| = E_{CB}$$

$$mgh - |W_{A-B}(\vec{f})| = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$mg(2L) - |W_{A-B}(\vec{f})| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2\right)\frac{v^2}{L^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 2mgL - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + mL^2\right)\frac{v^2}{L^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 2\times5\times10(0{,}6) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot50(0{,}2)^2 + 5(0{,}6)^2\right)\frac{3^2}{(0{,}6)^2}$$

$$|W_{A-B}(\vec{f})| = 25\ J$$

وكون أن قوى الاحتكاك معيقة يكون : $W_{A-B}(\vec{f}) < 0$ ومنه

$$W_{A-B}(\vec{f}) = -25\ J$$

ب - عزم قوى الاحتكاك :

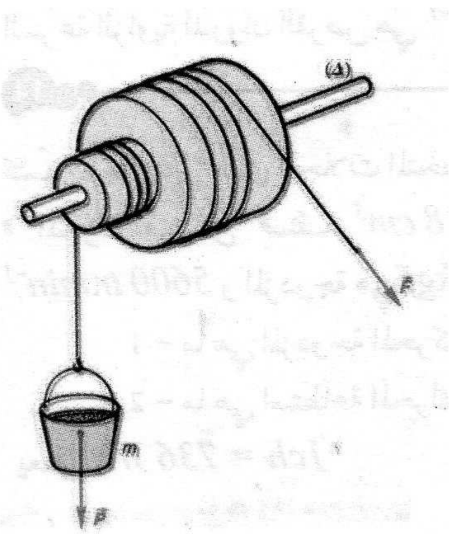
$$W_{A-B}(\vec{f}) = \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F})\,\theta \rightarrow \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = \frac{W(\vec{f})}{\theta}$$

أثناء انتقال الجملة (قرص + جسم) من الوضع A إلى الوضع B تكون قد مسحت زاوية قدرها $\theta = \pi$ ،

اذن :

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{f}) = \frac{-25}{\pi} = 7{,}96\ N.m$$

التمرين (12) : (التمرين : 017 في بنك التمارين على الموقع) (**)



يتشكل ملفاف من أسطوانتين (C_1) ، (C_2) لهما نفس محور الدوران (Δ) ، نصفي قطريهما على التوالي :

$$R_2 = 10\ cm \ ، \ R_1 = 20\ cm$$

يلتف حول الأسطوانتين خيطان كما مبين في الشكل التالي :

يستعمل هذا الملفاف في رفع حمولة كتلتها $m = 40\ kg$ ، نفترض أن رفع الحمولة يتم بسرعة ثابتة .

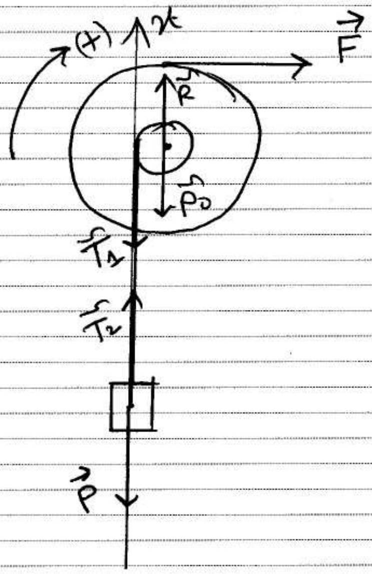
1- أحسب شدة القوة $\vec{F}$ التي يجب تطبيقها على طرف الخيط لرفع الحمولة .

2- حدد زاوية دوران الملفاف عندما ترتفع الحمولة ارتفاعا قدره $10\ m$ ثم أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عندئذ .

