www.science-collector.com/vb

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

كتاب الأستاذ

المؤلفون:

محمد فاتح مراد	**مفتش التربية و التكوين**
جمال تاوريرت	**مفتش التربية والتكوين**
محمد قورين	**مفتش التربية والتكوين**
عبد الحفيظ فلاح	**أستاذ التعليم الثانوي**
عبد المؤمن موس	**أستاذ التعليم الثانوي**
غريسي بلجيلالي	**أستاذ التعليم الثانوي**

كتاب الأستاذ

الشعب: • رياضيات
• تقني رياضي
• علوم تجريبية

الجزء الأول

الباب الأول

النهايات و الاستمرارية

الأنشطة

النشاط الأول
تصحيح:/
الهدف: مقاربة مفهوم نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهاية منتهية عند حقيقي " و يتم إنجازه ضمن أفواج.
الحل: بسيط
النشاط الثاني
تصحيح: /
الهدف: مقاربة نهاية دالة مركبة.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " نهايات دالة مركبة " و و يتم إنجازه ضمن أفواج كما يتم استعمال جهاز الداتاشو.
الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقاربة مفهوم الاستمرارية.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الاستمرارية " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو.
الحل: بسيط.
النشاط الرابع
تصحيح: /
الهدف: مقاربة مبرهنة القيم المتوسطة و تطبيقاتها.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبرهنة القيم المتوسطة " و يتم ضمن أفواج.
الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

إزالة حالة عدم التعيين
تصحيح: /
الهدف: توظيف النهايات.
توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج .
الحل: بسيط
إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف
تصحيح: /
الهدف: توظيف مبرهنة القيم المتوسطة.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.
الحل: يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة،.

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

1 1) $2,9 < f(x) < 3,1$ معناه $2,9(x+1) < 3x-2 < 3,1(x+1)$ لأن $x+1>0$
و منه $2,9(x+1)+2 < 3x < 3,1(x+1)+2$ و منه $2,9x+4,9 < 3x < 3,1x+5,1$

و منه $(3x-3,1x-5,1<0)$ و $(2,9x+4,9-3x<0)$

و منه $(-0,1x<5,1)$ و $(-0,1x<-4,9)$ و منه $\left(x>\dfrac{5,1}{-0,1}\right)$ و $\left(x>\dfrac{4,9}{0,1}\right)$ إذن $A=49$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

3) $f(x)-3=\dfrac{3x-2}{x+1}-3=\dfrac{-5}{x+1}$

$f(x)-3<0$ و منه C_f أسفل Δ.

11 نحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$ ثم لدراسة الوضعية ندرس إشارة $f(x)-y$

ملاحظة: نفس الطريقة مع التمارين 8 ، 9 و 10.

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

13 $\lim\limits_{x\to4} f(x)=3$ ،

$2,95\le f(x)\le3,05$ يكافئ $2,95\le\dfrac{x+2}{x-2}\le3,05$ و منه $2,95(x-2)-2\le x\le3,05(x-2)-2$

أي $\left(x\ge\dfrac{8,1}{2,05}\right)$ و $\left(x\le\dfrac{7,9}{1,95}\right)$ ، إذن $3,951219512...\le x\le4,051282051...$

يمكن أخذ $I=\left]3,95;4,05\right[$

14 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$ ، $f(x)>10^3$ معناه $3x+4>10^3(x-2)^2$ و منه $1000x^2-4003x+3996<0$

و منه $\dfrac{4003-\sqrt{40009}}{2000}<x<\dfrac{4003+\sqrt{40009}}{2000}$ و منه $1,901488751<x<2,101511249$.

يمكن أخذ $a=0,1$

3 - تتمات على النهايات

18

النهاية	عند $-\infty$	عند $+\infty$
أ)	$-\infty$	$+\infty$
ب)	$-\infty$	$-\infty$
ج)	$+\infty$	$-\infty$

19 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} f(x)=+\infty$

20 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

21 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

22 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$.

26 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) من أجل $x>0$ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{3}$$

28 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

29 **الحالة(1):** $D=\mathbb{R}-\{0;2\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$

الحالة(2): $D=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

الحالة(3): $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

4 ـ نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة

30 (1 $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{3x+4}{x-3}=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}}\sqrt{\frac{3x+4}{x-3}}$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+1=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3+x-3=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x^3+x-3}=+\infty$

31 : لدينا: على $]-2;2[$ $4-x^2>0$ و منه $\lim\limits_{x\to-2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim\limits_{x\to2}\left(4-x^2\right)=0^+$ و $\lim\limits_{X\to0^+}\sqrt{X}=0^+$

إذن $\lim\limits_{x\to-2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2}\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

32 (1 لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim\limits_{X\to0}\cos X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)=1$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\cos X=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)=0$

(3 $\lim\limits_{x\to-1}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}}\sin X=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=1$

و $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ و منه $\lim\limits_{x\to0}\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=\pi$ و $\lim\limits_{X\to\pi}\cos X=-1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=-1$

35 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-3=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

36 دينا $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ و بما أن $f(x)\le-2x^3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

37 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^4+x\right)=+\infty$ و بما أن $f(x)\ge\frac{1}{2}x^4+x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

38 (1 لدينا $-1\le\cos x\le1$ و منه $-2\le2\cos x\le2$ و منه $1\le3+2\cos x\le5$

(2 إذا كان : $x\to+\infty$ فإن $x-1\to+\infty$. $1\le3+2\cos x\le5$ تكافئ $\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+2\cos x}\le1$

و منه $\frac{x-1}{5}\le\frac{x-1}{3+2\cos x}\le x-1$. لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{5}$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3+2\cos x}=+\infty$

39 (1 $x^2-3\sin x-\left(x^2-3\right)=-3\sin x+3=3(1-\sin x)$ بما أن $-1\le\sin x\le1$ فإن $-1\le-\sin x\le1$ و منه $0\le1-\sin x\le2$ ، إذن $x^2-3\sin x-\left(x^2-3\right)\ge0$

و بالتالي : $x^2-3\sin x\ge x^2-3$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3=+\infty$ و $x^2-3\sin x\ge x^2-3$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3\sin x=+\infty$

40 • عند $+\infty$ $(x>0)$: $-1\le\sin x\le1$ و منه $-2x\le2x\sin x\le2x$ و منه

$x^2-2x\le x^2+2x\sin x\le x^2+2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+2x=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• عند $-\infty$ $(x<0)$: $-1\le\sin x\le1$ و منه $2x\le2x\sin x\le-2x$ و منه

$x^2+2x\le x^2+2x\sin x\le x^2-2x$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+2x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-2x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

41 (1 لدينا : : $-1\le\sin x\le1$ و منه $x-1\le x+\sin x\le x+1$ و منه $\dfrac{x-1}{2x+1}\le\dfrac{x+\sin x}{2x+1}\le\dfrac{x+1}{2x+1}$

(2 بما أن : $\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$

5 - الاستمرارية

43 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases}f(x)=x^2-2x+1\ ; & x\le2\\ f(x)=x^2+x-5\ ; & x>2\end{cases}$

(1 $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2}x^2-2x+1=1$ $=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2}f(x)$ و $f(2)=1$.إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليسار

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2}x^2+x-5=1$ $=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2}f(x)$ و $f(2)=1$.إذن الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين

و منه الدالة f مستمرة عند 2 .

(2 نعم الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مستمرة على $]-\infty;2]$ (كثير حدود) و على $]2;+\infty[$ (كثير حدود) و مستمرة عند 2.

6 - مبرهنة القيم المتوسطة

52 (1 $f(1)=\dfrac{3}{4}$ ، $f(0)=-\dfrac{1}{4}$ ، $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}$ ، $f(-1)=-\dfrac{5}{4}$

(2 نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجالات $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ و $[0;1]$.

56 • بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $]-3;0]$ و تأخذ قيمها في $]-2;+\infty[$ و بما أن $0\in]-2;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-3;0]$

• بما أن f مستمرة و رتيبة تماما على $[0;2[$ و تأخذ قيمها في $[-2;4[$ و بما أن $0\in[-2;4[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0;2[$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $-3<x_0<0$ و $0<x_1<2$

7 - الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

64 (1 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=-3x^2+6x$

أ) $f'(x)=0$ معناه $(x=0)$ أو $(x=2)$ ، $f'(x)<0$ معناه $(x<0)$ أو $(x>2)$ ،

$f'(x)>0$ معناه $(0<x<2)$

ب)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$

67 نعتبر الدالة $h:x\mapsto f(x)-g(x)$ و نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$

تمارين للتعمق

2 - نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي

71 $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ و $d=-1$

72 (1 $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ و $d=-1$

2) $f(x)=x+1+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

إذن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ معادلته $y=x+1$

3) ندرس إشارة $f(x)-(x+1)$: $f(x)-(x+1)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

$f(x)-(x+1)=0$ تكافئ $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)<0$ تكافئ $x<-\frac{2}{3}$ ،

$f(x)-(x+1)>0$ تكافئ $x>-\frac{2}{3}$

(C) أعلى Δ في المجال $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ و (C) أسفل Δ في المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.

73 (1 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

2) $\Delta: y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$.

3) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+5}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=-2$$

ج) نستنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا Δ' عند $-\infty$ معادلته $y=-x-2$.

74 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$

التخمين: (C_f) يقترب من المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ عند $+\infty$ و لكن (C_g) لا يقترب من المستقيم عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ معناه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ أي $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$

نستنتج أن المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني (C_g) عند $+\infty$.

3 ـ تتمات على النهايات

82 1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}1}\frac{x+1}{x^2+2x-3}=+\infty$ لأن $\lim_{x\overset{>}{\to}1} x+1=2$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}1} x^2+2x-3=0^+$

و بالمثل : $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}-3} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}-3} f(x)=+\infty$

6) $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و كذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+2-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2+6x+12\right)=12$$

88 من اجل كل عدد حقيقي x نضع: $g(x)=\sin 3x$ و $h(x)=2\cos x-1$ و $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

$$f(x)=\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}=\frac{\frac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\frac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\dfrac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ لأن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$

لدينا : $g'(x)=3\cos 3x$ و $h'(x)=-2\sin x$

بما أن $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ فإن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\sqrt{3}$

90 (1 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}=0$ و منه لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

إذا كان $x>0$ فإن : $l_1=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\times\dfrac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}=2\sqrt{2}$

(2 $l_2=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ ، حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$.

نضع: $X=x-\frac{\pi}{2}$ و منه $x=X+\frac{\pi}{2}$. إذا كان $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $X\to 0$

$$l_2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=\lim_{X\to 0}(\pi-\pi-2X)\tan\left(\frac{\pi}{2}+X\right)=\lim_{X\to 0}\frac{-2X}{-\tan X}=\lim_{X\to 0}\frac{2}{\frac{\tan X}{X}}=2$$

4 ـ نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة

101 (1 أولا نعين مجموعة التعريف:

$D_f=\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا: $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=x-\sqrt{x^2+1}$

و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، إذن $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$ أي $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

(2 لدينا $-1\leq\sin x\leq 1$ و منه $0\leq 1+\sin x\leq 2$

و منه $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ لأن : $x>0$

من : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ينتج $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x\left[x(1+\sin x)\right]$ أي $\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}<-4x^2$ أي

$f(x)<-4x^2$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$. نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

الباب الثاني

الاشتقاقية

الأنشطة

النشاط الأول
تصحيح: /
الهدف: تذكير حول المشتقات.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الاشتقاقية ". و يتم ضمن أفواج.
الحل: يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.
النشاط الثاني
تصحيح: /
الهدف: تعريف الدالة " ظل ".
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة دالة مثلثية " .
الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقاربة مشتقة الدالة المركبة.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " اشتقاق دالة مركبة " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.
الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

المقارنة بين دوال و دراسة الأوضاع النسبية لمنحنياتها
تصحيح: /
الهدف: توظيف دراسة اتجاه تغير دالة.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

دراسة دالة صماء
تصحيح: /
الهدف: توظيف اتجاه تغير دالة.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

تقريب دالة بواسطة مجدول أو حاسبة
تصحيح: /
الهدف: توظيف طريقة أولر.
توجيهات: يقدم النشاط باستعمال جهاز الداتاشو أو باستعمال حاسبة بيانية.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية.

1 - الاشتقاقية

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x}{x} = -1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x}{x} = 1$ إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

6 المنحني يقبل مماسا عند A إذن الدالة تقبل الاشتقاق عند -2 ومعامل توجيه المماس T هو $f'(-2)=\frac{3}{2}$ ولدينا $f(-2)=3$ وبالتالي معادلة المماس T هي $y=\frac{3}{2}(x+2)+3$.

2 - المشتقات والعمليات عليها

12 في كل حالة من الحالات المقترحة الدالة f تعتبر كثير حدود وبالتالي هي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أ - $f'(x)=5x^4+4x^3-9x^2+2x+4$.

ب - $f'(x)=\frac{6x^2+2x-4}{4}$.

جـ - $f'(x)=6mx^2+6m^3x-m^2$.

د - $f(m)=2x^3+9m^2x^2-2mx+1$.

14 أ - $f(x)=x+x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=1+\cos x-x\sin x$

ب - $f(x)=\sin x\cos x$ ؛ $D=\mathbb{R}$. $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$.

جـ - $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ؛ $D=\mathbb{R}^*$. $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

3 - اتجاه تغيّر دالة

25 أ - $f(x)=2x^4-27x+7$ ؛ $f'(x)=8x^3-27=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

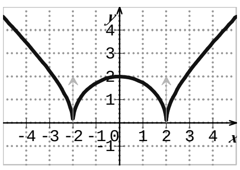
من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $4x^2+6x+9>0$ ومنه إذا كان $x\geq\frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\geq 0$ ومنه f متزايدة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ ؛ إذا كان $x\leq\frac{3}{2}$ فإن $f'(x)\leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

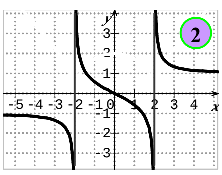
جـ - $f(x)=x+\cos x$. $f'(x)=1-\sin x$ ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $1\geq\sin x$ ومنه $f'(x)\geq 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

هـ - $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}_+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x}$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

27 الشكل المقابل هو المنحني $\mathcal{C}_f$ لدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة من المجموعة $\mathbb{R}-\{-2;2\}$.

المنحني الذي يمثل f' هو





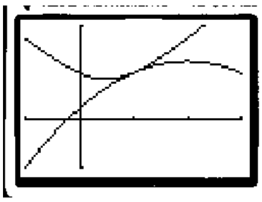
4 ـ اشتقاق دالة مركبة

34 أ) $f'(x)=3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$.

ب) $g'(x)=4(4x+1)(2x^2+x-1)^3$.

ج) $h'(t)=5(3t^2-1)(t^3-t+1)^4$.

د) $t'(u)=-\dfrac{16u}{(u^2+3)^9}$.



39 باستعمال حاسبة بيانية مثّلنا المنحنيين الذين معادلتيهما $y=\sqrt{x^2-x+1}$ و $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.

1) يبدو أن للمنحنيين مماس مشترك عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

2) أ ــ الدالة g كثير حدود إذن هي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
الدالة $u:x\mapsto x^2-x+1$ تقبل الاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $f:x\mapsto\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ب ــ $f(1)=1$ ، $g(1)=1$ ، $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ و $g'(1)=\dfrac{1}{2}$.

ج ــ معادلة المماس لمنحنى الدالة f هي : $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+1$ ونجد نفس المعادلة لمماس منحنى الدالة g.

5 ـ التقريب التآلفي

41 برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

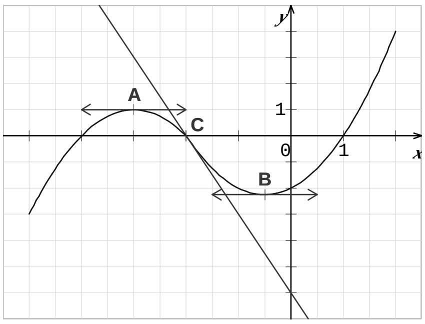
أ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. لدينا $(1+x)^3=x^3+3x^2+3x+1$ وعندما يقترب x من 0 فيكون x^3 و $3x^2$ قيمتين مهملتين.

يمكن اعتبار معادلة مماس منحنى الدالة $x\mapsto(1+x)^3$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y=1+3x$.

تمارين للتّعمق.

1 ـ الاشتقاقية

46



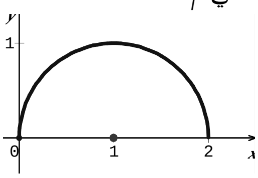
المنحنى البياني $\mathcal{C}_f$ التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها

.1 $D_f=[-5;2]$.

.2 $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ ، $f'(-3)=0$ و $f'(-2)=\dfrac{0-(-4)}{-2-0}=-2$.

.4 عند A ، $y=1$ ؛ عند B ، $y=-\dfrac{9}{4}$ وعند C ، $y=-2(x+2)$.

.5 لا توجد مماسات أخرى للمنحنى $\mathcal{C}_f$ موازية لمماسه عند النقطة C لأنها هي نقطة انعطاف للمنحنى $\mathcal{C}_f$.



53 f الدالة المعرّفة على المجال $[0;2]$، تمثيلها البياني $\mathcal{C}$ هو عبارة عن نصف دائرة كما هو مبيّن في الشكل .

1) المماس منطبق على محور التراتيب.

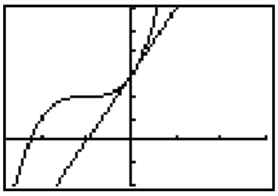
2) نضع $\Omega(1;0)$ ؛ $M(x;y)$ تنتمي إلى $\mathscr{C}$ معناه $\Omega M=1$ و $y\geq 0$ أي $(x-1)^2+y^2=1$ و $y\geq 0$ وهذا يعني $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ أي $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

3) نجد بالحساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ غير منتهية .

2 - المشتقات والعمليات عليها

58 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني $\mathscr{C}$ الممثل للدالة f والمماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0.



1. $y=3x+3$.

2. يبدو أنه إذا كان $x\in\left[-\frac{5}{2};+\infty\right[$ فإن المنحني يقع فوق المماس .

3. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$.

4. إذا كان $x\in[-3;+\infty[$ فإن $f(x)-(3x+3)\geq 0$ ويكون المنحني فوق المماس ، وإذا كان $x\in\,]-\infty;-3]$ فإن $f(x)-(3x+3)\leq 0$ ويكون المنحني تحت المماس.

الباب الثالث

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدالة الأسية ". و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف المراحل لبلوغ النتائج المتوخاة .

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " الدالة اللوغاريتمية "

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط.

الدوال $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية و مقاربة منحنيات غوص.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

تصحيح: /

الهدف: حل معادلات تفاضلية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالتا تجب و جيب الزائديتان

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمثيل البياني لدوال مرفقة بالدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ الدالة الأسية

3 (1 $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{2x}\left(1+e^{-2x}\right)}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

(2 $\frac{e^{x}-1}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e^{2x}}=e^{-x}-e^{-2x}$

(3 تصويب: $(e^{x}+e^{-x})^2=(e^{x})^2+2e^{x}e^{-x}+(e^{-x})^2$

$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$

$(e^{x}+e^{-x})^2=e^{2x}+\frac{1}{e^{2x}}+2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$

(4 $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

2 ـ الدوال الأسية $x\mapsto e^{kx}$

15 تصويب: $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

(1 أ) إذا كان $x=y=0$ فإن: $f(0)=f(0)\times f(0)$ ومنه $f(0)-\left[f(0)\right]^2=0$

ومنه $f(0)\left[1-f(0)\right]=0$ ومنه $f(0)=1$ لأن f غير معدومة.

ب) من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)\times f(-x)=f(x-x)$

ومنه $f(x)\times f(-x)=f(0)$ أي $f(x)\times f(-x)=1$

.2 أ– من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\times f\left(\frac{x}{2}\right)$

ب) الدالة f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

3 ـ دراسة الدالة الأسية

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$

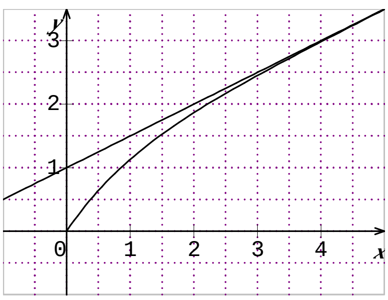
.1أ) $f'(x)=\frac{1}{2}+e^{-x}$ الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

.2أ) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)=0$

معادلة المستقيم المقارب D هي: $y=\frac{1}{2}x+1$.

ب) المنحني (C) أسفل المستقيم D .



3. الرسم (انظر الشكل)

51 .1 $g(x)-f(x)=e^{-x}(1-\sin x)$

$\sin x=1$ على $[0;\pi]$ معناه $x=\dfrac{\pi}{2}$. إذن المنحنيان يشتركان في النقطة $A\left(\dfrac{\pi}{2};e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

.2 $f'(x)=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$ و $g'(x)=e^{-x}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ إذن المنحنيان يقبلان في النقطة A مماسا مشتركا.

4 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

61 $P(x)=-2x^3+3x^2+11x-6$

1) $P(x)=(2x-1)(x+2)(3-x)$

2) $P(x)=0$ معناه أو $(x=-2)$ أو $(x=3)$

3) $x\in\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{-2};e^{3}\right\}$

4) $x\in\left\{\ln\dfrac{1}{2};\ln 3\right\}$

5 - الخواص الجبرية

73 2) $\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\dfrac{x}{y}=-\ln 3 \end{cases}$ مجموعة الحلول هي $S=\{(-8;-24),(2;6)\}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x+\ln y=\ln 60 \end{cases}$ مجموعة الحلول هي $S=\{(5;12),(12;5)\}$

74 1) $2t^2-5t+2=0$ معناه $t\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$

2) مجموعة حلول الجملة هي: $S=\{(-\ln 2;\ln 2),(\ln 2;-\ln 2)\}$

6 - دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

91 $f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$

$$f'(x)=\frac{3}{x+2}+2x-3=\frac{2x^2+x-3}{x+2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $2x^2+x-3=0$

$f'(x)=0$ تكافئ $(x=1)$ أو $\left(x=-\dfrac{3}{2}\right)$

إذن المنحني C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل عند النقطتين التين فاصلتاهما 1 و $\dfrac{3}{2}$

7- دالة اللوغاريتم العشري

98 .1 $\log\left(2^{1234}\right)=1234\log 2$ ، $E\left(1234\log 2\right)=371$.

.2 من $E\left(\log n\right)=371$ نستنتج أن: $371\leq \log n<372$

ومنه $\log 10^{371}\leq \log n<\log 10^{372}$ و منه $10^{371}\leq n<10^{372}$

.3 الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 372 رقما.

8- المعادلات التفاضلية

102 (1 $f(x)=\lambda e^{3x}$ ، (2 $f(x)=\lambda e^{-2x}$

(3 $f(x)=\lambda e^{-\frac{5}{2}x}$ ، (4 $f(x)=\lambda e^{8x}$

103 (1 $f(x)=\lambda e^{-\frac{1}{2}x}$

(2 الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(\ln 4\right)=1$ هو

$$f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$$

تمارين للتعمق

108 (1 تصويب: المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

$\left(a,b,c\right)=\left(2,-3,1\right)$

(2 أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. المنحني (C) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمقارب عند $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $f'(x)=e^{x}\left(4e^{x}-3\right)$

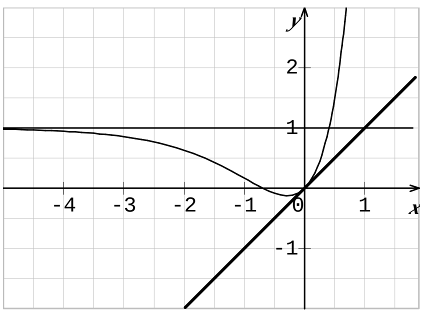
x	$-\infty$		$\ln\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) المنحني (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $-\ln 2$.

•معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$.

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

د) الرسم



116 1) أ) $f(x)-(x-1)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}-x+1=\dfrac{2}{e^x+1}$

$$f(x)-(x+1)=-\frac{e^x-1}{e^x+1}-1=\frac{-2e^x}{e^x+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$

إذن المستقيمان Δ_1 و Δ_2 اللذين معادلتاهما على مقاربان لـ (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

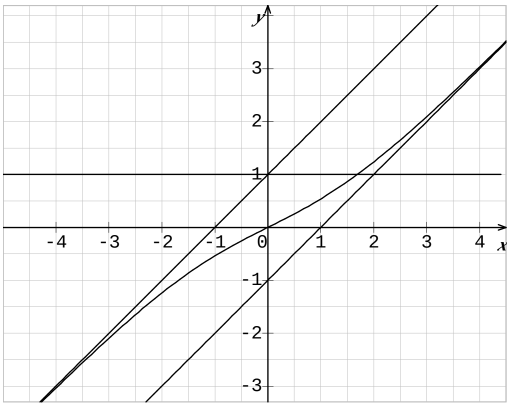
د) بجوار $+\infty$ (C) أعلى Δ_2، و بجوار $-\infty$ (C) أسفل Δ_1.

2) أ) $f(-x)=-x-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$

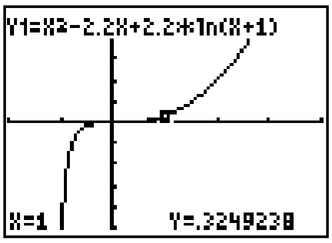
ب) $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^x+1}{(e^x+1)^2}$

x	0 α $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	0 ↗ 1 ↗ $+\infty$

3) الرسم



117 1)



2.أ) الدالة f متزايدة.

ب) الدال f تنعدم عند $x=0$.

3.أ) من أجل $x>-1$: $f'(x)=2x-2,2+\dfrac{2,2}{x+1}=\dfrac{2x^2-0,2x}{x+1}$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس لإشارة $x(2x-0,2)$

$f'(x)>0$ معناه $x\in]-1;0[\cup]0,1;+\infty[$ ، $f'(x)<0$ معناه $x\in]0;0,1[$ ، $f'(x)=0$ معناه $x\in\{0;0,1\}$

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\approx -0,0003$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

جــ) لدينا $f(0)=0$ و على المجال $[0,1;+\infty[$ الدالة f مستمرة و متزايدة و تأخذ قيمها في $[f(0,1);+\infty[$

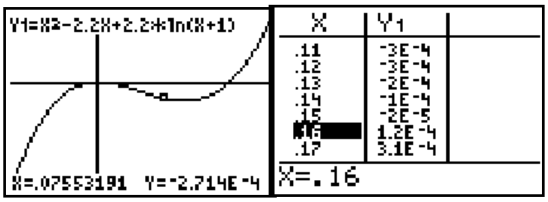
و $f(0,1)<0$. إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 حيث $f(x_0)=0$

خلاصة: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين 0 و x_0.

د) نتائج دراسة الدالة لا تتطابق مع التخمين.

4.أ) يمكن أخذ $-0,0018\le y\le 0,00111$

ب) $f(0,15)<0$ و $f(0,16)>0$ ومنه $0,15\alpha<0,16$. قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للعدد α هي $0,16$



121 1) أ) من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos 4x\le 1$ و $e^{-x}>0$ ومنه .

$-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) النقط المشتركة للمنحنيين Γ و C هي النقط $M_k\left(k\frac{\pi}{2};e^{-k\frac{\pi}{2}}\right)$

3) أ) $u_{n+1}=e^{-n\frac{\pi}{2}}\times e^{-\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}u_n$.المتتالية (u_n) هندسية أساسها $e^{-\frac{\pi}{2}}$

ب)أساس المتتالية (u_n) $0<e^{-\frac{\pi}{2}}<1$ و $u_0=1$. إذن المتتالية (u_n) موجبة و متزايدة و تتقارب نحو 0.

4) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$:

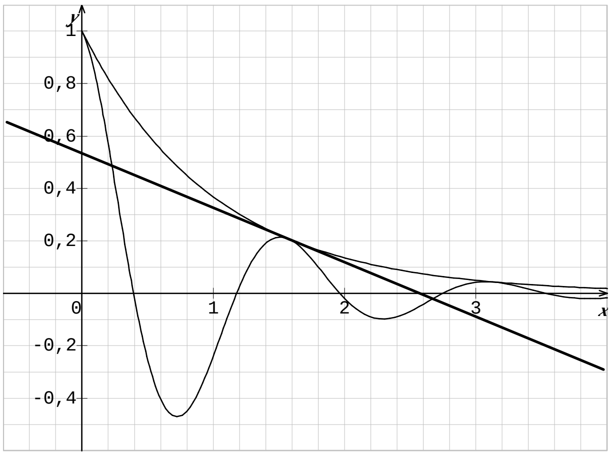
تصويب: $f'(x)=-e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$

ب) $g'(x)=-e^{-x}$. إذا كان $x=k\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos 4x=1$ و $\sin 4x=0$

$f'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(k\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-k\frac{\pi}{2}}$

إذن المنحنيين Γ و C لهما نفس المماس عند كل نقطة من نقط تقاطعهما.

5) لدينا: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. قيمة مقربة إلى 10^{-1} لمعامل توجيه المماس T للمنحنى Γ عند النقطة التي فاصلتها



$\frac{\pi}{2}$ هي $-0,2$.

مسائل

123 1) المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر، $f(-x)=\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}=f(x)$ إذن الدالة f زوجية

2) الدالة $x\mapsto e^{x}$ ء متزايدة على $\mathbb{R}$. من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $-x\le x$ ومنه $e^{-x}\le e^{x}$.

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

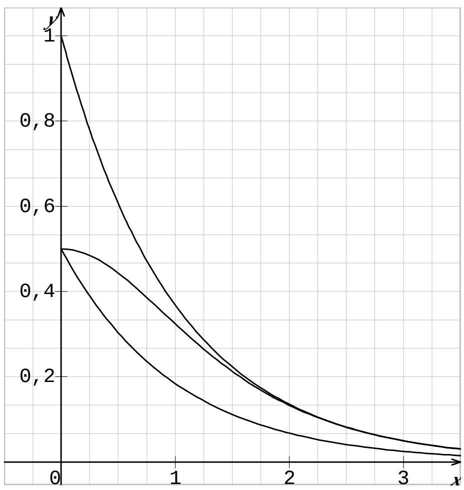
ب) $f'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$. من أجل كل $x\ge 0$: $e^{x}\ge e^{-x}$ و منه $f'(x)<0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	0 $-$
f	$\frac{1}{2}$ ↘ 0

4) أ) من أجل كل $x\ge 0$: $0<e^{-x}\le e^{x}$ ومنه $0<e^{x}<e^{-x}+e^{x}\le 2e^{x}$ ومنه $\frac{1}{2e^{x}}\le\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}\le\frac{1}{e^{x}}$

إذن :من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $h(x)\le f(x)\le g(x)$.

ب) نستنتج أنه على $\mathbb{R}^{+}$، Γ يكون بين Γ_1 و Γ_2.



الباب الرابع

التزايد المقارن

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف قوى عدد حقيقي موجب.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قوى عدد حقيقي موجب ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم الجذر النوني.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " دراسة الدوال $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ "

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقارنة كل من $\ln x$ و e^x مع x^n "

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التزايد المقارن " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

دراسة دالة لوغاريتمية

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مسألة استمثال

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

مقارنة الأعداد n^{n+1} **و** $(n+1)^n$

تصحيح: /

الهدف: توظيف دالة اللوغاريتم النيبيري و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الدوال $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدوال الأسية و التزايد المقارن.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

نموذج ديموغرافي

تصحيح: /
الهدف: توظيف قوى عدد حقيقي موجب تماما.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

فاتورة الهاتف
تصحيح: /
الهدف: توظيف الدلالة الأسية و التزايد المقارن.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

4

$a=9^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{4}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}$

$a=3^3\times 3^{\frac{3}{4}}=3^{3+\frac{3}{4}}=3^{\frac{15}{4}}$

$b=3^{-\frac{5}{4}}\times 81^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{65}{12}}$

$c=\left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}=3^{-\frac{7}{3}}$

7

1) $12^x=3$ تكافئ $e^{\ln 12^x}=e^{\ln 3}$

تكافئ $e^{x\ln 12}=e^{\ln 3}$

تكافئ $x\ln 12=\ln 3$

تكافئ $x=\frac{\ln 3}{\ln 12}$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\frac{1}{8}$ تكافئ $x=\frac{\ln 8}{\ln 4}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=3$ تكافئ $x=-\frac{\ln 3}{\ln 2}$

4) $5^{x-1}=2^x$ تكافئ $x=\frac{\ln 5}{\ln 5-\ln 2}$

5) $3^x=4^{2x+1}$ تكافئ $x=\frac{\ln 4}{\ln\frac{3}{16}}$

6) $5^{1-3x}=\frac{1}{125}$ تكافئ $x=\frac{4}{3}$

12

4) $5^{-x}<5^{2x}$ تكافئ $-x\ln 5<2x\ln 5$ تكافئ $x\in\left]0;+\infty\right[$

5) $\frac{1}{3}<\frac{2^x}{2^x+1}$ تكافئ $\frac{2.2^x-1}{3\left(2^x+1\right)}<0$ تكافئ $2^{x+1}<1$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[$

6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\le 2$ تكافئ $-x\ln\sqrt{2}\le\ln 2$ تكافئ $-\frac{1}{2}x\le 1$ تكافئ $x\in\left[-2;+\infty\right[$.

2 - دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

38 1) $2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\frac{2^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}=1$

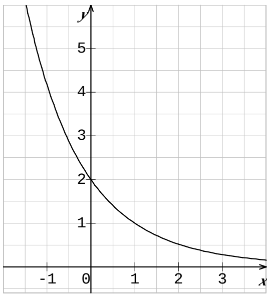
$2^x+3^x=5^x$ تكافئ $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$

2) $f\left(x\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ ، $f'(x)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{2}{5}}\right)+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(e^{x\ln\frac{3}{5}}\right)$

$f'(x)=\left(\ln\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\ln\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	0



3 - التزايد المقارن

40 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1-e^x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{x}{x^2}=+\infty$

47 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^x-e^x=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$

52 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2}=0$

ب) $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3^x}{x^2}=+\infty$

2) $f\left(x\right)=\frac{3^x}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}}{x^2}=\frac{e^{x\ln3}\times\left[\ln3\right]^2}{x^2\left[\ln3\right]^2}=\frac{e^{x\ln3}}{\left[x\ln3\right]^2}\times\left[\ln3\right]^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x\ln 3}}{\left[x\ln 3\right]^2}\times\left[\ln 3\right]^2=+\infty$ بوضع $X=x\ln 3$.

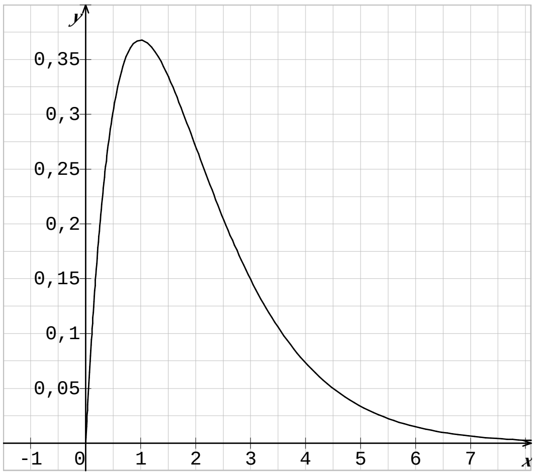
تمارين للتعمق

61 الجزء1: 1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ جـ)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

جـ)



2) أ) المستقيم الذي معادلته $y=m$ يقطع المنحني (Γ) في نقطتين.إذن المعادلة $f\left(x\right)=m$ تقبل حلين.

ب) $f(0,3573)\approx 0,2499$ و $f(0,3574)\approx 0,25001$

جـ) $f(x)=0$ تكافئ $x=0$ و $f(x)=\dfrac{1}{e}$ تكافئ $x=1$

الجزء2: تصويب: $u_0=\alpha$ و $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$

1) أ) $u_0=\alpha$ و $\alpha>0$ و إذا كان $u_n>0$ فإن $u_n e^{-u_n}>0$ و منه $u_{n+1}>0$. إذن $u_n>0$.

ب) $u_{n+1}-u_n=u_n\left(e^{-u_n}-1\right)$

بما أن $u_n>0$ و $e^{-u_n}<1$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و بالتالي $\left(u_n\right)$ متناقصة

جـ) $\left(u_n\right)$ متناقصة و محدودة من الأسفل بـــ0 فهي متقاربة.لتكن ℓ نهايتها.

لدينا $\ell=\ell e^{-\ell}$ تكافئ $\ell=0$

2. $w_n=\ln u_n$. $u_{n+1}=u_n e^{-u_n}$ ومنه $\ln u_{n+1}=\ln u_n+\ln e^{-u_n}=\ln u_n-u_n$

ومنه $w_{n+1}=w_n-u_n$ أي $u_n=w_n-w_{n+1}$

ب) $S_n=u_0+u_1+.....+u_n=(w_0-w_1)+(w_1-w_2)+(w_{n-1}-w_n)+(w_n-w_{n+1})=w_0-w_{n+1}$

جـ) بما أن u_n يؤول إلى0 ، w_n يؤول إلى $-\infty$ ، إذن S_n يؤول إلى $+\infty$.

3) $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$ و $f(\beta) = \frac{1}{4}$ أنّ إذا أخذنا $v_0 = \beta$ ، ابتداءً من الرتبة 1 يكون $u_n = v_n$.

62 1) المستقيم D يمر بالنقطتين $J(0;1)$ و $K(-1;0)$ معادلته $y = x+1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (mx+p) = 0$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = mx+p$ مقارب للمنحني عند $+\infty$ و هو المستقيم D. إذن $m = p = 1$.

ب) النقطة J مركز تناظر للمنحني.

جـ) $f(x) = x+1+\varphi(x)$ ، $f(-x) = -x+1+\varphi(-x)$

ومنه $f(x)+f(-x) = 2+\varphi(x)+\varphi(-x)$ و نعلم أن $f(x)+f(-x) = 2$ ، إذن $\varphi(x)+\varphi(-x) = 0$

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ومنه الدالة φ فردية

د) $f(x)+f(-x) = 2$ و منه $f'(x) - f'(-x) = 0$ ومنه $f'(x) = f'(-x)$. إذن f' زوجية.

3) أ) $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ ومنه $\varphi(-x) = (-ax+b)e^{-x^2}$ ،

بما أن الدالة φ فردية يكون $-ax+b = -ax-b$ و منه $b = 0$

ب) $f(x) = x+1+\varphi(x) = x+1+axe^{-x^2}$ ومنه $f'(x) = 1+\varphi'(x) = 1+a\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

جـ) معامل توجيه المماس T عند النقطة التي فاصلتها 0 (النقطة J) هو $f'(0) = 1-e$

$f'(0) = 1+a$ معناه $1-e = 1+a$ أي $a = -e$

د) $f(x) = x+1+axe^{-x^2} = x+1-exe^{-x^2}$

64 الجزء1: $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

1) $g'(x) = e^x - 1$. $g'(x)$ موجبة إذا كان $x \geq 0$ و سالبة إذا كان $x \leq 0$

إذن الدالة g متزايدة إذا كان $x \geq 0$ و متناقصة إذا كان $x \leq 0$ و $g(0) = 0$ و بالتالي $g(x) \geq 0$.

2) $g(x) \geq 0$ معناه $e^x - x \geq 1$ أي $e^x - x > 0$

الجزء2:

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ب) عند $-\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = -1$ و عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$.

2) أ) $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{\left(e^x - x\right)^2}$

ب) إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

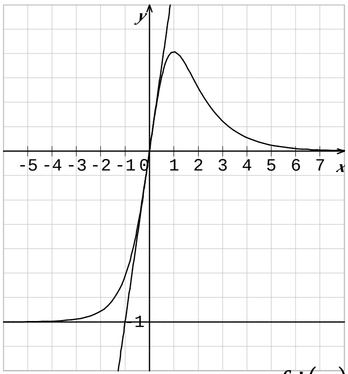
3) أ) معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي $y = x$.

ب) وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس T : $f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$.

بما أن $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ فإن إشارة $f(x)-x$ هي من إشارة $(-x)$

في المجال $]-\infty;0[$ (C) أعلى T و في المجال $]0;+\infty[$ (C) أسفل T .

4)



66 .1 $f'(x)=(x+1)(1-x)e^{-x}$

$f'(x)>0$ إذا كان $-1<x<1$

$f'(x)<0$ إذا كان $x<-1$ أو $x>1$

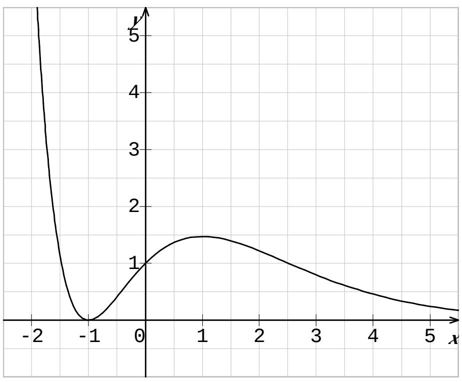
$f'(x)=0$ إذا كان $x=-1$ أو $x=1$

إذن الدالة f متزايدة تماما في المجال $[-1;1]$ و متناقصة تماما في المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0$ المنحني (C) يقبل

مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ عند $+\infty$

.3التمثيل البياني:



4.أ) إذا كان $k<0$ المعادلة لا تقبل حلولا.

– إذا كان $k=0$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=-1$

– إذا كان $0<k<\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل 3 حلول.

– إذا كان $k=\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلين أحدهما $x=1$

– إذا كان $k>\dfrac{4}{e}$ المعادلة تقبل حلا واحدا

ب) – إذا كان $x>-1$ فإن $f(x)\le\frac{4}{e}$ و بالتالي $f(x)<2$. إذن المعادلة $f(x)=2$ ليس لها حل على المجال $[-1;+\infty[$

– إذا كان $x<-1$ فإن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$. بما أن 2 ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$ فإنه توجد قيمة وحيدة x تحقق $f(x)=2$

$f(-1)=0$ و $f(-2)\approx 7,39$

بما أن $0<2<7,39$ فإن $-2<\alpha<-1$

جـ) نعلم أن $f(\alpha)=2$ و منه $(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$ ومنه $(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$

ومنه $\left(\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$ أو $\left(\alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\right)$

بما أن $\alpha<-1$ فإن $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

68 1) أ) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب) $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

2) $f(1)=0$ و $f'(1)=1$ إذن معادلة T هي $y=x-1$

3) $g(x)=x-1-f(x)$

أ) $g'(x)=1-f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left[\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)\right]$

ب) $g'(1)=0$، و إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x+2\left(x\sqrt{x}-1\right)$

• على $]0;1[$: $\ln x<0$ و $x\sqrt{x}-1<0$ ومنه $g'(x)<0$

• على $]1;+\infty[$: $\ln x>0$ و $x\sqrt{x}-1>0$ ومنه $g'(x)<0$.

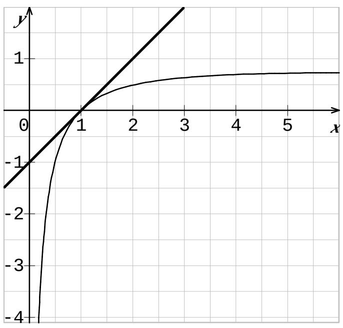
جـ) $g(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	0	↗	

نستنتج من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\ge 0$

د) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، (C) أسفل T.

4) الرسم(انظر الشكل)



مسائل

73 **الجزء الأول:** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$

1. $h'(x)=e^x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$1-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	

من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq 1-\dfrac{1}{e}$ أي $h(x)>0$ من أجل x من $\mathbb{R}$.

2. تصويب: $g(x)$ بدلا من $h(x)$

أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{e^x}{x}\right)=-\infty$

ب) $g'(x)=1-e^x$

x	$-\infty$	β		0		α	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
g	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$		1		$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

جــ) نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة

د) إذا كان $x\in]-\infty;\beta[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x\in]\beta;\alpha[$ فإن $g(x)>0$

الجزء الثاني: دراسة تغيرات الدالة f و رسم المنحني $\mathcal{C}$:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2.أ) $f'(x)=\dfrac{e^x(xe^x+1)-(xe^x+e^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^x-e^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x(2-e^x+x)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

ب) جدول التغيرات

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) أ) $g(\alpha)=0$ ومنه $e^\alpha=\alpha+2$

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$

ب) تصويب : عين حصرا للعدد $f(\alpha)$ $\quad 1{,}14<\alpha<1{,}15$ و منه $2{,}14<\alpha+1<2{,}15$

ومنه $\frac{1}{2{,}15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2{,}14}$ أي $0{,}465<f(\alpha)<0{,}467$ (الصر سعته 2×10^{-3})

4.معادلة المماس T هي $y=x$

5.أ) $f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x-1-x^2e^x-x+xe^x-xe^x}{xe^x+1}$

$$f(x)-x=\frac{x\left(e^x-xe^x-1\right)+\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}=\frac{\left(e^x-xe^x-1\right)(x+1)}{xe^x+1}$$

ب) $u'(x)=-xe^x$

إشارة $u'(x)$ هي من نفس إشارة $(-x)$

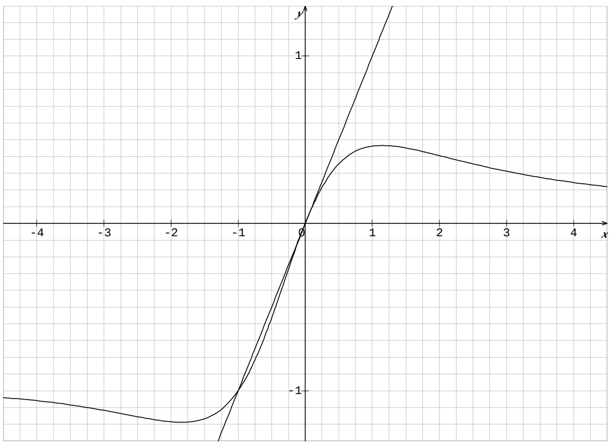
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u		$\nearrow$	0	$\searrow$	

إشارة $u(x)$: من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)\leq 0$

جـ) إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $-(x+1)$

(C) أعلى T في المجالين $]-\infty;-1[$ و $]0;+\infty[$ و (C) أسفل T في المجال $]-1;0[$

6) الرسم



الباب الخامس

الدوال الأصلية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: تعريف الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الدوال الأصلية ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: إعطاء دلالة لمفهوم الدالة الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الأول.

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: إبراز وحدانية الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا..

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج مباشرة بعد النشاط الثاني .

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة أصلية

تصحيح: /

الهدف: إبراز إمكانية (في بعض الحالات) دراسة تغيرات دالة أصلية دون تعيين عبارتها بدلالة المجهول.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

تعيين دوال أصلية لدالة

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج.

الحل: بسيط

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

تصحيح: /

الهدف: توظيف خواص الدوال الأصلية و استنباط بعض الطرق لتعيينها.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج .

الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 نبين أن $F'(x)=f(x)$

2 1) الدالة الأصلية للدالة f هي H 2) الدالة الأصلية للدالة f هي H

3) الدالة الأصلية للدالة g هي K 4) الدالة الأصلية للدالة h هي F

5) الدالة الأصلية للدالة k هي G

2 ــ حساب الدوال الأصلية

22 5) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3=-\frac{1}{2}\left[-2e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3\right]$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{8}\left(e^{-2x}+2\right)^4+c$ حيث c ثابت حقيقي.

23 5) $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{(\ln x+2)^2}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-\frac{1}{\ln x+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي

25 5) $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\times\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto4\sqrt{e^x-1}+c$ حيث c ثابت حقيقي

27 4) $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}=3\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $F:x\mapsto3\ln\left(x^2+x+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

28 4) $f(x)=\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto-3e^{\frac{1}{x}}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

29 3) $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{x^3+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3+1}$ ؛

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ هي الدوال $F:x\mapsto\frac{1}{6}\ln\left(x^3+1\right)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

30 3) $f(x)=\sin x\cos x$

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $F:x\mapsto\frac{1}{2}(\sin x)^2$ أو الدالة $G:x\mapsto-\frac{1}{2}(\cos x)^2$

3 ــ المعادلات التفاضلية

31 1) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$ 2) $y=x^2+x+\frac{1}{x}+c$

3) $y'=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$ و $y=x-\frac{1}{x}+c$ 4) $y=-\frac{3}{2}cs(2x)+c$ ، c ثابت حقيقي

تمارين تطبيقية

44 $f(x)=\sin x\left(a\cos^2 x+b\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(\sin^2 x\cos 2x\right)$$
$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$
$$F(x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x$$

48 (1 $u'(x)=\dfrac{\cos^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$ ،

$$u'(x)=\frac{\cos^2 x+3\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 x}{\cos^4 x}=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$$

(2 $v(x)=\dfrac{1}{3}\left[u'(x)+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right]$

الدوال الأصلية للدالة v على $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ معرفة بـــ $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)+2\tan x\right]+k$ حيث k ثابت حقيقي

بما أن $V(0)=0$ فإن $k=0$ و $V(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}+2\tan x\right]$.

37 .1 $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^3}$

.2 مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدوال من الشكل:

$x\mapsto-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+k$ حيث k ثابت حقيقي

.3 $F(0)=1$ معناه $-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(0+1)^2}+k=1$ أي $k=\dfrac{3}{2}$

و بالتالي $F(x)=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{2}$

43 .1 $f(x)=\sin x+\sin^3 x=\sin x\left(1+\sin^2 x\right)=\sin x\left(2-\cos^2 x\right)=2\sin x-\sin x\cos^2 x$

.2 $F(x)=-2\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x$

44 .1 $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x=\sin x\left(\sin^2 x\cos^2 x\right)$

$$f(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x$$
$$f(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)$$

.2 $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\dfrac{1}{5}\cos^5 x$

45 .1 $f(x)=\sin^4 x\cos^5 x=\cos x\left(\sin^4 x\cos^4 x\right)$

$$f(x)=\cos x\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2=\cos x\left(\sin^4 x-2\sin^6 x+\sin^8 x\right)$$

2. $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x$

46 1. $f'(x)=4\cos x\sin^3 x$ و $f''(x)=-4\sin^4 x+12\cos^2 x\sin^2 x$

2. $f''(x)=-4f(x)+12\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x$

$f''(x)=-4f(x)+12\sin^2 x-12\sin^4 x$

$f''(x)=-16f(x)+12\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$f''(x)=-16f(x)-6\cos 2x+6$ ومنه $f(x)=-\frac{1}{16}f''(x)-\frac{3}{8}\cos 2x+\frac{3}{8}$

3. نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto-\frac{1}{16}f'(x)-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

أي $F(x)=-\frac{1}{4}\cos x\sin^3 x-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}x$

47 تصويب : $f(x)=\tan^{2004}x+\tan^{2006}x$

يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan^{2004}x$ و هي من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=\tan x$

و هي مستمرة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن دالتها الأصلية على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هي $F(x)=\frac{1}{5}\tan^{2005}x$

57 $f(x)=e^x\cos x$

1. $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$ و $f''(x)=e^x(-2\sin x)$

2. $f(x)=af''(x)+bf'(x)$ معناه $\left(a=-\frac{1}{2}\right)$ و $(b=1)$

إذن $f(x)=-\frac{1}{2}f''(x)+f'(x)$

3. نستنتج أن الدالة $F:x\mapsto-\frac{1}{2}f'(x)+f(x)$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أي $F(x)=\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

58 $F(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}$

$F'(x)=\left(2ax^3+(2b+3a)x^2+(2c+2b)x+2d+c\right)e^{2x}$

من اجل كل عدد حقيقي x : $F'(x)=f(x)$ معناه $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ و $\left(b=-\frac{3}{4}\right)$ و $\left(c=\frac{3}{4}\right)$ و $\left(d=-\frac{3}{8}\right)$

$F(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$

الباب السادس

الحساب التكاملي

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: الربط بين مساحة حيز تحت منحن لدالة موجبة على مجال و الدوال الأصلية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " تكامل دالة ".

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: العلاقة بين دالة أصلية و مساحة حيز.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج و يتوج بتقديم الفقرة " توظيف الحساب التكاملي لتعيين دوال أصلية ".

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

تصحيح: /

الهدف: استنباط طريقة لحساب مساحة حيز محدد بمنحنيين.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

دالة معرفة بتكامل

تصحيح: /

الهدف: توظيف تعريف التكامل و الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

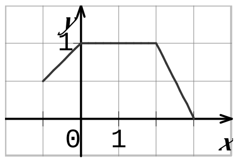
الحل: بسيط

التمارين

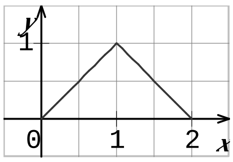
تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

3



$I=\dfrac{13}{8}$

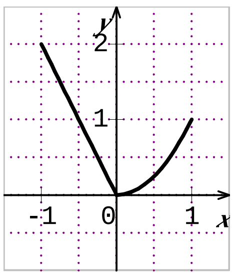


$I=1$

4 1.انشاء المنحني $\mathscr{C}$.

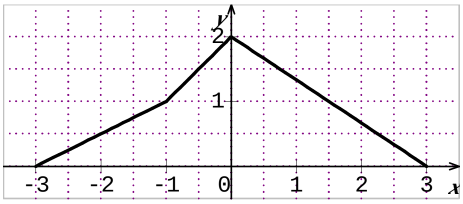
2.نعم الدالة f مستمرة على $[-1;1]$

3. $I=\int_{-1}^{0}-2x\,dx+\int_{0}^{1}x^2\,dx$ $I=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$



5

1.



2. نعم f مستمرة على $[-3;3]$.

3. $I=\int_{-3}^{-1}(0.5x+1.5)dx+\int_{-1}^{0}(x+2)dx+\int_{0}^{3}(-\frac{2}{3}x+2)dx$

6

• 1. $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ ……. $(*)$

$(*)$ تكافئ: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ و $y-1\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها $\omega(1;1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$ واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 1$.

2. تكامل الدالة f هو $I=\sqrt{2}(\pi+2)$

• 1. $y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ: $x^2+y^2=4$ و $y\geq 0$

C هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 2 واقعة في نصف المستوي الذي معادلته $y\geq 0$.

2. تكامل الدالة f هو $I=2\pi$.

7 $\int_{-1}^{3}f(x)\,dx=8$ ، $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=7$ ، $\int_{0}^{2}f(x)\,dx=4$.

10 1) $\int_{1}^{2}2x\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\right]_{1}^{2}=\frac{3}{2}$

2) $\int_{1}^{10}\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\left(\sqrt{10}-1\right)$ ، 3) $\int_{3}^{4}\frac{5x}{\left(x^2-2\right)^3}dx=\frac{5}{56}$ ، 4) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x dx=1$

11 $\int_{0}^{1}(3x-6)\left(x^2-4x+1\right)^3dx=\left[\frac{3}{8}\left(x^2-4x+1\right)^4\right]_{0}^{1}$ ،

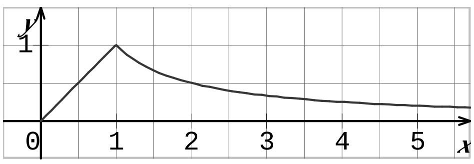
$\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\left[2\sqrt{1+t}\right]_{0}^{3}=4-2=2$ ،

$\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+1}dt=\left[\frac{1}{4}\ln\left(t^4+1\right)\right]_{1}^{2}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{17}{2}\right)$ ،

$\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

2 - خواص التكامل

32



$$I=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}+\ln 3$$

$$J=\int_2^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_2^1 \frac{1}{x}\,dx+\int_1^{\frac{1}{2}} x\,dx=-\ln 2-\frac{3}{8}$$

3 - القيمة المتوسطة

36 $f(x)=2x+3$ ، $\mu=3$

$f(x)=|x|$ ، $\mu=0$

37 1) من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};1\right]$ لدينا: $\ln x>\ln\frac{1}{2}$ و منه $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq-\ln 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx$ أي $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx\geq-\frac{\ln 2}{2}$

2) من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا: $\frac{1}{1+x^3}\leq\frac{1}{2}$ و منه $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}dx\leq\frac{1}{2}\int_1^2 dx$ أي $\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}dx\leq\frac{1}{2}$

3) من أجل كل x من $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ لدينا: $-1\leq\sin(x^2+1)\leq 1$ ومنه $-\frac{\pi}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x^2+1)dx\leq\frac{\pi}{2}$

44 1) من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا:

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^3}\leq 1$ ومنه $\frac{1}{2}\leq\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx\leq 1$

2) على المجال $[0;9]$ الدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ متناقصة تماما، إذن من أجل كل x من $[0;9]$:

$f(9)\leq f(x)\leq f(0)$ و منه $\frac{1}{4}\leq f(x)\leq 1$ أي: $\frac{9}{4}\leq\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx\leq 9$

45 1) على المجال $[1;2]$ الدالة: $f:x\mapsto\sqrt{x^3+1}$ متزايدة تماما،

إذن من أجل كل x من $[1;2]$: $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3$ أي: $\sqrt{2}\leq\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leq 3$

2) من أجل كل x من $[0;2]$: $e^{-4}\leq e^{x^2}\leq 1$ ومنه $2e^{-4}\leq\int_0^2 e^{-x^2}dx\leq 2$

3) من أجل كل x من $[2;4]$: $\ln 3\leq\ln(x^2-1)\leq\ln 15$ ومنه $2\ln 3\leq\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leq 2\ln 3+2\ln 5$

46 تصويب: 1. باستعمال الشكل بين أن: $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

بقراءة بيانية المنحنى C_f يقع أسفل Δ و أعلى P في المجال $[4;12]$،

نستنتج أن : $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x+2$

2.على المجال $[4;12]$، المنحنى C_f أعلى محور الفواصل، إذن: $A=\int_4^{12} f(x)dx$

بما أن $-\frac{1}{10}x^2+2x-5\le f(x)\le\frac{1}{2}x+2$ فإن: $\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx\le\int_4^{12}f(x)dx\le\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

دالة أصلية للدالة g المعرفة بـــ $g(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$ هي الدالة G المعرفة بـــ: $G(x)=-\frac{1}{30}x^3+x^2-5x$

دالة أصلية للدالة h المعرفة بـــ $h(x)=\frac{1}{2}x+2$ هي الدالة H المعرفة بـــ: $H(x)=\frac{1}{4}x^2+2x$

$$\int_4^{12}\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx=G(12)-G(4)=\frac{792}{30}-\left(-\frac{184}{30}\right)=\frac{976}{30}$$

$$\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=H(12)-H(4)=60-12=48$$

إذن: $\frac{976}{30}\le A\le 48$

49 (1 $\int_1^4 f(x)\,dx=3\mu=6$ ، (2 $\int_1^3 f(x)\,dx=2\mu=2\ln 2$ ،

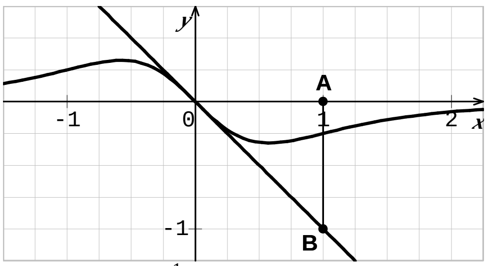
(3 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{74}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\mu=\frac{1}{2}$

51 (1 من أجل كل x من $[n;n+1]$: $\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$ ومنه $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{1}{n}$.

(2 حسب مبرهنة الحصر (I_n) متقاربة و تتقارب نحو 0.

4 - التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

59



$A_1=\int_0^1-\frac{-x}{(x^2+1)^2}dx$ ومنه $A_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$ ومنه $A_1=\left[-\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^1$ أي $A_1=\frac{1}{4}$

(2 أ– معادلة المماس T للمنحنى (C) عند المبدأ هي: $y=-x$

ب–المنحنى (C) أسفل T في المجال $]-\infty;0[$ و (C) أعلى T في المجال $]0;+\infty[$.

ج– المساحة A_2 للمثلث المحدد بـــ T ، محور الفواصل و المستقيم D هي $A_2=\frac{1}{2}u.a$.

(3 $A=A_2-A_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}u.a$

(4 أ– $I(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_0^{\lambda}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}$

$$I(\lambda)=\left[\frac{1}{2(x^2+1)}\right]_0^{\lambda}=\frac{1}{2(\lambda^2+1)}-\frac{1}{2}$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=-\frac{1}{2}$.

عندما يؤول λ إلى $+\infty$ ، مساحة المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل تقترب من $(-A_2)$ حيث A_2 مساحة المثلث OAB .

5 - توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

71 .1 $I+J=\frac{\pi^2}{8}$.

2.أ- $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

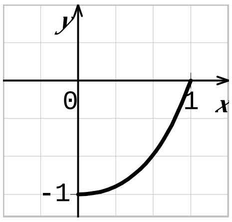
ب-نضع: $u(x)=x$ و $v'(x)=\cos 2x$ ومنه $u'(x)=1$ و $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$I-J=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx \text{ ومنه } I-J=\frac{1}{2}$$

.3 $I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)$ و $J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)$

6- بعض تطبيقات الحساب التكاملي

73



$$a=\int_0^1 -(x-1)e^x dx$$

$$a=\left[(2-x)e^x\right]_0^1=e-2$$

(2 $$v=\int_0^1\pi\left[(x-1)e^x\right]^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)e^{2x}dx$$

$$v=\pi\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1 \text{ ، } v=\pi\frac{e^2-5}{4}u.v$$

تمارين للتعمق

86 .1 $$J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$$

.2 $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ ومنه $I=1-J=1-\frac{1}{2}\ln 3$

87 (1 مجموعة النقط M هي ربع دائرة مركزها O و نصف قطرها r واقعة في الربع الأول.

(2 . $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}r^2$ ، $\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}r^2$

97 1. من اجل كل x من $[0;1]$: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e}$ و $e^{nx} > 0$ و منه $\frac{e^{nx}}{2} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{1+e}$

2. بالمكاملة على المجال $[0;1]$ نجد :

$\frac{e^n - 1}{2n} \leq u_n \leq \frac{e^n - 1}{(1+e)n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\frac{1-e^{-n}}{2n} \leq \frac{u_n}{e^n} \leq \frac{1-e^{-n}}{(1+e)n}$ حسب مبرهنة الحصر يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$.

مسائل

112

الجزء A :

1. $f(0)=1$ و $g(0)=0$ إذن C_g هو الذي يمر بمبدأ المعلم.

2. الدالتان f و g زوجيتان.

3. نقتصر الدراسة على $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ، $g'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (بوضع $X = -x^2$)

4. $f(x) - g(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$

C_f أعلى C_g إذا كان $-1 < x < 1$ و C_f أسفل C_g إذا كان $x < -1$ أو $x > 1$ ، C_f يقطع C_g عند النقطتين اللتين فاصلتاهما -1 و 1.

الجزء B : $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

1. G هي الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0.

2. الدالة g موجبة تماما على $]0;+\infty[$. من أجل $x > 0$ ، $G(x)$ هو مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ حيث $0 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq g(x)$.

3. الدالة G متزايدة على $\mathbb{R}$.

4.الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$، إذن مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$ هي :

$x \mapsto \frac{1}{2}\left[f(x) - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2}\right]$ أي الدالة g .

G و F لهما نفس المشتقة على $\mathbb{R}$. $G(0) = 0$ و $\frac{1}{2}[F(0) - 0] = 0$. إذن $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$

5.أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(-x^2e^{-x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ ،إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$.

ب- $N = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$ و $f(t) > g(t)$ على المجال $[0;1]$ .N هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين C_f و C_g و محور التراتيب.

جـــ-نضع من أجل كل $x \geq 1$:

D_1 : مساحة الحيز المحدد بالمنحنى C_f، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

D_2 : مساحة الحيز المحدد بالمنحنى C_g، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

$D_3(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq f(x)$.

$D_4(x)$: مساحة حيز مجموعة النقط $M(a;b)$ التي تحقق $1 \leq a \leq x$ و $0 \leq b \leq g(x)$.

إذا كانت F و G دالتان أصليتان للدالتين f و g على $\mathbb{R}^+$ و $F(0) = G(0) = 0$

$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = F(x) - G(x)$ و $\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = \int_0^1 (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt + \int_1^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt$

أي $\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = D_2 - D_1 - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$

$\int_0^x (e^{-t^2} - t^2e^{-t^2})dt = N - \left(D_4(x) - D_3(x)\right)$

بما أن من أجل كل $x \geq 1$: $D_4(x) - D_3(x) \geq 0$ يكون : $N \geq F(x) - G(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\ell}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$

إذن $N \geq \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - G(x)$ أي $N \geq \frac{\ell}{2}$.

ملاحظة: $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt = \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt + +\int_1^x [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt - \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt = \int_1^x [f(t) - g(t)]dt$

من أجل كل $x \geq 1$: $f(x) < g(x)$ فيكون $\int_1^x [f(t) - g(t)]dt < 0$ ومنه $\int_0^x [f(t) - g(t)]dt < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$

ومنه $F(x) - G(x) < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ و بالتالي $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 [f(t) - g(t)]dt$ ومنه $\frac{\ell}{2} < \int_0^1 \left[(1 - t^2)e^{-t^2}\right]dt$

الباب السابع

الإحتمالات الشرطية

الأنشطة

النشاط الأول :

تصحيح: B " ثلاثة أوجه و ظهر أو ثلاثة ظهور و وجه "

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على تجربة برنولي.

النشاط الثاني :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول الى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.

النشاط الثالث :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- توظيف المتغير العشوائي المستمر لحل مسائل في الاحتمالات.

النشاط الرابع :

- استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي.

النشاط الخامس :

- حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة.
- التعرف على أن دالة معرفة على مجال هي كثافة احتمال.
- حساب قانون احتمال متغير عشوائي يقبل دالة f ككثافة احتمال و حساب الأمل الرياضي، التباين و الانحراف المعياري .
-

الأعمال الموجهة (1)

I) محاكاة مرجعية : بإتباع الخطوات المبينة على المجدول اكسال تتحصل على إجابة بالمحاكاة للنشاط رقم 2 .

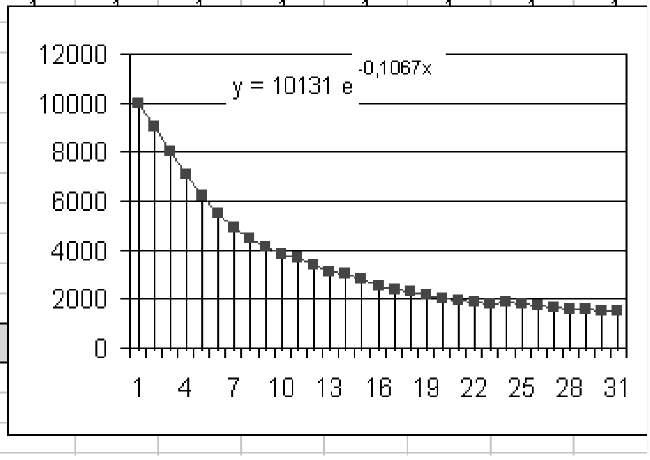
II) إنشاء مثلث :

- تخصيص ثلاثة أعمدة متجاورة لتوليد الأعداد العشوائية x ، y ، z التي تمثل أطوال أضلاع المثلث (مثلا : 100 قيمة لكل ضلع)
- العمود الرابع يخصص للتحقق من شرط وجود المثلث (1 : المثلث موجود ، 0 : المثلث غير موجود) و ذلك بالتعليمتين SI و ET .
- في العمود الخامس نحسب احتمال تحقق مثلث (في الخلية 23 من هذا العمود D مثلا نكتب = SOMME(D1:D23)/23
- بالضغط على الزر F9 نلاحظ التغيرات الحاصلة و يمكنك استخراج قيمة استقرار التواترات .

الأعمال الموجهة (2) :

تعديلات : - في الخطوة الثانية إدخال قيم الزمن t وهي 0 ، 1 ، 2، 3 ، ... في الحيز A2:AG2 بدل الحيز A2:A32
- في الخطوة الرابعة التعليمة هي SI(ALEA()<A1;0;B2) = و ذلك في الخلية C2 ثم نعمم على العمود C
- في الخلية D2 نكتب التعليمة SI(C2=0;0;SI(ALEA()<A1;0;B2)) = لأنه إذا ماتت الذرة في لحظة ما بالضرورة هي ميتة في اللحظ الموالية . ثم نعمم محتوى الخلية D2 على كل العمود و محتويات العمود D علة الأعمدة المتبقية . و نواصل حسبما ذكر في الكتاب سنحصل على:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	0.01	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4		1	1	1	1	1								
5		1	1	1	1	1								
6		1	1	0	0	0								
7		1	1	1	1	1								
8		1	1	1	1	1								
9		1	1	1	1	1								
9998		1	1	1	1	1								
9999		1	1	1	1	1								
10000		1	1	1	1	1								
10001		1	0	0	0	0								
10002		1	1	1	1	1								
10003	المجموع	**10000**	**9054**	**8050**	**7102**	**6223**								
10004														
10005														
10006														



التمارين

3 (1 $p = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$

2) نعلم أن " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي " يساوي " احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم فردي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم زوجي "

لدينا إذن $p + p' + p' = 1$ و منه $p' = \frac{1-p}{2} = \frac{5}{16}$

3) $p = 0$ و $p' = \frac{1}{2}$

15 (1 $k = \frac{1}{2}$

2) $p(X \geq \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}$

3) $\int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{\pi}{2}$

31 (1 نضع S الحادثة " الثلاجة فيها عيب التلحيم " ، E الحادثة " الثلاجة فيها عيب الكتروني "
D الحادثة " الثلاجة غير صالحة " لدينا $p(S) = 0,03$ ، $p(E) = 0,02$

$$P(D) = p(S \cup E) = p(S) + p(E) - p(S \cap E)$$
$$= p(S) + p(E) - p(S) \times p(E) = 0,0494$$

2)أ) عرض 800 ثلاجة في السوق يمكن اعتباره تجربة عشوائية ذات مخرجين " ثلاجة صالحة " و " ثلاجة غير صالحة "
إذن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه 800 و 0,0494
إذن من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 0 و 800 ينتج

$$p(X=k)=C_{800}^{k}(0,0494)^{k}\times(0,9506)^{800-k}$$

ب) $E(X)=800\times0,0494=39,52$

3) أ) نعتبر Y المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن الثلاجات 25 المشتراة

إذن Y يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه 25 و 0,0494

$$p(Y=2)=C_{25}^{2}(0,0494)^{2}\times(0,9506)^{23}$$

ب) نعتبر Z المتغير العشوائي المساوي لعدد الثلاجات غير الصالحة ضمن n ثلاجة مشتراة

إذن Z يتبع قانون ثنائي حد وسيطاه n و 0,0494 . نبحث عن n حيث $p(Z\geq1)\leq\frac{1}{2}$

ينتج $1-p(Z\prec0)\leq\frac{1}{2}$ و منه $1-p(Z=0)\leq\frac{1}{2}$ أي $p(Z=0)\geq\frac{1}{2}$

و بالتالي $0,9506^{n}\geq\frac{1}{2}$ و منه $n\leq\frac{-\ln2}{\ln(0,9506)}\simeq13,68$

و عليه ، فعلى التاجر أن يشتري 13 ثلاجة على الأكثر .

4) نعتبر W المتغير العشوائي المرفق لمدة صلاحية الثلاجة دون أي عطب فهو يتبع قانون أسي و سيطه 0,0007

لدينا $p(700\leq W\leq1000)=\int_{700}^{1000}f(x)dx$

$$=e^{-0,49}-e^{-0,7}\simeq0,116$$

(الفروع ب / ج / د غير تابعة لهذا التمرين)

الباب الثامن

قوانين الإحتمال

الأنشطة

النشاط الأول :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الثاني :
- إيجاد قانون احتمال لمغير عشوائي
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الثالث :
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء .

النشاط الرابع :
- - تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط الخامس :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .

النشاط السادس :
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري .
- تنظيم معطيات من أجل عدها باستعمال المبدأ الأساسي للعد .
- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين .
- توظيف دستور الاحتمالات الكلية لحل مسائل في الاحتمالات تتعلق بالسحب من أكثر من كيس .

الأعمال الموجهة (1)

I) تاريخ الميلاد

$$P_n(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{34}}{365^{365}} \simeq 1 - 0,205 \simeq 0,795$$

يوجد حوالي % 80 من الفرص لوجود تلمي>يم على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد

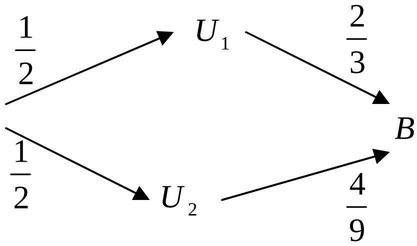
n	**15**	**20**	**23**	**30**	**50**	**57**
P_n	25 %	41 %	50 %	70 %	97 %	99 %

تطبيق : لتكن A " كل قطعة تحوي حبة لؤلؤ على الأقل "

* الجدول التالي يبين الحالات المختلفة لعدد حبات اللؤلؤ في كل قطعة

القطعة 1	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
القطعة 2	**0**	**3**	**0**	**1**	**2**	**0**	**2**	**0**	**1**	**1**
القطعة 3	**3**	**0**	**0**	**2**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**1**

$$\text{P(A)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـA}}{\text{عدد الحالات الكلية}} \qquad P(A) = \frac{6}{10} = 0,6$$



2) استعمال الشجرة

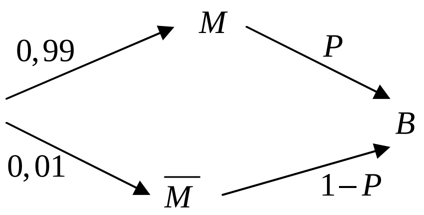
$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(U_1 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(U_1 / B) = \frac{P(U_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5}$$

تطبيق :اختبار الكشف عن مرض :

نضع : T " الاختبار موجب " ، M " الشخص مريض "



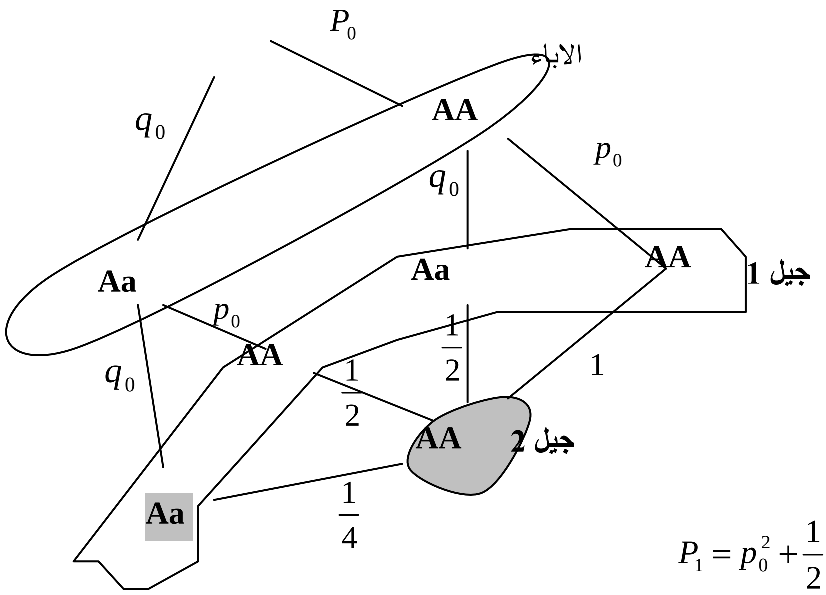
$$P(T) = 0,99 \times p + 0,01 \times (1-p)$$
$$= 0,98p + 0,01$$

$$P(M / T) = P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,99p}{0,98p + 0,01} = \frac{99p}{98p+1}$$

الأعمال الموجهة (2)

علم الوراثة :

حسب الشجرة (المخطط) المقابلة لدينا



$$P_1 = p_0^2 + \frac{1}{2} p_0 q_0 + \frac{1}{2} p_0 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$$

بالمثل نجد $r_1 = \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

و نستنتج أن $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2$

2) و بما أن $\alpha = p_0 - r_0$ ينتج $q_0 = 1 - p_0 - r_0$

و منه $p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2} - p_0 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$ بالمثل نجد $r_1 = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

ملاحظة : $p_1 - r_1 = \alpha = p_0 - r_0$

وبالتالي $q_1 = 1 - p_1 - r_1 = \frac{1-\alpha^2}{2}$

لاحظ أن : $p_0+q_0+r_0=1$ ، $p_1+q_1+r_1=1$ ..... و هكذا

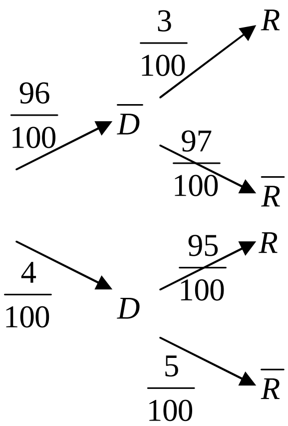
و مادام $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$ فبالنسبة للجيل الثاني يمكن التعبير عن $r_2;p_2;q_2$ بدلالة α مع $\alpha = p_1 - r_1$

الخلاصة :

تبقى النتائج ثابتة من أجل أس جيل أي $r_n = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ ، $q_n = \frac{1-\alpha^2}{2}$ ، $p_n = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$

مفاتيح USB :

نضع D " مفتاح USB غير صالح " ، R " وحدة الفرز ترفض مفتاح USB "



لدينا $p(D)=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$ و منه $p(\overline{D}) = 1-p(D)=\frac{24}{25}$

و أيضا $p_{\overline{D}}(R)=\frac{3}{100}$ و منه $p_{\overline{D}}(\overline{R})=1-p_{\overline{D}}(R)=\frac{97}{100}$

و أيضا $p_D(R)=\frac{95}{100}=\frac{19}{20}$ و منه $p_D(\overline{R})1-p_{\overline{D}}(\overline{R})=\frac{1}{20}$

و نلخص هذه النتائج كما يلي على الشجرة

1) أ) $p_1 = p(D\cap\overline{R}) = p(D)\times p_D(\overline{R})=\frac{1}{500}=0,002$

$$p_2 = p(R\cap \overline{D}) = p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(\overline{R})=\frac{18}{625}=0,0288$$

$$p_3 = p(\overline{D}\cap R)+p(\overline{R}\cap D)=p_2+p_1=\frac{77}{2500}\simeq 0,031$$

ب) $p_4 = p(\overline{R})= p(D)\times p_D(\overline{R})+p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(\overline{R})=\frac{2333}{2500}\simeq 0,933$

2) حسب قانون برنولي و من أجل تحقق الحادثة R ، k مرة من بين n محاولة لدينا

$$p(R)=C_n^k\,[p(R)]^k\times\left[p(\overline{R})\right]^{n-k}$$

و منه $p_5 = C_5^1 p(R)\times\left[p(\overline{R})\right]^4 \simeq 0,249$ و بالمثل ينتج $p_6\simeq 0,708$; $p_7=1-p_5-p_6\simeq 0,044$

التمارين

6

$P(F)$	$P(\overline{F})$	$P_F(B)$	$P_F(\overline{B})$	$P_{\overline{F}}(B)$	$P_{\overline{F}}(\overline{B})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

9 1) أ) $p(X\le 10)=1-e^{-0,08(10)}=1-e^{-0,8}\simeq 0,55$

ب) $p(X\ge 30)=1-p(X\prec 30)=1-(1-e^{-0,08(30)})=e^{-2,4}\simeq 0,09$

2) $E(X)=\frac{1}{\lambda}=12,5$

25 – للانتقال من O الى A ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات اثنتان في اتجاه $\vec{i}$ و اثنتان في اتجاه $\vec{j}$ و بترتيب الخطوات الأربعة تنتج المسارات المطلوبة و التي عددها $C_4^2 = 6$

– للانتقال من B(4 ; 3) الى C(5 ; 6) ينبغي على العنكبوت سير 4 خطوات ، 1 = 4 - 5 خطوة في اتجاه $\vec{i}$ و 6 – 3 = 3 خطوة في اتجاه $\vec{j}$ و عليه عدد المسارات من B الى C هو $C_4^1 = 4$

و عليه تكون النتائج كمايلي

السؤال	1	2	3	4	5
عدد المسارات	$C_4^2 = 6$	$C_7^3 = 35$	$C_{11}^5 = 462$	$C_4^2 \times C_7^3 = 210$	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_4^1 = 72$

37 (1 $a = \frac{13}{60}$ (2 $P(X \geq \frac{5}{2}) = p(X \geq 3) = \frac{5}{12}$ **(3** $P(X \prec 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$

(4 $P(X^2 - 6X + 8 \prec 0) = p\left[(X-4)(X-2) \prec 0\right] = p(2 \leq X \leq 4) = \frac{2}{3}$

65 (1 $p(F) = 1 - \frac{12}{100} = \frac{88}{100} = 0,88$ ، $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = 0,2$ ، $p_F(\overline{L}) = 0,08$

(2 أ) $p(\overline{F} \cap \overline{L}) = p(\overline{F}) \times p(\overline{L}) = 0.2 \times 0.12 = 0.024$

ب) $p(\overline{F} \cap L) = p(\overline{F}) \times p(L) = 0.88 \times 0.08 = 0.0704$

ج) $p(\overline{F}) = p(\overline{F} \cap L) + p(\overline{F} \cap \overline{L}) = 0,024 + 0,0704 = 0.0944$

(3 $p_{\overline{F}}(\overline{L}) = \frac{p(\overline{F} \cap \overline{L})}{p(\overline{F})} = \frac{0,024}{0,0944} \simeq 0,25$

(4 أ) $p(F \cap L) = 1 - (0,024 + 0,0704 + 0,0964) = 0,8096$

ب) $p = 1 - (0,8096)^{20} \simeq 0,985$

كتاب الأستاذ

الشعب:

- رياضيات
- تقني رياضي
- علوم تجريبية

الجزء الثاني

الباب الأول

المتتاليات العددية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مبدأ الاستدلال بالتراجع.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " مبدأ الاستدلال بالتراجع " و يتم إنجازه ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل:

1)

A	B	C
العدد الفردي n	مجموع الأعدلد الفردية	جذر المجموع
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12
25	169	13
27	196	14
29	225	15
31	256	16
33	289	17
35	324	18
37	361	19
39	400	20
41	441	21
43	484	22
45	529	23
47	576	24
49	625	25
51	676	26
53	729	27
55	784	28
57	841	29
59	900	30
61	961	31
63	1024	32
65	1089	33
67	1156	34
69	1225	35
71	1296	36
73	1369	37
75	1444	38
77	1521	39
79	1600	40
81	1681	41
83	1764	42
85	1849	43
87	1936	44
89	2025	45
91	2116	46
93	2209	47
95	2304	48
97	2401	49
99	2500	50

2) $1+3+...+55=784=28^2$.

3) $1+3+...+87=1936=44^2$.

4) $1+3+...+(2n-1)=\left(\dfrac{2n-1+1}{2}\right)^2=n^2$.

5) نضع $A=1+3+...+(2n-1)+(2n+1)$

إذن $A=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: التذكير بالمتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم الفقرة " تذكير حول المتتاليات " و يتم إنجازه ضمن أفواج.

الحل:

$A.1$)

u1	u2	u3	u4	u5	u6	u7
15000	17250	19837,5	22813,13	26235,09	30170,36	34695,91

2) ليكن n عددا طبيعيا ، $u_{n+1}=u_n+0{,}15u_n=1{,}15u_n$ ؛ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها 1,15 وحدها الأول $u_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=15000\times1{,}15^n$.

4) ابتداء من $n=5$ يكون $u_n>25000$.

$B.1$)

v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
15000	16500	18000	19500	21000	22500	24000

2) ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=v_n+1500$ ؛ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1500 وحدها الأول $v_1=15000$.

3) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n=1500n+15000$.

4) ابتداء من $n=8$ يكون $v_n>25000$.

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم متتالية محدودة من الأعلى.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتالية محدودة ... " و يتم ضمن أفواج كما يتم استغلال جهاز الداتاشو لملاحظة التقارب.

الحل:

A. 1) $D_f=[-6;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \frac{f(x)-f(-6)}{x+6}=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -6} \frac{\sqrt{x+6}}{x+6}=+\infty$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق على يمين -6؛ و (C_f) يقبل مماسا موازيا لمنحى $\vec{j}$ عند النقطة ذات الفاصلة -6 .

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4) لدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+6}}$ ومن أجل كل x من المجال $]-6;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $[-6;+\infty[$.

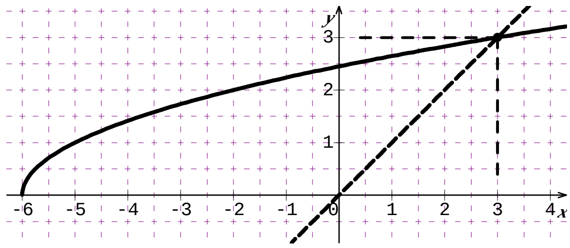
5)

x	-6 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

6) $\sqrt{x+6}=x$ معناه $x^2-x-6=0$ ؛ $\Delta=25$ ؛ $x'=-2$ ؛ $x'=3$

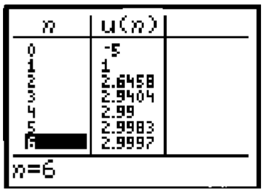
بما أن $x\in D_f$ فإن تقاطع (C_f) و (Δ) هو النقطة ذات الإحداثيتين $(3;3)$.

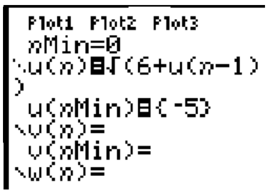
7)



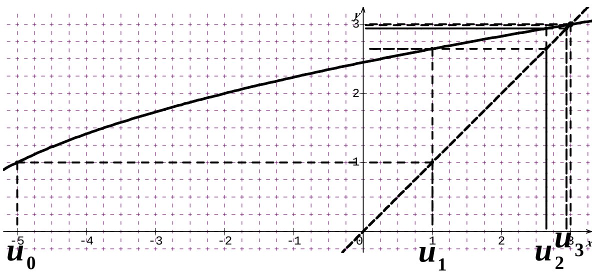
B. 1) $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}=f(u_n)$ ، لدينا $u_1>0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، إذا كان $u_n\in]0;+\infty[$ فإن $f(u_n)\in]0;+\infty[$

2) استعمال $TI\ 83\ plus$.





3)



4) تبدو المتتالية (u_n) متزايدة.

5) من الجواب 2) تبدو المتتالية (u_n) أنها تقترب من **3** .

6) $u_{n+1}-u_n=\sqrt{6+u_n}-u_n=\frac{-u_n^{\ 2}+u_n+6}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $\sqrt{6+u_n}+u_n>0$.

و $0<u_n<3$ إذن $-2<u_n<3$ ومنه $-u_n^{\ 2}+u_n+6>0$.

<u>النشاط الرابع</u>

<u>تصحيح:</u> /

<u>الهدف:</u> مقاربة مفهوم متتاليتين متجاورتين.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " متتاليتان متجاورتان " و يتم ضمن أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو قصد ملاحظ اتجاه تغير كل من المتتاليتين و تقاربهما.

الحل:

يمكن اعتبار الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$ ؛ $g(x)=\dfrac{3x+10}{x+2}$.

1) لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لدينا $g'(x)=\dfrac{-4}{(x+2)^2}$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ إذن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3) لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}-\dfrac{3n+10}{n+2}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=3-3=0$.

4) نلاحظ أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3$

الأعمال الموجهة

دراسة متتالية تراجعية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$

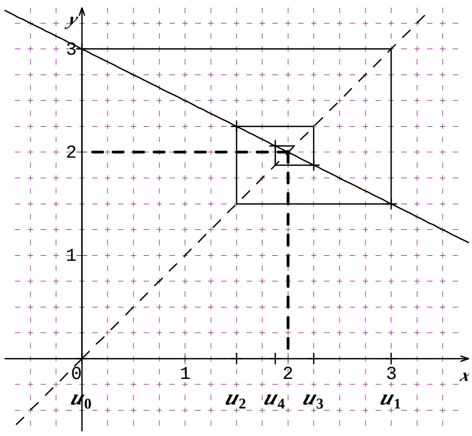
الهدف: دراسة اتجاه تغير و تقارب متتالية من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

.1 1) المتتالية (u_n) ليست رتيبة وتبدو أنّها تتقارب نحو 2 .

(2



3) $-\dfrac{1}{2}x+3=x$ معناه $x=2$. إذن $\alpha=2$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}-2=-\dfrac{1}{2}u_n+1$ أي :

$v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(v_n+2)+1=-\dfrac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) هندسية.

لدينا $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n+2=2$.

.2 1) إذا كان $a=0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=b$.

ومنه إذا كان $u_0=b$ فإن (u_n) ثابتة وإذا كان $u_0\neq b$ فإن (u_n) تكون ثابتة ابتداء من الحد الثاني.

2) إذا كان $a=1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n+b$. إذن المتتالية (u_n) حسابية أساسها b.

3) $a\neq 0$ و $a\neq 1$.

- الوضعية النسبية للمستقيمين (D) و (Δ) تستنتج من إشارة العبارة $(a-1)x+b$.

إذا كان $a\in]-\infty;0[\cup]0;1[$ فإن :

(Δ) يقع فوق (D) لما يكون $x\in\left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$؛

و (Δ) يقع أسفل (D) لما يكون $x\in\left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

إذا كان $a\in]1;+\infty[$ فإن :

(Δ) يقع أسفل (D) لما يكون $x\in\left]-\infty;\frac{-b}{a-1}\right[$؛

و (Δ) يقع فوق (D) لما يكون $x\in\left]\frac{-b}{a-1};+\infty\right[$.

- $\alpha=\frac{-b}{a-1}$.

- ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{b}{a-1}$ أي $v_{n+1}=au_n+b+\frac{b}{a-1}=a\left(v_n-\frac{b}{a-1}\right)+\frac{ba}{a-1}$ معناه $v_{n+1}=av_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها a.

4) $u_{n+1}=-u_n+b$ ؛ $u_0=u_0$؛ $u_1=-u_0+b$ ؛ $u_2=u_0$ ؛ $u_3=-u_0+b$ ؛ $u_4=u_0$ ؛ $u_5=-u_0+b$ ؛ $u_6=u_0$.

نلاحظ أنّه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$: $u_{2p}=u_0$ و $u_{2p+1}=-u_0+b$

بصيغة أخرى من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=(-1)^n\left(u_0-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}$.

للبرهان على التخمين يمكن استعمال السؤال 3) لدينا $u_n=v_n+\alpha=v_n+\frac{b}{2}=v_0(-1)^n+\frac{b}{2}$ ؛ أي

$u_n=\left(u_0-\frac{b}{2}\right)(-1)^n+\frac{b}{2}$.

متتالية متقاربة نحو العدد e

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة الأسية و المتتاليات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

1. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-(1+x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{e^x}{x}-\frac{1+x}{x}\right]=+\infty$.

$f'(x)=e^x-1$ ومنه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1. 2) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)\geq0$ معناه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x\leq e^x\ldots(1)$

1. 3) بوضع $x=-X$ تصبح (1) $1-X\le e^{-X}$ وبفرض $X<1$ أي $1-X>0$ يكون $\frac{1}{e^{-X}}\le\frac{1}{1-X}$

أي $e^{X}\le\frac{1}{1-X}$. وبالتالي إذا كان $x<1$ فإن $e^{x}\le\frac{1}{1-x}\ \ldots(2)$

2. 1) بوضع $x=\frac{1}{n}$ تصبح (1) $1+\frac{1}{n}\le e^{\frac{1}{n}}$ أي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e$.

2. 2) بوضع $x=-(n+1)$ يكون $-(n+1)<1$ والمتباينة (2) تصبح $e^{-(n+1)}\le\frac{1}{n+2}$ إذن

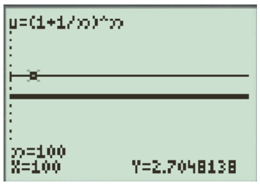
$e^{-(n+1)}\le\frac{1}{n+2}\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}+1$ ومنه $e\le\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}$

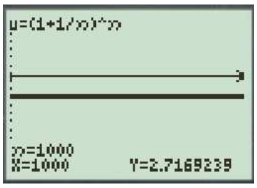
3. 1) لدينا $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ معناه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-u_n\le e-u_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-u_n$ أي

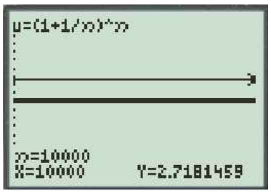
$0\le e-u_n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n}$ ولدينا $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le e\le 3$ إذن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{n}\le\frac{3}{n}$ وبالتالي $0\le e-u_n\le\frac{3}{n}$.

3. 2) لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}e-u_n=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=e$.

3. 3)







تطبيق

1) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)\left[(n+1)!\right]}-\frac{1}{n(n!)}+\frac{1}{(n+1)!}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n!)}\left[\frac{-1}{n(n+1)^2}\right]$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

3) $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n!)}=0$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية.

حساب مساحة

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليتين المتجاورتين.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج .

الحل: بسيط

متتالية متقاربة نحو العدد $\ln(2)$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الدالة اللوغاريتمية و المتتاليات.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل:

الجزء الأول

1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ،

2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	1	2	3	4	5	6	7	8
2	u	0,5	0,5833	0,6167	0,6345	0,6456	0,6532	0,6587	0,6629

الجزء الثاني

1) نعتبر الدالتين g و h حيث $g(x)=1-x+\ln x$ و $h(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=-\infty$.

$$g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

إذن من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، $g(x)\le 0$ معناه $1-x+\ln x\le 0$ أي $\ln x\le x-1$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-\dfrac{1}{x}(1+x\ln x)=-\infty$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$. $h'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

إذن من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، $h(x)\le 0$ معناه $1-\dfrac{1}{x}-\ln x\le 0$ أي $1-\dfrac{1}{x}\le \ln x$.

خلاصة $1-\dfrac{1}{x}\le\ln x\le x-1$.

2) ليكن p عدد طبيعي **<u>غير معدوم</u>**.

نضع $x=\dfrac{p+1}{p}$ وبالتعويض في المتباينة السابقة نجد : $1-\dfrac{p}{p+1}\le\ln\dfrac{p+1}{p}\le\dfrac{p+1}{p}-1$ و هذا يعني $\dfrac{1}{p+1}\le\ln\dfrac{p+1}{p}\le\dfrac{1}{p}$.

3) a) $\dfrac{1}{n+1}\le\ln\dfrac{n+1}{n}\le\dfrac{1}{n}$ ؛ $\dfrac{1}{n+2}\le\ln\dfrac{n+2}{n+1}\le\dfrac{1}{n+1}$ ؛ ... ؛ $\dfrac{1}{2n}\le\ln\dfrac{2n}{2n-1}\le\dfrac{1}{2n-1}$.

b) الطرف 1 : $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n}=u_n$. الطرف 2 : $\ln 2=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\dfrac{2n}{2n-1}\right)$.

الطرف3: $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}=\dfrac{1}{n}+u_n-\dfrac{1}{2n}$ أي $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{2n-1}=u_n+\dfrac{1}{2n}$

إذن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$.

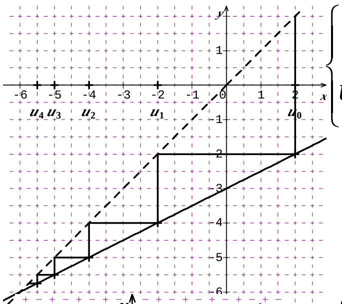
4) المتباينة السابقة تكافئ $0 \le \ln 2 - u_n \le \frac{1}{2n}$ ولدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ إذن $\lim_{n\to+\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

التمارين

التمارين التطبيقية

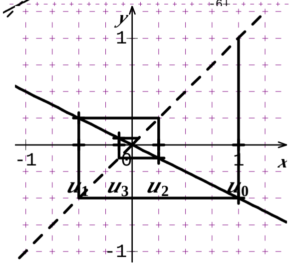
1 - تذكير بالمتتاليات العددية.

1 أ - $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$



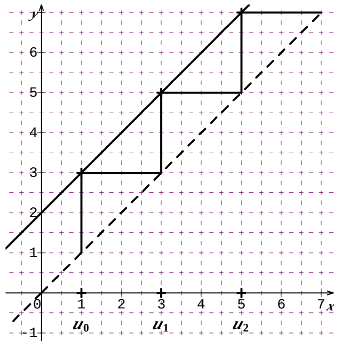
متناقصة تماما.

ب - $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$.



ليست رتيبة .

جـ - $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$.



متزايدة تماما.

2 $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{5}r$

و $w_{n+1} - w_n = u_{3n+3} - u_{3n} = u_{3n} + 3r - u_{3n} = 3r$.

3 لدينا $(90 - 2r) + (90 - r) + 90 = 180$ ومنه $3r = 90$ أي $r = 30$ إذن الأقياس هي 30°، 60° و 90°.

4 1) استعمال التراجع.

2) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{v_n + 1}{v_n} = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + u_n$ إذن (u_n) حسابية أساسها 1.

5 $u_7 = u_3 + 4r$ معناه $r = \frac{u_7 - u_3}{4}$ أي $r = 6$ ؛

$u_{17} = u_3 + 14r = 97$.

6 1) $u_n = u_1 + 3(n-1) = 3n - 5$.

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = \frac{20}{2}(u_1 + u_{20})$ ولدينا $u_{20} = 55$ إذن $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = 530$.

7 $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \ldots + 10$.

S هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ $a_n = a_1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n$

إذن $a_n = 10$ معناه $n = 20$ وبالتالي $S = \frac{20}{2}\left(\frac{1}{2} + 10\right)$

أي $S = 105$.

8 $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{7^{n+2}} = \frac{5^n \times 5}{7^{n+1} \times 7} = \frac{5^n}{7^{n+1}} \times \frac{5}{7} = u_n \times \frac{5}{7}$.

9 $q^3 = \frac{u_{10}}{u_7} = \left(\frac{18}{11}\right)^3$ ؛ $q = \frac{18}{11}$ ؛ $u_{30} = u_{10} \times q^{20}$

أي $u_{30} = \frac{27 \times 18^{20}}{11^{23}}$

10 1) $u_n = -2 \times 3^{n-1}$.

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = (-2)\frac{3^7 - 1}{3 - 1} = -2186$.

3) $v_{n+1} = u_{2n+2} = u_{2n} \times 3^2 = 9v_n$.

إذن (v_n) هندسية أساسها 9 وحدها الأول $v_1 = u_2 = -6$

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (-6)\frac{9^n - 1}{9 - 1} = -\frac{3}{4}(9^n - 1)$.

11 1) $u_3 = 9\,u_1$ معناه $u_1 \times q^2 = 9u_1$ أي $q^2 = 9$

لأن $u_1 > 0$ وعليه $q = 3$ أو $q = -3$ وبما أن كل الحدود موجبة تماما فإن $q = 3$.

2) $u_n = u_0 \times q^n = 2\times 3^n$.

3) $s_n = u_0 \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} = 3^{n+1}-1$.

2 ـ الاستدلال بالتراجع .

12 $p(0)$ تعني $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$.

إذا كانت $1+2+...+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ فإن

$$1+2+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$

أي $1+2+...+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

13 $p(0)$ تعني $0^2 = \dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.

إذا كانت $1^2+2^2+...+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

14 $p(0)$ تعني $0^3 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

إذا كانت $1^3+2^3+...+k^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$ فإن

$$1^3+2^3+...+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

15 أ) $p(1)$ تعني $u_1 > 1$ أي $2>1$.

$u_k > 1$ معناه $\sqrt{u_k} > \sqrt{1}$ ومعناه $u_{k+1} > 1$.

ب) $p'(1)$ تعني $u_2 \le \dfrac{3}{2}$ أي $\sqrt{2} \le \dfrac{3}{2}$.

إذا كان $u_{k+1} \le \dfrac{3}{2}$ فإن $u_{k+1} \le \dfrac{9}{4}$ ومنه $\sqrt{u_{k+1}} \le \sqrt{\dfrac{9}{4}}$

مع الملاحظة أن $u_{k+1} > 1$ إذن $u_{k+2} \le \dfrac{3}{2}$.

16 $p(n)$ هي الخاصية " $u_n = 3$ "

$p(0)$ تعني $u_0 = 3$.

إذا كان $u_k = 3$ فإن $u_{k+1} = \sqrt{6+u_k} = \sqrt{9} = 3$.

17 1) $p(0)$ تعني $0 < u_0 < 1$

$0 < u_k < 1$ معناه $0^2 < u_k^{\,2} < 1^2$ أي $0 < u_{k+1} < 1$.

2) $u_{n+1} - u_n = u_n(u_n - 1)$ بما أن $0 < u_n < 1$ فإن

$u_n > 0$ و $u_n - 1 < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n < 0$.

18 $p(0)$ تعني $2^0 - 1$ مضاعف لِـ 7 .

لدينا $2^{3k} - 1 = 7\alpha$ معناه $2^{3k} = 7\alpha + 1$.

أي $2^{3(k+1)} - 1 = 8\times 2^{3k} - 1 = 8\times(7\alpha+1) - 1$

$2^{3(k+1)} - 1 = 7\times(8\alpha+1)$.

19 $p(0)$ تعني $3^0 - 1$ مضاعف لِـ 8.

لدينا $3^{2k} - 1 = 8\alpha$ معناه $3^{2k} = 8\alpha + 1$.

أي $3^{2(k+1)} - 1 = 9\times 3^{2k} - 1 = 9\times(8\alpha+1) - 1$

$3^{2(k+1)} - 1 = 8\times(9\alpha+1)$.

20 $p(n)$ هي " <u>$3^{2n} - 2^n$</u> مضاعف للعدد 7 "

$p(0)$ هي الخاصية $3^0 - 2^0$ مضاعف لِـ 7 .

$3^{2n} - 2^n = 7\alpha$ معناه $3^{2n} - 2^n = 7\alpha + 2^n$.

أي $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9\times 3^{2n} - 2\times 2^n$

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9(7\alpha + 2^n) - 2\times 2^n = 7(9\alpha + 2^n)$$

يمكن اعتبار $p(n)$ هي " <u>$3^{2n+1} + 2^{n+2}$</u> مضاعف للعدد 7 ".

21 $p(0)$ تعني $0^3 - 2\times 0$ يقبل القسمة على 3 .

نفرض أن $n^3 + 2n = 3\alpha$

لدينا $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3$

أي $(n+1)^3 + 2(n+1) = 3\alpha + 3n^2 + 3n + 3$.

22 1) لدينا $10^n + 1 = 9\alpha$ معناه $10^n = 9\alpha - 1$ أي

$10^{n+1} = 90\alpha - 10$ ومعناه $10^{n+1} = 9(10\alpha - 1) - 1$.

2) من أجل $n = 0$ ، $10^0 + 1 = 2$ و 2 ليس مضاعف لِـ9 .

3 - تقارب متتالية عددية.

23 لدينا $-10^{-3}<u_n<10^{-3}$ معناه $0<\frac{1}{n\sqrt{n}}<10^{-3}$

ومعناه $n\sqrt{n}>\frac{1}{10^{-3}}$ ويكافئ $n^3>10^6$ أي $n>10^2$.

24 $u_n>10^6$ معناه $n\sqrt{n}>10^6$ ومعناه $n^3>10^{12}$

أي $n>10^4$.

25 لدينا $u_n=\frac{3}{2^n}$ ؛ $u_n<10^{-5}$ معناه $2^n>3\times10^5$

أي $n>\frac{3\times10^5}{\ln 2}$ إذن ابتداء من الدليل 432809.

26 لدينا $u_n=3^n$ ؛ $u_n>10^{12}$ معناه $3^n>10^{12}$ أي

$n>\frac{10^{12}}{\ln 3}$ إذن ابتداء من الدليل 910239226627.

27 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{2n-1}=\frac{3}{2}$. (2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n-2}{4n-3}=\frac{5}{4}$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-\frac{2}{n+1}=+\infty$.

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3}-4+\frac{n+2}{n^2+1}=+\infty$.

28 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2-3n+2}{n^2-n+1}=7$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n^2+4n+2}{(n+2)^2}=-1$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-3n+12}{n^2+1}=0$. (4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n}{4n+3}=+\infty$.

29 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$.

(3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{2n+1}=0$.

(4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n}+n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\sqrt{n}+1\right)=+\infty$.

30 (1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{3\pi n+2}{2n+\pi}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$.

(2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{-3\pi n+2}{n+2\pi}\right)=\cos(-3\pi)=-1$.

(3 $u_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{17}$. لدينا $-\frac{1}{n}\le u_n\le\frac{1}{n}$ ،

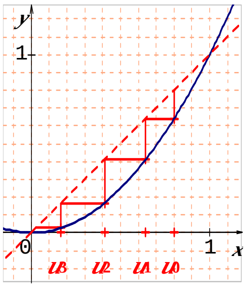
بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

31 (1 تقاطع $\mathscr{C}$ و Δ هما النقطتان $O(0;0)$ و $A(1;1)$.

(2 f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ إذن (u_n) متزايدة تماما.

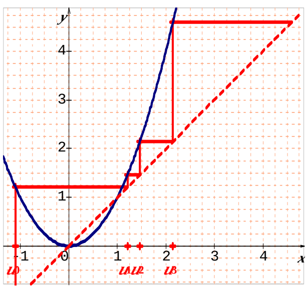
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ومنه (u_n) متباعدة.

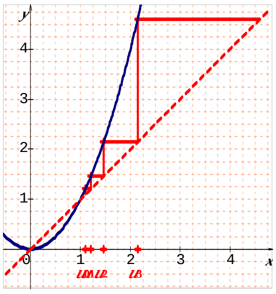
(3 في حالة $v_0=0{,}8$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما وتتقارب نحو 0



في حالة $v_0=-1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

في حالة $v_0=1{,}1$ نلاحظ أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$





(4 لدينا $f(0)=0$ و $f(1)=1$ إذن باختيار $v_0=0$ أو $v_0=1$ فتكون (v_n) ثابتة.

4 - المتتاليات المحدودة.

32 لدينا $u_{10^4}=5-\frac{10}{10^8}=5-10^{-7}=4{,}9999999$

ومنه $u_{10^4}>4{,}99999$ إذن العددين 0 و 4,99999 ليس عنصران حادان من الأعلى للمتتالية (u_n).

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $-\frac{10}{n^2}<0$

ومنه $u_n<5$ وبالتالي 5 و 6 هما عنصران حادان من الأعلى للمتتالية.

33 أ - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $-1\le\sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)\le1$

إذن (u_n) محدودة بـ -1 و 1.

ب - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $1<1+\frac{1}{n^2}\le 2$ إذن (u_n) محدودة بـ 1 و 2 .

جـ- لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $1<1+\frac{1}{n+2}<2$ إذن (u_n) محدودة بـ 1 و 2 .

د - لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0<\frac{1}{1+n^2}\le 1$ إذن (u_n) محدودة بـ 0 و 1 .

34 **أ -** $u_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ؛ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0\le u_n<1$.

ب - $u_n=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$ ؛ $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ ؛

$f'(x)=\frac{4x}{2(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

x	$1 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $0\le u_n<1$.

جـ - $u_n=\frac{-3}{\sqrt{3n+2}}$ ؛ $f(x)=\frac{-3}{\sqrt{3x+2}}$

$$f'(x)=\frac{9}{2(3x+2)\sqrt{3x+2}}$$

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{-3\sqrt{2}}{2} \nearrow 0$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\frac{-3\sqrt{2}}{2}\le u_n<0$.

35 **أ -** $u_n=2^n$ ؛ (u_n) متتالية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0=1$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n=n\sqrt{3}-2$ ؛ (u_n) متتالية حسابية متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0=-2$ وبما أنها غير متقاربة أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ فإنها غير محدودة من الأعلى.

جـ - $u_n=n^2+n-1$ ؛ $f(x)=x^2+x-1$ ؛ $f'(x)=2x+1$

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0=-1$ فقط.

36 **أ -** $u_n=\frac{1}{n+1}+n^2$ ؛ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>n^2\ge 0$ إذن (u_n) محدودة من الأسفل وغير محدودة من الأعلى.

ب - $u_n=n+\cos n$ ؛ $f(x)=x+\cos x$ ؛ $f'(x)=1-\sin x$ ولدينا $1-\sin x\ge 0$.

بما أن $x-1\le x+\cos x$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$0 \quad +$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

(u_n) محدودة من الأسفل بـ $u_0=1$ فقط.

جـ - $u_n=(-1)^n\times n^2$ ؛ إذا كان n زوجيا فإن $u_n=n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأعلى؛ وإذا كان n فرديا فإن $u_n=-n^2$ وبالتالي (u_n) ليست محدودة من الأسفل.

37 (1 $f(x)=x^2-5x+6$ ؛ $f'(x)=2x-5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) الدالة f متزايدة تماما على $[4;+\infty[$ إذن من أجل كل $x\ge 4$ ، $f(x)\ge f(4)$ أي $x^2-5x+6\ge 2$.
وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4، $n^2-5n+6\ge 2$ و هذا يعني $\frac{1}{n^2-5n+6}\le\frac{1}{2}$.

5 - المتتاليتان المتجاورتان .

38 $u_n=\frac{-1}{2n+4}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$ ؛ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$
و $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ إذن (u_n) متزايدة
و (v_n) متناقصة ، ولدينا $u_n-v_n=\frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$ إذن
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ وبالتالي (u_n) و (v_n) متجاورتين.
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

39 $u_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ و $v_n=1+\frac{1}{n^2}$ ؛
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n(n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.
$v_{n+1}-v_n=\frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ إذن (v_n) متناقصة.
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$.

40 أ - $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{(n+1)(n+2)}$
ومنه (u_n) متزايدة.
$v_n=\frac{2n+3}{n+1}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n+2)(n+1)}$ ومنه
(v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6}{n+1}=0$
إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .
ب - $u_n=3+\frac{(-1)^n}{n}$ ؛ $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n+1}$
ومنه (u_n) ليست رتيبة وبالتالي (u_n) و (v_n) غير متجاورتين .

41 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.
$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$
إذن (v_n) متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

42 $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$ ؛
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$ إذن (u_n) متزايدة.
$v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}$ ؛
$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{2n(2n+1)}$ إذن (v_n) متناقصة.
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

43 $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ ؛
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ إذن (u_n) متزايدة.
$v_n=u_n+\frac{1}{n}$ ؛ $v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{n(n+1)^2}$ إذن (v_n)
متناقصة. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=0$.

44 $u_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$ ؛
$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)}\right)}$

ومنه (u_n) متزايدة.

$v_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$ ؛

$v_{n+1}-v_n=\frac{-2n^2-2n-1}{\sqrt{n+1}\left(2\sqrt{n(n+1)}+(2n+1)\right)}$ ومنه

(v_n) متناقصة.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$

تمارين للتعمّق

1 - تذكير بالمتتاليات العددية .

45 $u_n=\frac{\ln n}{n}$ ؛ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ؛

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ؛ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)\le 0$ معناه $x\ge e$ ؛ إذن f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ وبالتالي (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3.

46 $u:n\mapsto\frac{5^n}{n!}$ ؛ كل حدود u موجبة تماما ؛ ولدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5}{n+1}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ معناه $\frac{5}{n+1}<1$ أي $n>4$

إذن المتتالية u تكون متناقصة ابتداء من الدليل 5 أي الرتبة السادسة.

47 $u:n\mapsto\frac{n!}{7^n}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{7}$ ؛ $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ معناه $n>6$ إذن u تكون متزايدة ابتداء من الدليل 7 أي الرتبة الثامنة.

48 $u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ ؛

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$.

$v_{n+1}-v_n=\frac{-1}{(n!)n(n+1)^2}$ إذن $v_{n+1}-v_n<0$.

49 1) أ – $\begin{cases}v_1+v_2+v_3=24\\ v_4+v_5+v_6+v_7=74\end{cases}$ معناه

$\begin{cases}v_1+r=8\\ 2v_1+9r=37\end{cases}$ أي $\begin{cases}v_1=5\\ r=3\end{cases}$.

ب – $v_n=3n+2$ ؛ $v_n>6023$ معناه $n>2007$

وبالتالي أصغر عدد طبيعي n هو 2008 .

2) $2S_n=n(3n+7)$ معناه $n(u_1+u_n)=n(3n+7)$

أي $(d-3)n-d+2u_1-7=0$ إذن $d=3$ و $u_1=5$.

50 (u_n) متتالية حسابية أساسها -5 و $u_0=-4$.

1) $u_n=-5n-4$.

2) $S=u_{26}+u_{27}+...+u_{125}=50(u_{26}+u_{125})$ أي

$S=50(-5\times26-4-5\times125-4)=-38150$

51 $u_0=2$ ، $4u_{n+1}-2u_n=9$ ، $v_n=2u_n-9$

أ - $u_1=3,25$ ، $u_2=3,875$ و $u_3=4,1875$.

$v_0=-5$ ، $v_1=-2,5$ ، $v_2=-1,25$ و $v_3=-0,625$.

ب - $v_{n+1}=2u_{n+1}-9=u_n-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}v_n$

جـ - $v_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n=-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{9}{2}$.

د - $v_0+v_1+...+v_n=10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛

$u_0+u_1+...+u_n=5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]-\frac{9}{2}(n+1)$.

52 $u_0=14$ ، $u_{n+1}=4u_n+3$ ، $v_n=u_n+1$.

1) $v_{n+1}=u_{n+1}+1=4(u_n+1)=4v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+1=15$.

2) $v_n=15\times4^n$ ؛ $u_n=15\times4^n-1$.

(3 $S_n=u_0^2+u_1^2+...+u_n^2$ ؛ لدينا

$u_n^2=225\times4^{2n}-30\times4^n+1$ ومنه

$$S_n=225\left(4^0+4^2+...+4^{2n}\right)-30\left(4^0+4^1+...+4^n\right)+n+1$$

$.S_n=15\times4^{2(n+1)}-10\times4^{n+1}+n-4$

53 (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_0=\frac{2}{9}$

$$S=u_3+u_4+...+u_{10}=u_3\frac{3^8-1}{2}=\frac{2}{9}\times3^3\times\frac{3^8-1}{2}$$

أي $.S=19680$

54 $S=0,02-0,1+0,5-2,5+...+312,5$ ؛

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها -5؛

بوضع $u_1=0,02$ يكون $u_n=0,02(-5)^{n-1}$

$u_n=312,5$ معناه $(-5)^{n-1}=15625$ أي $.n=7$

$$.S=0,02\frac{(-5)^7-1}{-6}=-52,08$$

55 $u_n=2\times3^n+3\times4^n$. $s_n=u_0+u_1+...+u_n$

$$.s_n=2\frac{3^{n+1}-1}{2}+3\frac{4^{n+1}-1}{3}=3^{n+1}+4^{n+1}-2$$

56 $u_1=1$ ، $u_{n+1}=2u_n+3$ ، $v_n=u_n+3$

(1 $v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+6=2v_n$ إذن (v_n) هندسية أساسها 2.

- $v_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$ ؛ $.u_n=2^{n+1}-3$

(2 $.s_n=v_1\frac{2^n-1}{2-1}=2^{n+2}-4$

- $u_1+u_2+...+u_n+3n=v_1+v_2+...+v_n$ أي

$u_1+u_2+...+u_n+3n=2^{n+2}-4=4\left(2^n-4\right)$.

57 $u_0=\frac{1}{6}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n-\frac{5}{8}$ ، $.v_n=2u_n+\frac{5}{3}$

(1 $u_1=-\frac{7}{12}$ ، $u_2=-\frac{37}{48}$ و $u_3=-\frac{157}{192}$. $v_0=2$ ،

$v_1=\frac{1}{2}$ و $v_2=\frac{1}{8}$.

(2 $v_{n+1}=2u_{n+1}+\frac{5}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{12}=\frac{1}{4}v_n$ إذن (v_n)

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$. - $v_n=\frac{2}{4^n}$ ؛ $u_n=\frac{1}{4^n}-\frac{5}{6}$.

(3 أحسب بدلالة n كلا من s_n و t_n حيث :

$$s_n=v_0+v_1+...+v_n=2\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}=-\frac{2}{3\times4^n}+\frac{8}{3}\text{،}$$

لدينا $u_n=\frac{1}{2}v_n-\frac{5}{6}$ ومنه $.t_n=-\frac{1}{3\times4^n}-\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}$

58 من أجل كل $n\geq1$: $\begin{cases}u_0=2\ ,\ u_1=4\\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1}\end{cases}$.

(1 $\begin{cases}a+b=4\\ ab=1\end{cases}$ ؛ a و b هما حلا المعادلة

$x^2-4x+1=0$ إذن $(a;b)=\left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$ أو

$.\ (a;b)=\left(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

(2 $v_n=u_{n+1}-au_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

$v_{n+1}=u_{n+2}-au_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-au_{n+1}$ أي

$v_{n+1}=(4-a)u_{n+1}-u_n=bu_{n+1}-abu_n$ أي

$v_{n+1}=bv_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

(3 $w_n=u_{n+1}-bu_n$ ؛ ليكن n عددا طبيعيا ،

$w_{n+1}=u_{n+2}-bu_{n+1}=4u_{n+1}-u_n-bu_{n+1}$

أي $w_{n+1}=(4-b)u_{n+1}-u_n=au_{n+1}-abu_n$

$w_{n+1}=aw_n$ إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

(4 $v_0=u_1-au_0=4-2a=b-a$

و $w_0=u_1-bu_0=4-2b=a-b$

$v_n=v_0b^n=(b-a)b^n$ و $w_n=w_0a^n=(a-b)a^n$

لدينا : $v_n=u_{n+1}-au_n$ و $w_n=u_{n+1}-bu_n$ إذن

$w_n-v_n=-bu_n+au_n=(a-b)u_n$ ومنه

$$.u_n=\frac{w_n-v_n}{a-b}=a^n+b^n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

59 a ، b و c أعداد حقيقية غير معدومة .

(1 $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+2ca-b^2+c^2$

بما أن $b^2=ac$ فإن $2b^2=2ac$ ، ومنه

$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2) لدينا $\begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} a+b+c=78 \\ (a+b+c)(a-b+c)=3276 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} a+b+c=78 \\ a-b+c=42 \end{cases}$ إذن $2b=78-42=36$ أي $b=18$.

$\begin{cases} a+c=60 \\ ac=18^2=324 \end{cases}$ ؛ a و c هما حلا المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-60x+324=0$. إذن $(a;b;c)=(6;18;54)$ أو $(a;b;c)=(54;18;6)$.

60 a ، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية .

$b^3=343$ أي $b=7$.

$\begin{cases} a+c=29{,}75 \\ ac=49 \end{cases}$. $x^2-29{,}75x+49=0$

$(a;b;c)=\left(28;7;\frac{7}{4}\right)$ أو $(a;b;c)=\left(\frac{7}{4};7;28\right)$.

61 لدينا $b=qa$ و $c=q^2a$ ؛ $3a+c=4b$ إذن $3a+q^2a=4qa$ بما أن $a\neq 0$ فإن $q^2-4q+3=0$ أي $q=1$ أو $q=3$.

62 1) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$، $v_{n+1}=13u_{n+1}-4$ معناه

$$v_{n+1}=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}\times\frac{v_n+4}{13}$$

أي : $v_{n+1}=\frac{12}{10}-\frac{3}{10}v_n+\frac{12}{13}=-\frac{3}{10}v_n$ وبالتالي

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{3}{10}$.

2) $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ومنه $v_n=(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4\right]$$

أي $u_n=\frac{(13a-4)}{13}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}$.

3) $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ معناه

$s_n=\frac{1}{13}(v_1+4+v_2+4+\ldots+v_n+4)$ ومعناه

أي $s_n=\frac{1}{13}(v_1+v_2+\ldots+v_n+4n)$

$s_n=\frac{v_1}{13}\times\frac{q^n-1}{q-1}+\frac{4n}{13}$ ؛

$$s_n=-\frac{10}{13}\left(a-\frac{4}{13}\right)\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^n-1\right]+\frac{4n}{13}$$

63 $\alpha_1=3$ ؛ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$.

1) $q=\frac{1}{2}$.

2) $s_n=\alpha_1\frac{q^n-1}{q-1}=-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ،

$$\beta_{n+1}-\beta_n=\ln(\alpha_{n+1})-\ln(\alpha_n)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

وبالتالي (β_n) هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$

ب - $t_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)=\frac{n}{2}(2\beta_1-(n-1)\ln 2)$

$$t_n=\frac{n}{2}\left(2\ln 3-\ln 2^{n-1}\right)=\frac{n}{2}\ln\frac{9}{2^{n-1}}$$

64 لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$A_n=\underbrace{11\ldots1}_{n\ \text{رقم}}$ ومنه $9A_n=\underbrace{99\ldots9}_{n\ \text{رقم}}$ ومنه

$$9A_n+1=1\underbrace{00\ldots0}_{n\ \text{رقم}}=10^n$$

المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=10^n$ هي هندسية أساسها 10 . ولدينا : $A_n=\frac{1}{9}(10^n-1)=\frac{1}{9}(u_n-1)$

ومنه $s_n=\frac{1}{9}(u_1-1)+\frac{1}{9}(u_2-1)+\ldots+\frac{1}{9}(u_n-1)$

$s_n=\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{1}{9}n$.

65 $u_n=10^n$ و $A_n=\frac{1}{3}(u_n-1)$

وعليه $s_n=\frac{1}{3}\left[(u_1+u_2+\ldots+u_n)-n\right]$ ؛

$$s_n=\frac{1}{3}\left[u_1\frac{10^n-1}{9}-n\right]=\frac{10}{27}(10^n-1)-\frac{1}{3}n$$

66 $u_0=5$ ، $u_{n+1}=5u_n-7n$ ؛

$v_n=u_n-\frac{7}{4}n-\frac{7}{16}$.

1) النتائج المحصل عليها مع حساب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5	25	118	576	2859	14267	71300	356458	1782241
v_n	4.5625	22.81	114.06	570.31	2851.56	14257,81	71289,1	356445,313	1782226,56
	5	5	5	5	5	5	5	5	5

يبدو أن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5 .

2) ليكن n عدد طبيعي ، $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{7}{4}(n+1)-\frac{7}{16}$

$v_{n+1}=5v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية ذات الأساس 5.

$v_n=v_0\times5^n$ ومنه $v_n=\frac{73}{16}\times5^n$ ؛

$u_n=\frac{73}{16}\times5^n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$.

3) $s_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، ولدينا $u_n=v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}$ ،

$$s_n=\left(v_0+\frac{7}{16}\right)+\left(v_1+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}\right)+...+\left(v_n+\frac{7}{4}n+\frac{7}{16}\right)$$

$$s_n=(v_0+v_1+...+v_n)+\frac{7}{4}(1+2+...+n)+\frac{7}{16}(n+1)$$

$$s_n=v_0\frac{5^{n+1}-1}{4}+\frac{7n(n+1)}{8}+\frac{7}{16}(n+1)$$ ؛

$$s_n=\frac{73}{64}\left(5^{n+1}-1\right)+\frac{7}{16}\left(2n^2+3n+1\right)$$.

67 $u_0=-2$ ، $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ ، α و β عددان حقيقيان غير معدومين ويختلفان عن 1 .

1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_0=-2$ ومنه العلاقة $u_{n+1}=\alpha u_n+\beta$ تصبح $-2=-2\alpha+\beta$ أي : $\beta=2\alpha-2$.

2) أ - ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+\gamma$.

$$v_{n+1}=\alpha u_n+\beta+\gamma=\alpha(v_n-\gamma)+\beta+\gamma$$

$$v_{n+1}=\alpha v_n-\alpha\gamma+\beta+\gamma=\alpha v_n-\gamma(\alpha-1)+\beta$$

إذن لكي تكون المتتالية (v_n) هندسية يجب أن يكون $-\gamma(\alpha-1)+\beta=0$ أي : $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$.

ب - $\alpha=3$, $\beta=2$ و $\gamma=1$ العلاقة $\gamma=\frac{\beta}{\alpha-1}$ محققة وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $\alpha=3$ حدها الأول $v_0=-1$ ؛ ومنه $s_n=v_0\frac{3^n-1}{3-1}=-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{2}$.

لدينا $v_n=u_n+1$ معناه $u_n=v_n-1$ ومنه

$$t_n=(v_0-1)+(v_1-1)+...+(v_n-1)=s_n-(n+1)$$

$t_n=-\frac{3^n}{2}-n-\frac{1}{2}$.

2 - الاستدلال بالتراجع .

68 1) أ - $s_1=1$ ، $s_2=5$ ، $s_3=14$ و $s_4=30$.

ب - $s_{n+1}=s_n+(n+1)^2$.

2) $p(1)$ هي الخاصية $s_1=\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$

إذا كان $s_k=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ فإن

$s_{k+1}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$ أي

$s_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

69 1) $t_1=1\times2=2$ ، $t_2=t_1+2\times3=8$ ،

$t_3=t_2+3\times4=20$ و $t_4=t_3+4\times5=40$.

$t_{n+1}=t_n+(n+1)(n+2)$.

2) $p(1)$ تعني $t_1=\frac{1}{3}\times1(1+1)(1+2)$ و هي صحيحة.

إذا كانت $t_k=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ فإن

$t_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ معناه

$t_{k+1}=\left(\frac{1}{3}k+1\right)(k+1)(k+2)$ أي

$t_{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

70 $s_2=1$ و $p(2)$ تعني $s_2=1+\left(\frac{1}{2}\times2-1\right)2^2$.

إذا كانت $s_k=1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k$ فإن

معناه $s_{k+1}=1+\left(\frac{1}{2}k-1\right)2^k+k\times 2^{k-1}$

$s_{k+1}=1+\left(\frac{k+1}{2}-1\right)2^{k+1}$.

$(n-1)2^n-n\times 2^{n-1}+1=n\times 2^n-2^n-\frac{1}{2}n\times 2^n+1$

$=-2^n+\frac{1}{2}n\times 2^n+1=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n=s_n$

71 $p(1)$ تعني $1\times 2\times 3=\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$.

نضع $\alpha_n=1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+...+n(n+1)(n+2)$

نفرض $\alpha_k=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$؛

معناه $\alpha_{k+1}=\alpha_k+(k+1)(k+2)(k+3)$

$\alpha_{k+1}=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+$

$\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

أي $\alpha_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

72 $p(1)$ تعني $1=(1+1)!-1$.

نضع $\alpha_n=1+2\times 2!+3\times 3!+...+n(n!)$

نفرض $\alpha_k=(k+1)!-1$.

معناه $\alpha_{k+1}=\alpha_k+(k+1)[(k+1)!]$

أي $\alpha_{k+1}=(k+1)!-1+(k+1)[(k+1)!]$

$\alpha_{k+1}=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1$

73 $p(1)$ تعني $1!\geq 2^{1-1}$.

من أجل كل $k\in\mathbb{N}^*$ ، $k+1\geq 2$

إذا كان $k!\geq 2^{k-1}$ فإن $(k!)(k+1)\geq 2^{k-1}\times 2$

أي $(k+1)!\geq 2^k$.

74 $\wp(4)$ تعني $2^4\geq 4^2$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا حيث $k\geq 4$ ونفرض $2^k\geq k^2$.

إذا كان $k\geq 4$ فإن $k^2\geq 4k$ وكذلك إذا كان $k\geq 4$

فإن $2k\geq 8$ ومنه $2k>1$ إذن $2k+2k>1+2k$

وبالتالي $k^2>2k+1$ وحسب فرضية التراجع لدينا

$2^k\geq k^2$ إذن $2^k>2k+1$

لدينا إذن $2^k\geq k^2$ و $2^k>2k+1$ بجمع طرف إلى

طرف نجد $2^k+2^k>k^2+2k+1$ أي

$2\times 2^k>(k+1)^2$ معناه $2^{k+1}>(k+1)^2$

ومنه $2^{k+1}\geq(k+1)^2$.

75 $\wp(2)$ تعني $5^2\geq 4^2+3^2$.

نفرض $5^k\geq 4^k+3^k$ ومنه $5\times 4^k+5\times 3^k$ ، $5^{k+1}\geq$

بما أن $5\times 4^k\geq 4\times 4^k$ و $5\times 3^k\geq 3\times 3^k$ فإن

$5\times 4^k+5\times 3^k\geq 4^{k+1}+3^{k+1}$ ومنه $5^{k+1}\geq 4^{k+1}+3^{k+1}$.

76 متباينة برنولي (*Bernoulli*)

1) $p(1)$ تعني $1+a\geq 1+a$.

نفرض $(1+a)^k\geq 1+k\,a$ ومنه

$(1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a$.

2) إذا كان $q>1$ فإن $q=1+a$ مع $a>0$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $q^n\geq 1+an$ ولدينا

$\lim_{n\to+\infty}1+an=+\infty$ لأن $a>0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}q^n=+\infty$

77 1) $p(2)$ تعني $12\geq 9$. نفرض $3k^2\geq(k+1)^2$

ومنه $3k^2+6k+3\geq(k+1)^2+6k+3$

أي $3(k+1)^2\geq k^2+8k+4$ بما أن $8k\geq 4k$ فإن

$3(k+1)^2\geq k^2+4k+4$ أي $3(k+1)^2\geq(k+2)^2$.

2) نسمي الخاصية P_n : " $3^n\geq 2^n+5n^2$ " .

أ ــ P_1 تعني $3\geq 7$؛ P_2 تعني $9\geq 24$؛ P_3 تعني

$27\geq 53$؛ P_4 تعني $81\geq 96$؛ P_5 تعني $243\geq 157$

إذن P_5 هي الخاصية الأولى الصحيحة .

ب ــ نفرض $3^k\geq 2^k+5k^2$ مع $k\geq 5$ ، ومنه

$3^{k+1}\geq 3\times 2^k+5\times 3k^2\geq 2\times 2^k+5\times(k+1)^2$

لأن $3\geq 2$ ومن 1) لدينا $3k^2\geq(k+1)^2$.

78 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، P_n تعني " $3^n\geq(n+2)^2$ ".

1) P_0 تعني $1\geq 4$ ، P_1 تعني $3\geq 9$ ، P_2 تعني $9\geq 16$

و P_3 تعني $27\geq 25$ و هي الخصية الصحيحة.

2) نفرض $3^k \geq (k+2)^2$ من أجل $k \geq 3$ إذن

$3^{k+1} \geq 3(k+2)^2$ معناه $3^{k+1} \geq 3k^2+12k+12$

ومنه $3^{k+1} \geq k^2+6k+9$ أي $3^{k+1} \geq (k+3)^2$.

79 $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1) $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $u_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $u_3=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$ ؛ يبدو أن

$u_n=\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=1$.

نفرض $u_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ؛ $u_{k+1}=\frac{u_k}{\sqrt{u_k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{k+2}}$.

80 $u_0=7$ ، $u_{n+1}=10u_n-18$.

1) $u_1=52$ ، $u_2=502$ ، $u_3=5002$ ، $u_4 50002$

و $u_5=500002$. في الحد u_n يوجد $(n-1)$ صفرا

2) $u_n=5\times10^n+2$.

$p(0)$ تعني $u_0=5\times10^0+2=7$.

نفرض $u_k=5\times10^k+2$ ؛ $u_{k+1}=10u_k-18$ معناه

$u_{k+1}=10(5\times10^n+2)-18=5\times10^{n+1}+2$.

81 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=2u_n-3$.

1) $u_1=1$ ، $u_2=-1$ ، $u_3=-5$ ، $u_4=-13$

و $u_5=-29$. $3-u_n=2^n$.

2) $p(0)$ تعني $3-u_0=2^0$. نفرض $3-u_k=2^k$ ؛

$3-u_{k+1}=6-2u_k=6-2(3-2^k)=2^{k+1}$.

82 $u_0=3$ ، $u_{n+1}=4-u_n$.

1) $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_3=1$ ، $u_4=3$ و $u_5=1$.

$u_{2n+1}=1$ و $u_{2n}=3$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=3$ و $u_1=1$.

نفرض $u_{2k}=3$ و $u_{2k+1}=1$. لدينا

$u_{2(k+1)}=4-u_{2k+1}=3$ و $u_{2(k+1)+1}=4-u_{2(k+1)}=1$.

83 $s_n=1+3+5+...+(2n-1)$.

1) $s_1=1$ ، $s_2=4$ ، $s_3=9$ و $s_4=16$. $s_n=n^2$.

2) $p(1)$ تعني $s_1=1^2$. نفرض $s_k=k^2$ ؛

$s_{k+1}=s_k+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

3) s_n هو مجموع n حدا الأولى من متتالية حسابية

أساسها 2 وحدها الأول 1 إذن $s_n=\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$.

84 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=n+u_n$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=2$ ؛ $u_3=4$ ؛ $u_4=7$ ؛ $u_5=11$.

يبدو أن $u_n=\frac{n(n-1)}{2}+1$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=\frac{0(0-1)}{2}+1$.

نفرض $u_k=\frac{k(k-1)}{2}+1$ ؛

$u_{k+1}=k+\frac{k(k-1)}{2}+1=\frac{k(k+1)}{2}+1$.

85 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}$.

1) $u_1=\frac{1}{3}$ ، $u_2=\frac{1}{7}$ ، $u_3=\frac{1}{15}$ ، $u_4=\frac{1}{31}$ ، $u_5=\frac{1}{63}$.

$u_n=\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

2) $p(0)$ تعني $u_0=\frac{1}{2-1}$. نفرض $u_k=\frac{1}{2^{k+1}-1}$؛

أي $u_{k+1}=\frac{u_k}{u_k+2}=\frac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\frac{1}{2^{k+1}-1}+2\right)$

$u_{k+1}=\frac{1}{2^{k+1}-1}/\left(\frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}-1}\right)=\frac{1}{2^{k+2}-1}$.

86 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2$.

$v_0=1$ ، $v_{n+1}=v_n+u_n$.

1) u_n هو الحد العام لمتتالية حسابية أساسها 2 ومنه

$u_n=2n+1$.

2) $p(0)$ تعني $v_0=1+0^2$. نفرض $v_k=1+k^2$ ؛

$v_{k+1}=v_k+u_k=1+k^2+2k+1=1+(k+1)^2$.

87 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=u_n+2n+3$.

1) $u_{n+1}-u_n=2n+3$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$u_{n+1}-u_n>0$ أي (u_n) متزايدة تماما.

2) $p(0)$ تعني $u_0>0$ نفرض $u_k>k^2$ ؛

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$ ومنه $u_{k+1} > k^2+2k+3$
وعليه $u_{k+1} > k^2+2k+1$.

88 $u_0 \in]0;1[$ ، تصحيح $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$.
$p(0)$ تعني $0<u_0<1$. نفرض $0<u_k<1$.
نعتبر الدالة $f: x \mapsto -x^2+2x$ ؛ $f'(x) = -2x+2$
ومنه f' موجبة تماما على $]0;1[$ أي f متزايدة تماما
على $]0;1[$ وبالتالي $f(0)<f(u_k)<f(1)$ أي
$0<u_{k+1}<1$.

89 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.
* $p(0)$ تعني $0\le u_0 \le 2$. نعتبر الدالة f المعرفة على
$[0;2]$ بـ : $f(x)=\sqrt{2+x}$ ؛ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$
f' موجبة على $[0;2]$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$
وبالتالي إذا كان $0\le u_k \le 2$ فإن $f(0)\le f(u_k)\le f(2)$
أي $\sqrt{2} \le u_{k+1} \le 2$ ومنه $0 \le u_{k+1}\le 2$
* $p(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}>u_n$.
$p(0)$ تعني $u_1>u_0$ أي $\sqrt{3}>1$. نفرض $u_{k+1}>u_k$ معناه
$u_{k+1}+2>u_k+2$ وبما أن $u_n\ge 0$ فإن $u_{k+2}>u_{k+1}$

90 $u_0=0$ ، $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}$.
2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n<4$.
3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
1) $u_1=\sqrt{12}\simeq 3.464$ ، $u_2=\sqrt{12+\sqrt{12}}\simeq 3.93$,
$u_3=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}\simeq 3,991$ ، هي تنتمي إلى
المجال $[0;4[$.
2) الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $0\le u_0<4$ وهذا صحيح
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفترض $0\le u_k<4$ ومنه
$12\le 12+u_k<16$ أي $\sqrt{12}\le\sqrt{12+u_k}<4$
ومنه $0\le\sqrt{12+u_k}<4$ إذن $0\le u_{k+1}<4$.
3) نلاحظ أن $u_0<u_1<u_2<u_3$ لنبرهن أنه من أجل كل
$n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}>u_n$ وهذا باستعمال الاستدلال بالراجع
الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1>u_0$ وهذا صحيح لأن $u_0=0$
و $u_1=\sqrt{12}$. ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض
$u_{k+1}>u_k$ ومنه $12+u_{k+1}>12+u_k$ ومما سبق كل
الحدود موجبة إذن $\sqrt{12+u_{k+1}}>\sqrt{12+u_k}$ ومنه
$u_{k+2}>u_{k+1}$.

91 $u_0=2$ و $u_{n+1}=0,6u_n-1,2$.
1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.
الخاصية $\mathcal{P}(0)$ هي $u_1<u_0$ ولدينا من تعرف المتتالية
$u_0=2$ و $u_1=0$ ومنه $u_1<u_0$ إذن $\mathcal{P}(0)$ صحيحة .
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه
$0,6u_{k+1}<0,6u_k$ أي $0,6u_{k+1}-1,2<0,6u_k-1,2$
ومعناه $u_{k+2}<u_{k+1}$.
2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $\mathcal{P}'(n)$ هي الخاصية $u_n>-3$.
$\mathcal{P}'(0)$ تعني $u_0>-3$ وهذا صحيح لأن $u_0=2$.
ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>-3$ معناه
$0,6u_k>-1,8$ أي $0,6u_k-1,2>-1,8-1,2$
وباستعمال تعريف المتتالية يكون $u_{k+1}>-3$.

92 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n+3}$.
1) $p(0)$ تعني $0\le u_0\le 1$ و هي صحيحة.
نفرض $0\le u_k\le 1$؛ لدينا $u_{k+1}=\frac{u_k+1}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}\ge 0$.
$u_{k+1}-1=\frac{-2}{u_k+3}$ ومنه $u_{k+1}-1\le 0$ أي $0\le u_{k+1}\le 1$.
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_{n+1}<u_n$.
$p'(0)$ تعني $u_1<u_0$ أي $\frac{1}{2}<1$. نعتبر الدالة
$f: x\mapsto \frac{x+1}{x+3}$؛ $f'(x)=\frac{2}{(x+3)}$ ومنه $f'(x)>0$
إذن f متزايدة تماما على $[0;1]$ وبالتالي إذا كان
$u_{k+1}<u_k$ فإن $f(u_{k+1})<f(u_k)$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

93 θ عدد حقيقي من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$.
$u_0=2\cos\theta$ ، $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.
1) أ - $u_1=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}$.

. $u_2=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=2\cos\frac{\theta}{4}$

ب - $p(0)$ هي $u_0>0$ أي $2\cos\theta>0$ وهذا صحيح

لأن $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. نفرض $u_k>0$ إذن $2+u_k>2$

ومنه $\sqrt{2+u_k}>\sqrt{2}$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$ ومنه $u_{k+1}>0$.

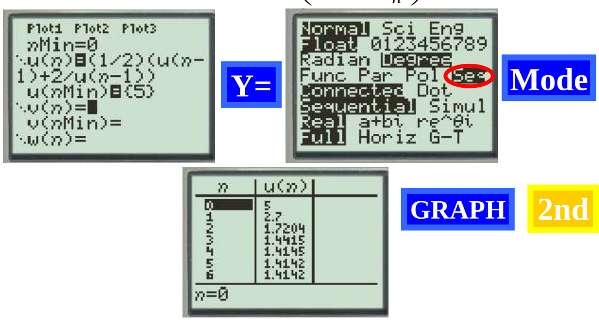
2) $p'(n)$ هي الخاصية $u_n=2\cos\frac{\theta}{2^n}$ ؛

$p'(0)$ تعني $u_0=2\cos\frac{\theta}{2^0}=2\cos\theta$.

نفرض $u_k=2\cos\frac{\theta}{2^k}$ ، $u_{k+1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}$ أي

$$u_{k+1}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^k\times 2}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

94 $u_0=5$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$.



2) يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة .

نعتبر الدالة $f:x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ لدينا من أجل كل

عدد $x\in\left]0;+\infty\right[$ ، $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)$

ومنه من أجل كل $f'(x)\geq 0$ ، $x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right[$ وبالتالي

الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-u_n=\frac{2-u_n^2}{2u_n}$$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathcal{P}(n)$ هي الخاصية "$u_n>\sqrt{2}$".

$\mathcal{P}(0)$ هي $u_0>\sqrt{2}$ وهذا صحيح لأن $u_0=5$.

ليكن k عددا طبيعيا كيفيا ونفرض $u_k>\sqrt{2}$ ، لدينا

$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$ و $f\left(u_k\right)=u_{k+1}$ من فرضية التراجع

$u_k>\sqrt{2}$ وبما أن f متزايدة تماما على $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

ينتج $f\left(u_k\right)>f\left(\sqrt{2}\right)$ أي $u_{k+1}>\sqrt{2}$.

لدينا $2-u_n^2<0$ و $u_n>0$ إذن $\frac{2-u_n^2}{2u_n}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

95 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=n\times 2^{n-1}$.

$p(1)$ تعني $u_1=1+(1-1)2^1$.

نفرض أن $u_1+u_2+...+u_k=1+(k-1)2^k$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+(k-1)2^k+(k+1)2^k$$

أي $u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=1+k\,2^{k+1}$.

96 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

1) لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ و $p(1)$ تعني $u_1=\frac{1}{1+1}$.

نفرض $u_1+u_2+...+u_k=\frac{k}{k+1}$ ؛

$$u_1+u_2+...+u_k+u_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

أي $u_1+u_2+...+u_{k+1}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

2) نسمي S المجموع

$$\frac{1}{1427\times 1428}+\frac{1}{1428\times 1429}+...+\frac{1}{2007\times 2008}.$$

ونضع $T=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2007\times 2008}$

و $t=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{1426\times 1427}$

إذن $S=T-t=\frac{2007}{2008}-\frac{1426}{1427}=\frac{581}{2865416}$

97 الخاصية الابتدائية هي $\left(2+\sqrt{3}\right)^0=p_0+q_0\sqrt{3}$

وهي صحيحة بأخذ $p_0=1$ و $q_0=0$.

نفرض أنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، يوجد عددان طبيعيان p_k

و q_k حيث $\left(2+\sqrt{3}\right)^k=p_k+q_k\sqrt{3}$.

معناه $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(p_k+q_k\sqrt{3}\right)$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=\left(2p_k+3q_k\right)+\left(p_k+2q_k\right)\sqrt{3}$$

بوضع $p_{k+1}=2p_k+3q_k$ و $q_{k+1}=p_k+2q_k$ وهما

عددان طبيعيان فيكون $\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}=p_{k+1}+q_{k+1}\sqrt{3}$.

98 (1 $u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$.

أ ـ $u_3=5$ ، $u_4=7$ و $u_5=9$. $u_n=2n-1$.

ب ـ الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $u_1=2\times1-1=1$.

نفرض $u_k=2k-1$ ؛

$$u_{k+1}=2u_k-u_{k-1}=4k-2-2k+3=2k+1$$

(2 $v_0=\frac{2}{5}$ ، $v_1=1$ و $v_{n+2}=5v_{n+1}-6v_n$.

الخاصية الابتدائية صحيحة لأن $v_0=\frac{2^0+3^0}{5}=\frac{2}{5}$.

نفرض $v_k=\frac{2^k+3^k}{5}$ ؛ $v_{k+1}=5v_k-6v_{k-1}$

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{6}{5}\left(2^{k-1}+3^{k-1}\right)$ ؛

$v_{k+1}=2^k+3^k-\frac{3}{5}2^k-\frac{2}{5}3^k=\frac{1}{5}2^{k+1}+\frac{1}{5}3^{k+1}$.

99 $u_0=1$ ، $u_1=2$ ، $u_{n+1}+u_{n-1}=4u_n$.

الخاصية الابتدائية $u_0=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^0+\left(2-\sqrt{3}\right)^0\right]$.

نفرض $u_k=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$ ؛

$u_{k+1}=4u_k-u_{k-1}$ ومعناه

$$u_{k+1}=2\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]-\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}}{2}$$

$$u_{k+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\left(4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$4+2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

$$4-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{4+3-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

ومنه $u_{k+1}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{k+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k+1}\right]$.

100 $u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

أ - الخاصية الابتدائية $u_0>-1$.

نفرض $u_k>-1$ معناه $u_k+1>0$ ومنه $\sqrt{u_k+1}>0$

أي $u_{k+1}>0$ وبالتالي $u_{k+1}>-1$.

ب - $u_0=2$ و $u_1=\sqrt{3}$ ومنه $u_1<u_0$.

نفرض $u_{k+1}<u_k$ ومنه $0<u_{k+1}+1<u_k+1$ إذن

$\sqrt{u_{k+1}+1}<\sqrt{u_k+1}$ أي $u_{k+2}<u_{k+1}$.

جـ - الخاصية الابتدائية $u_0\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أي $2\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نفرض $u_k\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومنه $u_k+1\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ إذن

$\sqrt{u_k+1}\geq\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ أي $u_{k+1}\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

لأن $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

101 $u_0=1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$ ، $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$.

(1 $u_0=1$ ومنه $u_0\neq4$. نفرض $u_k\neq4$

ونفترض $u_{k+1}=4$ أي $\frac{u_k+4}{u_k-2}=4$ معناه $u_k=4$

وهذا تناقض إذن $u_{k+1}\neq4$ أي كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\neq4$.

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\frac{2u_n+2}{u_n-2}\times\frac{u_n-2}{-3u_n+12}$ ؛

$v_{n+1}=-\frac{2}{3}\times\frac{u_n+1}{u_n-4}=-\frac{2}{3}v_n$.

(2 $v_n=v_0\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-4}$ معناه $u_n\left(v_n-1\right)=4v_n+1$

لنبرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $v_n\neq1$

لدينا الخاصية الابتدائية $v_0 \neq 1$ لأن $v_0 = -\frac{2}{3}$. إذا كان $v_k \neq 1$ أي $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \neq 1$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} \neq 1$ ومنه $v_{k+1} \neq 1$

$$u_n = \frac{4v_n+1}{v_n-1} = \left[4\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right] / \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right].$$

102 $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

(1 $$p(x+1)-p(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{6}\right)-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right)=x^2$$

2) الخاصية الابتدائية هي $p(0)=0$ إذن $p(0)\in\mathbb{N}$.
نفرض $p(k)\in\mathbb{N}$ لدينا $p(k+1)=p(k)+k^2$ ومنه $p(k+1)\in\mathbb{N}$.

3) الخاصية الابتدائية هي $p(1)=0^2$ وهذا صحيح لأن $p(1)=\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2-3+1}{6}=0$.

نفرض $p(k+1)=1^2+2^2+...+k^2$ ؛
لدينا $p(n+2)=p(n+1)+(n+1)^2$ معناه $p(n+2)=1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2$.

103 $u_1=0$ ، $u_{n+1}=\frac{-1}{u_n-2}$.

لدينا $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{2}{3}$ ، $u_4=\frac{3}{4}$ يبدو أن $u_n=\frac{n-1}{n}$

لنبرهن باستعمال التراجع .

الخاصية الابتدائية هي $u_1=\frac{1-1}{1}=0$ و هي صحيحة.

نفرض $u_k=\frac{k-1}{k}$ ؛ $u_{k+1}=\frac{-1}{u_k-2}=\frac{-1}{\frac{k-1}{k}-2}=\frac{k}{k+1}$

$u_{2006}=\frac{2005}{2006}$.

104 إذا كان $n=24$ فإن $n=5\times2+7\times2$

نفرض من أجل $k\geq 24$ فيكون $k=5a+7b$

- إذا كان $b=0$ فإن $k=5a$ وعليه $a\geq 5$ ولدينا :
$k+1=5a-20+21=5(a-4)+7\times3$.
- إذا كان $b=1$ فإن $k=5a+7$ وعليه $a\geq 4$ ولدينا :
$k+1=5a-20+28=5(a-4)+7\times4$.
- إذا كان $b\geq 2$ فإن $k+1=5a+7b+15-14$
أي $k+1=5(a+3)+7(b-2)$.

105 (1 $u_1=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

أ ـ $u_2=\frac{1}{2}$ ، $u_3=\frac{3}{8}$ ، $u_4=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ، $u_5=\frac{5}{32}$.

ب ـ الخاصية الابتدائية هي $u_1=\frac{1}{2^1}$. نفرض $u_k=\frac{k}{2^k}$ ؛

$u_{k+1}=\left(\frac{k+1}{2k}\right)u_k=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\frac{k}{2^k}=\frac{k+1}{2^{k+1}}$.

(2 $k\in\mathbb{N}^*$ ، $v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_{n+1}=\left(\frac{n+1}{kn}\right)v_n$.

$v_1=\frac{1}{k}$ ، $v_2=\frac{2}{k^2}$ ، $v_3=\frac{3}{k^3}$ ... ، $v_n=\frac{n}{k^n}$.

الخاصية الابتدائية هي $v_1=\frac{1}{k^1}$. نفرض $v_r=\frac{r}{k^r}$ ،

$v_{r+1}=\left(\frac{r+1}{kr}\right)v_n=\left(\frac{r+1}{kr}\right)\frac{r}{k^r}=\frac{r+1}{k^{r+1}}$.

3 ـ تقارب متتالية عددية .

106 (1 $\lim_{n\to+\infty} e^{1-n}=0$. (2 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n+3}\right)=0$.

(3 $\lim_{n\to+\infty}(n+2)e^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}+2e^{-n}=0$.

(4 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(3+e^{2-n}\right)=\ln3$.

(5 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n-6}{2e^n+1}=\frac{1}{2}$. (6 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}=-1$.

(7 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^n-3}{e^n+1}\right)=\ln1=0$.

(8 $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)=0$.

107 (1 $u_n=n^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}-\sqrt{3}\right)$.

$u_n=\frac{2n^2}{n+1}\frac{1}{\sqrt{3+\frac{2}{n+1}}+\sqrt{3}}$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{3}}=+\infty$

2) $u_n=\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{3n}=\dfrac{-1}{\sqrt{3n^2-1}+\sqrt{3n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+2}}-\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.

$u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3n+2}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$

$u_n=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

4) $u_n=\dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}=\dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$،

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

108 أ- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ لأن $-1<\dfrac{2}{5}<1$.

ب- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3,01^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3,01}{3}\right)^n=+\infty$ لأن $\dfrac{3,01}{3}>1$.

جـ- $u_n=1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^n}$ ؛

ومنه $u_n=-\dfrac{5}{4}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{5}{4}$.

109 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3u_n+1}$ و $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

1) استعمال التراجع ؛ $p(0)$ تعني $u_0>0$.

إذا كانت $u_k>0$ فإن $3u_k+1>0$ ومنه $u_{k+1}>0$.

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$، $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{3u_n+1}{u_n}=3+v_n$.

3) $v_n=3n+\dfrac{1}{2}$ ومنه $u_n=\dfrac{2}{6n+1}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

110 $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$.

$s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\dfrac{1}{3}u_n+1$ معناه

$v_{n+1}=\dfrac{1}{3}(v_n-3)+1=\dfrac{1}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية .

2) $v_n=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ومنه $u_n=v_n-3=5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3$ بما

أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$.

$s_n=\dfrac{3}{2}v_0\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{3}{2}v_0=\dfrac{15}{2}$.

$t_n=s_n-3(n+1)$ ومنه $\lim t_n=-\infty$

111 $u_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$.

$v_n=\dfrac{u_n}{n}=\dfrac{n^2+1}{n^2+n}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2}=1$.

$w_n=u_n-n=\dfrac{1-n}{n+1}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{n}=-1$.

$t_n=\dfrac{v_n-1}{w_n-1}=\dfrac{n-1}{2n^2}$ ؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$.

112 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-4}{n+1}=+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n}=3$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-3n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3n-4}{n+1}=-3$.

113 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n=\dfrac{1}{n!}$.

1) $u_1=1$ ؛ $u_2=\dfrac{1}{2}$ ؛ $u_3=\dfrac{1}{6}$ ؛ $u_4=\dfrac{1}{24}$ ؛

$u_5=\dfrac{1}{120}$ ؛ $u_6=\dfrac{1}{720}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n؛ $n!\geq n$

ومنه $0<u_n\leq\dfrac{1}{n}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

114 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\dfrac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$.

من أجل كل عدد طبيعي n، $-1\le \cos(3n-\pi)\le 1$

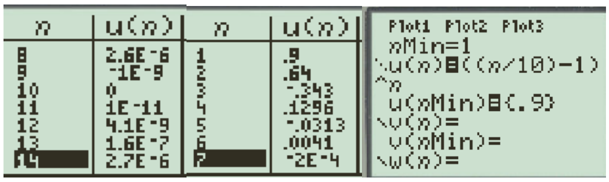
ومنه من أجل $n\ne 0$، $-\frac{1}{\sqrt{n}}\le u_n\le \frac{1}{\sqrt{n}}$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

115 من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n=n+1-\cos\frac{n\pi}{5}$.

بما أن $-1\le -\cos\frac{n\pi}{5}\le 1$ ومنه $n\le u_n\le n+2$ ؛ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n=\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

116 من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=\left(\frac{n}{10}-1\right)^n$.

1) القيم المقربة لأحد عشر الحدود الأولى من (u_n).

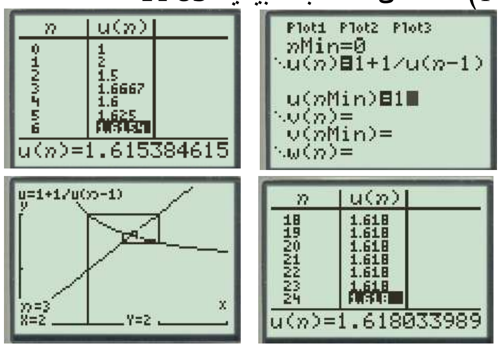


2) ليكن n عدد طبيعي، $n\ge 30$ معناه $\frac{n}{10}-1\ge 2$

ومعناه $\left(\frac{n}{10}-1\right)^n\ge 2^n$ أي $u_n\ge 2^n$

$2>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

117 1) استعمال الحاسبة البيانية TI 83 .



ابتداء من u_{23} أي الدليل 23 تستقر قيم الحدود على $1,618033989$.

يبدو أن المتتالية متقاربة ونهايتها العدد الحقيقي $1,618033989$.

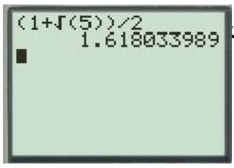
إذا كانت المتتالية u متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ هذا من جهة ،

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{u_n}=1+\frac{1}{l}$ إذن

$1+\frac{1}{l}=l$ ومعناه $l^2-l-1=0$ و $l\ne 0$.

مميز المعادلة $l^2-l-1=0$ هو 5 ومنه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما $l'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $l''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0>0$ وإذا كان $u_k>0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي, فإن $1+\frac{1}{u_k}>0$ أي $u_{k+1}>0$



وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n>0$ وبالتالي $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

118 لدينا $u_1=0,57=57\times\frac{1}{100}$ ،

$u_2=0,57+0,0057=0,57+0,57\times\frac{1}{100}$

$u_2=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}\right)$.

نفترض أن $u_k=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}\right)$ من أجل k عدد طبيعي كيفي غير معدوم. $u_{k+1}=0,\underbrace{57...57}_{2k+2\ \text{رقما}}$

ومنه $u_{k+1}=\underbrace{\qquad}_{2k\ \text{رقما}}+0,\underbrace{00...0057}_{2k+2\ \text{رقما}}$

إذن $u_{k+1}=u_k+\frac{57}{10^{2k+2}}$ ؛

$$u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}\right)+57\times\frac{1}{100^{k+1}}$$

$$.u_{k+1}=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^k}+\frac{1}{100^{k+1}}\right)$$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=57\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^n}\right)$

$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+...+\frac{1}{100^n}\right)$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها وحدها الأول مساويين للعدد $\frac{1}{100}$.

$$u_n=57\times\frac{1}{100}\times\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}}=\frac{57}{100}\times\frac{100}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$$

ومنه $u_n=\frac{57}{99}\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]$ بما أن $-1<\frac{1}{100}<1$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{57}{99}$.

119 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

1) حساب الحدود باستعمال مجدول إكسيل .

n	u_n
1	0.4142135623731
2	0.4494897427832
3	0.4641016151378
4	0.4721359549996

n	u_{10^n}
1	0.4880884817015
2	0.4987562112089
3	0.4998750624610
4	0.4999875006251
5	0.4999987500050
6	0.4999998749699
7	0.4999999869615
8	0.5000000000000
9	0.5000000000000
10	0.5000000000000
11	0.5000000000000
12	0.5000000000000
13	0.5000000000000
14	0.5000000000000
15	0.0000000000000

2) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$،

$$u_n=\sqrt{n^2+n}-n$$

$$u_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$$

$$u_n=\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}=\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

من أجل القيم الكبيرة للعدد n، في المجدولات أو الحاسبات n يهمل بالنسبة لِـ n^2 و لا يمكن التمييز بين n^2 و n^2+n ولهذا نتائج الحساب لِـ $\sqrt{n^2+n}-n$ تسجل 0.

120 (u_n) معرفة بـ $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$.

1) لنبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}>u_n$.

لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{1}{3}u_0+\frac{14}{3}=5$ إذن $u_1>u_0$.

نفترض أن $u_{k+1}\ge u_k$ وهذا من أجل k عدد طبيعي كيفي. الدالة التآلفية $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن $f(u_{k+1})>f(u_k)$ أي $u_{k+2}>u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}>u_n$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2) $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ معناه $3x=x+14$ ومعناه $2x=14$ أي $x=7$.

3) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية l عددا حقيقيا ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}\right)=\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}$ وبالتالي

$\frac{1}{3}l+\frac{14}{3}=l$ وحسب السؤال السابق يكون $l=7$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-7$ معناه

$v_{n+1}=u_{n+1}-7$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}-7=\frac{1}{3}u_n-\frac{7}{3}$

بما أن $u_n=v_n+7$ فإن $v_{n+1}=\frac{1}{3}(v_n+7)-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}v_n$

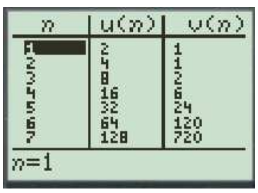
وبالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-6$. $v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$v_n=u_n-7$ معناه $u_n=v_n+7$

أي $u_n=-6\left(\frac{1}{3}\right)^n+7$. بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=7$ إذن (u_n) متقاربة.

121



1) الخاصية $2^n\le(n-1)!$ تكون صحيحة من أجل $n=6$.

نفترض أن $2^k \le (k-1)!$ من أجل k عدد طبيعي كيفي أكبر من أو يساوي 6 . إذن $2^k \le (k-1)!$ و $2 \le k$

ومنه $2\times 2^k \le k\,(k-1)!$ وبالتالي $2^{k+1} \le k\,!$

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من كل عدد طبيعي $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$

2) ليكن $n \ge 6$ ، $2^n \le (n-1)!$ معناه $2^n \le \frac{n\,(n-1)!}{n}$ أي $2^n \le \frac{n\,!}{n}$ و بالتالي $\frac{2^n}{n\,!} \le \frac{1}{n}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \ge 6$ ، $0 \le \frac{2^n}{n\,!} \le \frac{1}{n}$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n\,!} = 0$ ،

إذن المتتالية ذات الحد العام $\frac{2^n}{n\,!}$ ، متقاربة .

122 a عدد حقيقي و (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = a$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+{u_n}^2}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا، $2+{u_n}^2 \ge 2$ معناه $\frac{1}{2+{u_n}^2} \le \frac{1}{2}$ ومعناه $\frac{|u_n|}{2+{u_n}^2} \le \frac{|u_n|}{2}$

ولدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+{u_n}^2}$ إذن $|u_{n+1}| = \frac{|u_n|}{|2+{u_n}^2|} = \frac{|u_n|}{2+{u_n}^2}$

وبالتالي : من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_{n+1}| \le \frac{|u_n|}{2}$.

2) لدينا $|u_0| = |a|$ و $\frac{|a|}{2^0} = |a|$ إذن الخاصية $|u_0| \le \frac{|a|}{2^0}$ صحيحة .

نفترض أن الخاصية $|u_k| \le \frac{|a|}{2^k}$ من أجل عدد طبيعي k كيفي إذن $\frac{1}{2}|u_k| \le \frac{1}{2}\times\frac{|a|}{2^k}$ ، ومنه $\frac{|u_k|}{2} \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ بما أن $|u_{k+1}| \le \frac{|u_k|}{2}$ من السؤال السابق فإن $|u_{k+1}| \le \frac{|a|}{2^{k+1}}$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$.

3) حسب السؤال السابق من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $|u_n| \le \frac{|a|}{2^n}$ معناه $-\frac{|a|}{2^n} \le u_n \le \frac{|a|}{2^n}$ أي

$$-|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n \le u_n \le |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه

$$\lim_{n\to+\infty} -|a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} |a|\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

123 (u_n) معرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1) أ - لدينا : $u_0 > 0$ نفترض أن $u_k > 0$ من أجل k عدد طبيعي كيفي ، ومنه $u_k + 2 > 0$ و $2u_k + 1 > 0$ إذن $\frac{u_k+2}{2u_k+1} > 0$ وبالتالي $u_{k+1} > 0$ وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n > 0$.

ب - إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنها تقبل نهاية أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in \mathbb{R}_+^*$ ، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ هذا من جهة . ومن جهة أخرى لدينا

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n+2}{2u_n+1} = \frac{l+2}{2l+1}$$ ومنه $\frac{l+2}{2l+1} = l$

ومعناه $2l^2 = 2$ أي $l^2 = 1$ ومنه $l = 1$.

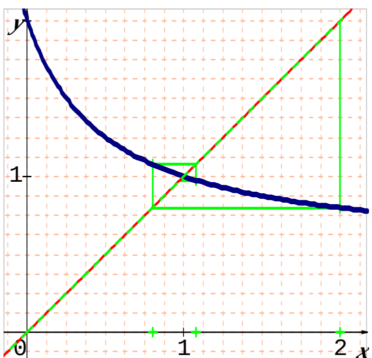
2) $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$، الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ و $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $f'(x) = \frac{(2x+1)-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2}$

ومنه من أجل كل عدد x من $[0\,;\,2,2]$ $f'(x) < 0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0\,;\,2,2]$

x	0	1	$2,2$
$f(x)$	2 ↘	1	$0,77$



يبدو أن (u_n) متقاربة

ونهايتها 1 .

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ - ليكن n عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3} = -\frac{1}{3}\times\frac{u_n-1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=\frac{1}{3}$

بما أن $-1<-\frac{1}{3}<1$ فإن (v_n) متقاربة .

$v_n = v_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

ب - ليكن n عددا طبيعيا ، $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

لدينا $v_n=1$ معناه $\frac{u_n-1}{u_n+1}=1$ ومعناه $u_n-1=u_n+1$

أي $-1=1$ وهذا تناقض إذن $v_n\neq 1$.

$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ معناه $v_nu_n+v_n=u_n-1$ ومعناه

$v_nu_n-u_n=-v_n-1$ يكافئ $(v_n-1)u_n=-v_n-1$

أي $u_n=\frac{-v_n-1}{v_n-1}$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

وبالتالي (u_n) متقاربة.

124 (u_n) معرفة بـ $u_0=5$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1) لدينا $u_0=5$ ، $u_1=\sqrt{7}$ و $2\le\sqrt{7}\le 5$ إذن

$2\le u_1\le u_0$.

نفترض $2\le u_{k+1}\le u_k$ يعني $4\le 2+u_{k+1}\le 2+u_k$

بما أن الدالة الجدر التربيعي متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

فإن $\sqrt{4}\le\sqrt{2+u_{k+1}}\le\sqrt{2+u_k}$ أي $2\le u_{k+2}\le u_{k+1}$

وحسب مبدأ التراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي

n ، $2\le u_{n+1}\le u_n$.

2) من السؤال السابق ينتج أن المتتالية (u_n) متناقصة

ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 إذن هي متقاربة

ونهايتها $l\ge 2$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ هذا من جهة ، ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+u_n}=\sqrt{2+l}$ إذن

$l=\sqrt{2+l}$.

لدينا $l\ge 2$ و $l=\sqrt{2+l}$ إذن $l^2=2+l$ معناه

$l^2-l-2=0$ ومعناه $(l+1)(l-2)=0$ يكافئ

$l=2$ أو $l=-1$. بما أن $l\ge 2$ فإن $l=2$.

125 نعتبر المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ

$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1) الدالة $f: x\mapsto \ln(x+1)-x$ تقبل الاشتقاق على

$]-1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = -\infty$ ؛

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]=-\infty$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

2) من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $f(x)\le 0$ معناه

$\ln(x+1)\le x$ ، بوضع $x=\frac{1}{k}$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ يكون

$x\in]-1;+\infty[$ ومنه $\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)\le\frac{1}{k}$ ولدينا

$$\ln\left(\frac{1}{k}+1\right)=\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$$

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{k}$.

بتطبيق هذه المتباينة n مرة نحصل على :

$\ln 2-\ln 1\le 1$ ، $\ln 3-\ln 2\le \frac{1}{2}$ ، $\ln 4-\ln 3\le \frac{1}{3}$ ،

... ، $\ln(n+1)-\ln n\le \frac{1}{n}$ ؛ وبجمع طرفا إلى طرف

نجد من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\ln(n+1)\le u_n$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ و $\ln(n+1)\le u_n$ إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

3) البرنامج الذي يحدّد أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n\ge 10$.

أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n\ge 10$ هو $n=12367$.

4 - المتتاليات المحدودة .

126 المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n=\frac{1}{n}$

.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>1$ معناه $\sqrt{n^2+1}>1$

أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<1$ ، إذن 1 عنصر حاد من الأعلى لِـ (u_n).

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $n^2+1>n^2$ معناه $\sqrt{n^2+1}>n$ أي $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{n}$

3) $0<u_n<v_n<1$.

127 (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بِـ : $u_n=\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_{n+1}-u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$1+\frac{1}{n+1}>1$ معناه $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ أي (u_n) متزايدة .

2) $u_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+...+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$u_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times...\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$

3) (u_n) متزايدة ونهايتها $+\infty$ إذن هي محدودة من الأسفل بِـ $u_0=\ln 2$ وليست محدودة من الأعلى.

128 (u_n) معرفة بِـ : $u_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$

.

1) $u_n=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ ومنه

$u_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$ أي $u_n-\frac{3}{2}<0$ معناه $u_n<\frac{3}{2}$.

إذن العدد $\frac{3}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة .

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}\right)=\frac{3}{2}$.

129 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=e^{-u_n}$.

نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$.

لدينا $u_1=e^{-u_0}$ ومن أجل كل عدد حقيقي u_0 $e^{-u_0}>0$

إذن $u_1>0$ وبما أن الدالة $x\mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $0<e^{-u_1}<e^{-0}$ أي $0<e^{-u_1}<1$ وبالتالي $0<u_2<1$.

نفترض أنه من أجل عدد طبيعي k كيفي , $0<u_k<1$

ولنبرهن أن $0<u_{k+1}<1$.

بما أن الدالة $x \mapsto e^{-x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإنه من فرضية التراجع $0<u_k<1$ ينتج : $e^{-0}>e^{-u_k}>e^{-1}$ أي $\frac{1}{e}<e^{-u_k}<1$ ، ومن تعريف المتتالية لدينا $u_{k+1}=e^{-u_k}$ إذن $\frac{1}{e}<u_{k+1}<1$ ومنه $0<u_{k+1}<1$.

إذن حسب مبدأ التراجع نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 2$ ، $0<u_n<1$.

130 (u_n) معرفة بـ : $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{4^{n+1}}$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4^{n+1}}$ ؛ إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n>0$ ، وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

2) u_n هو مجموع حدود متتابعة للمتتالية الهندسية ذات الأساس $\frac{1}{4}$ والحد الأول 1 ؛

إذن $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]\frac{4}{3}-=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}=u_n$ أي

$$u_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$. بما أن

$-1<\frac{1}{4}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{4}{3}$.

3) بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول u_0 . زيادة عن هذا فإنها تتقارب إلى $\frac{4}{3}$ إذن هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{4}{3}$ وبالتالي لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $1\le u_n<\frac{4}{3}$.

$u_n>1,333333$ معناه $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n>1,333333$

ومعناه $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{4}{3}-1,333333$ ويكافئ

$\left(\frac{1}{4}\right)^n<4-3,999999$ ومعناه

أي $n\ln 0,25<\ln(0,000001)$ ومنه $n>\frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0,25}$

$n\ge 10$ إذن ليس $1,333333$ عنصرا حادا للمتتالية (u_n) .

131 (u_n) المعرفة بـ u_0 عدد حقيقي معطى و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+5$.

1) $u_{n+1}-u_n-1=u_n^2-4u_n+4=(u_n+2)^2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n\ge 1$ ،

نستنتج أن (u_n) متزايدة.

2) إذا كانت (u_n) متقاربة ونهايتها l فإن $l=l^2-3l+5$ معناه $l^2-4l+5=0$.

3) المميز المختصر لـ $l^2-4l+5=0$ هو -1 إذن لا يوجد أي عدد حقيقي l يحقق المعادلة $l^2-4l+5=0$

ومنه المتتالية (u_n) متباعدة.

إذا كانت (u_n) محدودة بما أنها متزايدة فتكون متقاربة و هذا تناقض إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى.

مما سبق نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

132 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=\frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n-4$.

1) $u_1=\frac{17}{4}$ و $u_2=\frac{35}{4}$.

2) استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على الخاصية $u_{n+1}\ge u_n$.

3) (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=4u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

أ ـ $v_{n+1}=4u_{n+1}+\alpha=4(3u_n-4)+\alpha$ ؛

$v_{n+1}=12u_n-16+\alpha=12\left(\frac{v_n-\alpha}{4}\right)-16+\alpha$ ؛

$v_{n+1}=3v_n-16-2\alpha$

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha=-8$.

ب ـ $v_n=4u_n-8$ ومنه $v_0=4u_0-8=3$ ،

$v_n = 3^{n+1}$ ؛ $u_n = \frac{v_n+8}{4} = \frac{3^{n+1}+8}{4}$.

جـ ـ (u_n) متزايدة إذن محدودة من الأسفل بـ $u_0 = \frac{11}{4}$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست محدودة من الأعلى وبالتالي هي ليست محدودة.

د ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \ldots + \frac{u_n}{4^n}$.

$w_n = \frac{3+8}{4} + \frac{3^2+8}{4^2} + \frac{3^3+8}{4^3} + \ldots + \frac{3^{n+1}+8}{4^{n+1}}$ ،

$$w_n = \left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 8\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$w_n = \frac{3}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{8}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$ ،

$w_n = 3\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ ،

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3}$ إذن (w_n) متقاربة .

5 - المتتاليات المتجاورتان .

133 لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$ ومنه

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$ وبالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما .

ليكن n عددا طبيعيا ،

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\times n!} - \frac{1}{n\times n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2\times n!}$$

$$= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2\times n!} = \frac{-1}{n(n+1)^2\times n!}$$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ وبالتالي (v_n) متناقصة تماما .

$v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$ معناه $v_n - u_n = \frac{1}{n\times n!}$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!} = 0$.

خلاصة : (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان .

2) بما أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإنه من أجل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n \le l \le v_n$ أي

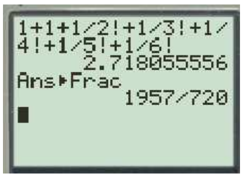
$u_n \le l \le u_n + \frac{1}{n\times n!}$

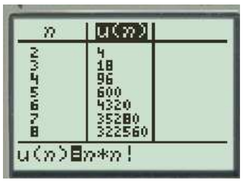
لكي يكون u_n قيمة مقربة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l

يكفي أن يكون $\frac{1}{n\times n!} \le 10^{-3}$ أي $n\times n! \ge 1000$

لدينا $5\times 5! = 600$ و $6\times 6! = 4320$ وهذا يبين أن u_6 هو أقرب قيمة بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد l .

$u_6 \simeq 2,718055556$ ، $u_6 = \frac{1957}{720}$





134 $u_0 = 0$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$ و $v_{n+1} = \frac{3v_n+1}{4}$.

1) الخاصية الابتدائية $u_0 \le 1 \le v_0$ ؛ نفرض $u_k \le 1 \le v_k$

معناه $3u_k \le 3 \le 3v_k$ ومعناه $3u_k + 1 \le 4 \le 3v_k + 1$

أي $\frac{3u_k+1}{4} \le 1 \le \frac{3v_k+1}{4}$.

2) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+1}{4}-u_n=\dfrac{1-u_n}{4}$ بما أن $u_n\le 1$ فإن $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{3v_n+1}{4}-v_n=\dfrac{1-v_n}{4}$ بما أن $1\le v_n$ فإن $v_{n+1}-v_n\le 0$ ومنه (v_n) متناقصة.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{4}-\dfrac{3v_n+1}{4}=\dfrac{3}{4}(u_n-v_n)$ ومنه المتتالية (w_n) المعرفة بـ $w_n=u_n-v_n$ هندسية أساسها $\dfrac{3}{4}$ وعليه $u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$ ؛ إذن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

$u_{n+1}=\dfrac{3u_n+1}{4}$ معناه $4u_{n+1}-3u_n=1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(4u_{n+1}-3u_n)=1$ أي $l=1$.

135 $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) ليكن n عددا طبيعيا ، $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$

$$=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+4v_n}{5}=\frac{2u_n-2v_n}{15}$$

أي $w_{n+1}=\dfrac{2}{15}(u_n-v_n)=\dfrac{2}{15}w_n$ ، إذن (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{15}$ وحدها الأول $w_0=u_0-v_0=-1$ وبما أن $-1<\dfrac{2}{15}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$. $w_n=-\left(\dfrac{2}{15}\right)^n$.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$

إذن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\dfrac{-2u_n+2v_n}{3}$ أي $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{2}{3}(u_n-v_n)=-\dfrac{2}{3}w_n$.

وكذلك لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$ ومنه $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-v_n$

أي $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{5}=\dfrac{w_n}{5}$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n<0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$ و $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه (u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة، (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية العدد الحقيقي l.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، $t_n=3u_n+10v_n$ ومنه

$$t_{n+1}-t_n=3u_{n+1}+10v_{n+1}-3u_n-10v_n$$
$$=3(u_{n+1}-u_n)+10(v_{n+1}-v_n)=-2w_n+2w_n=0$$

وبالتالي المتتالية (t_n) ثابتة .

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n، $t_n=t_0$ أي $3u_n+10v_n=3u_0+10v_0=23$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=23$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+10v_n)=3l+10l=13l$ إذن $13l=23$ وبالتالي $l=\dfrac{23}{13}$.

136 $u_0=3$ ، $v_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}$.

1) $u_1=\dfrac{7}{2}$ ، $v_1=\dfrac{15}{4}$ ، $u_2=\dfrac{29}{8}$ و $v_2=\dfrac{59}{16}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $w_n=v_n-u_n$.

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_{n+1}}{2}$$

$w_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{4}=\dfrac{1}{4}w_n$ إذن (w_n) هندسية .

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=\lim_{n\to+\infty}w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$$

3) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}=\dfrac{w_n}{2}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-v_n=\frac{u_{n+1}-v_n}{2}=\frac{u_n-v_n}{4}$

بما أن $v_{n+1}-v_n=-\frac{w_n}{4}$ و $w_n>0$ فإن (u_n) متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما .

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ إذن (u_n) و (v_n) مجاورتان .

4) تحذف **(برهن أن)** من المعطيات .

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}+2v_{n+1})=\frac{1}{3}(2u_{n+1}+v_n)$

$t_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n)=t_n$ إذن (t_n) متتالية ثابتة .

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=t_0=\frac{1}{3}(u_0+2v_0)=\frac{11}{3}$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{1}{3}(l+2l)=l$ إذن $l=\frac{11}{3}$.

137 f معرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

.

1) $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه f متزايدة تماما على $[0;2]$

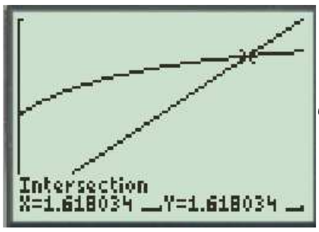
وبالتالي إذا كان $1\le x\le 2$ فإن

$f(1)\le f(x)\le f(2)$ أي $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{3}$ ومنه

$f(x)\in[1;2]$.

2) $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=f(u_n)$ ؛ $v_{n+1}=f(v_n)$.



يبدو أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ولهما نفس النهاية وهي فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين .

3) البرهان بالتراجع عن الخواص :

* " $1\le u_n\le 2$ " ؛ $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 2$

إذا كان $1\le u_k\le 2$ فإن $1\le f(u_k)\le 2$ أي $1\le u_{k+1}\le 2$.

* " $1\le v_n\le 2$ " ؛ نفس البرهان.

* " $u_n\le u_{n+1}$ " ؛ $u_0=1$ و $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_0\le u_1$.

إذا كان $u_k\le u_{k+1}$ فإن $f(u_k)\le f(u_{k+1})$ لأن f متزايدة ومنه $u_{k+1}\le u_{k+2}$.

* " $v_n\ge v_{n+1}$ " ؛ نفس البرهان.

4) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

$1\le u_n\le 2$ و $1\le v_n\le 2$ إذن $2\le u_n+1\le 3$ و $2\le v_n+1\le 3$ ومنه $4\le (u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ،

إذن v_n-u_n و $v_{n+1}-u_{n+1}$ لهما نفس الإشارة ؛

استعمال التراجع : $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\ge 0$ ، وإذا كان $v_k-u_k\ge 0$ فإن $v_{k+1}-u_{k+1}\ge 0$.

لدينا $4\le(u_n+1)(v_n+1)\le 9$ ومنه

$0<\frac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}$ بما أن $v_n-u_n\ge 0$ فإن

$\frac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$ أي

$v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

استعمال التراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

لدينا $v_0-u_0=1$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$ إذن $v_0-u_0\le\left(\frac{1}{4}\right)^0$

نفرض أن $v_k-u_k\le\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

$v_{k+1}-u_{k+1}\le\frac{1}{4}(v_k-u_k)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

لدينا $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ إذن

$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ وحسب السؤال 3) لدينا $u_n \le u_{n+1}$

و $v_n \ge v_{n+1}$ معناه (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة إذن

(u_n) و (v_n) متجاورتان وبالتالي لهما نفس النهاية l.

$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ معناه $u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1 = 0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}u_n + u_{n+1} - 2u_n - 1) = 0$ أي

$l^2 - l - 1 = 0$ ومعناه $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ أو $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

بينما $1 \le u_n \le 2$ و $1 \le v_n \le 2$ إذن $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

138 a و b عددان حقيقيان حيث $0 < a < b$.

المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان بـ : $u_0 = a$، $v_0 = b$

ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$، $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1) نسمي p_n الخاصية " $0 < u_n \le v_n$ "

لدينا $u_0 = a$ ، $v_0 = b$ و $0 < a < b$ إذن

$0 < u_0 \le v_0$ ومنه الخاصية p_0 صحيحة .

نفرض أن الخاصية p_k صحيحة أي $0 < u_k \le v_k$

لدينا $u_k v_k > 0$ إذن $\sqrt{u_k v_k} > 0$ وبالتالي $0 < u_{k+1}$.

لدينا $(u_k + v_k)^2 - (u_k - v_k)^2 = 4u_k v_k$ معناه

$(u_k + v_k)^2 \ge 4u_k v_k$ بما أن $0 < u_k \le v_k$ فإن

$u_k + v_k > 0$ ومنه $u_k + v_k \ge 2\sqrt{u_k v_k}$ معناه

$\frac{u_k + v_k}{2} \ge \sqrt{u_k v_k}$ أي $v_{k+1} \ge u_{k+1}$ وبالتالي :

$0 < u_{k+1} \le v_{k+1}$ إذن الخاصية p_{k+1} صحيحة .

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

الخاصية p_n أي $0 < u_n \le v_n$.

2) ليكن n عددا طبيعيا

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n}^2 + \sqrt{v_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}{2\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)}{\left(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}\right)}(v_n - u_n)$$

$-\sqrt{u_n} < \sqrt{u_n}$ ومنه $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} < \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$

إذن $\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < 1$

وبالتالي $\frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

أي $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

نستعمل التراجع ولدينا الخاصية $v_0 - u_0 \le \frac{1}{2^0}(b-a)$

تكافئ $v_0 - u_0 \le (b-a)$ وهي صحيحة .

نفرض أن الخاصية $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b-a)$ ولنبرهن

صحة الخاصية $v_{k++} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

لدينا مما سبق $v_{k+1} - u_{k+1} < \frac{1}{2}(v_k - u_k)$ ومن فرضية

التراجع $v_k - u_k \le \frac{1}{2^k}(b-a)$ ينتج أن

إذن $\frac{1}{2}(v_k - u_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

$v_{k+1} - u_{k+1} \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ وحسب مبدأ التراجع ينتج

أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n - u_n \le \frac{1}{2^n}(b-a)$.

3) لدينا كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما إذن ندرس $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n v_n}}{\sqrt{u_n}^2} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}}$ بما أن $0 < u_n \le v_n$ فإن

$0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{v_n}$ ومنه $\frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{u_n}} \ge 1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

وبالتالي (u_n) متزايدة .

أي $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{2}$ بما أن

$0<u_n\le v_n$ فإن $u_n-v_n\le 0$ أي $v_{n+1}-v_n\le 0$

وبالتالي (v_n) متناقصة .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$0\le v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(b-a)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}(b-a)=0$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

خلاصة : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) $a=2$ و $b=5$ إذن, $v_n-u_n\le\dfrac{3}{2^n}$.

$\dfrac{3}{2^n}<10^{-3}$ معناه $2^n>3000$ ولدينا $2^{11}=2048$

و $2^{12}=4096$ إذن $n\ge 12$

n	1	2	3	4	5	6
u	2	3,1623	3,32686	3,3289968	3,3289971	3,328997
v	5	3,5	3,33114	3,3289975	3,3289971	3,328997

7	8	9	10	11
3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329
3,3289971	3,328997	3,328997	3,3289971	3,329

والعدد $l\simeq 3,329$ هو النهاية المشتركة لـ (u_n) و (v_n).

139 $u_0=-1$، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ ؛ $v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}$.

1) أ ــ $u_0<v_0$ صحيحة . من أجل k عدد طبيعي ،

$u_k<v_k$ معناه $u_k-v_k<0$. لدينا

$u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}-\dfrac{u_k+4v_k}{5}=\dfrac{3u_k-3v_k}{10}$

أي $u_{k+1}-v_{k+1}=\dfrac{3}{10}(u_k-v_k)$ إذن $u_{k+1}-v_{k+1}<0$

ب ــ $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}$

لدينا $u_n<v_n$ معناه $v_n-u_n>0$ إذن $u_{n+1}-u_n>0$

وبالتالي (u_n) متزايدة تماما.

$v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-v_n=\dfrac{u_n-v_n}{5}$ ومنه

$v_{n+1}-v_n<0$ إذن (v_n) متناقصة تماما.

$u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)$

نضع $w_n=u_n-v_n$ ، (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{3}{10}$ ومنه

إذن $w_n=u_n-v_n=(u_0-v_0)\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ ؛ ومنه (u_n) و (v_n) متجاورتان .

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $x_n=u_n+av_n$

و $y_n=u_n+bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين.

$x_{n+1}=u_{n+1}+av_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}+a\dfrac{u_n+4v_n}{5}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)u_n+(8a+5)v_n}{10}$

$x_{n+1}=\dfrac{(2a+5)}{10}\left(u_n+\dfrac{8a+5}{2a+5}v_n\right)$

(x_n) هندسية معناه $\dfrac{8a+5}{2a+5}=a$ أي $2a^2-3a-5=0$

وكذلك (y_n) هندسية معناه $2b^2-3b-5=0$

إذن a و b هما الحلان المتمايزان للمعادلة

$2x^2-3x-5=0$ أي $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ أو $b=-1$

و $a=\dfrac{5}{2}$.

نفرض $a=-1$ و $b=\dfrac{5}{2}$ إذن

$x_{n+1}=\dfrac{3}{10}(u_n-v_n)=\dfrac{3}{10}x_n$

و $y_{n+1}=\left(u_n+\dfrac{5}{2}v_n\right)=y_n$.

لدينا $x_0=u_0-v_0=-3$ و $y_0=u_0+\dfrac{5}{2}v_0=4$ إذن

$x_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=y_0=4$.

3) إيجاد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n).

لدينا $x_n=u_n+av_n$ و $y_n=u_n+bv_n$ أي

$x_n=u_n-v_n=-3\left(\dfrac{3}{10}\right)^n$ و $y_n=u_n+\dfrac{5}{2}v_n=4$

ومنه $\frac{7}{2}v_n = 4+3\left(\frac{3}{10}\right)^n$ أي $v_n = \frac{8}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{8}{7}$

مسائل

140 لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ والتي تحقق الخاصية التالية :

$u_{n+2} = \frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n$.

1) (u_n) ثابتة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$u_n = \frac{3}{35}u_n + \frac{2}{35}u_n$ معناه $\frac{6}{7}u_n = 0$ أي $u_n = 0$.

(u_n) حسابية ذات الأساس r معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$u_n + 2r = \frac{3}{35}(u_n + r) + \frac{2}{35}u_n$ أي $u_n = -\frac{67}{30}r$

ومنه (u_n) ثابتة أي $u_n = 0$.

(u_n) هندسية ذات الأساس q معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$u_n q^2 = \frac{3}{35}(u_n q) + \frac{2}{35}u_n$ ومعناه

$u_n\left(35q^2 - 3q - 2\right) = 0$ أي $u_n = 0$ أو $q = -\frac{2}{5}$

أو $q = \frac{4}{7}$.

بما أن (E) هي مجموعة المتتاليات غير المعدومة فإنه لا توجد فيها متتالية ثابتة ولا متتالية حسابية ؛ بينما توجد متتاليتان هندسيتان في المجموعة (E) أساسهما $q = -\frac{2}{5}$

و $q = \frac{4}{7}$.

2) ليكن α و β عددين حقيقيين،

$$\frac{3}{35}u_{n+1} + \frac{2}{35}u_n = \frac{3}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{35}\left[\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{35}\alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{6}{7}+2\right) + \frac{1}{35}\beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{5}+2\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^n\left(\frac{4}{49}\right) + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2} = u_{n+2}$$

إذن المتتالية (u_n) هي عنصر من المجموعة (E) .

3) $u_0 = 3$ معناه $\alpha + \beta = 3$ و $u_1 = -\frac{4}{35}$ معناه

$\frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{5}\beta = -\frac{4}{35}$ أي $10\alpha - 7\beta = -4$ وبالتالي نجد

$\alpha = 1$ و $\beta = 2$ أي $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

$-1 < \frac{2}{7} < 1$ و $-1 < \frac{-1}{5} < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

141 I – 1) الدالة f قابلة للاشتقاق ومن أجل كل

$x \geq 0$ لدينا $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$ ومنه

$f'(x) \leq 0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

الدالة g قابلة للاشتقاق ومن أجل كل $x \geq 0$ لدينا

$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ ومنه $g'(x) \leq 0$ إذن

الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

2) لدينا $f(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن

$f(x) < f(0)$ أي $f(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل

$x \geq 0$ ، $f(x) \leq 0$ أي $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \leq 0$

معناه $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x)$.

لدينا $g(0) = 0$ وإذا كان $x > 0$ فإن $g(x) < g(0)$

أي $g(x) < 0$ وبالتالي من أجل كل $x \geq 0$,

$g(x) \leq 0$ أي $\ln(1+x) - x \leq 0$ معناه

$\ln(1+x) \leq x$.

خلاصة: من أجل كل $x \geq 0$ ، $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II – 1) لدينا $u_1 = \frac{3}{2}$ ومنه $u_1 > 0$. نفرض أن

$u_n > 0$ بما أن $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ فإن $u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

ومنه $u_{n+1} > 0$ إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$.

2) $\ln u_1 = \frac{3}{2}$ و $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ إذن

$\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$. نفرض أن

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

ولدينا

$$\ln u_{n+1} = \ln u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln u_n + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) ليكن k عددا طبيعيا حيث $1 \leq k \leq n$, نضع $x = \frac{1}{2^k}$ العلاقة (1) تصبح

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^k} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

وعدد هذه العلاقات هو n لأن k يتغير من 1 إلى n وبجمع أطراف كل العلاقات نحصل على

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4) أ - S_n و T_n هما مجموعان لحدود متتابعة لمتتاليتين هندسيتين أساسهما $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ على الترتيب .

$S_n = \frac{1}{2}\,\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛

$T_n = \frac{1}{4}\,\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

ب - $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ؛

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$.

5) أ - ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ,

لدينا ، $u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times u_n$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$

و $u_n > 0$ (من السؤال 1) إذن $\frac{1}{2^{n+1}} \times u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما .

ب - لدينا $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n \leq 1$ بما أن $\ln u_n \leq S_n$ فإن $\ln u_n \leq 1$ ومنه $u_n \leq e$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة .

جـ - بما أن (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ؛ لدينا $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$ ومنه

أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

معناه $1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} \leq \ln l \leq 1$ ويكافئ $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$

$e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$.

142 (u_n) و (v_n) معرفتان من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \ldots + \sin\frac{n}{n^2}$$

و $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$.

1) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

أي $v_n = \frac{n+1}{2n}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2) $f : x \mapsto x - \sin x$ ؛ من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x) = 1-\cos x$ ومنه $f'(x)\ge 0$ إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ولدينا $f(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $f(x)>f(0)$ أي $f(x)>0$ وبالتالي الدالة f موجبة .

$g : x\mapsto -1+\frac{x^2}{2}+\cos x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $g'(x) = x-\sin x = f(x)$ بما أن f موجبة فإن $g'(x)\ge 0$ وبالتالي g متزايدة تماما ولدينا $g(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>0$ وبالتالي الدالة g موجبة .

$h : x\mapsto -x+\frac{x^3}{6}+\sin x$ ؛ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $h'(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x = g(x)$ بما أن g موجبة فإن $h'(x)\ge 0$ وبالتالي h متزايدة تماما ولدينا $h(0)=0$ وإذا كان $x>0$ فإن $h(x)>h(0)$ أي $h(x)>0$ وبالتالي الدالة h موجبة .

3) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، من أجل كل عدد طبيعي k حيث $1\le k\le n$ لدينا $1\le k^3\le n^3$ أي $1^3\le n^3$ ، $2^3\le n^3$ ، ... ، $n^3\le n^3$ وبالجمع طرفا إلى طرف نحصل على $1^3+2^3+...+n^3\le n\times n^3$ أي $1^3+2^3+...+n^3\le n^4$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $f(x)\ge 0$ و $h(x)\ge 0$ معناه $x\ge \sin x$ و $\sin x\ge x-\frac{x^3}{6}$

أي $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$. نضع $x=\frac{k}{n^2}$ ومنه $\frac{x^3}{6}=\frac{k^3}{6n^6}$ إذن $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\le\sin\frac{k}{n^2}\le\frac{k}{n^2}$

وبالجمع نحصل على :

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\le \sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+...+\sin\frac{n}{n^2}\le\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{n}{n^2}$$

أي $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\le u_n\le v_n$

ولدينا $1^3+2^3+...+n^3\le n^4$ معناه

$$-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\ge-\frac{1}{6n^6}n^4$$

ومعناه $v_n-\frac{1}{6n^6}\left(1^3+2^3+...+n^3\right)\ge v_n-\frac{1}{6n^2}$ إذن $v_n-\frac{1}{6n^2}\le u_n\le v_n$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6n^2}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n-\frac{1}{6n^2}=\frac{1}{2}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

إذن المتتالية (u_n) متقاربة ، ونهايتها $\frac{1}{2}$.

143 I – f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

1) من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما .

g مستمرة على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

خلاصة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β .

لدينا : $g(0,27)\simeq -0.039$ و $g(0,28)\simeq 0.007$ إذن $0,27\le\beta\le 0,28$

2) من أجل $x>0$ لدينا

$$f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x+1)-x\ln x}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

$f'(\beta)=0$ ومن أجل $x\in]-\infty;\beta[$ ، $f'(x)<0$

ومن أجل $x\in]\beta;+\infty[$ ، $f'(x)>0$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x\ln x}{x+1}=0$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

II – 1) نلاحظ أن $f(1)=0$ ولدينا $g(\beta)=0$ معناه $\ln\beta=-1-\beta$ إذن $f(\beta)=\frac{\beta\ln\beta}{\beta+1}=-\beta$

الدالتان $x \mapsto x\sin x$ و $x \mapsto x+1$ مستمرتان على $]0;+\infty[$ و من أجل $x>0$ $x+1\neq 0$ إذن الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه جدول تغيراتها:

x	0		β		1		α_n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

إذن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n .

2) أ - $f(e^n)=\frac{e^n\ln e^n}{e^n+1}=n\frac{e^n}{e^n+1}$ ولدينا

$e^n\le e^n+1$ أي $\frac{e^n}{e^n+1}\le 1$ ومعناه $\frac{ne^n}{e^n+1}\le n$ إذن

$f(e^n)\le n$.

بما أن $f(\alpha_n)=n$ فإن $f(e^n)\le f(\alpha_n)$ وبما أن f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ فإن حتما يكون $e^n\le\alpha_n$.

ب - $f(\alpha_n)=n$ تكافئ $\frac{\alpha_n\ln\alpha_n}{\alpha_n+1}=n$ وتكافئ

$\alpha_n\ln\alpha_n=n\alpha_n+n$ أي $\alpha_n(\ln\alpha_n-n)=n$ ومعناه

$\ln\alpha_n-\ln e^n=\frac{n}{\alpha_n}$ أي $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right)=\frac{n}{\alpha_n}\ldots(1)$

لدينا $e^n\le\alpha_n$ معناه $\frac{e^n}{n}\le\frac{\alpha_n}{n}$ بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$

فإن $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{n}=+\infty$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha_n}=0$ إذن

$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}=0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n}{e^n}=1$.

3) أ - (2) معناه $1+\varepsilon_n=\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومنه

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{\alpha_n}{e^n}\ln\frac{\alpha_n}{e^n}$ ومن (1) ينتج

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$.

ب - الدالة $u:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t$ تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا $u'(t)=\ln(1+t)+(1+t)\frac{1}{1+t}-1$

أي $u'(t)=\ln(1+t)$ ، من أجل $t\ge 0$ يكون

$(1+t)\ge 1$ ومنه $\ln(1+t)\ge 0$ إذن $u'(t)\ge 0$

وبالتالي u متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ لدينا $u(0)=0$

ومن أجل $t>0$ يكون $u(t)>u(0)$. إذن من أجل كل $t\ge 0$, $u(t)\ge 0$ أي $0\le(1+t)\ln(1+t)-t$.

الدالة $v:t\mapsto(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}$ تقبل الاشتقاق

ومن أجل كل $t\ge 0$ لدينا $v'(t)=\ln(1+t)-t$

$v''(t)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{-t}{1+t}$ من أجل $t\ge 0$ يكون

$v''(t)\le 0$ إذن v' متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v'(0)=0$

إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v'(t)\le 0$

إذن v متناقصة على $[0;+\infty[$ و $v(0)=0$ إذن من أجل $t\ge 0$ يكون $v(t)\le 0$ أي

$(1+t)\ln(1+t)-t-\frac{t^2}{2}\le 0$ معناه

$(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$.

خلاصة : من أجل كل $t\ge 0$,

$0\le(1+t)\ln(1+t)-t\le\frac{t^2}{2}$.

جـ - نضع $t=\varepsilon_n$ يكون إذن

$0\le(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ ولدينا

$(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)=\frac{n}{e^n}$ ،

إذن $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{\varepsilon_n^2}{2}$ من المتباينة الأولى ينتج

$\varepsilon_n\le\frac{n}{e^n}$ ويكافئ $\varepsilon_n^2\le\frac{n^2}{e^{2n}}$ أي $\frac{\varepsilon_n^2}{2}\le\frac{n^2}{2e^{2n}}$.

وبالتالي $0\le\frac{n}{e^n}-\varepsilon_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{n}{e^n}\right)^2$ أي

$0\le ne^{-n}-\varepsilon_n\le\frac{n^2}{2}e^{-2n}$

د - (3) تكافئ $0\le n-\varepsilon_n e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$ و (2) تكافئ

$\varepsilon_n e^n=\alpha_n-e^n$ إذن $0\le n-\alpha_n+e^n\le\frac{n^2}{2}e^{-n}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2}e^{-n}=\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(e^{-\frac{1}{2}n}\right)^2=0$ إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(e^n+n-\alpha_n\right)=0$

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

144 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+2}=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

تصحيح إضافة $u_1=1$.

$v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n$.

1) ب - المتتالية (w_n) حسابية أساسها 0 وحدها الأول 1.

جـ - المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$ وحدها الأول 1.

د - المتتالية (w_n) هندسية أساسها 1.

2) أ - $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. جـ - $w_n=1$.

3) أ - $u_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

ب - $u_n=\frac{3}{5}(w_n-v_n)$.

د - المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها $\frac{3}{5}$.

145 1) ب - $\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. جـ - $n\sin\frac{1}{n}$ و $n>0$.

2) ب - المتتالية v محدودة من الأسفل.

د - لا يمكن معرفة إن كانت المتتالية v تقبل نهاية أم لا .

أصحيح أم خطأ ؟

146 1) **صحيحة** لأن كل متتالية متناقصة هي محدودة من الأعلى بحدها الأول.

2) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فتكون نهايتها معدومة ، **جملة خاطئة** لأن نهايتها موجبة ويمكن أن تكون غير معدومة مثلا المتتالية المعرفة بـــ $u_n=1+\frac{1}{n+1}$.

3) إذا كانت متتالية متزايدة فإنها محدودة من الأسفل بحدها الأول؛ و الجملة المعطاة **صحيحة**.

4) الجملة **صحيحة**.

5) الجملة **صحيحة**.

6) جملة **خاطئة** لأنه يمكن أن تكون $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n$

مثلا $u_n=\frac{1}{n+2}$ و $v_n=\frac{1}{n+1}$.

148 (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_0=1{,}5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-1$.

1) **صحيحة** لأنه $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(x)=2x-1$، $f(x)=x$ معناه $x=1$.

2) $v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-2=2v_n$ إذن الجملة **صحيحة**.

3) $v_n=2^{n-1}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ وبالتالي المتتالية (v_n) ليست محدودة من الأعلى ، و الجملة المعطاة **خاطئة**

الباب الثاني

القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف القواسم و المضاعفات.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج .

الحل: بسيط
النشاط الثالث
تصحيح: /
الهدف: مقاربة القاسم المشترك الأكبر.
توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " القاسم المشترك الأكبر " و يتم ضمن أفواج.
الحل: بسيط.
النشاط الرابع
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم، المضاعفات، المربعات التامة، ....
توجيهات: : يقدم النشاط ضمن أفواج.
الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

الثلاثيات الفيثاغورثية
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التفكير بواسطة الحاسوب
تصحيح: /
الهدف: توظيف القواسم.
توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.
الحل: بسيط

التمارين

تمارين تطبيقية

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

1 مجموعة قواسم العدد 20 هي : $\{-20,-10,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,10,20\}$.

2 مجموعة قواسم الموجبة للعدد 39 هي $\{1,3,13,39\}$

$(a,b)\in\{(1,39);(39,1);(3,13);(13,3)\}$.

3 لدينا $x^2-y^2=15$ تعني $(x-y)(x+y)=15$ ويكون العددان الصحيحان $x-y$ و $x+y$ من قواسم 15.

4 أ ــ $(x-2)(y-3)=xy-3x-2y+6$.

ب ــ $xy=3x+2y$ تعني $xy-3x-2y+6=6$ أي $(x-2)(y-3)=6$ ثم نستعمل قواسم 6.

7 $-1027\le 53k\le 1112$ معناه $-19\le k\le 20$

عدد المضاعفات للعدد 53 المحصورة بين 1027– و 1112 هو 40.

8 1) $a = 7k$ و $7k < 50$ أي $k \leq 7$

$a \in \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$.

2) $\frac{11a}{7a} = \frac{11}{7} = \frac{33}{21}$ حيث a عدد صحيح غير معدوم ، $0 < 7a < 50$ معناه $0 < a \leq 7$ وبالتالي :

$$\frac{77}{49} = \frac{66}{42} = \frac{55}{35} = \frac{44}{28} = \frac{33}{21} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$$

9 13 قاسم للعدد $n+4$ معناه $n+4 = 13k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ أي $n = 13k - 4$. $|n| \leq 22$ معناه $-24 \leq n \leq 22$

ويكافئ $-24 \leq 13k \leq 22$ ومعناه $-\frac{24}{13} \leq k \leq \frac{22}{13}$ أي $k \in \{-1, 0, 1\}$ ،

ومنه $n \in \{-17, -4, 9\}$.

10 $12 = 2^2 \times 4$ ، مجموعة قواسم 12 هي : $\mathscr{D}_{12} = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$5n+7$	–12	–6	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	6	12
$5n$	–19	–13	–11	–10	–9	–8	–6	–5	–4	–3	–1	5
n				–2				–1				1

العدد $n+6$ يقبل القسم على n معناه $n+6 = nk$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ ويكافئ $6 = n(k-1)$ إذن n يقسم 6 .

وبالتالي $n \in \{1; 2; 3; 6\}$. وبالعكس كل القيم المعينة تحقق المطلوب .

1) $34 = 2 \times 17$ ومنه مجموعة قواسم 34 هي :

$\mathscr{D}_{34} = \{-34, -17, -2, -1, 1, 2, 17, 34\}$.

$5n+6$	–34	–17	–2	–1	1	2	17	34
$5n$	–40	–23	–8	–9	–5	–4	11	28
n	–8				–1			

2) $5n+6$ قاسم للعدد $n+8$ ومنه $5n+6$ يقسم $5n+40$ إذن $5n+6$ يقسم $(5n+40)-(5n+6)$ أي $5n+6$ يقسم 34 ومنه $n = -1$ أو $n = -8$.

وبالعكس إذا كان $n = -1$ فإن 1 يقسم 7 وإذا كان $n = -8$ فإن -34 يقسم 0 إذن كلا النتيجتين تحقق المطلوب .

14 n عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = 7n + 2$

إذا كان العدد d قاسما لـِ : a و b فإن d يقسم $7a$ و $3b$

ومنه d يقسم $7a - 3b = 49$.

15 n عدد طبيعي غير معدوما ويختلف عن العدد 1 .

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. بعض القواسم للعدد $n^3 - n$: 1 ، $n-1$ ، n ، $n+1$ ، $n^2 - n$ ، $n^2 + n$ ، $n^2 - 1$ ،

$n^3 - n$

17 ليكن a و b عددن صحيحين غير معدومين .

أ) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ب) نفرض أن $a^3 + b^3 = 3k$ إذن

$(a+b)^3 = 3k + 3a^2b + 3ab^2 = 3(k + a^2b + ab^2)$

2 - القسمة الأقليدية

18 تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد a على b :

أ - $a = 118$ و $b = 5$. $118 = 5\times 23 + 3$ الباقي هو 3.

ب - $a = 152$ و $b = 7$. $152 = 7\times 21 + 5$ الباقي هو 5.

جـ - $a = -118$ و $b = 5$. $-118 = 5(-24) + 2$

د - $a = -152$ و $b = 7$. $-152 = 7(-22) + 2$

19 عين الأعداد الطبيعية $n = 41k + 5$ مع $41k + 5 < 100$ أي $k \le 2$ ومنه $n \in \{5, 46, 87\}$

20 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a = 17b + 3$ و $b > 3$ و $a = 23b + 27$،

إذن $6b - 24 = 0$ ومنه $b = 4$ و $a = 71$

21 n عدد طبيعي ، بقسمته على 7 أو على 3 نجد نفس الباقي أي $n = 7k + r$ و $n = 3k' + r$ مع $0 \le r < 3$.

$n - r$ يقبل القسمة على 3 و 7 وهما عددان أوليان ،

إذن موجودين في تحليله وبالتالي 21 يكون قاسم له ،

أي $n - r = 21\alpha$ معناه $n = 21\alpha + r$ بما أن $0 \le r < 3$

فإن $n = 21\alpha$ ، $n = 21\alpha + 1$ أو $n = 21\alpha + 2$ ، $\alpha \in \mathbb{N}$.

24 a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث :

$a + b = 416$ و $a = bk + 61$ مع $b > 61$.

ومنه $bk + 61 + b = 416$ أي $b(k+1) = 355$ إذن b قاسم للعدد 355 ولدينا $355 = 5\times 71$.قواسم 355 هي 1،

5، 71 و 355 بما أن $b > 61$ فإن $b = 71$ أو $b = 355$.

إذا كان $b = 71$ فإن $a = 416 - 71 = 345$.

إذا كان $b = 355$ $a = 416 - 355 = 61$.

25 استعمال خوارزمية أقليدس لتعيين $PGCD(a,b)$:

أ - $a = 315$ و $b = 117$. $315 = 117\times 2 + 81$

$117 = 81\times 2 + 36$ ؛ $81 = 36\times 2 + 9$ ؛ $36 = 9\times 4 + 0$. ومنه $PGCD(315,117) = 9$.

ب - $a = 1260$ و $b = 528$. $1260 = 528\times 2 + 204$ ؛ $528 = 204\times 2 + 120$ ؛ $204 = 120\times 1 + 84$ ؛

$120 = 84\times 1 + 36$ ؛ $84 = 36\times 2 + 12$ ؛ $36 = 12\times 3 + 0$ ومنه $PGCD(1260,528) = 12$.

جـ - $a = 1380$ و $b = 972$.

$1380 = 972\times 1 + 408$ ؛ $972 = 408\times 2 + 156$ ؛

$408 = 156\times 2 + 96$ ؛ $156 = 96\times 1 + 60$ ؛ $96 = 60\times 1 + 36$ ؛ $60 = 36\times 1 + 24$ ؛ $36 = 24\times 1 + 12$ ؛

$24 = 12\times 2 + 0$ ومنه $PGCD(1380,972) = 12$.

26 n عدد طبيعي غير معدوم .

$PGCD\left(n^2,n\right)=n$ ؛ $PGCD\left(3n,n\right)=n$

27 البرهان أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة قواسم العدد $p\gcd\left(a,b\right)$.

نضع $\delta=p\gcd\left(a,b\right)$.

كل عدد d قاسم للعدد δ هو قاسم للعددين a و b لأن δ يقسم a و b.

العكس نفرض أن d قاسم للعددين a و b ومنه $a=\alpha d$ و $b=\beta d$ مع α و β عددين طبيعيين غير معدومين .

إذا كان $p\gcd(\alpha,\beta)=1$ فإن $p\gcd\left(a,b\right)=d$ ومنه $d=\delta$ وبالتالي d يقسم δ .

إذا كان $p\gcd(\alpha,\beta)=\lambda$ مع $\lambda\neq 1$ فإنه يوجد عددين طبيعيين غير معدومين وأوليين فيما بينهما α' و β' حيث $\alpha=\lambda\alpha'$ و $\beta=\lambda\beta'$ ومنه $a=d\lambda\alpha'$ و $b=d\lambda\beta'$ إذن $p\gcd\left(a,b\right)=d\lambda$ ومنه $\delta=d\lambda$ ومنه d يقسم δ.

28

	1	1	2	1	4	
792	456	336	120	96	24	0

إذن $PGCD\left(792,456\right)=24$. لدينا $24=2^3\times 3$.

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي:

$\mathcal{D}_{24}=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$.

29 –

	1	2	5	
448	308	140	28	0

إذن $PGCD\left(448,308\right)=28$. لدينا $28=2^2\times 7$

-مجموعة القواسم المشتركة للعددين 448 و 308 هي : $\mathcal{D}_{28}=\{1,2,4,7,14,28\}$.

$4294=nk+10$ و $3521=nk'+11$ ومنه

$4284=nk$ و $3510=nk'$ إذن n هو قاسم للعددين 4284 و 3510 .

	1	4	1	1	6	1	2	
4284	3510	774	414	360	54	36	18	0

$PGCD\left(4284,3510\right)=18$ ولدينا : $18=2\times 3^2$.

إذن $n\in\{1,2,3,6,9,18\}$.

31 n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام حيث:

$21685=nk+37$ و $33509=nk'+53$

ومنه $21648=nk$ و $33456=nk'$

إذن n هو قاسم للعددين 21648 و 33456 لدينا $PGCD\left(33456,21648\right)=12\times PGCD\left(2788,1804\right)$

	1	1	1	5	
2788	1804	984	820	164	0

$PGCD\left(33456,21648\right)=12\times 164=1968$

$1968=2\times 984$ إذن القاسم الوحيد المكون من أربعة أرقام للعدد $PGCD\left(33456,21648\right)$ هو نفسه ؛

إذن $n=1968$.

32 (1

	1	2	4	

182	126	56	14	0

إذن $PGCD(182,126)=14$.

2) استعمال خوارزمية أقليدس :

$182=126\times1+56$ معناه $182-126=56$

$126=56\times2+14$ معناه $126-56\times2=14$

إذن : $14=126-56\times2=126-(182-126)\times2$ أي $14=182(-2)+126\times3$. إذن $\alpha=-2$ و $\beta=3$.

3 - خواص القاسم المشترك الأكبر

33 $1399=82\times17+5$ ومنه الباقي هو 5 .

$PGCD(1399,82)=PGCD(82,5)=1$

34 تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b:

أ - $a=-350$ و $b=-252$.

$PGCD(-350,-252)=PGCD(350,252)=14$

ب - $a=126$ و $b=-735$.

$PGCD(126,-735)=PGCD(126,735)=21$

جـ - $a=-138$ و $b=575$.

$PGCD(-138,575)=PGCD(138,575)=23$

35 $PGCD(54,82)=2$

$PGCD(5400,8200)=100PGCD(54,82)=200$.

من التمرين 36 إلى التمرين 41 ، عيّن كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين.

نضع : $PGCD(a,b)=d$ ونطبق الخاصية $a=da'$ ، $b=db'$ مع a' و b' أوليين فيما بينهما .

36 $\begin{cases}a+b=54\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ معناه $\begin{cases}9(a'+b')=54\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'+b'=6\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ (a',b') تنتمي إلى $\{(1,5);(5,1)\}$ أي $(a,b)\in\{(9,45);(45,9)\}$.

37 $\begin{cases}a+b=72\\PGCD(a,b)=9\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(9,63);(27,45);(45,27);(63,9)\}$

38 $\begin{cases}a+b=420\\PGCD(a,b)=84\end{cases}$ ؛ $(a,b)\in\{(84,336);(168,252);(252,168);(336,84)\}$

39 $\begin{cases}ab=360\\PGCD(a,b)=6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}36a'b'=360\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$

ومعناه $\begin{cases}a'b'=10\\p\gcd(a',b')=1\end{cases}$ ويكافئ $(a',b')\in\{(1,10);(2,5);(5,2);(10,1)\}$ أي

$(a,b)\in\{(6,60);(12,30);(30,12);(60,6)\}$

40 $\begin{cases} ab = 2700 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ ؛ $(a,b) \in \{(5,540);(20,135);(20,135);(540,5)\}$

41 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$ معناه $(a,b) = (85,80)$ أو $(a,b) = (35,28)$.

42 أ - $a = 55$ و $b = 36$ ؛ $PGCD(36,55) = 1$.

ب - $a = 14$ و $b = 165$ ؛ $PGCD(165,14) = 1$.

جـ - $a = 1155$ و $b = 872$؛ $PGCD(1155,872) = 1$

في كل حالة نقول أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

43 1) $PGCD(140,143) = 1$

2) استنتج في كل حالة من الحالتين التاليتين :

أ – $\begin{cases} a = 140 \times 34 \\ b = 143 \times 34 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 34$.

ب – $\begin{cases} a = 143 \times 82 \\ b = 140 \times 82 \end{cases}$ و $PGCD(140,143) = 1$ معناه $PGCD(a,b) = 82$.

44 لأن 7 لا يقسم 500.

تمارين للتعمق

1 - قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

45 المسافة بين العمودين المتتاليين هي عدد طبيعي x حيث $2 < x < 5$ وبالتالي : إمّا $x = 3$ وإما $x = 4$. لدينا 4 لا يقسم 90 بينما 3 هو قاسم مشترك للعددين 90 و 156 ، ونأخذ قاسما مشتركا لأن كل زاوية القطعة يغرس عمود. إذن المسافة بين عموديين متتاليين هي $3m$.

محيط القطعة هو $2(90+156) = 492\,m$ ولدينا عدد الأعمدة هو نفس عدد الفراغات الموجودة بين عمودين متتاليين أي $\frac{492}{3} = 164$

46 قواسم 220 هي : 1، 2 ، 4 ، 5 ، 10، 11، 20 ، 22، 44، 55، 110، 220.

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 =$
284

قواسم 284 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 71 ، 142 ، 284 .

$1+2+4+71+142 = 220$.

47 ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3.

لدينا $n+5 = n-2+7$ ومنه $n+5$ مضاعف لِـ $n-2$

معناه $n-2$ قاسم للعدد 7 وبالتالي $n-2 = 1$ أو $n-2 = 7$ أي $n = 3$ أو $n = 9$.

عكسيا إذا كان $n=3$ أو $n=9$ فإن $n+5=8$ أو $n+5=14$ و $n-2=1$ أو $n-2=7$ وبالتالي في كلا الحالتين $n+5$ مضاعف لِـ $n-2$.

48 1) قواسم 8 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 8 هو : 15.

قواسم 81 هي 1 ، 3 ، 9 ، 27 ، 81 ؛ ومنه مجموع قواسم العدد 81 هو : 121.

2) عدد قواسم 8 هو 4 وعدد قواسم 81 هو 5 إذن عدد قواسم العدد 8×81 هو $4\times5=20$.

49 1) $\frac{n+2}{n-1}=\frac{n-1+3}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}+\frac{3}{n-1}$

$\frac{n+2}{n-1}=1+\frac{3}{n-1}$ وبالتالي لكي يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا يكفي أن يكون $\frac{3}{n-1}$ عددا صحيحا ولهذا يجب أن يكون العدد $(n-1)$ قاسما للعدد 3.

قواسم العدد 3 هي -1، -3، 1 و 3 وبالتالي $(n-1=-1)$ ، $(n-1=-3)$، $(n-1=1)$ أو $(n-1=3)$

معناه $(n=0)$، $(n=-2)$ ، $(n=2)$ أو $(n=4)$ وبما أن $n\in\mathbb{N}$ فإن قيمه الممكنة هي : 0 ، 2 و 4.

2) ليكن α و β عددين طبيعيين حيث $a=2^{\alpha}\times3^{\beta}$ ومنه $a^2=2^{2\alpha}\times3^{2\beta}$ عدد قواسم a^2 هو $(2\alpha+1)(2\beta+1)$

وعدد قواسم a هو $(\alpha+1)(\beta+1)$ ومن المعطيات لدينا : $(2\alpha+1)(2\beta+1)=3(\alpha+1)(\beta+1)$ معناه

$4\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=3\alpha\beta+3\alpha+3\beta+3$ ومعناه $\alpha\beta-\alpha=\beta+2$ يكافئ $\alpha(\beta-1)=\beta+2$ أي

$\alpha=\frac{\beta+2}{\beta-1}$. وحسب السؤال السابق ينتج أن $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=2\end{cases}$ ؛ إذن $a=2^2\times3^4=324$ أو $a=2^4\times3^2=144$.

50 $xy-4y-12=0$ إذا كان $x=4$ فإن المعادلة تصبح $-12=0$ وهذا غير ممكن إذن $x\neq4$.

$xy-4y-12=0$ معناه $y=\frac{12}{x-4}$ ومنه $x-4$ يقسم 12 ولدينا $12=2^2\times3$.

$x-4$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
x	-8	-2	0	1	2	3	5	6	7	8	10	16
y	-1	-2	-3	-4	-6	-12	12	6	4	3	2	1

51 1) ليكن $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1-4}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}-\frac{4}{x-1}=2x-1-\frac{4}{x-1}$$

2) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي إحداثيتيها أعداد صحيحة . $M\in C_f$ معناه $x\in[-3;1[\cup]1;3]$

و $y=2x-1-\frac{4}{x-1}$ أي $y-2x+1=-\frac{4}{x-1}$.

إذن $x-1$ يقسم 4

$x-1$	-4	-2	-1	1	2	4
$y-2x+1$	1	2	4	-4	-2	-1
x	-3	-1	0	2	3	$\cancel{5}$

8	3	–1	3	–1	–6	y

52 n عدد طبيعي . نضع $a=n\left(n^2+5\right)$.

1) إذا كان n عددا زوجيا فإن a عدد زوجي.

إذا كان n عددا فرديا فإن $n=2k+1$ ومنه $n^2+5=4k^2+4k+6$ وهو عدد زوجي إذن a عدد زوجي.

2) بنفس الطريقة نميز الحالات $n=3k$ ، $n=3k+1$ ،$n=3k+2$.

53 a عدد طبيعي؛ للبرهان أن العدد $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف للعدد 6 يكفي أن نبرهن $a\left(a^2-1\right)$ مضاعف لِـ 2 و 3 لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما ثم نميز الحالات.

54 رقم آحاد العدد n^5-n هو 0 معناه n^5-n يقبل القسمة على 10 ولدينا من بين القواسم للعدد 10 قاسمين أوليين فقط هما 2 و 5.

$n^5-n=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ أي $n^5-n=n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\left(n^2+1\right)$.

لدينا $n\left(n+1\right)$ هو جداء عددين طبيعيين متواليين إذن هو عدد زوجي أي مضاعف لِـ 2 .

n^5-n مضاعف لِـ $n\left(n+1\right)$, و $n\left(n+1\right)$ مضاعف لِـ 2 إذن n^5-n مضاعف لِـ2 .

لدينا كل عدد طبيعي n هو إماّ مضاعفا لِـ 5 وإما ليس مضاعفا لِـ 5 .

إذا كان n مضاعفا لِـ 5 , بما أن n^5-n مضاعف لـِ n فإن n^5-n مضاعف لـِ 5 .

إذا كان n ليس مضاعفا لِـ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 ، 2 , 3 , 4 .

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإن $n-1$ يكون مضاعف لـ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـِ $n-1$ فإنه يكون مضاعف لـ 5.

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإن $n+1$ يكون مضاعف لـ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـِ $n+1$ فإنه يكون مضاعف لـ 5.

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r\in\{2;3\}$ فإن $n=5k+r$ ومنه $n^2=25k^2+10k+r^2$ أي $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+r^2+1$

وبالتالي إذا كان $r\in\{2;3\}$ فإن $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+5$ أو $n^2+1=5\left(5k^2+2k\right)+10$ إذن في الحالتين n^2+1 مضاعف لِـ 5 وبما أن n^5-n مضاعف لـ n^2+1 فإن n^5-n مضاعف لـ 5 .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، n^5-n مضاعف لـ 5. وبالتالي تحليل العدد n^5-n يشمل العددين الأوليين 2 و 5 إذن n^5-n هو مضاعف للعدد 10 .

n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد معناه أن رقم آحاد $n^{p+5}-n^{p+1}$ هو 0. $n^{p+5}-n^{p+1}=n^p\left(n^5-n\right)$ ومنه $n^{p+5}-n^{p+1}$ مضاعف للعدد 10.

55 للبرهان أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون n^7-n يقبل القسمة على 14 يكفي أن نبرهن أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 7 لأن 2 و 7 أوليان فيما بينهما.

56 1) من أجل كل عدد طبيعي n ، $a=n^2+5n+4=\left(n+1\right)\left(n+4\right)$ و $b=n^2+3n+2=\left(n+1\right)\left(n+2\right)$

إذن العدد $n+1$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

2) لدينا $3n^2+15n+20=(n+1)(3n+12)+8$

إذن العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$ معناه العدد $n+1$ قاسما للعدد 8 ومنه $n+1\in\{1;2;4;8\}$ أي $n\in\{0;1;3;7\}$.

وعكسيا بتعويض n بقيم المجموعة $\{0;1;3;7\}$ نجد العدد $n+1$ قاسما للعدد $3n^2+15n+20$

57 n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3 .

أ - لدينا $n^2-2n+1=(n-1)^2$ و a يقسم $n-1$ إذن a يقسم $(n-1)^2$ أي a يقسم n^2-2n+1 .

ب - a يقسم n^2+n+3 و n^2-2n+1 إذن a يقسم الفرق $(n^2+n+3)-(n^2-2n+1)$ أي يقسم $3n+2$.

جـ - a يقسم $n-1$ ومنه a يقسم $3n-3$ وبما أن a يقسم $3n+2$ فإنه يقسم الفرق $(3n+2)-(3n-3)$ أي a يقسم 5 .

د - $a\in\{-5;-1;1;5\}$.

58 نفترض أن الثنائية $(x;y)$ يكون من أجلها العدد xy قاسما للعدد $x+y$ إذن $x\neq 0$ و $y\neq 0$
ولدينا $x+y=xyk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن $x=y(xk-1)$ و $y=x(yk-1)$ وبالتالي x يقسم y و y يقسم x إذن $x=y$ وبالتالي يصبح $2x=x^2k$ أي $2=xk$ ومنه x يقسم 2 إذن $x=y=1$ أو $x=y=2$.
وبالعكس الثنائيتين $(1,1)$ و $(2,2)$ تحققان المطلوب.

59 n عدد طبيعي فردي . S مجموع أعداد طبيعية متتابعة وعددها n . نعتبر العدد الطبيعي a ونضع $S=a+(a+1)+(a+2)+...+(a+n-1)$ هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 1 .

$$S=\frac{n}{2}(a+(a+n-1))=n\left(a+\frac{n-1}{2}\right)$$

بما أن n عدد طبيعي فردي فإن $n-1$ هو زوجي وبالتالي $\frac{n-1}{2}$ يكون عدد طبيعي ومنه $k=a+\frac{n-1}{2}$ هو عدد طبيعي ومنه $S=nk$ مع $k\in\mathbb{N}$ إذن العدد S يقبل القسمة على n .

2 - القسمة الأقليدية

66 $71=0\times72+71$ إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد 71 على 72 هو 71 .

67 كتاب مكتوب عليه 4350 سطرا . كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة ناقصة .
$4350=34\times127+32$ إذن توجد بالكتاب 127 صفحة كاملة و الصفحة الأخيرة مكتوب عليها 32 سطرا فقط .

68 علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100}=13k+35$. ولدينا $100^{100}=13k+26+9$
أي $100^{100}=13(k+2)+9$ بما أن $9<13$ فإن باقي قسمة 100^{100} على 13 هو 9.

69 الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما على التوالي 8 و 12. أي $m=17k+8$
و $n=17p+12$ مع $k\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$.

$$m+n=17(k+p)+20=17(k+p+1)+3$$

إذن باقي قسمة $m+n$ على 17 هو 3 .

$m\times n=(17k+8)(17p+2)$

$m\times n=17^2kp+17(2k+8p)+16$

$m\times n=17(17kp+2k+8p)+16$

إذن باقي قسمة $m\times n$ على 17 هو 16 .

$m^2=(17k)^2+16\times17k+64$

$m^2=17(17k^2+16k+3)+13$.

إذن باقي قسمة m^2 على 17 هو 13.

79 $2^{3\times0}-1=0$ وهو يقبل القسمة على 7 .

نفرض $2^{3p}-1$ يقبل القسمة على 7أي $2^{3p}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$ ولنبرهن $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 .

$2^{3(p+1)}-1=8\times2^{3p}-1=8(7k+1)-1=56k+7$

أي $2^{3(p+1)}-1=7(8k+1)$ ومنه $2^{3(p+1)}-1$ يقبل القسمة على 7 . إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7.

أ- من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $2^{3n}-1=7k$ مع $k\in\mathbb{N}$

أي $2^{3n}=7k+1$ إذن الباقي هو 1.

ب- $a=2^{3n+1}=2(7k+1)=7(2k)+2$ إذن الباقي 2.

جـ- $a=2^{3n+2}=4(7k+1)=7(4k)+4$ الباقي هو 3.

80 إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد a^2+b ومنه d يكون قاسما مشتركا a و (a^2+b).

إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و (a^2+b) فهو قاسم a^2 وبالتالي هو قاسم للعدد $(a^2+b)-a^2$ أي قاسم للعدد b ومنه d يكون قاسما مشتركا للعددين a و b .

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين a و (a^2+b) هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a;a^2+b)=PGCD(a;b)$.

2) كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لكل من الأعداد : $a+b$ ، $2a$ ، $3b$ و $2a+3b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$.

وبالعكس لدينا كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم لكل من الأعداد $3(a+b)$ ، $2(a+b)$ ،

$3(a+b)-(2a+3b)$ و $(2a+3b)-2(a+b)$ ولدينا $3(a+b)-(2a+3b)=a$ و $(2a+3b)-2(a+b)=b$

إذن كل قاسم مشترك للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

نستنتج من هذا أن القواسم المشتركة للعددين $a+b$ و $2a+3b$ هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

وبالأخص $PGCD(a+b;2a+3b)=PGCD(a;b)$.

81 n عدد طبيعي . $a=11n+3$ و $b=13n-1$.

1) $13a-11b=13(11n+3)-11(13n-1)$

$13a-11b=143n+39-143n+11=50$.

2) $PGCD(a;b)$ يقسم $13a$ و $11b$ والفرق $13a-11b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 50. لدينا $50=2\times5^2$, إذن $PGCD(a;b)$ ينتمي إلى المجموعة $\{1,2,5,10,25,50\}$.

3) تعيين ثنائية $(a;b)$ بحيث يكون $PGCD(a;b)=50$.

50 يقسم a و b ومنه يقسم $6a$ و $5b$ وكذلك $6a-5b$

أي 50 يقسم $n+23$ ومعناه $n+23=50k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ومعناه $n=50k-23$ وبأخذ $k=1$ نجد $n=27$ ومنه $(a;b)=(300;350)$

وبالعكس $a=300=6\times50$ و $b=350=7\times50$ ولدينا 6 و 7 أوليان فيما بينهما إذن $PGCD(a;b)=50$

82 $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\ PGCD(a;b)=16\end{cases}$ معناه توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=16a'$, $b=16b'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما

من الفرضية الأولى نحصل على $2a'^2+b'^2=82$ ومعناه $b'^2=2(41-a'^2)$ إذن يجب $a'^2<41$

a'^2	1	4	9	16	25	36
b'^2	80	74	64	50	32	10

إذن الثنائية الوحيدة $(a';b')$ هي $(3,8)$ ومنه $(a;b)=(48,128)$

83 a و b عددان من $\mathbb{N}^*$ و $PGCD(a;b)=d$.

توجد $(a';b')$ من $\mathbb{N}^{*2}$ حيث $a=da'$, $b=db'$ ؛ a' و b' أوليان فيما بينهما ؛ $ab+5d^2=35d$ تصبح

$d^2(a'b'+5)=35d$ معناه $d(a'b'+5)=35$ ومنه d يقسم 35و $a'b'=\frac{35}{d}-5$ ؛ قواسم 35 هي: $1,5,7,35$

إذا كان $d=35$ أو $d=7$ فإن $a'b'\leq0$ وهذا مرفوض

إذا كان $d=1$ فإن $a'b'=30$ ولدينا $30=2\times3\times5$

ومجموعة قواسم 30 هي : $\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ ومنه : $(a';b')\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);$
$(6,5);(10,3);(15,2);(30,1)\}$

إذا كان $d=5$ فإن $a'b'=2$ ؛ $(a';b')\in\{(1,2);(2,1)\}$ ومنه $(a;b)\in\{(5,10);(10,5)\}$.

خلاصة : $(a;b)\in\{(1,30);(2,15);(3,10);(5,6);(6,5);(10,3);(15,2);(30,1);(5,10);(10;5)\}$.

84 1) ليكن d قاسما مشتركا لـ a ، b إذن هو قاسم لكل من $7a$, $5b$, $4a$ و $3b$ وبالتالي d يقسم $7a-5b$, $5b-7a$, $4a-3b$ و $3b-4a$ أي d قاسم مشترك لـ $|x|$ و $|y|$.

العكس ليكن d قاسما مشتركا لـ x و y إذن هو قاسم لكل من $4x$, $7y$, $3x$ و $5y$ وبالتالي d قاسم للفرقين $4x-7y$ و $3x-5y$

لدينا $4x-7y=4(7a-5b)-7(4a-3b)=b$ و $3x-5y=3(7a-5b)-5(4a-3b)=a$

إذن d قاسم مشترك لـ a ، b .

ومنه: مجموعة القواسم المشتركة للعددين a، b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين x و y ؛ وبالأخص $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(x;y)=PGCD(a;b)$.

2) $\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\ PGCD(\alpha;\beta)=5\end{cases}\ldots(1)$

نضع : $x=7\alpha-5\beta$ و $y=4\alpha-3\beta$. وحسب السؤال 1) يكون $\alpha=3x-5y$ و $\beta=4x-7y$

ومنه $PGCD(x;y)=PGCD(\alpha;\beta)=5$. إذن (1) تصبح $\begin{cases} xy=1300 \\ PGCD(x;y)=5 \end{cases}$

$PGCD(x;y)=5$ معناه يوجد x' و y' عددان صحيحان غير معدومين حيث $|x'|$ و $|y'|$ و $x=5x'$ و $y=5y'$

ومنه $25x'y'=1300$ أي $x'y'=52$

$52=2^2\times 13$ وقواسمه هي 1، 2، 4، 13، 26 و 52

x'	-52	-13	-2	-1	1	2	13	52
y'	-1	-2	-13	-52	52	13	2	1
x	-260	-65	-10	-5	5	10	65	260
y	-5	-10	-65	-260	260	65	10	5
α	-755	-145	295	1285	-1285	-295	145	755
β	-1005	-190	415	1800	-1800	-415	190	1005

$(\alpha;\beta)\in\{(295,415);(1285,1800);(145,190);(755,1005)\}$

من التمرين 85 إلى التمرين 88 ، برهن من أجل كل عدد طبيعي n ، أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما .

85 $a=n+3$ و $b=2n+7$.

d يقسم a و b إذن يقسم $2a$ وكذلك $b-2a$ ولدينا : $b-2a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

86 $a=3n+4$ و $b=8n+11$.

d يقسم a و b إذن يقسم $8a$ و $3b$ وكذلك $3b-8a$ ولدينا : $3b-8a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

87 $a=9n+7$ و $b=5n+4$.

d يقسم a و b إذن يقسم $5a$ و $9b$ وكذلك $9b-5a$ ولدينا : $9b-5a=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

88 $a=7n^2+2$ و $b=4n^2+1$.

d يقسم a و b إذن يقسم $4a$ و $7b$ وكذلك $4a-7b$ ولدينا : $4a-7b=1$ إذن d يقسم 1 ومنه $d=1$.

89 n عدد طبيعي غير معدوم .

1) نضع $PGCD(2n-1;9n+4)=d$ إذن d يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه d يقسم $2(9n+4)$

و $9(2n-1)$ إذن d يقسم $2(9n+4)-9(2n-1)$

بما أن $2(9n+4)-9(2n-1)=17$ فإن d يقسم 17 أي $d=1$ أو $d=17$.

2) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $(9n+4)$ و $(2n-1)$ ومنه 17 يقسم $4(2n-1)$

إذن 17 يقسم الفرق $(9n+4)-4(2n-1)=n+8$.

3) إذا كان $PGCD(2n-1;9n+4)=17$ فإن 17 يقسم $n+8$ ومنه $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

لنبرهن العكس , نفرض أن $n=17\alpha-8$ مع $\alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه $9n+4=9(17\alpha-8)+4=9\times 17\alpha-68$ و $2n-1=2(17\alpha-8)-1=2\times 17\alpha-17$

أي : $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$

نضع $PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=\delta$ إذن δ يقسم $(2\alpha-1)$ و $(9\alpha-4)$ ومنه δ يقسم $9(2\alpha-1)$

و $2(9\alpha-4)$ إذن δ يقسم $2(9\alpha-4)-9(2\alpha-1)$

أي δ يقسم 1 وبالتالي $\delta = 1$.

$PGCD(2\alpha-1;9\alpha-4)=1$, $9n+4=17(9\alpha-4)$ و $2n-1=17(2\alpha-1)$ معناه

. $PGCD(2n-1;9n+4)=17$

خلاصة : $n=17\alpha-8$ مع $\alpha \in \mathbb{N}^*$ معناه $PGCD(2n-1;9n+4)=17$.

90 n عدد طبيعي .

نضع $a=5n^2+14n+14$, $b=n+2$ و $c=5n+3$.

1) لدينا $(n+2)(5n+4)=5n^2+14n+8$ ومنه b قاسم للعدد $5n^2+14n+8$.

2) b يقسم a إذن b يقسم $a-(5n^2+14n+8)$ أي b يقسم 6 .

وبالعكس ، نفرض أن b يقسم 6 بما أن b يقسم $5n^2+14n+8$ فإنه يقسم المجموع $5n^2+14n+8+6$ أي b يقسم a.

خلاصة : b يقسم a معناه b يقسم 6 .

3) b يقسم 6 معناه $n+2=1$ أو $n+2=2$ أو $n+2=3$ أو $n+2=6$ ومعناه $n=0$ أو $n=1$ أو $n=4$.

ـــ إذا كان $n \in \{0,1,4\}$ فإن b يقسم 6 أي b يقسم a ومنه باقي قسمة a على b هو 0 .

ـــ إذا كان $n=2$ فإن $a=62$ و $b=4$ إذن الباقي 2.

ـــ إذا كان $n=3$ فإن $a=101$ و $b=5$ إذن الباقي 1.

ـــ إذا كان $n>4$ فإن $b>6$ ولدينا $a=bc+6$ إذن باقي قسمة a على b هو 6 .

$c=5n+3$ ؛

ـــ إذا كان $n=0$ فإن $a=14$ و $c=3$ ومنه باقي قسمة a على c هو 2 .

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $c>6$ ولدينا $a=cb+6$ إذن باقي قسمة العدد a على c هو 6 .

91 (1 $n \in \mathbb{Z}-\{1\}$ نضع : $a=3n+5$ و $b=n-1$.

أ - لدينا $a-3b=3n+5-3n+3=8$ إذن $a=3b+8$

ب - $\frac{a}{b}=3+\frac{8}{b}$. $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا معناه b يقسم 8

أي : $b \in \{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$ معناه $n \in \{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$

2) نفرض أن n عدد طبيعي .

أ - نضع $PGCD(a;b)=d$. d يقسم a و b إذن يقسم $3b$ ومنه يقسم $a-3b$ وبالتالي d يقسم 8 .

ب - إذا كان $n=8k$ فإن d يقسم n ومنه d يقسم $n-b$ أي d يقسم 1 وبالتالي $d=1$.

ـــ إذا كان $n=8k+1$ فإن $a=8(3k+1)$ و $b=8k$ إذن 8 يقسم d وبما أن d يقسم 8 فإن $d=8$.

ـــ إذا كان $n=8k+2$ فإن $a=24k+11$ و $b=8k+1$ بما أن d يقسم 8 , و a و b فرديان فإن $d=1$.

ـــ إذا كان $n=8k+3$ فإن $a=2(12k+7)$ و $b=2(4k+1)$ ؛ نضع $d'=PGCD(12k+7;4k+1)$ d' يقسم $3(4k+1)$ ومنه يقسم $12k+7-3(4k+1)$ أي يقسم 4 وبالتالي d' يقسم $4k$ و $4k+1$ إذن يقسم فرقهما 1 وبالتالي $d'=1$ إذن $d=PGCD(a;b)=2$.

ـــ إذا كان $n=8k+4$ فإن $a=24k+17$ و $b=8k+3$

a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$.

ـــ إذا كان $n=8k+5$ فإن $a=4(3k+5)$ و $b=4(2k+1)$ ؛ إذا كان $d=8$ فإن $2k+1$ يقبل القسمة على 2 وهذا تناقض إذن $d=4$.

ـــ إذا كان $n=8k+6$ فإن $a=24k+23$ و $b=8k+5$ ؛ a و b فرديان بما أن d يقسم 8 فإن $d=1$

ـــ إذا كان $n=8k+7$ فإن $a=2(8k+13)$ $b=2(4k+3)$ ؛ $2k+3$ هو فردي , إذا كان $d=8$ أو $d=4$ فإن $2k+3$ يقبل القسمة على الأقل على 2 وهذا تناقض إذن $d=2$.

92 1) n عدد طبيعي ، $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$.

أ - نضع $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(n;\beta)=d'$

d يقسم α و β إذن يقسم كذلك $n\beta$ ومنه يقسم $n\beta-\beta$ أي يقسم n وبالتالي d يقسم $PGCD(n;\beta)=d'$.

العكس : d' يقسم n و β إذن يقسم $n(n+1)$ أي يقسم α وبالتالي d' يقسم $PGCD(\alpha;\beta)=d$.

d يقسم d' و d' يقسم d معناه $d=d'$ أي

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$.

ب - d يقسم $n+2$ و n إذن يقسم فرقهما 2 وبالتالي $PGCD(\alpha;\beta)=2$ أو $PGCD(\alpha;\beta)=1$.

2) أ - $a=3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n)$

$b=3n^2+8n+4=(3n+2)(n+2)$

إذن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b .

ب - لدينا $a=\alpha(3n+2)$ و $b=\beta(3n+2)$.

ـــ إذا كان n فرديا فإن β يكون فرديا وبالتالي $d\neq 2$ إذن $d=PGCD(\alpha;\beta)=1$ ومنه $PGCD(a;b)=(3n+2)$.

ـــ إذا كان n زوجيا فإن α و β زوجيان ومنه $d=2$

إذن يوجد عددان طبيعيان α' و β' أوليان فيما بينهما حيث $\alpha=2\alpha'$ و $\beta=2\beta'$ أي $a=2(3n+2)\alpha'$ و $b=2(3n+2)\beta'$ ومنه $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

جـ - $PGCD(a;b)=41$ هو عدد فردي إذن لا يمكن أن يكون $PGCD(a;b)=2(3n+2)=41$ ونأخذ الحالة المتبقية أي $PGCD(a;b)=(3n+2)=41$ معناه $n=13$ وبالتالي $\alpha=182$ و $\beta=15$.

93 n عدد طبيعي ؛ نضع: $a=9n+1$ و $b=9n-1$

1) $a-b=2$ ؛ $PGCD(a;b)$ يقسم الفرق $a-b$ أي $PGCD(a;b)$ يقسم 2 هو إما 1 وإما 2.

ـــ إذا كان n زوجيا فإن a و b يكونا فرديان وبالتالي $PGCD(a;b)=1$.

ـــ إذا كان n فرديا فإن a و b يكونا زوجيان ومنه يقبلان القسمة على 2 وبالتالي $PGCD(a;b)=2$.

3) $81n^2-1=(9n+1)(9n-1)=ab$ وفي حالة n عدد فردي ، $PGCD(a;b)=2$ معناه $a=2k$، $b=2k'$ و $p\gcd(k;k')=1$ إذن $ab=4kk'$ وبالتالي $81n^2-1=4k''$ معناه $81n^2=4k''+1$

إذن باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 هو 1 .

المسائل

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع: $s_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية :

$PGCD(a;b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$.

1) $s_n = 1^3 = 1$ و $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ إذن $s_1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ومنه الخاصية البدائية صحيحة .

نفرض $s_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ ولنبرهن صحة الخاصية $s_{k+1} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

أي $s_{k+1} = s_k + (k+1) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$

$s_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$ $s_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) k و $k+1$ عددان متواليان إذن هما أوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(k;k+1) = 1$.

ــ ليكن k عدد طبيعي غير معدوم ، $s_{2k} = \left(\frac{2k(2k+1)}{2}\right)^2$

أي $s_{2k} = k^2(2k+1)^2$ ؛ $s_{2k+1} = \left(\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right)^2$

معناه $s_{2k+1} = (2k+1)^2(k+1)^2$. بما أن $PGCD(k;k+1) = 1$ فإن $PGCD(k^2;(k+1)^2) = 1$

وبالتالي : $PGCD(s_{2k};s_{2k+1}) = (2k+1)^2$

3) $PGCD(2k+1;2k+3)$ يقسم الفرق الذي هو 2 إذن $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$

أو $PGCD(2k+1;2k+3) = 1$.

97 a عدد طبيعي غير معدوم .

1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 2^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 4 .

أ - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a زوجيا ومنه 2 يقسم a^2 إذن يقسم الفرق $2^n - a^2$ وبالتالي 2 يقسم 9 وهذا تناقض إذن لا يمكن أن يكون a زوجيا إذن يكون فرديا .

ب - نفترض أن المعادلة تقبل حلا a إذن هو فردي ومنه باقي قسمة a^2 على 4 هو 1 أي $a^2 = 4k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$ ومنه $9 + 4k + 1 = 2^n$ أي $10 = 2^n - 4k$. بما أن 4 يقسم 2^n وهذا من أجل $n \geq 4$ فإن 4 يقسم $2^n - 4k$ أي 4 يقسم 10 وهذا تناقض . إذن المعادلة لا تقبل حلول.

2) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية: $9 + a^2 = 3^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3.

أ - $3^2 - 1 = 8$ و 8 يقبل القسمة 4 إذن الخاصية البدائية صحيحة . نفرض أنه من أجل $k \in \mathbb{N}^*$ العدد $3^{2k} - 1$ يقبل القسمة على 4 أي $3^{2k} - 1 = 4P$ مع $p \in \mathbb{N}^*$.

$3^{2(k+1)}-1=3^{2k+2}-1=9\times 3^{2k}-1=9(4p+1)-1$

$3^{2(k+1)}-1=36p+8=4(9p+2)$ إذن $3^{2(k+1)}-1$ يقبل القسمة على 4 , وحسب مبدأ التراجع ينتج أنه من اجل كل $n\in\mathbb{N}^*$, $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4 .

ب - لدينا $3^{2n}=4k+1$ حيث k عدد طبيعي و $3\times 3^{2n}=4(3k)+3$ أي $3^{2n+1}=4k'+3$ حيث k' عدد طبيعي .

إذن الباقيان للقسمة الأقليدية لكل من العددين 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4 هما 1 و 3 على الترتيب .

جـ - حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي زوجي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 ومن أجل كل عدد طبيعي فردي n ، باقي قسمة 3^n على 4 هو 3 إذن الباقي يختلف عن 2.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فرديا إذن $a^2=4k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$ ؛ ولدينا إذا كان n فرديا فإن $3^n=4k'+1$ ومنه $9=4(k'-k)$ وهذا غير ممكن ؛ وإذا كان n زوجيا فإن $3^n=4k'+3$ ومنه $7=4(k'-k)$ وهذا كذلك غير ممكن , ومنه إذا كان a حلا للمعادلة فلا يمكنه أن يكون فرديا وبالتالي يكون a زوجيا ، ومنه $a=2m$ وبالتالي $3^n=9+a^2=4(m+2)+1$ إذن باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 وهذا في الحالة n زوجي

د - $3^{2p}-a^2=(3^p-a)(3^p+a)$.

نفترض أن المعادلة $9+a^2=3^n$ تقبل حلا a فإن n زوجي أي $n=2p$ و a زوجي

ومنه $9=(3^p-a)(3^p+a)$ و a زوجي.

قواسم العدد 9 هي 1 ، 3 و 9 إذن :

(3^p-a)	1	3	9
(3^p+a)	9	3	1
$2a$	8	0	-8
a	4	0	-4

إذا كان $a=0$ فإن $9=3^n$ أي $n=2$ ولكن $n\geq 3$

وإذا كان $a=-4$ أو $a=4$ فإن $25=3^n$ وهذا غير ممكن.

3) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $9+a^2=5^n$ حيث n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

أ - نضع $n=2p+1$ ومنه $5^n=5\times 5^{2p}$ ، الباقيان الممكنان لقسمة 5^p على 3 هما 1 أو 2 ومنه باقي قسمة 5^{2p} على 3 هو 1 وبالتالي باقي قسمة 5^n على 3 هو 2.

إذا كان $a=3k$ فإن باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0.

إذا كان $a=3k+1$ أو $a=3k+2$ فنجد باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 1 إذن من أجل كل عدد طبيعي a يكون باقي قسمة $9+a^2$ على 3 هو 0 أو 1 وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي a يحقق $9+a^2=5^n$.

ب - في حالة n زوجي ، يكتب على الشكل $n=2p$ ويكون لدينا $9=5^{2p}-a^2=(5^p-a)(5^p+a)$

والحالة الوحيدة هي $5^p+a=9$ و $5^p-a=1$ وهذا يعني $2\times 5^p=10$ و $a=9-5^p$ أي $p=1$ و $a=4$

98 1) **أ -** إذا كان d قاسم للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإنه يقسم فرقهما $a^{p+1}-a^p$ أي d يقسم العدد $a^p(a-1)$.

ب - نفرض $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)=D$ ومنه $D=4^i$ أو $D=3$ أو $D=3\times 4^i$ مع $i\in\{0,1,\dots,p\}$

ولدينا D لا يمكن أن يكون زوجيا وبالتالي $D=1$ أو $D=3$.

2) **أ -** $u_2=5$ ، $u_3=21$ و $pgcd(5;21)=1$.

ب - استعمال التراجع للبرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+1$.

جـ - البرهان بالتراجع نجد ، من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

د - $PGCD\left(u_{n+1},u_n\right)=1$.

3) **أ -** ليكن n عددا طبيعيا، $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}=4u_n+\frac{4}{3}$

$v_{n+1}=4\left(v_n-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}=4v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

ب - $v_n=\frac{4}{3}\times 4^n$ ومنه $u_n=\frac{4}{3}\times 4^n-\frac{1}{3}=\frac{4^{n+1}-1}{3}$

جـ - لدينا $4^{n+1}-1=3u_n$ و $4^{n+2}-1=3u_{n+1}$ وحسب السؤال 2) لدينا $PGCD\left(u_{n+1},u_n\right)=1$ وهذا معناه $PGCD\left(4^{n+2}-1,4^{n+1}-1\right)=3$.

99 1) $x^2+y^2=4$ ... E معناه $(2-x)(2+x)=y^2$

إذن يجب أن يكون $2-x>0$ أي $x=1$ ونجد $y^2=3$

إذن لا يوجد عدد طبيعي y يحقق المعادلة E.

2) أ - نفترض أن العددين x و y زوجيان أي $x=2n$ و $y=2m$ إذن $p^2=2\left(n^2+m^2\right)$ وبالتالي 2 يقسم p^2 ومنه يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي و $p\neq 2$ أي p عدد فردي .

نفترض أن العددين x و y فرديان أي $x=2n+1$ و $y=2m+1$ إذن $p^2=2\left(2n^2+2n+2m^2+2m+1\right)$ وهذا كذلك تناقض إذن x و y أحدهما زوجي والآخر فردي .

ب - نفترض أن p يقسم x أي $x=kp$ إذن $y^2=p^2\left(1-k^2\right)$ حالتين ممكنتين $k=1$ أو $k=0$ أي $x=0$ أو $y=0$ ولكن x و y غير معدومين

وبنفس الطريقة إذا افترضنا p يقسم y؛

إذن p لا يقسم x ولا y.

جـ - نضع $PGCD\left(x^2,y^2\right)=d$ ؛ d يقسم المجموع x^2+y^2 أي d يقسم p^2 .

د - $d=1$ أو $d=p$ ، أو $d=p^2$ بما أن p لا يقسم x ولا y فإن $d\neq p$ ، أو $d\neq p^2$ وبالتالي $d=1$.

3) أ - $\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=u^4+v^4-2u^2v^2+4u^2v^2$

$\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=u^4+v^4+2u^2v^2=\left(u^2+v^2\right)^2$ و $\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=p^2$ وهذا هو المطلوب .

ب - $p=5$ معناه $p=1^2+2^2$ إذن $(3,4)$ هي حل لـ E

$p=13$ معناه $p=3^2+2^2$ إذن $(5,12)$ هي حل لـ E.

4) أ - $p=3$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=3$ فإن $u^2=3-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<3$ وبالتالي $v=1$ ثم نجد $u^2=2$ و 2 ليس مربعا تاما إذن 3 ليس مجموع مربعين .

$x^2+y^2=9$ معناه $y^2=9-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ وعليه $y^2=8$ أو $y^2=5$ و 8 و 5 ليسا مربعين إذن المعادلة لا تقبل حلا .

ب - $p=7$ ؛ إذا افترضنا أن $u^2+v^2=7$ فإن $u^2=7-v^2$ ويجب أن يكون $v^2<7$ وبالتالي $v=1$ أو $v=2$ ثم نجد $u^2=6$ أو $u^2=3$ و 6 و 3 ليسا مربعين تامين إذن 7 ليس مجموع مربعين .
$x^2+y^2=49$ معناه $y^2=49-x^2$ ومنه يجب أن يكون $x^2=1$ أو $x^2=4$ أو $x^2=9$ أو $x^2=16$ أو $x^2=25$ أو $x^2=36$ وعليه $y^2=48$ أو $y^2=45$ أو $y^2=40$ أو $y^2=33$ أو $y^2=24$ أو $y^2=13$ وفي كل حالة y ليسا عددا طبيعيا إذن المعادلة لا تقبل حلا .

100 (1 $M_0(x_0;y_0)$ ؛ $M_0(1;8)$ ولدينا $5(1)-8+3=0$ ومنه المعادلة محققة إذن $M_0\in(\Delta)$.

نفرض أن $M_k\in(\Delta)$ أي $5x_k-y_k+3=0$.

لنبرهن $M_{k+1}\in(\Delta)$.

لدينا $\begin{cases}5x_{k+1}=\frac{35}{3}x_k+\frac{5}{3}y_k+5\\-y_{k+1}=-\frac{20}{3}x_k-\frac{8}{3}y_k-5\end{cases}$ ومنه $5x_{k+1}-y_{k+1}=5x_k-y_k$ أي $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=5x_k-y_k+3$

معناه $5x_{k+1}-y_{k+1}+3=0$ إذن $M_{k+1}\in(\Delta)$

وبالتالي حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $M_n\in(\Delta)$.

ـ ليكن n عدد طبيعي ، $M_n\in(\Delta)$ معناه $5x_n-y_n+3=0$ أي $5x_n+3=y_n$ بالتعويض في المعادلة الأولى للجملة نجد $x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}(5x_n+3)+1$ ومعناه $x_{n+1}=4x_n+2$.

2) $x_0=1$ ومنه $x_0\in\mathbb{N}$ ؛ نفرض $x_k\in\mathbb{N}$ ومنه $4x_k\in\mathbb{N}$ إذن $(4x_k+2)\in\mathbb{N}$ والتالي $x_{k+1}\in\mathbb{N}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $x_n\in\mathbb{N}$.

ـ لدينا $5x_n+3=y_n$ بما أن $x_n\in\mathbb{N}$ فإن $(5x_n+3)\in\mathbb{N}$ وبالتالي $y_n\in\mathbb{N}$.

3) $PGCD(x_n;y_n)=d$ إذن يوجد عددان طبيعيان غير معدومين وأوليين فيما بينهما x و y حيث $x_n=dx$ و $y_n=dy$. لدينا الثنائية $(x_n;y_n)$ تحقق معادلة (Δ) إذن $5x_n-y_n+3=0$ ومنه $d(5x-y)+3=0$ أي $3=d(y-5x)$ إذن d قاسم للعدد 3 أي $d\in\{1;3\}$.

4) $x_0=\frac{5}{3}\times4^0-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$ وهذا صحيح .

نفرض أن $x_k=\frac{5}{3}\times4^k-\frac{2}{3}$ ولنبرهن $x_{k+1}=\frac{5}{3}\times4^{k+1}-\frac{2}{3}$.

لدينا $x_{k+1}=4x_k+2=4\left(\frac{5}{3}\times4^k-\frac{2}{3}\right)+2$ $x_{k+1}=\frac{5}{3}\times4^{k+1}-\frac{8}{3}+2=\frac{5}{3}\times4^{k+1}-\frac{2}{3}$.

إذن حسب مبدأ التراجع ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n, $x_n=\frac{5}{3}\times4^n-\frac{2}{3}$.

ـ مما سبق ينتج $3x_n=5\times4^n-2$ إذن 3 قاسم للعدد $5\times4^n-2$. لدينا 2 يقسم 4^n ومنه 2 يقسم 5×4^n وبالتالي 2 يقسم $5\times4^n-2$ إذن 2 و 3 موجودان في تحليل العدد $5\times4^n-2$ إذن 6 قاسم للعدد $5\times4^n-2$.

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

101 1) ب - $r=5$
2) جـ - $46=13\times3+7$.
3) ب - $70=11\times6+4$.
102 1) ب - $PGCD(a;12)$ هو 1 أو 3؛
لأن $a-12b=15$ تعني أن $a-12(b+1)=3$
ومنه $PGCD(a;12)$ هو قاسم للعدد 3.
2) جـ - العدد a هو جداء عددين أوليين في ما بينهما ،
لأن $a=2835=3^4\times5\times7=81\times45$ ؛ 81 و 45 أوّليان فيما بينهما.
3) ب - يوجد كسر مساويا لـ F مقامه من قوى العدد 15 لأن $F=\frac{4487}{14175}=\frac{7\times641}{3^4\times5^2\times7}=\frac{5^2\times641}{(3\times5)^4}$
103 جـ - $PGCD(n;n+1)=1$.

أصحيح أم خطأ ؟

104 1) خاطئة. 2) صحيحة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) خاطئة. 6) خاطئة.
105 1) خاطئ. 2) صحيح. 3) صحيح. 4) صحيح. 5) خاطئ. 6) خاطئ.
106 [1) صحـ]يحة. 2) خاطئة. 3) صحيحة.
4) خاطئة. 5) صحيحة. 6) خاطئة.

الباب الثالث

التوافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: اكتشاف بعض خواص القسمة الإقليدية على5.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل لهذا الباب و يتوج بتقديم فقرة " الموافقات في $\mathbb{Z}$ ". و يتم ضمن أفواج مع استعمال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي تعيين معامل التوجيه ثم تطبيق المبرهنات حول المشتقات.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف المتتاليات، القواسم و البواقي.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج

الحل: بسيط

النشاط الثالث

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم أنظمة التعداد.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " التعداد " و يتم ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

النشاط الرابع

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج.

الحل: بسيط.

الأعمال الموجهة

قابلية القسمة

تصحيح: /

الهدف: تعيين شروط قابلية القسمة على2، 3، 4، 5، 9، 10 و 11.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط.

مفتاح حساب

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات في وضعية لها دلالة.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: بسيط

حل معادلات من الشكل $ax+by=c$

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات لحل المعادلات من الشكل $ax+by=c$.

توجيهات: يقدم النشاط ضمن أفواج أو كواجب منزلي.

الحل: بسيط

التمارين

التمارين التطبيقية

1 - الموافقة في $\mathbb{Z}$

1 أ - $45-3=42=7\times 6$ إذن $45\equiv 3[7]$.

ب - $152-2=150=3\times 50$ إذن $152\equiv 2[3]$.

جـ - $29-(-1)=30=6\times 5$ إذن $29\equiv -1[6]$.

د - $137-(-3)=140=5\times 28$ ومنه $137\equiv -3[5]$.

و - $-13-2=-15=5(-3)$ ومنه $-13\equiv 2[5]$.

هـ - $-17-(-7)=-10=10(-1)$ ومنه $-17\equiv -7[10]$

2 $37\equiv x\,[4]$ معناه $37-x=4k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي

$x=37-4k$ وبالتالي يمكن أخذ $x=37$ ، $x=37-4=33$ ، $x=37-4\times 2=29$ ،

$x=37-4(-1)=42$ ، $x=37-4(-2)=45$

من أجل $k=9$ يكون $x=1$ وهو العدد الطبيعي الوحيد الأصغر تماما من 4 .

3 $n\equiv 4[7]$ معناه $n=7k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$0\leq n\leq 30$ معناه $0\leq 7k+4\leq 30$ أي $-\frac{4}{7}\leq k\leq \frac{26}{7}$

$k\in\mathbb{Z}$ إذن $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه $n\in\{4,11,18,25\}$.

4 $n\equiv 140[12]$ و $140\equiv 8[12]$ إذن $n\equiv 8[12]$

بما أن $0\leq 8<12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12.

5 $x\equiv 2[7]$ إذن:

$x+5\equiv 7[7]$ ومنه $x+5\equiv 0[7]$

$x-5\equiv -3[7]$ ومنه $x-5\equiv 4[7]$

$9x\equiv 18[7]$ ومنه $9x\equiv 4[7]$

$-15x\equiv -30[7]$ ومنه $-15x\equiv 5[7]$

$x\equiv 2[7]$ ومنه $x^3\equiv 8[7]$ أي $x^3\equiv 1[7]$.

6 أ - $46\equiv 0[n]$ معناه $46=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 46 و $n\geq 2$ أي $n\in\{2,23,46\}$.

ب - $10\equiv 1[n]$ معناه $9=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 9 و $n\geq 2$ أي $n\in\{3,9\}$.

جـ - $27\equiv 5[n]$ معناه $22=kn$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ إذن n يقسم 22 و $n\geq 2$ أي $n\in\{2,11,22\}$.

7 $a\equiv b\,[n]$ معناه $a-b=kn$ مع $k\in\mathbb{N}$ ويكافئ $am-bm=knm$ ومعناه $am\equiv bm\,[nm]$.

8 لدينا $A-a\equiv 0[n]$ ، $B-b\equiv 0[n]$ و $C-c\equiv 0[n]$ وهذا معناه $A\equiv a[n]$ ، $B\equiv b[n]$ و $C\equiv c[n]$

إذن $ABC\equiv abc\,[n]$ أي $ABC-abc\equiv 0[n]$.

9 $n \equiv 0[m]$ معناه $n = km$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

$a \equiv b[n]$ معناه $a - b = k'n$ مع $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه $a - b = k'km$ إذن $a \equiv b[m]$.

10 1) $30757 \equiv 7[10]$ ومنه $a \equiv 7[10]$. $15163 \equiv 3[10]$ ومنه $b \equiv 3[10]$. $12924 \equiv 4[10]$ ومنه $c \equiv 4[10]$.

2) أ - $a + b + c \equiv 7 + 3 + 4[10]$ ومنه $a + b + c \equiv 4[10]$.

ب - $a - b + c \equiv 7 - 3 + 4[10]$ ومنه $a - b + c \equiv 8[10]$.

جـ - $a + b - c \equiv 7 + 3 - 4[10]$ ومنه $a + b - c \equiv 6[10]$.

د - $abc \equiv 7 \times 3 \times 4[10]$ ومنه $abc \equiv 4[10]$.

هـ - $ab + ac + bc \equiv 7 \times 3 + 7 \times 4 + 4 \times 3[10]$

$ab + ac + bc \equiv 1[10]$.

و - $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 49 + 9 + 16[10]$ ومنه $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 4[10]$.

11 الساعة المطلوبة هي n حيث $0 \le n < 24$

أ ـــ $n \equiv 3 + 112[24]$ ومنه $n \equiv 115[24]$ أي $n \equiv 19[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى 19 أي السابعة مساء .

ب ـــ $n \equiv 3 - 163[24]$ ومنه $n \equiv -160[24]$ أي $n \equiv 8[24]$ إذن الساعة كانت تشير إلى الثامنة صباحا .

12 أ ـــ $15123 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة M تصل إلى النقطة D .

ب ـــ $-15132 \equiv 3[5]$ ومنه النقطة M تصل كذلك إلى النقطة D .

13 $12 \equiv 2[5]$ ومنه $12^4 \equiv 2^4[5]$ أي $12^4 \equiv 16[5]$

$16 \equiv 1[5]$ ومنه $12^4 \equiv 1[5]$. $1527 = 4 \times 381 + 3$

لدينا $12^{1527} = 12^{4\times381+3} = \left(12^4\right)^{381} \times 12^3$ ومنه $12^{1527} \equiv 1^{381} \times 2^3[5]$ أي $12^{1527} \equiv 3[5]$.

14 $371 \equiv 1[5]$ ومنه $371^{238} \equiv 1[5]$.

$579 \equiv -1[5]$ ومنه $579^{2008} \equiv 1[5]$.

$1429 \equiv -1[5]$ ومنه $1429^{2009} \equiv -1[5]$ بما أن $-1 \equiv 4[5]$ فإن $1429^{2009} \equiv 4[5]$.

$1954 \equiv -1[5]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[5]$.

15 # $1754 \equiv -1[9]$ ومنه $1754^{12} \equiv 1[9]$.

$34572 \equiv 3[9]$ ومنه $34572^{457} \equiv 3^{457}[9]$ ولدينا

$3^{457} = 3 \times 3^{456} = 3 \times 9^{228}$ إذن $3^{457} \equiv 0[9]$ وبالتالي $34572^{457} \equiv 0[9]$.

$375 \equiv -3[9]$ ومنه $375^{2009} \equiv (-3)^{2009}[9]$ ولدينا $(-3)^{2009} = -3 \times (-3)^{2\times1004} = -3 \times 9^{1004}$ ومنه

$(-3)^{2009} \equiv 0[9]$ إذن $375^{2009} \equiv 0[9]$.

16 أ - $4 \equiv -1[5]$ ومنه $4^{2003} \equiv -1^{2003}[5]$ إذن $4^{2003} + 1^{2003} \equiv 0[5]$.

$3 \equiv -2[5]$ ومنه $3^{2003} \equiv -2^{2003}[5]$

إذن $3^{2003} + 2^{2003} \equiv 0[5]$.

وبالتالي $1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003}\equiv 0[5]$

ب - $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{2007}\equiv -1^{2007}[7]$ إذن $6^{2007}+1^{2007}\equiv 0[7]$.

$5\equiv -2[7]$ ومنه $5^{2007}\equiv -2^{2007}[7]$ إذن $5^{2007}+2^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^{2007}\equiv -3^{2007}[7]$ إذن

$4^{2007}+3^{2007}\equiv 0[7]$ ؛ وبالتالي $1^{2007}+2^{2007}+3^{2007}+4^{2007}+5^{2007}+6^{2007}\equiv 0[7]$.

جـ - لدينا $1\equiv -8[9]$ ؛ $7\equiv -2[9]$ ؛ $3\equiv -6[9]$ ؛ $5\equiv -4[9]$.

ومنه $1^{2008}\equiv 8^{2008}[9]$ ؛ $7^{2008}\equiv 2^{2008}[9]$ ؛ $3^{2008}\equiv 6^{2008}[9]$ ؛ $5^{2008}\equiv 4^{2008}[9]$.

إذن $1^{2008}-8^{2008}\equiv [9]$ ؛ $7^{2008}-2^{2008}\equiv [9]$ ؛ $3^{2008}-6^{2008}\equiv [9]$ ؛ $5^{2008}-4^{2008}\equiv [9]$.

وبالتالي : $1^{2008}-2^{2008}+3^{2008}-4^{2008}$

$+5^{2008}-6^{2008}+7^{2008}-8^{2008}\equiv 0[9]$

17 من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $2^{2n+1}=2\times 4^{n}$ ومنه $2^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛ $3\equiv -1[4]$ ومنه

$3^{2n+1}\equiv -1^{2n+1}[4]$ أي $1^{2n+1}+3^{2n+1}\equiv 0[4]$ ؛

وبالتالي $1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+4^{2n+1}\equiv 0[4]$.

18 مجموع أرقام العدد 7254 هو 18 وهو مضاعف لِـ 9 إذن $7254\equiv 0[9]$ ومنه $7254^{n}\equiv 0[9]$.

العدد 3532 زوجي إذن $3532\equiv 0[2]$ ومنه $3532^{n}\equiv 0[2]$.

$1785\equiv 0[5]$ ومنه $1785^{n}\equiv 0[5]$.

$51502\equiv 0[11]$ ومنه $51502^{n}\equiv 0[11]$.

19 1) $3286\equiv 6[10]$ ومنه $3286^{374}\equiv 6^{374}[10]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ $6^{n}\equiv 6[10]$

إذن $6^{374}\equiv 6[10]$ وبالتالي $3286^{374}\equiv 6[10]$.

2) $76\equiv 4[12]$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $4^{n}\equiv 4[12]$

إذن $4^{784}\equiv 4[12]$ وبالتالي $76^{784}\equiv 4[12]$.

20 1) ليكن n عددا طبيعيا ، $3^{2n}=9^{n}$ و $9\equiv 2[7]$ إذن $9^{n}\equiv 2^{n}[7]$ ومنه $3^{2n}\equiv 2^{n}[7]$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي ، $3^{2n}-2^{n}\equiv 0[7]$.

2) بواقي قسمة العدد n على 3 هي 0 ، 1 و 2 وبفرض n ليس مضاعفا لِــ 3 فيكون $n=3p+1$ أو $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

إذا كان $n=3p+1$ ، $2^{2n}+2^{n}+1=2^{6p+2}+2^{3p+1}+1$

$2^{2n}+2^{n}+1=4\times 8^{2p}+2\times 8^{p}+1$. لدينا $8\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $8^{p}\equiv 1[7]$ و $8^{2p}\equiv 1[7]$.

وبالتالي $2^{2n}+2^{n}+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^{n}+1\equiv 0[7]$

إذا كان $n=3p+2$ ، $2^{2n}+2^{n}+1=2^{6p+4}+2^{3p+2}+1$

$2^{2n}+2^{n}+1=2\times 8^{2p+1}+4\times 8^{p}+1$. لدينا من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $8^{p}\equiv 1[7]$ و $8^{2p+1}\equiv 1[7]$.

وبالتالي $2^{2n}+2^{n}+1\equiv 7[7]$ أي $2^{2n}+2^{n}+1\equiv 0[7]$

21 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $3^{3}=27$ ومنه $3^{3}\equiv 2[5]$ إذن $3^{3n}\equiv 2^{n}[5]$ ومنه $3^{3n+2}\equiv 9\times 2^{n}[5]$ إذن $3^{3n+2}\equiv 4\times 2^{n}[5]$

$2^{n+4}=16\times 2^n$ ؛ $16\equiv 1[5]$ إذن $2^{n+4}\equiv 2^n\,[5]$.

$3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 4\times 2^n+2^n\,[5]$ أي $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 5\times 2^n\,[5]$ ومنه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$.

2) $3^{3n}\equiv 2^n\,[5]$ ومنه $3\times 3^{3n}\equiv 3\times 2^n\,[5]$

$2^{n+1}=2\times 2^n$ إذن $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 3\times 2^n+2\times 2^n\,[5]$

أي $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 5\times 2^n\,[5]$ ومنه $3^{3n+1}+2^{n+1}\equiv 0[5]$

22 $10\equiv 1[9]$ و $9\equiv 0[9]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $10^n\equiv 1[9]$ و $9n\equiv 0[9]$

إذن $(9n-1)10^n+1\equiv -1\times 1+1[9]$ أي $\alpha\equiv 0[9]$.

23 ليكن n عددا طبيعيا .

1) $2^6=64$ و $64\equiv 13[17]$ إذن $2^6\equiv 13[17]$ ومنه $2^{6n}\equiv 13^n\,[17]$ وبالتالي $2^{6n+3}\equiv 8\times 13^n\,[17]$

$3^4=81$ و $81\equiv 13[17]$ إذن $3^4\equiv 13[17]$ ومنه $3^{4n}\equiv 13^n\,[17]$ وبالتالي $3^{4n+2}\equiv 9\times 13^n\,[17]$.

$2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 8\times 13^n+9\times 13^n\,[17]$ ومنه $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 17\times 13^n\,[17]$ إذن $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 0[17]$.

2) $2^{5n}=\left(2^5\right)^n=32^n$ و $32\equiv 3[29]$ إذن $2^{5n}\equiv 3^n\,[29]$ ومنه $2^{5n+1}\equiv 2\times 3^n\,[29]$.

$3^{n+3}=27\times 3^n$ إذن $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 2\times 3^n+27\times 3^n\,[29]$ ومنه $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 29\times 3^n\,[29]$ إذن

$2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 0[29]$.

25 1) إذا كان n فرديا فإن البواقي الممكنة لقسمته على 16 هي الأعداد الطبيعية الفردية الأصغر تماما من 16 .

إذا كان $n\equiv 1[16]$ فإن $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 3[16]$ فإن $n^4\equiv 3^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 5[16]$ فإن $n^2\equiv(-9)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 7[16]$ فإن $n^2\equiv 7^2[16]$ أي $n^2\equiv 1[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 9[16]$ فإن $n^2\equiv 1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 11[16]$ فإن $n^2\equiv(-5)^2[16]$ ومنه $n^2\equiv 9[16]$ وبالتالي $n^4\equiv 9^2[16]$ إذن $n^2\equiv 1[16]$.

إذا كان $n\equiv 13[16]$ فإن $n\equiv -3[16]$ ومنه $n^4\equiv(-3)^4[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

إذا كان $n\equiv 15[16]$ فإن $n\equiv -1[16]$ ومنه $n^4\equiv 1[16]$

2) بواقي قسمة n على 5 هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4

ليكن r ينتمي إلى $\{1,2,3,4\}$ بوضع $n\equiv r[5]$ معناه أن n ليس مضاعفا للعدد 5 وبالتالي يكون $n^4\equiv r^4[5]$

ولدينا $1^4\equiv 1[5]$، $2^4\equiv 1[5]$ ، $3^4\equiv 1[5]$، $4^4\equiv 1[5]$

إذن من أجل كل $r\in\{1,2,3,4\}$ $r^4\equiv 1[5]$ وبالتالي $n^4\equiv 1[5]$.

26 أ)

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$2x\equiv$	0	2	4	1	3	[5]

ب - $2x\equiv 3[5]$ معناه $x\equiv 4[5]$.

27

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$n^3+n-2\equiv$	5	5	1	0	3	2	5	

. $n \equiv 3[7]$ معناه $n^3+n-2\equiv 0[7]$

28 (1

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n	1	2	4	8	7	5	1

2) لدينا $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{6p}\equiv 1[9]$.

ومنه $2^{6p+k}\equiv r_k\,[9]$ مع $k\in\{1,2,3,4,5\}$

ومنه إذا كان $n=6p$ فإن $r_n=r_0=1$.

إذا كان $n=6p+1$ فإن $r_n=r_1=2$.

إذا كان $n=6p+2$ فإن $r_n=r_2=4$.

إذا كان $n=6p+3$ فإن $r_n=r_3=8$.

إذا كان $n=6p+4$ فإن $r_n=r_4=7$.

إذا كان $n=6p+5$ فإن $r_n=r_5=5$.

3) $65\equiv 2[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $65^n\equiv 2^n\,[9]$ ولدينا $2^n\equiv r_n\,[9]$ إذن $65^n\equiv r_n\,[9]$.

$2011=6\times 335+1$ ومنه $r_{2011}=r_1=2$ إذن $65^{2011}\equiv 2[9]$

29 أ - $4^5\equiv 1[11]$.

ب - $37\equiv 4[11]$ ومنه $37^5\equiv 4^5\,[11]$ إذن $37^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد $k\in\mathbb{N}$ ، $37^{5k}\equiv 1[11]$ ؛

$37^{5k+1}\equiv 4[11]$ ؛ $37^{5k+2}\equiv 5[11]$ ؛ $37^{5k+3}\equiv 9[11]$ و $37^{5k+4}\equiv 3[11]$.

30 $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ وهذا معناه $x\equiv 0[3]$ أي $x=3k$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتعويض نجد $2(3k)=3y$ أي $y=2k$ ومنه $(x,y)=(3k,2k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

31 $2x-5y=1$ معناه $2x=5y+1$ إذن $2x\equiv 1[5]$ وهذا معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ إذن $x=5k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $10k+6=5y+1$ أي $5y=10k+5$ أي $y=2k+1$

ومنه $(x,y)=(5k+3,2k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

32 أ - $\begin{cases}x\equiv 3[5]\\ x\equiv 1[6]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=5\alpha+3\\ x=6\beta+1\end{cases}$ إذن $5\alpha-6\beta=-2$ ومنه $5\alpha=6\beta-2$ ومنه $5\alpha\equiv -2[6]$ وهذا يعني

$-\alpha\equiv -2[6]$ أي $\alpha\equiv 2[6]$ ويعني $\alpha=6k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $5(6k+2)=6\beta-2$

أي $6\beta=30k+12$ ومعناه $\beta=5k+2$. إذن $x=5\alpha+3=30k+13$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ب - $\begin{cases}2x\equiv 2[4]\\ 4x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x\equiv 1[2]\\ x\equiv 1[3]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}3x\equiv 3[6]\\ 2x\equiv 2[6]\end{cases}$ ومنه $x\equiv 1[6]$.

2 - التعداد

33 $a=12734$

$a=10^4+2\times 10^3+7\times 10^2+3\times 10+4$

$b=5723$ ؛ $b=5\times 10^3+7\times 10^2+2\times 10+3$

$c=503019$ ؛ $c=5\times 10^5+3+\times 10^3+10+9$.

34 $a=\overline{234}=2\times6^2+3\times6+4$ ؛ $b=\overline{1523}=6^4+5\times6^3+2\times6+3$ ؛
$c=\overline{503012}=5\times6^5+3\times6^3+6+2$.

35 $a=7^3+2\times7^2+3\times7+5=\overline{1235}$. $b=5\times7^2+2\times7=\overline{520}$ ؛ $c=6\times7^3+2\times7+1=\overline{6021}$.

36 $N_a=4a^5+2a^3+a+3=\overline{40213}$.

37 أ ــ $x\ge7$ ومنه أصغر قيمة هي $x=7$.
ب ــ $\overline{2306}=2\times7^3+3\times7^2+0\times7+6$ و $\overline{1035}=7^3+0\times7^2+3\times7+5$

38 $2=1\times2+0=\overline{10}$ ، $4=1\times2^2+0\times2+0=\overline{100}$ ، $7=1\times2^2+1\times2+1=\overline{111}$ ،
$33=1\times2^5+1=\overline{10001}$.

39 $n=2^6+2^5+2^3+2^2+1=109$ ؛ $n=2x^2+x+4$.
إذن $2x^2+x+4=109$ معناه $2x^2+x-105=0$ ومعناه $x=7$ ، $x=-\frac{15}{2}$. إذن الأساس 7 .

40 $\overline{2003}=\overline{21}\times\overline{43}$ معناه $x\ge5$ و $2x^3+3=(2x+1)(4x+3)$ أي $x\ge5$ و $2x^3-8x^2-10x=0$
ومعناه $2x^2-8x-10=0$ أي $x=10$.

41 أ - $\overline{411}=\overline{15}\times\overline{23}$ معناه $4x^2+x+1=(x+5)(2x+3)$
أي $2x^2-12x-14=0$ ومعناه $x^2-6x-7=0$ أي $x=-1$ أو $x=7$ إذن الأساس هو $x=7$.
ب - $\overline{21}\times\overline{14}=\overline{324}$ معناه $(2a+1)(a+4)=3a^2+2a+4$ ومعناه $a^2-7a=0$ إذن $a=7$.
جـ - $2888=\overline{412}\times\overline{31}$ معناه $2888=(4x^2+x+2)(3x+1)$ ومعناه $12x^3+7x^2+7x=2886$
لدينا $x\ge5$ إذا كان $x=5$ فإن $12x^3+7x^2+7x\equiv0[5]$ بينما $2886\equiv1[5]$ إذن $x\ne5$.
ولدينا : $12\times6^3+7\times6^2+7\times6=2886$ إذن الأساس $x=6$.

42 أ - $x^2+6x+2=7x+7+6x+3$ مع $x>7$ معناه $x^2-7x-8=0$ ومعناه $x=8$.
ب - $\overline{77}\times\overline{63}=(7\times8+7)(6\times8+3)=3213$
جـ - $3213=8\times401+5=8(8(8\times6+2)+1)+5$
$3213=6\times8^3+2\times8^2+8+5=\overline{6215}$.

43 أ - $\overline{12}\times\overline{23}=\overline{276}$. $(a+2)(2a+3)=2a^2+7a+6$ وهذا صحيح من أجل كل عدد طبيعي $a>7$.
ب - $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$ معناه $5x^2+4x+1=(2x+2)(3x+2)$ ومعناه $x^2+6x+3=0$ أي $x=-3+\sqrt{6}$
أو $x=-3-\sqrt{6}$ إذن لا يوجد أي أساس يكتب فيه $\overline{541}=\overline{22}\times\overline{32}$

44 $10=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+0=\overline{1010}$ ؛ $100=64+32+4=2^6+2^5+2^2$ أي $100=\overline{1100101}$

46 $72881=12(12(12\times(12\times3+6)+2)+1)+5$ ومنه $72881=3\times12^4+6\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$
إذن $72881=\overline{36215}$ في الأساس 12
ولدينا $7^5<72881<7^6$ $72881=4\times7^5+2\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+2\times7+4$ أي $72881=\overline{422324}$

47 $\overline{3752}=3\times8^3+7\times8^2+5\times8+2=2026$.

48 $\overline{6175}=6\times9^3+1\times9^2+7\times9+5$ ، $\overline{6175}=4523$ لدينا : $12^3<4523<12^4$ ومنه
$4523=2\times12^3+7\times12^2+4\times12+11$ إذن $4523=\overline{274\alpha}$ حيث $\alpha=11$.

49 $\overline{234}=2\times5^2+3\times5+4$ أي $\overline{234}=2\times(7-2)^2+3\times(7-2)+4$ ؛ $\overline{234}=2\times7^2+3\times7-50$

$\overline{234}=1\times7^2+2\times7+6=\overline{126}$

$\overline{1040}=5^3+4\times5=(7-2)^3+20$ ؛ $\overline{1040}=7^3-6\times7^2+12\times7+12$ ؛ $\overline{1040}=2\times7^2+6\times7+5=\overline{265}$

50 $a=1\times a+0=\overline{10}$ ، $a^2=1\times a^2+0\times a+0=\overline{100}$ و $a^3=1\times a^3+0\times a^2+0\times a+0=\overline{1000}$.

51 نفرض أن A يكتب في النظام ذي الأساس العشري كما يلي $A=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ حيث $0\le a_i\le 9$.

ومنه $A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_0$ ولدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $10^n\equiv1[3]$ وبالتالي

$A\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[3]$ أي $A\equiv S[3]$ إذن $A\equiv0[3]$ معناه $S\equiv0[3]$.

52 نضع $x=\overline{a_na_{n-1}...a_0}$ ؛ $y=\overline{a_0a_1...a_n}$ ؛ $x\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_0[9]$ و $y\equiv a_0+a_1+...+a_n[9]$

ومنه $x-y\equiv0[9]$.

53 (1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

$4=1\times4+0=\overline{10}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$.

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111}\\ 3223\\ +\quad 132\\ \hline =10021\end{array}$$
إذن $3223+132=10021$.

54 (1

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

$3\times3=2\times4+1=\overline{21}$ ، $3+3=1\times4+2=\overline{12}$.

(2
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2}\\ 3223\\ \times\quad 123\\ \hline 23001\\ 13112.\\ 3223..\\ \hline 1203021\end{array}$$
إذن $3223\times123=1203021$

55
$$\begin{array}{r}3421\\ +\ \ 230\\ \hline 4201\end{array} \text{ ، } \begin{array}{r}431\\ -132\\ \hline 244\end{array} \text{ ، } \begin{array}{r}213\\ \times\ \ 14\\ \hline 1412\\ 213.\\ \hline 4042\end{array} \text{ .}$$

56 $\begin{array}{r} 39\beta 7 \\ +\ 213 \\ \hline 400\alpha \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 400\alpha \\ -39\beta 7 \\ \hline 213 \end{array}$ ، $\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 41 \\ \hline 27 \\ 104. \\ \hline 1067 \end{array}$.

تمارين للتعمق

1 - الموافقات في $\mathbb{Z}$

57 أ - $2^0 \equiv 1[10]$ ، $2 \equiv 2[10]$ ، $2^2 \equiv 4[10]$ ، $2^3 \equiv 8[10]$ ، $2^4 \equiv 6[10]$ ، $2^5 \equiv 2[10]$.

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $6^n \equiv 6[10]$ (بالتراجع)

$2^4 \equiv 6[10]$ إذن من أجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، $2^{4p} \equiv 6^p[10]$

إذن $2^{4p+4} \equiv 6^4[10]$ ومنه $2^{4p+4} \equiv 6[10]$ وعليه $2^{4p+1} \equiv 2[10]$ ؛ $2^{4p+2} \equiv 4[10]$ ؛ $2^{4p+3} \equiv 8[10]$

ب - كل عدد طبيعي يوافق رقم آحاده بترديد 10 .

إذا كان $n=0$ فإن $2^0=1$ وهو رقم آحاده

إذا كان $n=4k$ مع $k \in \mathbb{N}^*$ فإن رقم آحاد 2^n هو 6 .

إذا كان $n=4k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 2 .

إذا كان $n=4k+2$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 4 .

إذا كان $n=4k+3$ مع $k \in \mathbb{N}$ فإن رقم آحاد 2^n هو 8 .

جـ - $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 8^9 \times 4^{31}[10]$

أي $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{27} \times 2^{62}[10]$.

$3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2^{89}[10]$ ولدينا $89 = 4\times 22+1$ ؛

إذن $2^{89} \equiv 2[10]$ ومنه $3548^9 \times 2534^{31} \equiv 2[10]$

إذن رقم آحاد $3548^9 \times 2534^{31}$ هو 2 .

58 $51^2 = 2601$ ومنه $51^2 \equiv 1[100]$ إذن $\left(51^2\right)^{1004} \equiv 1[100]$ أي $51^{2008} \equiv 1[100]$

إذن الرقم الأخير هو 1 وما قبله 0 .

59 لكل عدد صحيح a لدينا إما $a \equiv -1[3]$ وإما $a \equiv 0[3]$ وإما $a \equiv 1[3]$.

إذا كان $x \equiv 0[3]$ أو $y \equiv 0[3]$ فإن $xy\left(x^2-y^2\right) \equiv 0[3]$

إذا كان $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ y \equiv -1[3] \end{cases}$ أو $\begin{cases} x \equiv -1[3] \\ y \equiv 1[3] \end{cases}$ فإن $\begin{cases} x^2 \equiv 1[3] \\ y^2 \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $x^2-y^2 \equiv 0[3]$

إذن $xy\left(x^2-y^2\right) \equiv 0[3]$.

60 $n^3+3n^2+3n+1-8 = (n+1)^3-8$

$n^3+3n^2+3n-7 \equiv 0[8]$ معناه $(n+1)^3 \equiv 0[8]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	6	7	0	[8]
$(n+1)^3 \equiv$	1	0	3	0	5	0	7	0	[8]

إذن $n^3+3n^2+3n-7\equiv 0[8]$ معناه $n\equiv 1[8]$ أو $n\equiv 3[8]$ أو $n\equiv 5[8]$ أو $n\equiv 7[8]$.

61 أ ـ $2^6\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $p\in\mathbb{N}$ ، $2^{6p}\equiv 1[9]$ أي $2^{6p}-1\equiv 0[9]$ معناه $n=6p$.

ب ـ إذا كان $n=6p$ فإن $A=2^n-1=\left(2^3\right)^{2p}-1$ أي $A=8^{2p}-1$ ولدينا

65 نضع $N=\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$n^2-1\equiv$	4	0	3	3	0	[5]
$n^2-4\equiv$	1	2	0	0	2	[5]
$N\equiv$	4	0	0	0	0	[5]

ومنه إذا كان $n\not\equiv 0[5]$ فإن $N\equiv 0[5]$

66 $N=n(2n+1)(7n+1)$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2n+1\equiv$	1	3	5	1	3	5	[6]
$7n+1\equiv$	1	2	3	4	5	0	[6]
$N\equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

67 أ - $A=n^2-n+1$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	0	1	4	2	2	3	1	[7]
A	1	1	3	0	6	6	3	[7]

ب - $A\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 3[7]$.

جـ - نضع $B=2753^2-2753+1$ ؛ نعتبر $n=2753$ ومنه $n\equiv 2[7]$ إذن $A\equiv 3[7]$ وبالتالي $B\equiv 3[7]$.

68 $A=2n^3-n^2+2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n^2\equiv$	**0**	**1**	**4**	**2**	**2**	**4**	**1**	[7]
$n^3\equiv$	0	1	1	6	1	6	6	[7]
$2n^3\equiv$	**0**	**2**	**2**	**5**	**2**	**5**	**5**	[7]
A	2	3	0	5	2	3	6	[7]

$2n^3-n^2+2\equiv 0[7]$ معناه $n\equiv 2[7]$

69 أ - $4^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $4^{3n}\equiv 1[7]$ وعليه $4^{3n+1}\equiv 4[7]$ ؛ $4^{3n+2}\equiv 2[7]$.

ب - نضع $851^{3n}+851^{2n}+851^n+2=N$

$851\equiv 4[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $851^{3n}\equiv 4^{3n}[7]$ أي $851^{3n}\equiv 1[7]$ ويصبح لدينا :

$N\equiv 4^{2n}+4^n+3[7]$ أي $N\equiv 4^n\left(4^n+1\right)+3[7]$

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$4^n\equiv$	1	4	2	[7]
$4^n+1\equiv$	2	5	3	[7]
$N\equiv$	5	2	1	[7]

70 أ - $7^3\equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $7^{3k}\equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1}\equiv 7[9]$ ؛ $7^{3k+2}\equiv 4[9]$.

ب - نضع $7^n+3n-1=A$

إذا كان $n=3k$ فإن $A=7^{3k}+9k-1$ ومنه $A\equiv 1+0-1[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

إذا كان $n=3k+1$ فإن $A=7^{3k+1}+9k+2$ ومنه $A\equiv 7+0+2[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

إذا كان $n=3k+2$ فإن $A=7^{3k+2}+9k+5$ ومنه $A\equiv 4+0+5[9]$ أي $A\equiv 0[9]$.

71

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$3x\equiv$	0	3	6	1	4	7	2	5	[8]

$3x\equiv 7[8]$ معناه $x\equiv 5[8]$.

72 $8x^2\equiv 16[3]$ معناه $2x^2\equiv 1[3]$.

البواقي الممكنة لكل عدد صحيح x على 3 هي 0 ، 1 ، 2 ومنه $x^2\equiv 0[3]$ أو $x^2\equiv 1[3]$ وبالتالي $2x^2\equiv 0[3]$ أو $2x^2\equiv 2[3]$

إذن من أجل كل عدد صحيح x يكون إما $2x^2\equiv 0[3]$ وإما $2x^2\equiv 2[3]$ وبالتالي لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $2x^2\equiv 1[3]$.

73 أ - $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $2^{3k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

$3^6\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل $k\in\mathbb{N}$ ، $3^{6k}\equiv 1[7]$ وبالتالي $3^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv 2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv 6[7]$ ،

$3^{6k+4}\equiv 4[7]$ و $3^{6k+5}\equiv 5[7]$.

ب -

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2^n+3^n\equiv$	2	5	6	0	6	2	[7]

$2^x+3^x\equiv 0[7]$ معناه $x\equiv 3[6]$.

74 $3^5\equiv 1[11]$ ، $5^5\equiv 1[11]$.

$5^x-3^x+6\equiv 0[11]$ معناه $5^x-3^x\equiv 5[11]$

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^x\equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^x\equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^x-3^x\equiv$	0	2	5	10	5	[11]

$5^x-3^x\equiv 5[11]$ معناه $x\equiv 2[5]$ أو $x\equiv 4[5]$.

75 أ -

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]

ب - $x^2-5y^2=3$ معناه $x^2=5y^2+3$ إذن لكي تكون الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $x^2=5y^2+3$ يجب أن يكون $x^2\equiv 3[5]$ وهذا غير ممكن .

76 أ -

$y\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$y^3\equiv$	0	1	1	6	1	1	6	[7]
$2y^3\equiv$	0	2	2	5	2	2	5	[7]

ب - $7x^2+2y^3=3$ معناه $2y^3=-7x^2+3$ ، إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $2y^3=-7x^2+3$ فإن
$2y^3\equiv 3[7]$ و هذا غير ممكن إذن المعادلة $7x^2+2y^3=3$ لا تقبل حلا .

77 1) إذا كان x زوجيا فإن $3^x\equiv 1[8]$ و إذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$.

(2

y	1	2	3	4	5	6	7	[8]
y^2	1	4	1	0	1	4	1	[8]

3) إذا كان x فرديا فإن $3^x\equiv 3[8]$ ومنه $y^2+8\equiv 3[8]$ إذن $y^2\equiv 3[8]$ و هذا غير ممكن .

4) $x=2n$ ؛ $3^{2n}-y^2=(3^n-y)(3^n+y)$ ، إذن $(3^n-y)(3^n+y)=8$ ومنه (3^n+y) قاسم للعدد 8 .
إذن $3^n+y\le 8$ بما أن y عدد طبيعي فإن $3^n\le 8$.

5) $3^n\le 8$ إذن $n=0$ أو $n=1$ ولدينا $y^2=3^{2n}-8$ إذن $y^2=1-8=-7$ أو $y^2=9-8=1$
وبالتالي $y=1$ ولدينا $x=2n=2$ وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق المعادلة هي $(2,1)$.

78 1) بواقي قسمة كل عدد طبيعي p على 3 هي 0 ، 1 و 2 وإذا كان p أوليا فإن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv 2[3]$
إذن $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv -1[3]$.

2) p عدد طبيعي أولي إذن لا يقبل القسمة على 2 إذن هو فردي ومنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p=2k+1$
أي $p^2=4k^2+4k+1$ ويكافئ $p^2-1=4k(k+1)$

$n=p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$

$p^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1)$ إذن $p^2+1=2\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.

$k(k+1)$ هو عدد زوجي إذن $k(k+1)=2\beta$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ ومنه $p^2-1=8\beta$.

وبالتالي $n=(p^2-1)(p^2+1)=16\alpha\beta$.

(3

p	1	2	3	4	[5]
p^4	1	1	1	1	[5]
p^4-1	0	0	0	0	[5]

79 1) أ - $999\equiv 0[111]$ ومنه $1000\equiv 1[111]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1000n\equiv n[111]$.

ب - $111\,111=111\,000+111$ بوضع $n=111$ نحصل على $n\equiv 0[111]$ و $1000n\equiv n[111]$ ومنه
$1000n\equiv 0[111]$ إذن $1000n+n\equiv 0[111]$.

$100\,010\,001=1000\,10000+1$ ؛ $100\,010\,001=1000\,00000+10000+1$

$100\,010\,001=1000(1000\times 100+10)+1$

$1000\times 100+10\equiv 100+10[111]$ ومنه $1000(1000\times 100+10)\equiv 110[111]$ إذن

$1000(1000\times 100+10)+1\equiv 111[111]$ ؛ $1000(1000\times 100+10)+1\equiv 0[111]$ ؛ $100\,010\,001\equiv 0[111]$.

$\alpha=100\,010\,000\,001$.

$\alpha=100\,010\,000\,000+1$ ؛ $\alpha=1000^2(100\,0\times 100+10)+1$ إذن $\alpha\equiv 100+10+1[111]$ أي $\alpha\equiv 0[111]$.

2) $99999\equiv 0[11\,111]$ ومنه $100000\equiv 1[11\,111]$. نضع $n=100000$

$\beta=1\,001\,001\,001\,001$ ؛ $\beta=1\,001\,001\,000\,000+1000+1$ ؛ $\beta=(1\,001\,000\,0+10)n+1000+1$ ؛

$\beta=(1\,000\,000\,0+1\,000\,0+10)n+1000+1$

$\beta=(1\,00n+1\,000\,0+10)n+1000+1$

. $\beta\equiv 0[11\,111]$ ، $\beta\equiv 11111[11\,111]$ ؛ $\beta\equiv 10110+1001[11\,111]$

80 (1 $a=8k+2$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=8k+2$ أي $r=8(k-13k')+2$ إذن $r\equiv 2[8]$

ب - $r=8\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$ و $8\alpha+2<104$ أي $\alpha<\frac{102}{8}$ ؛ $\alpha<12$.

(2 $a=13k+3$ ؛ $a=104k'+r$ ومنه $104k'+r=13k+3$ أي $r=13(k-8k')+3$ إذن $r\equiv 3[13]$.

ب ــ $r=13\beta+3$ مع $\beta\in\mathbb{N}$ و $13\beta+3<104$ أي $\beta<\frac{101}{13}$ ؛ $\beta<7$.

3) من 1) نلاحظ أن r عدد زوجي إذن من 2) يجب أن يكون β فرديا إذن $r\in\{16,42,68,94\}$

ولكن يجب أن يكون $\frac{r-2}{8}\in\mathbb{N}$ والقيمة الوحيدة التي تحقق هي $r=42$.

81 (1 $5\equiv 5[11]$ ، $5^2\equiv 3[11]$ ، $5^3\equiv 4[11]$ ، $5^4\equiv 9[11]$ ، $5^5\equiv 1[11]$.

(2 $5^5\equiv 1[11]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{5p}\equiv 1[11]$.

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4\}$ فإن $5^k\times 5^{5p}\equiv 5^k[11]$ أي $5^{5p+k}\equiv 5^k[11]$.

ومنه $5^{5p+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv 5^2[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv 5^3[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv 5^4[11]$.

إذن $5^{5p+1}\equiv 5[11]$ ، $5^{5p+2}\equiv 3[11]$ ، $5^{5p+3}\equiv 4[11]$ ، $5^{5p+4}\equiv 9[11]$.

(3 $1428=5\times 245+3$ ، $2008=5\times 401+3$ ومنه $5^{2008}-5^{1428}\equiv(4-4)[11]$ أي $5^{2008}-5^{1428}\equiv 0[11]$.

82 (1 $3\equiv 3[7]$ ، $3^2\equiv 2[7]$ ، $3^3\equiv 6[7]$ ، $3^4\equiv 4[7]$ ، $3^5\equiv 5[7]$ و $3^6\equiv 1[7]$.

(2 $3^6\equiv 1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{6P}\equiv 1[7]$

وإذا كان $k\in\{1,2,3,4,5\}$ فإن $3^k\times 3^{6P}\equiv 3^k[7]$ أي $3^{6P+k}\equiv 3^k[7]$.

ومنه $3^{6P+1}\equiv 3[7]$، $3^{6P+2}\equiv 2[7]$، $3^{6P+3}\equiv 6[7]$، $3^{6P+4}\equiv 4[7]$ ، $3^{6P+5}\equiv 5[7]$.

(3 $1988=6\times 331+2$ ومنه $3^{1988}\equiv 2[7]$.

$10\equiv 3[7]$ ومنه $10^{1408}\equiv 3^{1408}[7]$ ولدينا $1408=6\times 234+4$ إذن $3^{1408}\equiv 4[7]$ وبالتالي $10^{1408}\equiv 4[7]$.

$9\equiv 2[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $9^{3n+2}\equiv 2^{3n+2}[7]$.

ولدينا $2^{3n+2}=4\times 2^{3n}=4\times 8^n$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $4\times 8^n\equiv 4\times 1[7]$ إذن $9^{3n+2}\equiv 4[7]$

الاستنتاج $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv(2+4+4)[7]$ ومنه $3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv 10[7]$ إذن

$3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2}\equiv 3[7]$.

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $(3^{1988}+10^{1408}+9^{3n+2})$ على 7 هو 3.

83 (1 $2\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$ ، $2^3\equiv 3[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$.

الاستنتاجات : $2^4\equiv 1[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p}\equiv 1[5]$

إذن $2^{4p+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv 3[5]$.

$3\equiv -2[5]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{4p}\equiv 2^{4p}[5]$ أي $3^{4p}\equiv 1[5]$

وبالتالي $3^{4p+1}\equiv 3[5]$ ، $3^{4p+2}\equiv 9[5]$ ومنه $3^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $3^{4p+3}\equiv 27[5]$ ومنه $3^{4p+3}\equiv 2[5]$.

$n=$	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

2) $14=4\times3+2$ إذن $2^{14}\equiv4[5]$.

$10=4\times2+2$ إذن $3^{10}\equiv4[5]$.

3) $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv2\times3-1[5]$ ومنه $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv5[5]$

بما أن $5\equiv0[5]$ فإن $2\times3^{4n+1}-2^{4n}\equiv0[5]$.

84 1) $5\equiv-2[7]$ ومنه $5^3\equiv-8[7]$ أي $5^3\equiv-1[7]$ إذن $5^6\equiv1[7]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k, $5^{6k}\equiv1[7]$

ويكون لدينا : $5^{6k+1}\equiv5[7]$

$5^{6k+2}\equiv25[7]$ أي $5^{6k+2}\equiv4[7]$

$5^{6k+3}\equiv20[7]$ أي $5^{6k+3}\equiv6[7]$

$5^{6k+4}\equiv30[7]$ أي $5^{6k+4}\equiv2[7]$

$5^{6k+5}\equiv10[7]$ أي $5^{6k+5}\equiv3[7]$.

2) $6\equiv-1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n}\equiv(-1)^2[7]$ أي $6^{2n}\equiv1[7]$.

3) $5^n+6^{2n}+3\equiv(5^n+4)[7]$

$5^n+6^{2n}+3\equiv0[7]$ معناه $5^n+4\equiv0[7]$ ومعناه $5^n\equiv-4[7]$ ومعناه $5^n\equiv3[7]$ ومنه $n=5k+6$ مع $k\in\mathbb{N}$.

85 1) لدينا $2^4=16$ ومنه $2^4\equiv1[5]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $2^{4p}\equiv1[5]$

$2^{4p+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ،

$2^{4p+3}\equiv8[5]$ أي $2^{4p+3}\equiv3[5]$.

2) لدينا $2^3=8$ ومنه $2^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k}\equiv1[7]$

$2^{3k+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv4[7]$.

3) لدينا $\begin{cases}2^{4p+2}\equiv4[5]\\2^{3k+2}\equiv4[7]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}n=4p+2\\n=3k+2\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}n\equiv2[4]\\n\equiv2[3]\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}3n\equiv6[12]\\4n\equiv8[12]\end{cases}$ ومنه $n\equiv2[12]$

وعكسيا لدينا إذا كان $n\equiv2[12]$ فإن $n=12m+2$ ومنه $n=3(4m)+2$ و $n=4(3m)+2$ ومنه

$\begin{cases}2^n\equiv4[5]\\2^n\equiv4[7]\end{cases}$.

86 $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 معناه $n=3k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

$\left[1+(n-1)2^n\right]$ يقبل القسمة على 7 معناه $1+(n-1)2^n\equiv0[7]$ ومنه $1+(3k)2^{3k+1}\equiv0[7]$

يكافئ $1+3k\left(2^3\right)^k\times2\equiv0[7]$ ومعناه $1+6k\equiv0[7]$ أي $-k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv1[7]$

إذن $n=3k+1=3(7p+1)+1$ أي $n=21p+4$.

وعكسيا إذا كان $n=21p+4$ فإن $n-1=21p+3$ ومنه $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $n-1\equiv 3[7]$

وكذلك $2^n=2^{21p+4}=2\left(2^3\right)^{7p+1}$ وبما أن $2^3\equiv 1[7]$ فإن $2^n\equiv 2[7]$. ومنه $1+(n-1)2^n\equiv(1+3\times 2)[7]$ أي $1+(n-1)2^n\equiv 0[7]$.

88 1) $4\equiv 4[11]$ ، $4^2\equiv 5[11]$ ، $4^3\equiv 9[11]$ ، $4^4\equiv 3[11]$ ، $4^5\equiv 1[11]$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{5p}\equiv 1[11]$ وعليه $4^{5p+1}\equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2}\equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3}\equiv 9[11]$ ، $4^{5p+4}\equiv 3[11]$.

2) $1995\equiv 4[11]$ ومنه $1995^n\equiv 4^n[11]$.

$26\equiv 4[11]$ ومنه $26^{10n+2}\equiv 4^{10n+2}[11]$ ولدينا $4^{10n+2}=4^{5(2n)+2}=4^{5p+2}$ ومنه $4^{10n+2}\equiv 5[11]$ إذن $26^{10n+2}\equiv 5[11]$

إذن $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+5+7\right)[11]$ أي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv\left(6\times 4^n+1\right)[11]$

وبالتالي $6\times 1995^n+26^{10n+2}+7\equiv 0[11]$ معناه $6\times 4^n+1\equiv 0[11]$ ويكافئ $2\left(6\times 4^n+1\right)\equiv 0[11]$ أي $4^n+2\equiv 0[11]$ ومعناه $4^n\equiv 9[11]$

ومعناه $n=5p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$.

89 1) $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^3\equiv -1[7]$ إذن $5^6\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $5^{6p}\equiv 1[7]$ وعليه : $5^{6p+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6p+2}\equiv 4[7]$ ، $5^{6p+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6p+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6p+5}\equiv 3[7]$.

2) لدينا $26\equiv 5[7]$ و $47\equiv 5[7]$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $26^{6n+5}\equiv 5^{6n+5}[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 5^{6(2n)+2}[7]$ وعليه $26^{6n+5}\equiv 3[7]$ و $47^{12n+2}\equiv 4[7]$.

$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv(3+2\times 4+3)[7]$ أي $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 14[7]$ ويكافئ $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 0[7]$.

3) $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$ معناه $4+5n\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(4+5n)\equiv 0[7]$ ومعناه $12+n\equiv 0[7]$ أي $n\equiv 2[7]$.

90 1) $3^3=27$ ومنه $3^3\equiv 1[13]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{3p}\equiv 1[13]$ وعليه $3^{3p+1}\equiv 3[13]$ ، $3^{3p+2}\equiv 9[13]$.

2) $4\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ يكافئ $40\left(3^{n+1}-1\right)\equiv 0[13]$ ويكافئ $3^{n+1}-1\equiv 0[13]$ معناه $3^{n+1}\equiv 1[13]$ ومعناه $n+1\equiv 0[3]$

أي $n\equiv 2[3]$.

91 $16\equiv 2[7]$ إذن $16^3\equiv 2^3[7]$ أي $16^3\equiv 1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $16^{3p}\equiv 1[7]$.

إذا كان $n=3p$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16\times 16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1(2\times 1-1)[7]$ أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv 1[7]$

إذا كان $n=3p+1$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^{2}\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(4\times1-1)[7]$
أي $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv3[7]$.
إذا كان $n=3p+2$ فإن $15\left(16^{n+1}-1\right)=15\left(16^{3}\times16^{3p}-1\right)$ ومنه $15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv1(8\times1-1)[7]$ أي
$15\left(16^{n+1}-1\right)\equiv0[7]$.

92 (1 ــ أ ــ $3^4=81$ ومنه $3^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $3^{4p}\equiv1[10]$ وعليه
$3^{4p+1}\equiv3[10]$ ، $3^{4p+2}\equiv9[10]$ ، $3^{4p+3}\equiv7[10]$
ــ ب ــ $9^{2001}=3^{4002}=3^{4\times1000+2}$ ومنه $63\times9^{2001}\equiv3\times9[10]$ أي $63\times9^{2001}\equiv7[10]$.
$7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{1422}\equiv(-3)^{1422}[10]$ أي $7^{1422}\equiv3^{4\times355+2}[10]$ معناه $7^{1422}\equiv9[10]$.
إذن $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv(7-9)[10]$ معناه $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv-2[10]$ أي $63\times9^{2001}-7^{1422}\equiv8[10]$.
(2 **- أ -** لدينا $3n\times9^{n}=3n\times3^{2n}=n\times3^{2n+1}$
ولدينا $7\equiv-3[10]$ ومنه $7^{2n+1}\equiv(-3)^{2n+1}[10]$ أي $7^{2n+1}\equiv-3^{2n+1}[10]$
إذن $3n\times9^{n}+7^{2n+1}\equiv\left(n3^{2n+1}-3^{2n+1}\right)[10]$
أي $3n\times9^{n}+7^{2n+1}\equiv(n-1)3^{2n+1}[10]$.
- ب - $3n\times9^{n}+7^{2n+1}\equiv0[10]$ معناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ ومعناه $(n-1)3^{2n+1}\equiv0[10]$ أي3^{2n+3}
ويكافئ $(n-1)3^{4n+4}\equiv0[10]$ أي $n-1\equiv0[10]$ أي $n\equiv1[10]$.

93 (1 $27\equiv-1[7]$ أي $3^3\equiv-1[7]$ ومنه $3^6\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $3^{6k}\equiv1[7]$ وعليه
$3^{6k+1}\equiv3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv2[7]$ ، $3^{6k+3}\equiv6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv5[7]$.
$64\equiv1[7]$ ومنه $4^3\equiv1[7]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي p ، $4^{3p}\equiv1[7]$ وعليه $4^{3p+1}\equiv4[7]$,
$4^{3p+2}\equiv2[7]$.
(2 $2006\equiv4[7]$ ؛ $1424\equiv3[7]$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $2006^{3n+2}\equiv4^{3n+2}[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3^{6n+1}[7]$
ومنه $2006^{3n+2}\equiv2[7]$ ؛ $1424^{6n+1}\equiv3[7]$ إذن $2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv(2\times2+3)[7]$ أي
$2\times2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv0[7]$.
(3 $2\times3^{0}+2\times3^{1}+...+2\times3^{n}=2\left(3^{0}+3^{1}+...+3^{n}\right)$

$2\times3^{0}+2\times3^{1}+...+2\times3^{n}=3^{n+1}-1$
$3\times4^{0}+3\times4^{1}+...+3\times4^{n}=3\left(4^{0}+4^{1}+...+4^{n}\right)$
$3\times4^{0}+3\times4^{1}+...+3\times4^{n}=4^{n+1}-1$ إذن $s_n=u_0+u_1+...+u_n=3^{n+1}+4^{n+1}-2$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^{n+1}\equiv$	3	2	6	4	5	1	[7]
$4^{n+1}\equiv$	4	2	1	4	2	1	
$s_n\equiv$	5	2	5	6	5	0	

94 (1 $49\equiv-1[10]$ أي $7^2\equiv-1[10]$ ومنه $7^4\equiv1[10]$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k ، $7^{4k}\equiv1[10]$
وعليه $7^{4k+1}\equiv7[10]$, $7^{4k+2}\equiv9[10]$, $7^{4k+3}\equiv3[10]$.

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=(1+7+9+3)[10]$

. $7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}=0[10]$

2) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $S_n=1+7+7^2+...+7^n$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}+7^{n+2}+7^{n+3}+7^{n+4}$

$S_{n+4}=S_n+7^{n+1}\left(1+7+7^2+7^3\right)$

$1+7+7^2+7^3\equiv 0[10]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4}=S_n[10]$.

$S_0=1$ ، $S_0\equiv 1[10]$ ؛ $S_1=8$ ، $S_1\equiv 8[10]$ ؛ $S_2=57$ ، $S_2\equiv 7[10]$ ؛ $S_3=400$ ، $S_3\equiv 0[10]$ ؛

$S_4=2801$ ، $S_4\equiv 1[10]$.

لنرهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_0\equiv 1[10]$. ونفرض أن $S_{4p}\equiv 1[10]$.

لدينا $S_{4(p+1)}=S_{4p+4}$ وحسب السؤال السابق $S_{4p+4}=S_{4p}[10]$ إذن $S_{4(p+1)}\equiv 1[10]$ وبالتالي حسب مبدأ التراجع

ينتج من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ $S_{4n}\equiv 1[10]$.

$S_{4n+1}=S_{4n}+7^{4n+1}$ ومنه $S_{4n+1}\equiv 1+7[10]$ أي $S_{4n+1}\equiv 8[10]$.

$S_{4n+2}=S_{4n+1}+7^{4n+2}$ ومنه $S_{4n+2}\equiv(8+9)[10]$ أي $S_{4n+2}\equiv 7[10]$.

$S_{4n+3}=S_{4n+2}+7^{4n+3}$ ومنه $S_{4n+3}\equiv(7+3)[10]$ أي $S_{4n+3}\equiv 0[10]$.

2 - أنظمة التعداد

95 نفرض $0<x<7$ و $0<y<7$. $\overline{yx}=10y+x$ و $\overline{xy}=7x+y$ إذن $7x+y=10y+x$ أي

$6x=9y$ معناه $2x=3y$ ومنه $2x\equiv 0[3]$ أي $4x\equiv 0[3]$ معناه $x\equiv 0[3]$ وبالتالي $x=3$ أو $x=6$

إذن $(x,y)=(3,2)$ أو $(x,y)=(6,4)$

96 الشروط : $0<x<7$ ، $0<z<7$ ، $0\le y<7$.

$n=\overline{xyz}=7^2x+7y+z$ و $n=\overline{zyx}=11^2z+11y+x$ ومنه $49x+7y+z=121z+11y+x$ أي :

$48x-4y-120z=0$ وهذا يكافئ $12x-y-30z=0$ معناه $y=12x-30z=6(2x-5z)$

إذن $y\equiv 0[6]$ ولدينا $0\le y<7$ إذن $y=0$ أو $y=6$

إذا كان $y=0$ فإن $6(2x-5z)=0$ أي $2x=5z$ ومنه $2x\equiv 0[5]$ معناه $6x\equiv 0[5]$ أي $x\equiv 0[5]$ بما

أن $0<x<7$ فإن $x=5$ ومنه $z=2$.

إذا كان $y=6$ فإن $6(2x-5z)=6$ أي $2x=5z+1$ ومنه $2x\equiv 1[5]$ معناه $6x\equiv 3[5]$ أي $x\equiv 3[5]$ بما

أن $0<x<7$ فإن $x=3$ ومنه $z=1$. $(x,y,z)=(5,0,2)$ أو $(x,y,z)=(3,6,1)$

97 $a>6$ ؛ $b+c=\overline{46}=4a+6$ ؛ $bc=\overline{555}=5a^2+5a+5$

b و c هما حلا للمعادلة $x^2-2(2a+3)x+\left(5a^2+5a+5\right)=0$ حيث x هو المجهول

$\Delta'=(2a+3)^2-\left(5a^2+5a+5\right)$ ؛ $\Delta'=-a^2+7a+4$ ؛ $\delta=49+16=65$

$\Delta'\ge 0$ معناه $\frac{7-\sqrt{65}}{2}\le a\le\frac{7+\sqrt{65}}{2}$ ومنه $6<a\le 7{,}53$ إذن $a=7$.

ومنه المعادلة تصبح $x^2-2(17)x+285=0$ و $\Delta'=4$ إذن $x'=17-2=15$ و $x'=17+2=19$.

بما أن $1 \le a \le b \le c$ فإن $(a,b,c)=(7,15,19)$. ويكون $abc=1995$.

98 (1 $45x-28y=130$ معناه $45x=130+28y=2(65+14y)$ ؛ $45x\equiv 0[2]$ أي $x\equiv 0[2]$.

$45x-28y=130$ معناه $28y=45x+130=5(9x+26)$ ومنه $28y\equiv 0[5]$ أي $56y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$.

(2 $0\le\alpha\le 9$ و $0\le\beta\le 7$ ؛ $n=2\times 9^3+9^2\alpha+9\alpha+3=90\alpha+1461$ ؛ $n=5\times 7^3+7^2\beta+7\beta+6=56\beta+1721$.

إذن $90\alpha+1461=56\beta+1721$ ومعناه $90\alpha-56\beta=260$ أي $45\alpha-28\beta=130$

إذن $\alpha\equiv 0[2]$ و $\beta\equiv 0[5]$ بما أن $0\le\beta\le 7$ فإن $\beta=0$ أو $\beta=5$.

إذا كان $\beta=0$ فإن $45\alpha=130$ أي $\alpha=\dfrac{28}{9}$ مرفوض.

إذا كان $\beta=5$ فإن $45\alpha=270$ أي $\alpha=6$. إذن $n=90\alpha+1461=2001$.

99 $0<x<7$ ، $0<y<7$ و $0\le z<7$.

$N=11^3x+11^2y+11z+x$ أي $N=1332x+121y+11z$

$N=7^3y+7^2y+7x+z$ أي $N=392y+7x+z$

إذن $1332x+121y+11z=392y+7x+z$ أي $1325x+10z=271y$ أي $5(265x+2z)=271y$

إذن $271y\equiv 0[5]$ ومعناه $y\equiv 0[5]$ بما أن $0<y<7$ فإن $y=5$.

وبالتالي $265x+2z=271$ أي $265x=271-2z$ ومنه $265x=271[2]$ أي $x\equiv 1[2]$

بما أن $0<x<7$ فإن $x=1$ أو $x=3$ أو $x=5$.

إذا كان $x=1$ فإن $z=3$

إذا كان $x=3$ فإن z يكون سالب

إذا كان $x=5$ فإن z يكون سالب

وبالتالي $(x,y,z)=(1,5,3)$.

100 $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

(1 $n\equiv 1+2+7+1+x\ [8]$ أي $n\equiv 3+x\ [8]$.

يكون $n\equiv 0[8]$ معناه $x+3\equiv 0[8]$ أي $x\equiv 5[8]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=5$.

(2 $n=\overline{1271x}=9^4+2\times 9^3+7\times 9^2+9+x$

$n=9^3(9+2)+7\times 9^2+9+x$ ؛ $n\equiv 4+x\ [11]$

يكون $n\equiv 0[11]$ معناه $x+4\equiv 0[11]$ أي $x\equiv 7[11]$ وبما أن $0\le x<9$ فإن $x=7$.

101 $0\le x\le 9$ و $0\le y\le 9$. $n=\overline{27x85y}$ ؛ $n=2\times 10^5+7\times 10^4+x\times 10^3+8\times 10^2+5\times 10+y$

$n\equiv 2+7+x+8+5+y\ [3]$ و $n\equiv -2+7-x+8-5+y\ [11]$

معناه $n\equiv x+1+y\ [3]$ و $n\equiv -x+8+y\ [11]$

$n\equiv 0[3]$ و $n\equiv 0[11]$ معناه $x+1+y\equiv 0[3]$ و $-x+8+y\equiv 0[11]$

أي $x+y\equiv 2[3]$ و $x-y\equiv 8[11]$.

$x-y\equiv 8[11]$ معناه $x-y\equiv -3[11]$

ومنه $(x,y)\in\{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),$
$(5,8),(6,9),(8,0),(9,1)\}$

بما أن $x+y\equiv 2[3]$ فإن $(x,y)\in\{(1,4),(4,7),(8,0)\}$

$n=\overline{271854}$ أو $n=\overline{274857}$ أو $n=\overline{278850}$.

102 1) إذا كان $3x\equiv 0[7]$ فإن $3\times 5x\equiv 0\times 5[7]$ وبما أن $15\equiv 1[7]$ فإن $x\equiv 0[7]$.

العكس إذا كان $x\equiv 0[7]$ فإن $3x\equiv 3\times 0[7]$ ومنه $3x\equiv 0[7]$.

2) $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ أي $N=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$

$N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$ أي $N'=a_n 10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2 10+a_1$ ومعناه

$10N'=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_2 10^2+a_1 10$ إذن $N=10N'+a_0$

$N\equiv 0[7]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[7]$ أي $3N'-6a_0\equiv 0[7]$ ويكافئ $3(N'-2a_0)\equiv 0[7]$ ومعناه

$N'-2a_0\equiv 0[7]$ وهذا حسب السؤال السابق .

3) $105154\equiv 0[7]$ يكافئ $10515-8\equiv 0[7]$ أي $10507\equiv 0[7]$ ويكافئ $1050-14\equiv 0[7]$ أي

$1036\equiv 0[7]$ ويكافئ $103-12\equiv 0[7]$ أي $91\equiv 0[7]$ ويكافئ $9-2\equiv 0[7]$ أي $7\equiv 0[7]$

خلاصة $7\equiv 0[7]$ معناه $105154\equiv 0[7]$.

$263572\equiv 0[7]$ معناه $26357-4\equiv 0[7]$ ؛ $26353\equiv 0[7]$ يكافئ $2635-6\equiv 0[7]$ ؛ $2629\equiv 0[7]$ يكافئ

$262-18\equiv 0[7]$ ؛ $244\equiv 0[7]$ يكافئ $24-8\equiv 0[7]$ أي $16\equiv 0[7]$ وهذا غير صحيح إذن 263572 لا يقبل القسمة على 7 .

103 1) $N=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$ ، $N'=a_n 10^{n-1}+a_{n-1}10^{n-2}+...+a_2 10+a_1$.

$N=10N'+a_0$. $N\equiv 0[13]$ معناه $10N'+a_0\equiv 0[13]$ ومعناه $4(10N'+a_0)\equiv 0[13]$ ويكافئ

$40N'+4a_0\equiv 0[13]$ أي $N'+4a_0\equiv 0[13]$ لأن $40\equiv 1[13]$

2) $1631216\equiv 0[13]$ معناه $163121+24\equiv 0[13]$ أي $163144\equiv 0[13]$ معناه $16314+16\equiv 0[13]$ أي

$16330\equiv 0[13]$ ومعناه $1633\equiv 0[13]$ ومعناه $163+12\equiv 0[13]$ أي $175\equiv 0[13]$ ومعناه $17+20\equiv 0[13]$

أي $37\equiv 0[13]$ وهذا تناقض إذن 1631216 لا يقبل القسمة على 13 .

$48662029\equiv 0[13]$ معناه $4866202+36\equiv 0[13]$ أي $4866238\equiv 0[13]$ معناه $486623+32\equiv 0[13]$ أي

$486655\equiv 0[13]$ معناه $48665+20\equiv 0[13]$ أي $48685\equiv 0[13]$ معناه $4868+20\equiv 0[13]$ أي

$4888\equiv 0[13]$ معناه $488+32\equiv 0[13]$ أي $520\equiv 0[13]$ معناه $52\equiv 0[13]$ أي $5+8\equiv 0[13]$ معناه

$13\equiv 0[13]$ وهذا صحيح إذن $48662029\equiv 0[13]$.

105 1) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$.

2) ليكن a عدد طبيعي حيث $a>1$. $111=a^2+a+1$ ولدينا $10101=1\times a^4+0\times a^3+1\times a^2+0\times a+1$ أي

$10101=a^4+a^2+1$ معناه $10101=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ أي $10101=111(a^2-a+1)$ ومنه 111 يقسم 10101 .

الحاصل هو $a^2-a+1=(a-1)a+1$ أي $a^2-a+1=\beta a+1=\overline{\beta 1}$.

106 1) في النظام التعداد ذي الأساس a لدينا $11=a+1$ و $1001=a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

أي $1001=11(a^2-a+1)$ ومنه العدد 1001 يقبل القسمة على 11 .

2) الحاصل هو أي $\overline{\beta 1}=(a-1)a+1=a^2-a+1$.

3) $1001=11\times\overline{\beta 1}$

في النظام ذي الأساس 10 يكون $1001=11\times 91$

في النظام ذي الأساس 12 لدينا $\overline{1001}=12^3+1=1729$ ، $\overline{11}=12+1=13$ ، $\overline{\beta 1}=11\times 12+1=133$.

ولدينا $13\times 133=1729$.

107 1) ليكن a عدد طبيعي ، $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$ ومنه إذا كان $a>3$ فيكون في الأساس a ، $(a+1)^3=1331$.

2) $(a+1)^4=(a^3+3a^2+3a+1)(a+1)$ ؛ $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$

ومنه إذا كان $a>6$ فيكون في الأساس a ، $(a+1)^4=14641$.

108 1) $n^2+2=(n^2+1)+1=\overline{11}$ ؛ $n^2+2n=(n^2+1)+(2n-1)=\overline{1(2n-1)}$؛

$(n^2+2)^2=\left[(n^2+1)+1\right]^2$ ؛ $(n^2+2)^2=(n^2+1)^2+2(n^2+1)+1=\overline{121}$ ؛

$n^4=(n^4-1)+1=(n^2-1)(n^2+1)+1$ ؛ $n^4=\overline{(n^2-1)1}$.

ـــ التحقيق من أجل الأساس $a=5$ أي $n=2$.

$n^2+2=6$ و $\overline{11}=5+1=6$.

$n^2+2n=8$ و $\overline{1(2n-1)}=5+3=8$.

$(n^2+2)^2=36$ و $\overline{121}=5^2+2\times 5+1=36$.

$n^4=16$ و $\overline{(n^2-1)1}=3\times 5+1=16$.

ـــ التحقيق من أجل الأساس $a=10$ أي $n=3$.

$n^2+2=11$ و $\overline{11}=10+1=11$.

$n^2+2n=15$ و $\overline{1(2n-1)}=10+5=15$.

$(n^2+2)^2=121$ و $\overline{121}=121$.

$n^4=81$ و $\overline{(n^2-1)1}=8\times 10+1=81$.

2) $u=n(n^2+2)=n(a+1)=na+n=\overline{nn}$

$v=n^2(n^2+2)=n^2(a+1)=n^2a+n^2=\overline{n^2n^2}$

$x=u^2=n^2(a+1)^2=n^2a^2+2n^2a+n^2$ ؛ $x=(a-1)a^2+2(a-1)a+n^2=a^3+a^2-2a+n^2$

$x=a^3+(a-2)a+n^2=a^3+(n^2-1)a+n^2$ ؛ $x=\overline{10(n^2-1)n^2}$.

$y=v^2=(n^2a+n^2)^2=n^4a^2+2n^4a+n^4$ ؛ $y=(a-1)^2a^2+2(a-1)^2a+(a-1)^2$ ؛

$y=a^4-2a^3+a^2+2a^3-4a^2+2a+a^2-2a+1$ ؛ $y=a^4-2a^2+1=\left(n^2+1\right)a^3-2a^2+1$

$y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(a-2\right)+1$ ؛ $y=a^4-2a^2+1=n^2a^3+a^2\left(n^2-1\right)+1$

$y=a^4-2a^2+1=\overline{n^2\left(n^2-1\right)01}$.

المسائل

109 (I (1) نفترض أن a و b زوجيان معا ، معناه $a\equiv 0[2]$ و $b\equiv 0[2]$ ومنه $a^2\equiv 0[2]$ و $b^2\equiv 0[2]$ وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$.

نفترض أن a و b فرديان معا ، معناه $a\equiv 1[2]$ و $b\equiv 1[2]$ ومنه $a^2\equiv 1[2]$ و $b^2\equiv 1[2]$ وبالتالي $a^2-b^2\equiv 0[2]$ أي $N\equiv 0[2]$

إذن إذا كان a و b من نفس الشفعية فيكون N عددا طبيعيا زوجيا وهذا تناقض لأن N عدد طبيعي فردي وبالتالي a و b ليس من شفعية واحدة .

2) $N=a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ ؛ بوضع $a-b=p$ و $a+b=q$ يكون $N=pq$.

3) بما أن a و b ليس من شفعية واحدة فإن مجموعهما وفرقهما يكونا فرديين أي p و q فرديين معا .

(II (1 - أ

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]

ب - $a^2-250507\equiv a^2-1[9]$

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
b^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
$a^2-250507$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2-1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
a^2	1	2	5	1	8	8	1	5	2	[9]

جـ- من السؤال أ ــ لا يمكن أن تكون الأعداد 2 ، 5 و 8 بواقي لمربع بترديد 9 وبالتالي $a^2\equiv 1[9]$ هي الحالة الوحيدة الممكنة وينتج أن $a\equiv 1[9]$ أو $a\equiv 8[9]$.

2) أ ــ $a^2-250507=b^2$ ومنه $a^2-250507\geq 0$ ويكافئ $a\leq -\sqrt{250507}$ أو $a\geq \sqrt{250507}$ بينما a عدد طبيعي إذن $a\geq \sqrt{250507}$ أي $a\geq 500{,}51$ ومنه $a\geq 501$.

ب ــ $a^2-250507=501^2-250507=494$ إذن $b^2=494$ أي $b=22{,}23$ إذن $a\neq 501$.

3) أ ــ نفرض $a\equiv 8[9]$ ، لدينا $503\equiv 8[9]$ معناه $8\equiv 503[9]$ ومنه $a\equiv 503[9]$.

نفرض $a\equiv 1[9]$ ، لدينا $505\equiv 1[9]$ معناه $1\equiv 505[9]$ ومنه $a\equiv 505[9]$.

ب ــ $a=505+9k$ معناه $a^2-250507=81k^2+9090k+4518$ ويكافئ $b^2=81k^2+9090k+4518$ أي $b^2=9\left(9k^2+1010k+502\right)$

من أجل $k=0$ لدينا $b^2=4518$ أي $b=3\sqrt{502}$ مرفوض .

من أجل $k=1$ لدينا $b^2=9\times 1521=117^2$ أي $b=117$ إذن أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $\left(505+9k\ ,b\right)$ تحقق العلاقة $\left(E\right)$ هو $k=1$ وبالتالي $\left(a,b\right)=\left(514,117\right)$.

(III (1) $a^2-250507=b^2$ معناه $250507=a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$ أي $250507=397\times 631$.

(2

	1	1	1	2	3	2	1	1	1	2	
631	397	234	163	71	21	8	5	3	2	1	0

إذن $p\gcd(631,397)=1$.

110 جزء I ــ

1) لدينا $1^2+3^2+5^2=35=4\times8+3$ ومنه $1^2+3^2+5^2\equiv3[4]$ أي $1^2+3^2+5^2\equiv2^2-1\left[2^2\right]$

2) نفترض أن $n=3$.

أ -

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

ب - من أجل كل ثلاث أعداد R_1 ، R_2 و R_3 من المجموعة $\{0,1,4\}$ يكون $R_1+R_2+R_3\neq0$.

إذن لا يمكن إيجاد x ، y و z حيث $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$.

الجزء II ــ دراسة الحالة العامة مع $n\geq3$.

1) لدينا $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ معناه $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ ومنه $x^2+y^2+z^2$ عدد فردي .

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$.

إذن $(x+y+z)^2$ هو عدد فردي وبالتالي $x+y+z$ عدد فردي .

إذن تكون الأعداد x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فري وآخرين زوجيين .

2) نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .

أ - $x=2p$ ، $y=2k$ و $z=2l+1$ ومنه $x^2=4p^2$ ، $y^2=4k$ و $z^2=4l^2+4l+1$ إذن $x^2\equiv0[4]$ ، $y^2\equiv0[4]$ و $z^2\equiv1[4]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv1[4]$.

ب - بما أن $n\geq3$ فإن $2^n\equiv0[4]$ أي $2^n=4\alpha$ ولدينا $x^2+y^2+z^2=2^np+2^n-1=2^n(p+1)-1$ أي $x^2+y^2+z^2=4\alpha(p+1)-1$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv-1[4]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv3[4]$ وهذا تناقض مع النتيجة السابقة .

3) نفترض أن x ، y و z كلها فردية .

أ - $k^2+k=k(k+1)$ جداء عددين متتاليين هو عدد زوجي أي $k^2+k\equiv0[2]$.

ب - ليكن t عدد طبيعي فردي أي $t=2k+1$ ومنه $t^2=4k^2+4k+1=4\left(k^2+k\right)+1$ وبما أن $k^2+k\equiv0[2]$ فإن $k^2+k\equiv2k'$ إذن $t^2=8k'+1$ أي $t^2\equiv1[8]$

بما أن x ، y و z كلها فردية . فإن $x^2\equiv1[8]$ ، $y^2\equiv1[8]$ و $z^2\equiv1[8]$ وبالتالي $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$.

جـ - الخلاصة : $x^2+y^2+z^2=2^n(p+1)-1$

من أجل $n\geq3$ يكون $2^n\equiv0[8]$ إذن $x^2+y^2+z^2\equiv-1[8]$ أي $x^2+y^2+z^2\equiv7[8]$ وهذا تناقض مع النتيجة $x^2+y^2+z^2\equiv3[8]$

إذن لا توجد أي ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$ مع $n\geq3$ سواء كانت x ، y و z كلها فردية أو واحد منها فردي والآخرين زوجيين ؛ وبالتالي $n=2$ هي الحالة الوحيدة التي توجد فيها ثلاثية (x,y,z) تحقق $x^2+y^2+z^2\equiv\left(2^n-1\right)\left[2^n\right]$

الباب الرابع

الأعداد الأولية

الأنشطة

النشاط الأول

تصحيح: /

الهدف: مقاربة مفهوم المضاعف المشترك الأصغر.

توجيهات: يقدم النشاط كمدخل للفقرة " المضاعف المشترك الأصغر لعددين".

الحل:

نشاط 1 :

1) اللحظات التي يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر هي $90k$ مع k عدد طبيعي .

2) اللحظات التي يمر فيها الضوء الثاني إلى الأخضر هي $95k$ مع k عدد طبيعي.

3) $M_{90}=\{0,90,180,270,...,1710,...,86310,86400\}$

4) $M_{95}=\{0,95,190,285,...,1710,...,86260,86355\}$

5) $M_{90}\cap M_{95}=\{0,1710,3420,...,83790,85500\}$.

6) اللحظات بالثانية التي يمرّ فيها الضوءان إلى الأخضر في آن واحد هي عناصر المجموعة $M_{90}\cap M_{95}$

7) 1710 (بعد منتصف الليل) .

8) الساعة السابعة توافق $25200s$ بعد منتصف الليل و الساعة السابعة والنصف توافق $27000s$ بعد منتصف الليل بوضع $25200\le 1710k\le 27000$ نجد $14,73\le k\le 15,78$ بما أن k عدد طبيعي فإن $k=15$.

وبالتالي اللحظة بين الساعة السابعة و الساعة السابعة والنصف هي $26650s$ أي الساعة 7 و 16 الدقيقة و 40 ثانية.

9) a) $t=90u$.

b) $V_m=45Km/h=\dfrac{45000}{3600}m/s=12,5m/s$ الوقت المستغرق بين الضوئين هو $\dfrac{875}{12,5}s=70s$.

إذا كان u عدد المرات يمر فيها الضوء الأول إلى الأخضر خلال الزمن t فإن $v+1$ هو عدد المرات يمر فيها الضوء الثاني إلى الأخضر ولكن عند الوصول إليه أي خلال الزمن $t+70$ وبالتالي $t+70=95(v+1)$.

c) بتعويض $t=90u$ في $t+70=95(v+1)$ نجد $90u-95v=95-70=25$ أي $18u-19v=5$.

d) $18u-19v=5=95-90=19\times5-18\times5$ ومعناه $18u+18\times5=19v+19\times5$

أي $18(u+5)=19(v+5)$.

e) استنتج قيم u و v ثم قيم t

العدد $18(u+5)$ يقبل القسمة على 19 وبما أن 19 أولي فإنه موجود في تحليل $18(u+5)$ إلى جداء عوامل أوّلية وبما أنه أولي مع 18 فإنه غير موجود في تحليل 18 إذن هو موجود في تحليل $(u+5)$ أي 19 قاسم لـ $(u+5)$

أي : $u+5=19\alpha$ مع α عدد طبيعي وبالتعويض في $18(u+5)=19(v+5)$ نجد $v+5=18\alpha$

خلاصة $u=19\alpha-5$ و $v=18\alpha-5$ مع α عدد طبيعي. $t=90u=90(19\alpha-5)=1710\alpha-450$

f) $25200\le 1710\alpha-450\le 27000$ أي $15\le\alpha\le 16,05$ إذن $t=1710\times15-450=25200$

أو $t=1710\times16-450=26910$ أي : الساعة 7 و 0 دقيقة و 0 ثانية أو الساعة 7 و 28 دقيقة و 30 ثانية.

النشاط الثاني

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات و الأعداد الأولية في وضعية لها دلالة.

توجيهات: يقدم ضمن أفواج.

الحل: بسيط

الأعمال الموجهة

تعيين معاملي بيزو

تصحيح: /

الهدف: توظيف مجدول اكسال لتعيين معاملي بيزو.

توجيهات: يقدم العمل في شكل أفواج مع استغلال جهاز الداتاشو.

الحل: يكفي إتباع مختلف التوجيهات المقدمة لبلوغ النتائج المتوخاة.

المبرهنة الصغيرة لـِ فيرما

تصحيح: /

الهدف: توظيف الموافقات و الأعداد الأولية.

توجيهات: يمكن تقديم العمل في شكل أفواج كما يمكن اقتراحه كواجب منزلي.

الحل: معقد.

التمارين

التمارين التطبيقية

1 - الأعداد الأوّلية .

2 أ ــ 1429 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ؛ $1429=7\times204+$ ، $1429=11\times129+$،
$1429=13\times109+$، $1429=17\times84+$، $1429=19\times75+$، $1429=23\times62+$، $1429=29\times49+$،
$1429=31\times46+$، $1429=37\times38+$، $1429=41\times34+$؛ عدد القسمات هو 13.

ب ــ 1429 أولي .

3 أ - الخاصية 2 صفحة 90 .

ب - $\sqrt{853}\approx 29,2$ و 853 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29 ، إذن العدد 853 أولي.

4 أ - 251 أولي. ب - 341ليس أوليا.

ج - 1023ليس أوليا.

7 إذا كان $n=2$ فإن $n+7=9$ وهو غير أولي.

إذا كان $n>2$ فإن n فردي ومنه $n+7$ يكون زوجيا يقبل القسمة على 2 وهو غير أولي.

15 $n^2+8n+15=(n+3)(n+5)$ ليس أوليا .

17 أ - $\sqrt{173}\approx 13,15$ و 173 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 إذن العدد 173 أولي .

ب - $x^2-y^2=173$ معناه $(x-y)(x+y)=173$

إذن $x-y=1$ و $x+y=173$ أي $(x,y)=(87,86)$

ج ــ p عدد طبيعي أوّلي فردي . $x-y=1$ و $x+y=p$ ومنه $(x,y)=\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right)$.

2 - المضاعف المشترك الأصغر لعددين .

28 أ - $ppcm\,(26,12)=156$.

ب - $ppcm\,(18,-15)=90$.

جـ - $ppcm\,(-12,-13)=156$.

د - $ppcm\,(230,128)=14720$.

هـ - $ppcm\,(876,1028)=225132$

29 * $\frac{23}{105}=\frac{92}{420}=\frac{27+65}{420}=\frac{13}{84}+\frac{9}{140}$.

* $\frac{1091}{2808}=\frac{23}{216}+\frac{55}{195}$. * $\frac{1243}{1050}=\frac{19}{210}+\frac{82}{75}$.

30 في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد الطبيعي a غير المعدومة حيث :

أ - $ppcm\,(a,56)=392$ ؛ نضع $p\gcd(a,56)=d$

معناه $a=da'$ ، $56=db'$ و $p\gcd(a',b')=1$.

لدينا $56a=392d$ أي $a=7d$ إذن $p\gcd(7,b')=1$

أي $p\gcd\left(7,\frac{56}{d}\right)=1$ إذن $d\in\{7;14;28;56\}$

$a\in\{49;98;196;392\}$.

ب - $ppcm\,(a,18)=630$ ؛ $a\in\{35;70;210;315;630\}$.

31 أ – $n\equiv 3[35]$ و $n\equiv 3[28]$ معناه $n-3\equiv 0[35]$ و $n-3\equiv 0[28]$ إذن $n-3$ مضاعف مشترك للعددين 35 و 28 .

أصغر قيمة لـــ $n-3$ هي $ppcm\,(28,35)=140$

إذن أصغر قيمة للعدد n هي 143.

32 $a=52p+7=64p'+7$ ومنه $a-7=52p=64p'$ إذن $a-7=ppmc\,(52,64)=832$ أي $a=839$.

33 $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $p\gcd(n,2n+1)=1$ ومنه $ppcm\,(n,2n+1)=n\,(2n+1)$.

34 لدينا $ppcm\,(2n+2,4n+2)=2\,ppcm\,(n+1,2n+1)$

و $p\gcd(n+1,2n+1)=1$ إذن

$ppcm\,(n+1,2n+1)=(n+1)(2n+1)$ ومنه

$ppcm\,(2n+2,4n+2)=2(n+1)(2n+1)$.

35 $n\in\mathbb{N}^*$ ؛ $a=\left(3^{2n}-1\right)\left(7^{2n}-1\right)$

$a=(3^n-1)(3^n+1)(7^n-1)(7^n+1)$ ؛

$a=b\,(3^n-1)(7^n-1)$ ؛ a مضاعف لِـ b إذن

$ppcm\,(a,b)=a$.

40 أ ــ $\begin{cases} a+b=60 \\ ppcm(a,b)=40 \end{cases}$ ؛ $p\gcd(a,b)=d$ ،

$a=da'$ ، $b=db'$ مع $p\gcd(a',b')=1$.

لدينا $ab=40d$ معناه $a'b'd=40$.

ولدينا $a+b=60$ معناه $d(a'+b')=60$.

وبالتالي d يقسم $p\gcd(40,60)=20$ أي $d\in\{1,2,4,5,10,20\}$.

لدينا $a'+b'=\frac{60}{d}$ و $a'b'=\frac{40}{d}$ إذن a' و b' هما حلا المعادلة $x^2-\frac{60}{d}x+\frac{40}{d}=0$ أي $dx^2-60x+40=0$

المميز المختصر هو $\Delta'=900-40d$ ؛ إذا كان $d\in\{1,2,4,5,10\}$ فإن

$\sqrt{\Delta'}\notin\mathbb{N}$ وبالتالي الحلان ليس طبيعيان.

إذا كان $d=20$ فإن $\Delta'=100$ ومنه $x'=1$ و $x''=2$ ؛ ومنه $(a',b')=(1,2)$ أو $(a',b')=(2,1)$

إذن $(a,b)=(20,40)$ أو $(a,b)=(40,20)$.

ب ــ $\begin{cases} a-b=22932 \\ ppcm(a,b)=98280 \end{cases}$ ؛ d يقسم $p\gcd(22932,98280)=3276$ أي

$d\in\{1,2,3,4,6,7,9,12,13,14,18,21,26,28,36,39,42,52,63,78,84,91,117,126,156,182,234,$
$252,273,364,468,546,819,1092,1638,3276\}$

الحالة الوحيدة التي تحقق وهي $d=3276$ ونجد $a=32760$ و $b=9828$

41 أ ــ $ppcm(a,b)=21\times p\gcd(a,b)$.

$ab=md$ معناه $a'b'd=m$ أي $a'b'=21$ ونجد $(a,b)\in\{(d,21d);(3d,7d);(7d,3d);(21d,d)\}$ مع

$d\in\mathbb{N}^*$.

ب ــ $ppcm(a,b)-p\gcd(a,b)=187$.

$m-d=187$ معناه $d(a'b'-1)=187=11\times17$

ومنه $d\in\{1,11,17,187\}$ ثم ندرس الحالات

3 - مبرهنة بيزو .

46 أ ــ $a=n$ ؛ $b=2n+1$. $-2a+b=1$

ب ــ $a=2n+3$ ؛ $b=3n+5$. $-3a+2b=1$

47 تطبيق مبرهنة بيزو $11(7n+2)-7(11n+3)=1$ معناه $PGCD(11n+3,7n+2)=1$.

$PGCD(n,n^2+1)=1$.

49 n عدد طبيعي غير معدوم .

أ ــ بالنشر نجد : $(n^3+1)^2=n^2(n^4+2n)+1$.

ب ــ $(n^3+1)^2-n^2(n^4+2n)=1$ بوضع $\alpha=n^3+1$ و $\beta=-n^2$ حسب مبرهنة بيزو يكون العددان

n^3+1 و n^4+2n أوّليين فيما بينهما .

4 - مبرهنة غوص .

60 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية $2045x-64y=1 \ldots (1)$

1) $PGCD(2045,64)=1$.

2) حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$. $(21,671)$ هو حل خاص للمعادلة (1).

3) $2045x-64y=1$ و $2045\times21-64\times671=1$ إذن

$2045(x-21)-64(y-64)=0$ أي $2045(x-21)=64(y-64)$

64 يقسم $2045(x-21)$ و $PGCD(2045,64)=1$

إذن حسب مبرهنة غوص 64 يقسم $x-21$ أي $x-21=64k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد $y-64=2045k$.

5 - المبرهنة الصغيرة لفرما .

66 $7^{10}\equiv1[11]$ حسب مبرهنة فرما.

$7^{2521}=7\times7^{2520}=7\times\left(7^{10}\right)^{252}$ ومنه $7^{2521}\equiv7[11]$.

68 حسب نتيجة فرما : $n^5\equiv n[5]$ و $n^3\equiv n[3]$ وهذا من أجل $n\in\mathbb{Z}$ لأن كل من 5 و 3 أولي.

$n^5\equiv n[5]$ معناه $n^5-n\equiv0[5]$

من $n^3\equiv n[3]$ ينتج أن $n^2\times n^3\equiv n^2\times n[3]$ ومنه $n^5\equiv n[3]$ أي $n^5-n\equiv0[3]$ بما أن 5 و 3 أوليان فيما بينهما فإن $n^5-n\equiv0[15]$.

71 1) $x^3\equiv x[3]$ لأن 3 أولي.

2)

$x\equiv$	0	1	2	3	$[4]$
$x^3\equiv$	0	1	0	3	$[4]$

إذن $x\equiv0[4]$ أو $x\equiv1[4]$ أو $x\equiv3[4]$

3) $x^3\equiv x[12]$ معناه $x\equiv0[4]$ أو $x\equiv1[4]$ أو $x\equiv3[4]$.

6 - تشفير الكلمات

ض	ص	ش	س	ز	ر	ذ	د	خ	ح	ج	ث	ت	ب	أ
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

ي	و	ه	ن	م	ل	ك	ق	ف	غ	ع	ظ	ط
27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15

73 نقوم بعملية التشفير باستعمال التحويل $x\mapsto y$ حيث y هو باقي قسمة $x+3$ على 28 .

1) تشفير كلمة " **الجزائر**" هو " **تهدصتثش**".

2) ليكن y من المجموعة $\mathcal{N}$ ، $x+3\equiv y[28]$ معناه $x\equiv y-3[28]$؛ إذا كان $y\geq3$ فإن $x=y-3$ وإذا كان $y<3$ فإن $x=y-3+28=y+25$

3) حل تشفير : **تبضل**: يوسف ؛ **لثغوا ثهصاشثث**: فاطمة الزهراء ؛ **وذوز** : محمد.