يعطى : $g = 10\ m/s^2$

الأجوبة :

1- شدة القوة $\vec{F}$ التي يجب تطبيقها على طرف الخيط



- نشترط توازن الجملة (ملفاف)

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}) + \mathcal{M}(\vec{T_2}) = 0$$

$$F R_1 - T_1 R_2 = 0 \quad ----(1)$$

- يتم رفعها بسرعة ثابتة وبالتالي وحسب مبدأ العطالة يكون :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

بالإسقاط على المحور ox الموجه نحو الأعلى (في جهة الدوران)

$$-P + T_2 = 0$$

$$-mg + T_2 = 0 \quad ------(2)$$

من (2) : $T_2 = mg$ و حيث أن $T_2 = T$ يكون :

$$T_1 = mg$$

بالتعويض في (1) :

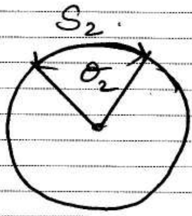
$$FR_1 - mgR_2 = 0$$

$$FR_1 = mgR_2 \longrightarrow F = \frac{mgR_2}{R_1}$$

$$F = \frac{40 \times 10 \times 0{,}1}{0{,}2} = 200N$$

جـ- زاوية دوران المحفاف :

عندما ترفع الحمولة ارتفاع قدره 10m تكون نقطة من محيط الاسطوانة (C_2) قطعت نفس المسافة الخطية (S_2) أي :



$$S_2 = 10m$$

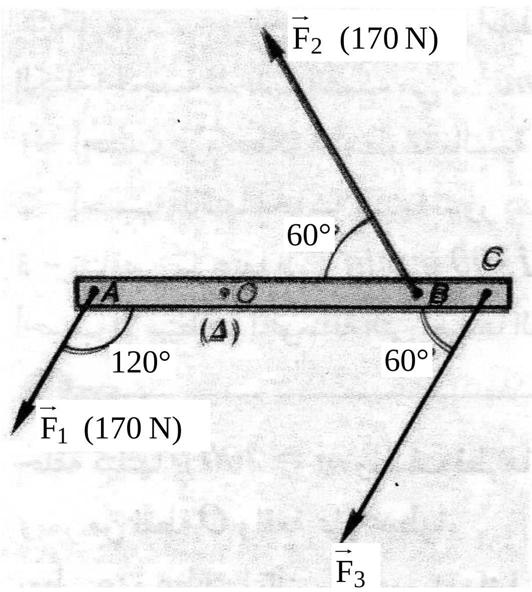
ولدينا :

$$S_2 = R_2\theta \rightarrow \theta = \frac{S_2}{R_2}$$

$$\theta = \frac{10}{0{,}1} = 100 \text{ rad}$$

وهي نفسها زاوية دوران المحفاف .

التمرين (13) : (التمرين : 019 في بنك التمارين على الموقع) (**)



مسطرة مهملة الكتلة و قابلة للدوران حول محور أفقي (Δ) يمر من النقطة (o) .

نجعل هذه المسطرة في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى واقعة في المستوي العمودي على المحور (Δ) .

يعطى : $OA = 20$ cm ، $OB = 30$ cm ، $OC = 40$ cm .

1- أحسب عزم القوة $\vec{F}_3$.

2- عين مميزات قوة رد الفعل $\vec{R}$ للمحور (Δ) على المسطرة .

الأجوبة :

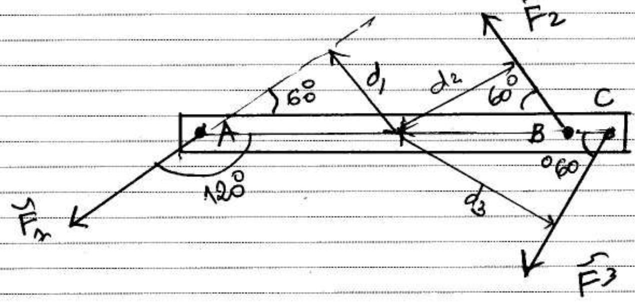
1- عزم القوة $\vec{F}_3$:

نشرط توازن الحملة :

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_3) = 0$$

نختار اتجاه عقارب الساعة اتجاها موجبا للحركة الدورانية .



اعتمادا على الشكل :

$$-F_1 . OA \sin 60° - F_2 . OB . \sin 60° + \mathcal{M}_{/\Delta}(F_3) = 0$$

$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_3) = F_1 . OA . \sin 60° + F_2 . OB . \sin 60°$$

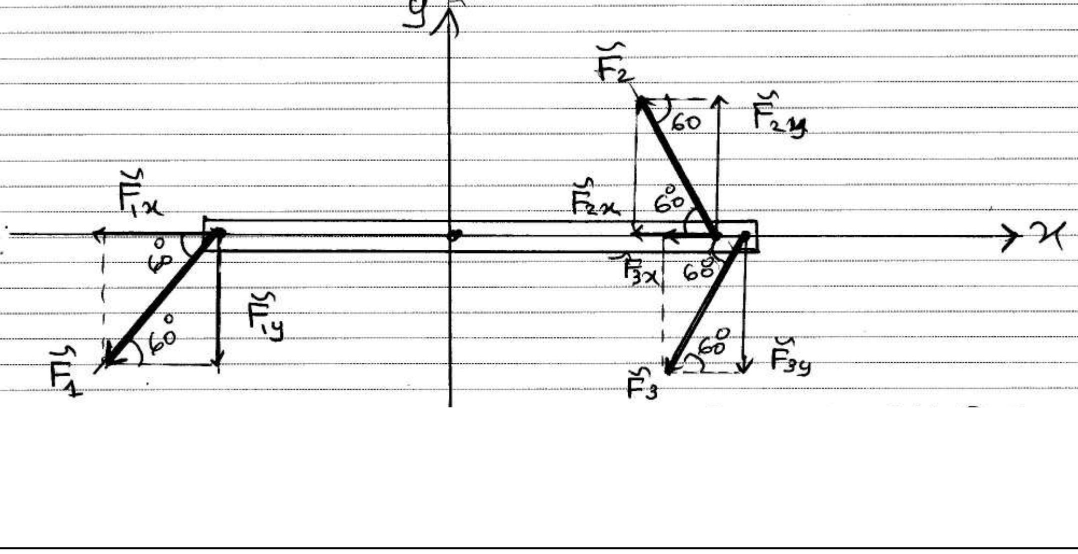
$$\mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_3) = (170 . 0,2 . \sin 60) + (300 . 0,3 . \sin 60°) = 107,39 \ N.m$$

شدة القوة $\vec{F}_3$:

$$\mathcal{M}(\vec{F}_3) = F_3 . OC . \sin 60° \rightarrow F_3 = \frac{\mathcal{M}(\vec{F}_3)}{OC . \sin 60°}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{107,39}{0,4 . \sin 60°} \approx 310 \ N$$

2- مميزات قوة رد الفعل :



نشرط توازن الجملة :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{R} = \vec{0}$$

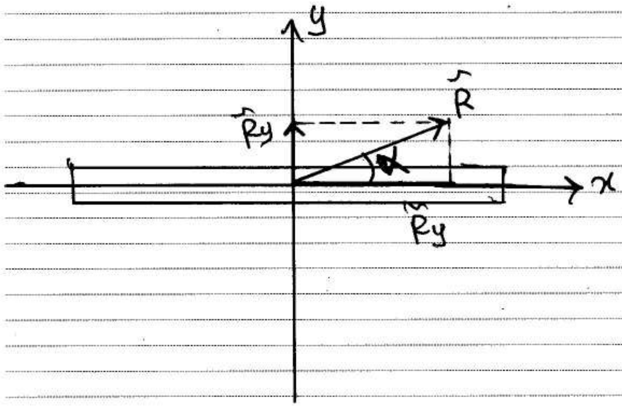
بالإسقاط على المحورين ox ، oy :

$$\begin{cases} -F_1 \cos 60° - F_2 \cos 60° - F_3 \cos 60° + R_x = 0 \\ -F_1 \sin 60° + F_2 \sin 60° - F_3 \sin 60° + R_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = +F_1 \cos 60° + F_2 \cos 60° + F_3 \cos 60° \\ R_y = F_1 \sin 60° - F_2 \sin 60° + F_3 \sin 60° \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = (+F_1 + F_2 + F_3) \cos 60° \\ R_y = (+F_1 - F_2 + F_3) \sin 60° \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = (+170 + 300 + 310) \cos 60 = 390\ N \\ R_y = (+170 - 300 + 310) \sin 60 = 150{,}88\ N \end{cases}$$



إذن مميزات قوة رد الفعل هي

- نقطة التأثير : مركز الدوران

- المنحنى : يصنع الزاوية α مع المحور ox حيث :

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{150{,}88}{390} = 0{,}39 \rightarrow \alpha = 21°$$

الشدة :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(390)^2 + (150{,}88)^2} = 418{,}16\ N$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr