

دراسة دالة لورغانية رقم 01 + 02

المسألة 01 :

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$.

(1) أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، وحدته : (1cm)

(1) عيّن نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

(2) أحسب $f'(x)$ ، وشكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 5$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) أ) بيّن أن المنحني (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة ذات الفاصلة α ، حيث : $4,3 < \alpha < 4,4$.

ب) برّر أن : $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$.

(5) بيّن أنه يوجد مماس (T) للمنحني (C) يكون موازياً للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلته .

(6) أنشئ كلا من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C) .

(7) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(5 - m)x - 2 \ln x = 0$.

المسألة 02 :

نعرف على المجال $] -2; +\infty[$ الدالة f بما يلي : $f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$.

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، وحدته : (2cm)

(1) أ) أحسب نهاية الدالة f عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها .

ب) أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$ وذلك من أجل كل $x \in] -2; +\infty[$.

ج) أحسب نهايات الدالة f' عند -2 وعند $+\infty$.

د) أدرس تغيرات الدالة f' على المجال $] -2; +\infty[$.

(2) أ) بيّن أن المعادلة : $f'(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $] -0,6; -0,5[$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x من المجال $] -2; +\infty[$.

ج) استنتج تغيرات الدالة f على المجال $] -2; +\infty[$.

(3) x_0 عدد حقيقي من المجال $] -2; +\infty[$ ، نسمي (T_{x_0}) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

أ) عيّن الأعداد x_0 التي من أجلها يمر المماس (T_{x_0}) بالمبدأ O .

ب) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالمبدأ ، ثم أكتب معادلة كل مماس .

(4) أنشئ المماسين والمنحني (C_f) .

(5) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

❖ نأخذ : $\alpha \approx -0,5$ و $\alpha \approx 0,8$.

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 03

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$.

- (1) أحسب نهاية الدالة g عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- (2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ، و شكل جدول تغيراتها.
- (3) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; +\infty[$.
 ب) تحقق أن : $0,45 < \alpha < 0,46$.
 ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

- (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .
 - (2) أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 - (3) بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 - (4) عين نقطة تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل .
 - (5) أنشئ المنحني (C) .
 - (6) نعتبر h الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$.
 أ) أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
 ب) أنشئ (C_h) المنحني الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق .

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 04

الجزء الأول :

- نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x \ln x - x - 1$.
- (1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$.
 - (2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - (3) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$.
ب) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني :

- لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$.
- (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا .
 - (2) بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
 - (3) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
 - (4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) والذي يمسه في النقطة ذات الفاصلة 1 .
 - (5) أنشئ (T) والمنحنى (C_f) . (الوحدة 2cm) .

الجزء الثالث :

- نعتبر المستقيمات (D_m) المعرفة بالمعادلة : $y = mx + \frac{3}{2}$.
- (1) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A(0; \frac{3}{2})$.
 - (2) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx + \frac{3}{2}$.

الجزء الرابع :

- لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$.
- (1) تحقق من أن : $h(x) + 1 = f(x-1)$.
 - (2) إستنتج أن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بواسطة تحويل يطلب تحديده .

الجزء الخامس :

- نفرض k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $k(x) = 1 - \frac{\ln|x|}{|x|+1}$.
- (1) بين أن الدالة k زوجية .
 - (2) إشرح كيف يتم رسم المنحنى (C_k) إنطلاقا من (C_f) .
 - (3) أرسم المنحنى (C_k) في نفس المعلم السابق .

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 05

الجزء الأول :

نعتبر g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + 1 + \ln x$.

(1) أحسب نهاية الدالة g عند 0 و $+\infty$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(3) (i) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين $0,2$ و $0,3$.

(ب) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x \ln x + \frac{1-x^2}{2}$.

(1) أحسب كلا من : $h'(x)$ و $h''(x)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة h' ، ثم عين إشارة $h'(x)$.

(3) إستنتج تغيرات ثم إشارة الدالة h .

الجزء الثالث :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{x \ln x}{x+1} ; \dots (x > 0) \end{cases}$$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، وحدته (4 cm).

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟ فسر النتيجة هندسياً.

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(3) عيّن f' الدالة المشتقة للدالة f وأدرس إشارتها ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) بين أن : $f(\alpha) = -\alpha$.

الجزء الرابع :

نضع من أجل كل $x > 0$: $\varphi(x) = f(x) - \ln x$.

(1) أحسب نهاية $\varphi(x)$ عند $+\infty$ ، ثم أدرس إشارة $\varphi(x)$ على $]0; +\infty[$ وفسر النتائج هندسياً.

(2) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

(3) أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (T).

(4) أنشئ منحنى الدالة : $x \mapsto \ln x$ ، ثم أنشئ المماس (T) والمنحني (C).

(5) ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 06 (رائعة وبأفكار جديدة)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)^2$.
و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) عيّن نهايتي الدالة g عند 1 وعند $+\infty$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $g(2)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $[1; +\infty[$.

(4) بيّن أن المعادلة $|g(x)| = 1$ على المجال $[1; +\infty[$ تقبل حلان α و β ،
حيث : $1,70 < \alpha < 1,71$ و $2,37 < \beta < 2,38$.

(5) (أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_g) عند النقطة ذات الترتيب 1 ، ثم جد حصرًا للعدد $\frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1}$.
(ب) أنشئ كلاً من (Δ) والمنحني (C_g) .

(ج) m عدد حقيقي ، ناقش بياناً وحسب قيم m عدد حلول المعادلة : $2 - 2\ln(x-1) = \frac{-2}{\alpha-1}x + m$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = [x-1 + 2\ln(x-1)][x-3 + 2\ln(x-1)]$.
نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; +\infty[$ يكون : $f(x) = [g(x)]^2 - 1$.

(2) عيّن نهايتي الدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

(3) (أ) أحسب $f'(x)$ وهذا من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; +\infty[$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) (أ) جد إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .

(ب) أنشئ المنحني (C_f) في المعلم السابق .

(5) لتكن h هي الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ : $h(x) = (\cos x + 2\ln(\cos x))(-2 + \cos x + 2\ln(\cos x))$

(أ) بيّن أنّ : $h = f \circ u$ ، حيث u دالة يطلب تعيين عبارتها .

(ب) عيّن نهاية الدالة h عند $\frac{\pi}{2}$ ، وفسر النتيجة هندسياً ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h .

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة h ، ثم أنشئ (Γ) منحنى الدالة h .

دراسة دالة لوجاريتمية رقم 07 + 08

المسألة رقم 07 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.
- و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها ، ثم فسّر النتائج هندسياً .
 - (2) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
 - (3) بيّن أن النقطة $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ هي مركز التناظر للمنحنى (C_f) .
 - (4) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، وشكل جدول تغيراتها .
 - (5) برهن على وجود مماسين للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما $\frac{2}{3}$.
 - (6) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .
 - (7) نفرض العدد الحقيقي m ، حيث : $m > 0$ والمعادلة : $2 \ln\left(\frac{mx+m}{x+2}\right) = x + 1$.
❖ ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول هذه المعادلة .

المسألة رقم 08 :

- n عدد طبيعي غير معدوم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.
- و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. وحدته : $2cm$.
- (1) نعتبر الدالة h_n المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$.
أ) أدرس إتجاه تغير الدالة h_n .
ب) أحسب $h_n(0)$ ، ثم عيّن إشارة $h_n(x)$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$.
 - (2) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ تكون : $f'_1(x) = h_1(x)$ و $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$.
ب) نفرض n فردي ، بيّن أن : $f'_n(x)$ و $h_n(x)$ من نفس الإشارة .
❖ شكّل عندئذ جدول تغيرات الدالة f_n في حالة n فردي ، مع حساب النهايات عند -1 و $+\infty$.
ج) نفرض n زوجي ، شكّل جدول تغيرات الدالة f_n ، مع حساب النهايات عند -1 و $+\infty$.
 - (3) أ) حدّد وضعية المنحنيين (C_1) و (C_2) .
ب) أنشئ كلا من (C_1) و (C_2) .

دراسة دالة لوغاريتمية رقم 09

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} - 1$.

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0, 36; 0, 38]$.

(4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x \ln(x+2) - x \ln x - x$.

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى.

(2) علماً أن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ ، أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (ممكن وضع: $\frac{1}{x} = h$).

(3) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(4) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = -x + 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

(5) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(ب) بين أن: $f(\alpha) = 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرًا للعدد $f(\alpha)$.

(6) عيّن القيمة المضبوطة لفاصلة نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(7) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

دراسة دالة وسيطة

الدالة اللوغاريتمية الوسيطة:

ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f_m(x) = \frac{x^2-1}{2} - m \ln x$.
وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهاية الدالة f_m عند $+\infty$.

(2) حسب قيم m ، أحسب نهاية الدالة f_m عند 0 .

(3) أ) أحسب $f'_m(x)$ ، حيث : f'_m هي الدالة المشتقة للدالة f_m .

ب) ثم استنتج حسب قيم m جداول تغيرات الدالة f_m الممكنة .

(4) لتكن $M_0(x_0; y_0)$ نقطة من المستوي ، حيث : $x_0 > 0$.

- بين أنه يوجد منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

(5) أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها .

(6) أنشئ كلا من : (C_0) و (C_4) ، (C_{-1}) في نفس المعلم .

حل المسألة رقم 01

(I) لدينا : $g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$.
(1) حساب نهايات الدالة g :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (-x^2 - 2) = -2 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (2 \ln x) = -\infty \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - 2 + 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-x - \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty (\diamond)$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$\cdot \text{ حساب } g'(x) : g'(x) = -2x + \frac{2}{x} = \frac{-2x^2 + 2}{x}$$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-2x^2 + 2)$.

إذن : من أجل كل $x \in]0; 1[$ تكون $g'(x) \geq 0$ ، و من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ تكون $g'(x) \leq 0$.
(\diamond) جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$

(3) لدينا : $g(1) = -3$ ، نلاحظ أن الدالة g تقبل قيمة حدية كبرى هي : -3 .
إذن : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، تكون : $g(x) < 0$.

(II) لدينا : $f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$.

(1) تعيين نهايات الدالة f :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (-x + 5) = 5 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-2 \ln x}{x} = +\infty \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \ln x}{x} = 0 \end{cases} \text{ : لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty (\diamond)$$

$$\cdot \text{ حساب } f'(x) : f'(x) = -1 - 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} (\diamond)$$

نلاحظ أنه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖ جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) لدينا : $y = -x + 5$: (Δ) ، لنحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln x}{x} = 0$.

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $[f(x) - (-x + 5)]$ ، أي : ندرس إشارة : $-2 \frac{\ln x}{x}$.

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ الإشارة من إشارة $(-2 \ln x)$.

❖ نعلم أن : $\ln x \leq 0$ من أجل كل $x \in]0; 1]$ و $\ln x \geq 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$.

❖ إذن : الوضعية تكون كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$-2 \ln x$		+	—
الوضعية	(C) يقع فوق (Δ)		(C) يقع تحت (Δ)
	(C) يقطع (Δ) في النقطة $A(1; 4)$		

(4) الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $[4, 3; 4, 4]$ و $\begin{cases} f(4, 3) = 0, 2 \\ f(4, 4) = -0, 07 \end{cases}$ ، أي : $f(4, 4) < 0 < f(4, 3)$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $4, 3 < \alpha < 4, 4$.
وعليه : المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

ب) تبرير أن : $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$.

لدينا : $f(\alpha) = 0$ ، أي : $-\alpha + 5 - 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$ ، أي : $-\alpha + 5 = 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ ، أي : $-2 \ln \alpha = \alpha^2 - 5\alpha$ ،

أي : $\ln \alpha = \frac{\alpha^2 - 5\alpha}{-2}$ ، أي : $\ln \alpha = \frac{-(-\alpha^2 + 5\alpha)}{-2}$ ، ومنه : $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 + 5\alpha}{2}$ ، وهو المطلوب .

(5) المماس يوازي المستقيم (Δ) معناه أن لهما نفس معامل التوجيه الذي هو : -1 .

أي نحل المعادلة : $f'(x) = -1$ ، أي : $\frac{-x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} = -1$ ، أي : $-x^2 - 2 + 2 \ln x = -x^2$ ، أي :

$-2 + 2 \ln x = 0$ ، أي : $2 \ln x = 2$ ، أي : $\ln x = 1$ ، ومنه : $x = e$.

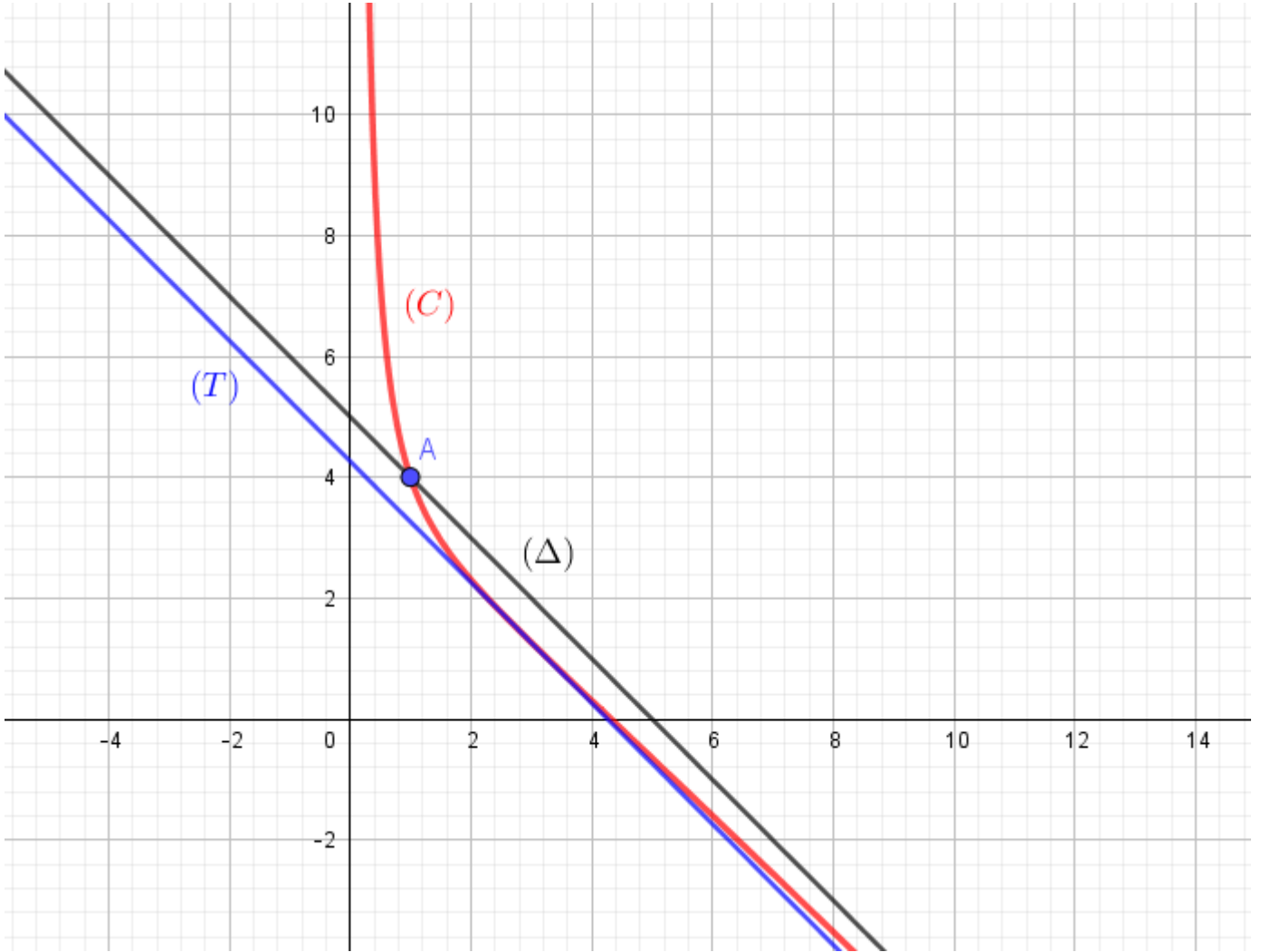
إذن : يوجد مماس للمنحني (C) و يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة e .

❖ كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : (T) : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ ، أي : (T) : $y = -(x - e) + (-e + 5 - 2\frac{\ln e}{e})$ ،

أي : (T) : $y = -x + e - e + 5 - \frac{2}{e}$ ، ومنه : (T) : $y = -x + 5 - \frac{2}{e}$.

(6) الإنشاء :



(7) لدينا المعادلة : $(5 - m)x - 2\ln x = 0$ ، أي : $(5 - m)x = 2\ln x$ ، أي : $5 - m = \frac{2\ln x}{x}$ ، (نضرب في (-1))

أي : $-5 + m = -\frac{2\ln x}{x}$ ، نضيف $(-x + 5)$ نجد : $-x + m = -x + 5 - \frac{2\ln x}{x}$ ومنه : $f(x) = -x + m$

إذن : عدد حلول هذه المعادلة هي عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة : $y = -x + m$. أي أن المناقشة تكون كما يلي :

❖ $m \in \left] -\infty; 5 - \frac{2}{e} \right[$ ، المعادلة لا تقبل حلول
❖ $m = 5 - \frac{2}{e}$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : e .

❖ $m \in \left] 5 - \frac{2}{e}; 5 \right[$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين
❖ $m = 5$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : 1 .

❖ $m \in \left] 5; +\infty \right[$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا .

حل المسألة رقم 02

لدينا : $f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$.

(1) أ) حساب نهايات الدالة f :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } : \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 2) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

ب) حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$\cdot f'(x) = \ln(x + 2) + \frac{x}{x + 2} \text{ أي } : f'(x) = \ln(x + 2) + \frac{1}{x + 2} \times x \quad (\diamond)$$

$$\cdot f''(x) = \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{(x + 2)^2} > 0 \text{ أي } : f''(x) = \frac{1}{x + 2} + \frac{(x + 2) - x}{(x + 2)^2} \quad (\diamond)$$

ج) حساب نهايات الدالة f' :

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x}{x + 2} \right) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } : \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x + 2} \right) = 1 \end{cases} \text{ لأن } : \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

د) دراسة تغيّرات الدالة f' :

(\diamond) بما أنّ على المجال $]-2; +\infty[$ تكون $f''(x) > 0$ ، إذن الدالة f' متزايدة تماما على $]-2; +\infty[$.
(\diamond) جدول التغيّرات :

x	-2	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ) الدالة f' مستمرة ورتيبة على المجال $[-0,6; -0,5]$ و $\begin{cases} f(-0,6) = -\dots \\ f(-0,5) = +\dots \end{cases}$ أي : $f(-0,6) < 0 < f(-0,5)$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,6; -0,5[$.
ب) إشارة $f'(x)$:

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	+

ج) حسب إشارة $f'(x)$ تكون : f متناقصة على $]-2; \alpha[$ و متزايدة على $[\alpha; +\infty[$.

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) أ) لدينا معادلة المماس (T_{x_0}) تكون : $(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

بما أنّ المماس (T_{x_0}) يمرّ بالمبدأ O فسيكون : $0 = f'(x_0)(-x_0) + f(x_0)$.

لنقوم بالتعويض والحساب : $0 = f'(x_0)(-x_0) + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2)$ ، أي ، $\left[\ln(x_0 + 2) + \frac{x_0}{x_0 + 2} \right](-x_0) + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = 0$:

$$: \text{أي ، } \frac{x_0^2}{x_0 + 2} = 1 : \text{أي ، } -\frac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 = 0 : \text{أي ، } -x_0 \ln(x_0 + 2) - \frac{x_0^2}{x_0 + 2} + 1 + x_0 \ln(x_0 + 2) = 0$$

$$. x_0 = 2 \text{ أو } x_0 = -1 : \text{ومنه : } x_0^2 - x_0 - 2 = 0 : \text{أي ، } x_0^2 = x_0 + 2$$

(ب) مما سبق نستنتج أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالمبدأ حيث :

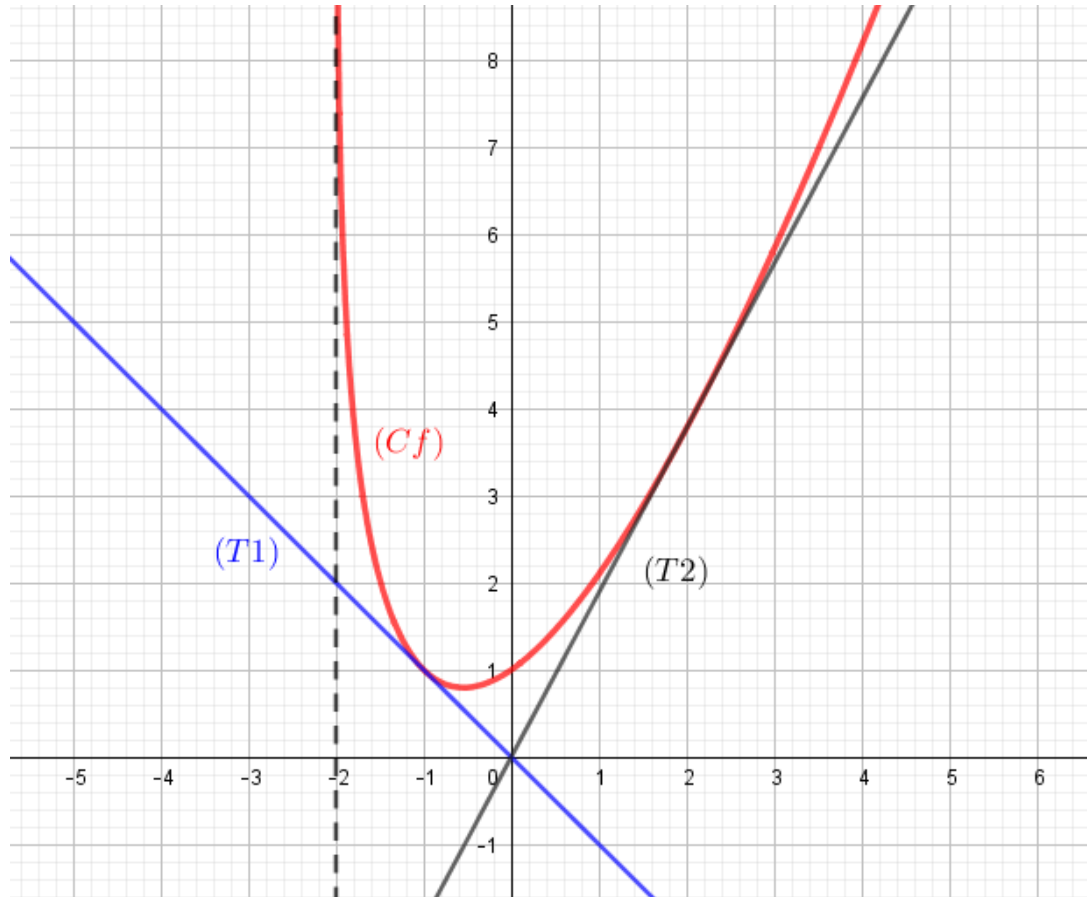
❖ المماس (T_{-1}) يمس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة -1 .

❖ المماس (T_2) يمس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

- معادلة المماس (T_{-1}) : $(T_{-1}) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ ، ومنه : $(T_{-1}) : y = -x$.

- معادلة المماس (T_2) : $(T_2) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ ، ومنه : $(T_2) : y = (\ln 4 + \frac{1}{2})x$.

(4) الإنشاء :



(5) لدينا المعادلة: $f(x) = mx$. (مناقشة دورانية)

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ ، الذي يمرّ بالمبدأ O ❖
(لا ننسى أنّ المماسين (T_{-1}) و (T_2) يمرّان أيضاً بالمبدأ O .
إذن المناقشة تكون كما يلي :

❖ إذا كان : $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ أو $m < -1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلان متميزان .

❖ إذا كان : $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ أو $m = -1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل وحيد .

❖ إذا كان : $-1 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ ، فإنّ : المعادلة لا تقبل حلول .

كتابة الأستاذ : به.ع

حل المسألة رقم 03

الجزء الأول : $g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$.

(1) حساب نهايات الدالة g .

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty (\diamond)$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

(\diamond) حساب $g'(x)$: $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
(\diamond) جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) (أ) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$ ، و صورة هذا المجال هي $]-\infty; +\infty[$ ، ولدينا :

$0 \in]-\infty; +\infty[$ ، إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0; +\infty[$

(ب) لدينا : $\begin{cases} g(0,45) = 0,02 \\ g(0,46) = -0,04 \end{cases}$ أي : $g(0,46) < 0 < g(0,45)$ ، ومنه : $0,45 < \alpha < 0,46$.

(ج) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	$\circ$	-

الجزء الثاني :

(1) حساب نهايات الدالة f : لدينا $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$.

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty (\diamond)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}} = 0 \end{cases} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}\right) = 0 (\diamond)$$

❖ التفسير الهندسي: المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب هو حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$ ، ويقبل مستقيم مقارب هو حامل محور الترتيب بجوار $-\infty$.

(2) إتجاه تغير الدالة f :

❖ حساب $f'(x)$: $f'(x) = -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{1}{x} \times e^{-x} = e^{-x}(-3 - \ln x + \frac{1}{x})$

ومنه: $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$. إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖ جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

(3) لنبين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^\alpha}$.

❖ نعلم أن: $g(\alpha) = 0$ ، أي: $-3 - \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0$ ، ومنه: $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha} - 3$.

❖ لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha) = e^{-\alpha}(3 + \ln \alpha) = e^{-\alpha}(3 + \frac{1}{\alpha} - 3) = e^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha}$

❖ حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $0,45 < \alpha < 0,46$ ، أي: $1,56 < e^\alpha < 1,58$ ، أي: $0,70 < \alpha e^\alpha < 0,72$ ، أي:

ومنه: $\frac{1}{0,72} < \frac{1}{\alpha e^\alpha} < \frac{1}{0,70}$ ، $1,38 < f(\alpha) < 1,42$.

(4) تعيين نقطة تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل:

أي نحل المعادلة: $f(x) = 0$ ، أي: $e^{-x}(3 + \ln x) = 0$ ، أي: $3 + \ln x = 0$ ، $(e^{-x} \neq 0)$.

أي: $\ln x = -3$ ، ومنه: $x = e^{-3}$. إذن: $(C) \cap (xx') = \{A(e^{-3}; 0)\}$.

(5) الإنشاء:



(6) لدينا : $h(x) = \frac{|3 + \ln x|}{e^x}$

أ) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

ومنه :
$$\begin{cases} h(x) = \frac{3 + \ln x}{e^x} \dots x \geq e^{-3} \\ h(x) = -\frac{3 + \ln x}{e^x} \dots x < e^{-3} \end{cases}$$

ب) إذن المنحني (C_h) ينطبق على (C) في المجال $[e^{-3}; +\infty[$ ، والمنحني (C_h) يناظر المنحني (C) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل في المجال $] -\infty; e^{-3}[$.

ج) الإنشاء :



كتابة الأستاذ : ب. ع

حل المسألة رقم 04

الجزء الأول : $g(x) = x \ln x - x - 1$.

(1) حساب نهايات الدالة g :

❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$ ، لأنّ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

❖ حساب $g'(x)$: $g'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: ومنه : $g'(x) = \ln x$.

❖ جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		○	+
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

(3) (أ) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[3,5; 3,6]$ و $\begin{cases} g(3,5) = -0,11 \\ g(3,6) = 0,01 \end{cases}$ أي : $g(3,5) < 0 < g(3,6)$.

إذن : حسب مبرهن القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$.

(ب) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		○	+

الجزء الثاني : $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$.

(1) حساب نهايات الدالة f :

❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty$ ، لأنّ : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل حامل محور الترتيب كمقارب بجوار $+\infty$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، لأنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\ln x}{x+1}) = 1$ ، علماً أنّ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} = 0$.

التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = 1$.

(2) حساب $f'(x)$: $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = -\frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = -\frac{\frac{x+1 - x \ln x}{x}}{(x+1)^2}$: أي ،

· $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$: ومنه : $f'(x) = -\frac{x+1 - x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{x \ln x - x - 1}{x(x+1)^2}$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، لأنّ : $x(x+1)^2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.
 (❖) جدول التغيّرات :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		○	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	1

(3) لنبيّن أنّ : $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$.

(❖) نعلم أنّ : $g(\alpha) = 0$ ، أي : $\alpha \ln \alpha - \alpha - 1 = 0$ ، أي : $\alpha \ln \alpha = \alpha + 1$ ، ومنه : $\ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha}$.

(❖) لنحسب $f(\alpha)$: $f(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha + 1} = 1 - \frac{\frac{\alpha + 1}{\alpha}}{\alpha + 1} = 1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ومنه : $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$.

(❖) حصر $f(\alpha)$: لدينا : $3,5 < \alpha < 3,6$ ، أي : $\frac{1}{3,6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3,5}$ ، أي : $-\frac{1}{3,5} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{3,6}$ ، أي :

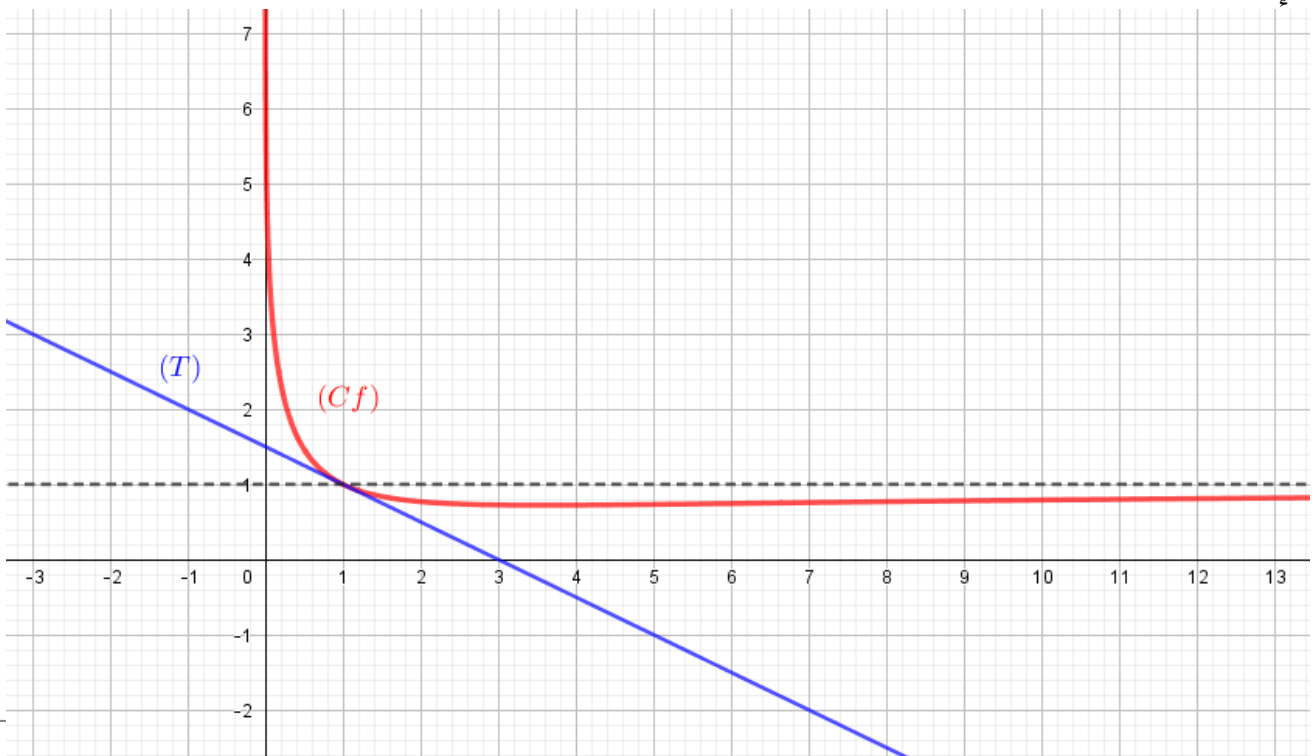
$$1 - \frac{1}{3,5} < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{1}{3,6} . \text{ ومنه : } 0,71 < f(\alpha) < 0,72$$

(4) كتابة معادلة المماس (T) :

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ، أي : } (T) : y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

$$(T) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ ، ومنه : } (T) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1$$

(5) الإنشاء :



الجزء الثالث : $(D_m) : y = mx + \frac{3}{2}$.

(1) بالتعويض نجد : $y = m(0) + \frac{3}{2}$ ، أي : $y = \frac{3}{2}$ ، إذن : $A \in (D_m)$.

(2) لدينا المعادلة : $y = mx + \frac{3}{2}$.

عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (D_m) ، حيث هذا الأخير يمر بالنقطة الثابتة A .
- المناقشة تكون كما يلي :

❖ إذا كان : $m \geq 0$ أو $m = -\frac{1}{2}$ ، فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

❖ إذا كان : $-\frac{1}{2} < m < 0$ ، فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

❖ إذا كان : $m < -\frac{1}{2}$ ، فإن المعادلة لا تقبل حلول .

الجزء الرابع : $h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$.

(1) لدينا : $h(x) + 1 = -\frac{\ln(x-1)}{x} + 1$ ، أي : $h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x}$ ، هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا : $f(x-1) = 1 - \frac{\ln(x-1)}{(x-1)+1}$ ، أي : $f(x-1) = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x}$.

إذن : $f(x-1) = h(x) + 1$.

(2) لدينا : $f(x-1) = h(x) + 1$ ومنه : $h(x) = f(x-1) - 1$.

إذن : المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بواسطة الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}_{(-1)}$.

الجزء الخامس : $k(x) = 1 - \frac{\ln|x|}{|x|+1}$.

(1) بيان أن الدالة k زوجية :

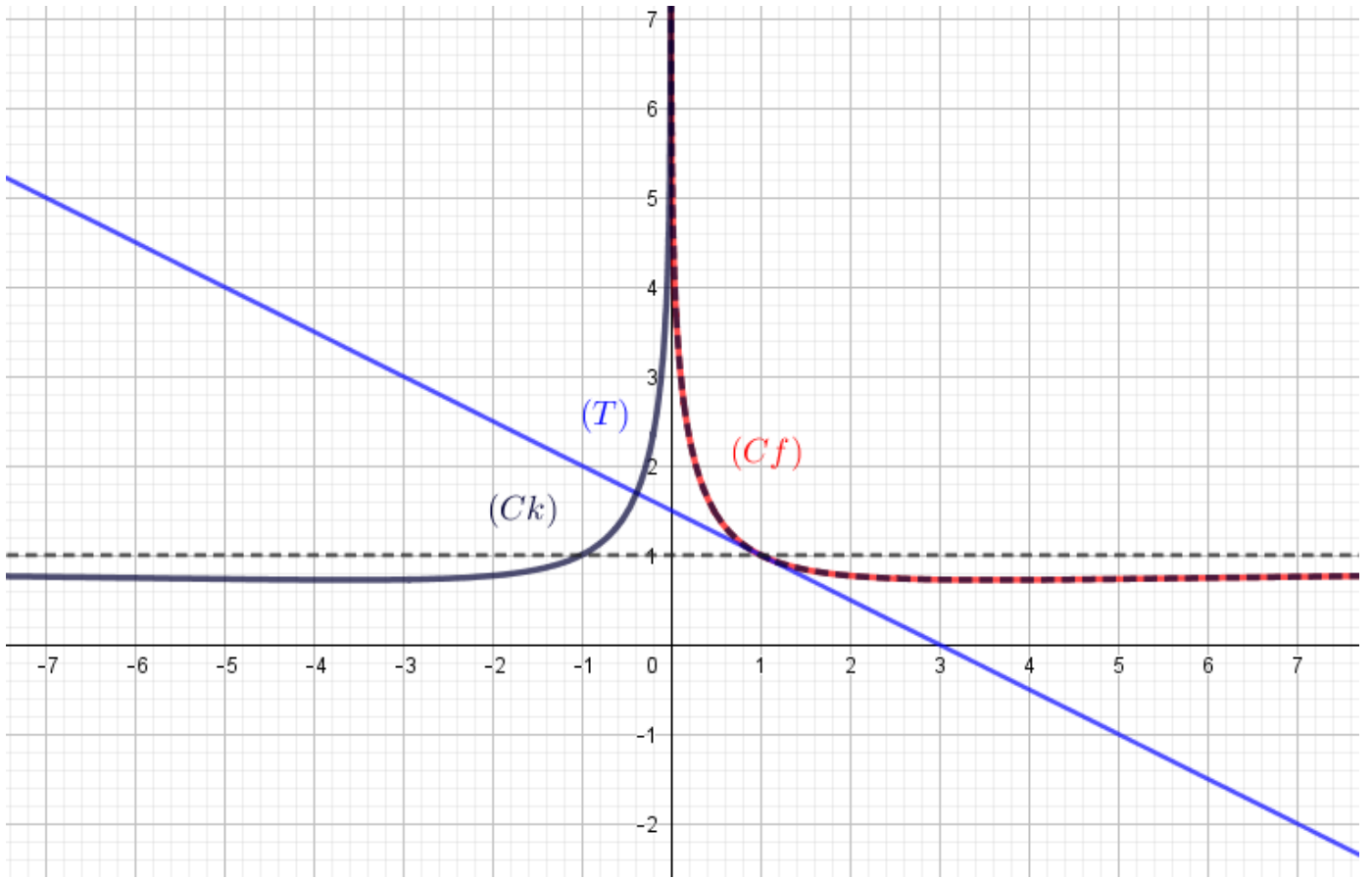
❖ الصفر مركز $\mathbb{R}^*$.

❖ $k(-x) = 1 - \frac{\ln|-x|}{|-x|+1} = 1 - \frac{\ln|x|}{|x|+1} = k(x)$ ، لأن : $|-x| = |x|$.

إذن : الدالة k زوجية .

(2) لما يكون : $x > 0$ ، فإن : $|x| = x$ ، إذن : $k(x) = 1 - \frac{\ln x}{x+1}$ ، أي : $k(x) = f(x)$.

أي نقول أن المنحني (C_k) ينطبق على (C_f) في المجال $]0; +\infty[$ ، ثم نتمم إنشاء المنحني (C_k) بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .



حل المسألة رقم 05

الجزء الأول : $g(x) = x + 1 + \ln x$.

(1) حساب نهايات الدالة g :

❖ $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$.

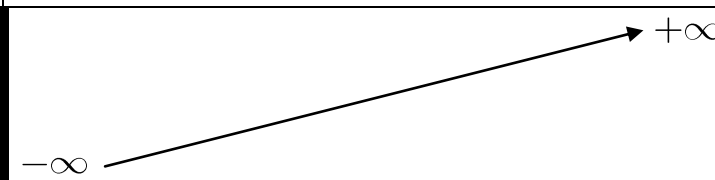
❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$.

(2) إتجاه تغير الدالة g :

❖ حساب $g'(x)$: $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ، نلاحظ أنه من أجل $x \in]0; +\infty[$ تكون : $g'(x) > 0$.

أي : الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

❖ جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$		

(3) أ) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[0, 2; 0, 3]$ و $\begin{cases} g(0,2) = -\dots \\ g(0,3) = +\dots \end{cases}$ ، أي : $g(0,2) < 0 < g(0,3)$

و منه : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 0,2 و 0,3 .

ب) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	$\circ$	+

الجزء الثاني : $h(x) = x \ln x + \frac{1-x^2}{2}$.

حساب : $h'(x)$ و $h''(x)$:

❖ $h'(x) = \ln x + 1 - x$ ، و منه : $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - \frac{2x}{2}$.

❖ $h''(x) = \frac{1-x}{x}$ ، و منه : $h''(x) = \frac{1}{x} - 1$.

(2) نلخص إتجاه تغير الدالة h' في

الجدول التالي :

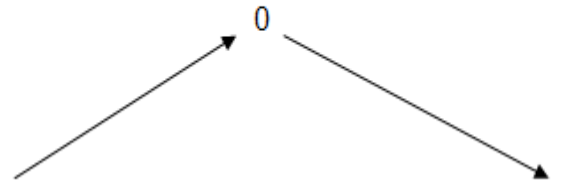
❖ نلاحظ أن الدالة h' تقبل قيمة

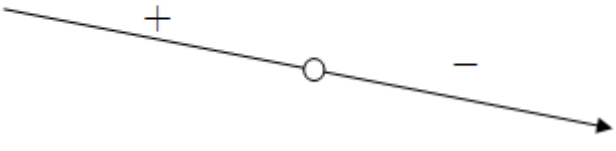
حدية كبرى هي 0 ، و منه :

$h'(x) \leq 0$ على $]0; +\infty[$.

إذن الدالة h متناقصة على المجال

$]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$h''(x)$	+	$\circ$	-
$h'(x)$			

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$\circ$	$-$
$h(x)$			

$$h(1) = 0$$

❖ إشارة $h(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$+$	$\circ$	$-$

$$\cdot \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}; \dots (x > 0) \end{cases} \quad \text{الجزء الثالث :}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{x \ln x}{x+1}}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{x+1} \right] = -\infty \quad \begin{cases} -\infty \\ 1 \end{cases} \quad (1) \text{ حساب :}$$

إذن : نقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

❖ التفسير الهندسي : المنحني (C) يقبل مماساً موازياً لحامل محاور الترتيب عند المبدأ O .

(2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x+1} \times \ln x \right] = +\infty \quad (❖)$$

(3) من أجل كل $x > 0$ تكون :

$$\cdot f'(x) = \frac{(\ln x - \frac{1}{x} \times x)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \quad \text{ومنه :} \quad f'(x) = \frac{x \ln x + \ln x + x + 1 - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

❖ جدول التغيرات :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) لنبين أن: $f(\alpha) = -\alpha$.

نعلم أن: $g(\alpha) = 0$ ، أي: $\alpha + 1 + \ln \alpha = 0$ ، ومنه: $\ln \alpha = -\alpha - 1$.

$$\diamond \text{ لنحسب } f(\alpha) : f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha + 1} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{\alpha + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{\alpha + 1} : f(\alpha) = -\alpha \text{، ومنه: } f(\alpha) = -\alpha$$

الجزء الرابع:

لدينا من أجل كل $x > 0$: $\varphi(x) = f(x) - \ln x$.

(1) حساب نهاية $\varphi(x)$ عند $+\infty$:

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{x+1} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x - x \ln x - \ln x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x+1}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 : \text{ إذن، } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{-\ln x}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0$$

$\diamond$ التفسير الهندسي: المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ والمنحني (C) يكونان متقاربين بجوار $+\infty$.

(ب) إشارة $\varphi(x)$: نلاحظ أن إشارة $\varphi(x)$ من إشارة $\frac{-\ln x}{x+1}$.

سنلخص الإشارة والوضعية في الجدول التالي: (التفسير الهندسي لإشارة $\varphi(x)$).

ملاحظة: (Γ) هو المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
الوضعية	(C) يقع فوق (Γ)		(C) يقع تحت (Γ)
	(C) يقطع (Γ) في النقطة $A(1; 0)$		

(2) كتابة معادلة المماس (T) :

$$\cdot (T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{، ومنه: } (T): y = \frac{1}{2}(x-1) + 0 \text{، أي: } (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

(3) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (T) :

$$\cdot \text{ أي: ندرس إشارة الفرق: } f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\cdot f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = \frac{x \ln x}{x+1} - \frac{x-1}{2} = \frac{x \ln x}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1} \left[x \ln x - \frac{x^2-1}{2} \right]$$

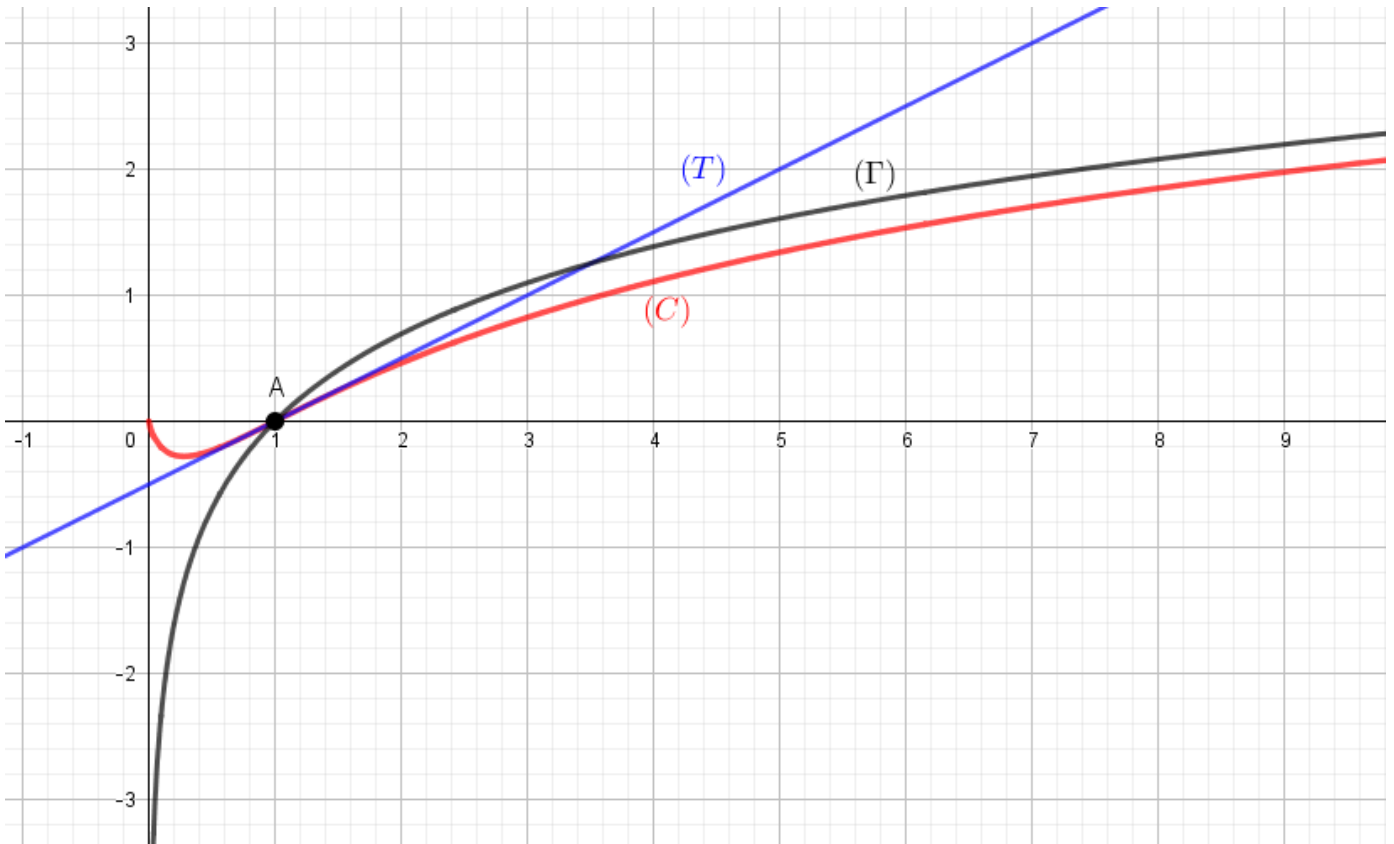
$$\cdot \text{ أي: } f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{x+1} \times h(x) \text{، ومنه: } f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{x+1} \left[x \ln x + \frac{1-x^2}{2} \right]$$

إذن: نستنتج أن إشارة الفرق من إشارة $h(x)$.

نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	+		
الوضعية	(C) يقع فوق (T)		(C) يقع تحت (T)
	(C) يخترق (T) في النقطة $A(1;0)$		

(4) الإنشاء :



(5) لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل الذي معادلته : $y = f(m)$. إذن المناقشة تكون كما يلي :

❖ إذا كان : $m \in [0; \alpha[\cup]\alpha; 1]$ ، فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

❖ إذا كان : $m = \alpha$ أو $m > 1$ ، فإن المعادلة تقبل حلا واحداً .

حل مختصر للدالة اللوغاريتمية رقم 06

الجزء الأول: $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)^2$

(1) حساب النهايات :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} -\ln(x-1)^2 = +\infty \end{array} \right. \cdot \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

المستقيم ذو المعادلة: $x = 1$ مقارب موازي لحامل محاور الترتيب للمنحني (C_g) بجوار $+\infty$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x-1)^2 = -\infty \end{array} \right. \cdot \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$\diamond \text{ الدالة المشتقة: } g'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} \text{ ، أي: } g'(x) = \frac{-x-1}{x-1}.$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x > 1$ تكون: $g'(x) < 0$ ، ومنه: الدالة g متناقصة تماما على $]1; +\infty[$.

(\diamond) جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) حساب $g(2)$:

$g(2) = 0$ ، سنلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	1	2	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-

(4) لدينا: $|g(x)| = 1$ تكافئ: $g(x) = 1$ ، أو $g(x) = -1$.

(\diamond) على المجال $]1; 2]$ ، الدالة g مستمرة ورتيبة ، وصورة هذا المجال هي $]0; +\infty[$ ، و $1 \in]0; +\infty[$ ،

إذن المعادلة: $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1; 2]$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة).

(\diamond) على المجال $]2; +\infty[$: الدالة g مستمرة ورتيبة ، وصورة هذا المجال هي $] -\infty; 0]$ ، و $-1 \in] -\infty; 0]$ ،

إذن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا β من المجال $]2; +\infty[$ ، (حسب مبرهنة القيم المتوسطة).

$$\diamond \text{ نحسب: } \left\{ \begin{array}{l} g(1,70) = \dots \\ g(1,71) = \dots \end{array} \right. \text{ ومنه: } 1,70 < \alpha < 1,71 \text{ ، } \left\{ \begin{array}{l} g(2,37) = \dots \\ g(2,38) = \dots \end{array} \right. \text{ ومنه: } 2,37 < \beta < 2,38.$$

(5) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيبية 1 ، أي عند النقطة $A(\alpha;1)$:

$$(\Delta) : y = g'(\alpha)(x - \alpha) + g(\alpha) \text{ ، أي : } y = \frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha) + 1$$

$$\text{ومنه : } (\Delta) : y = \frac{-\alpha - 1}{\alpha - 1}x + \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} + 1$$

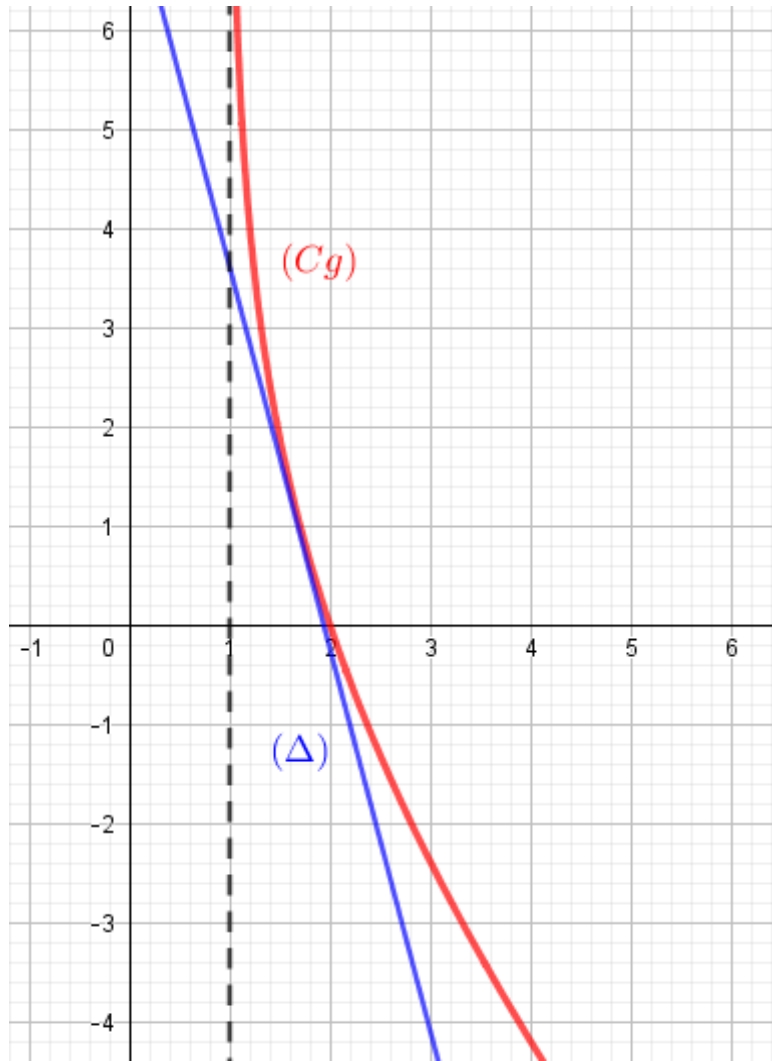
$$\text{❖ حصر العدد : } \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1}$$

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $2,89 < \alpha^2 < 2,92$ ، أي : $4,59 < \alpha^2 + \alpha < 4,63$(1)

لدينا : $1,70 < \alpha < 1,71$ ، أي : $0,70 < \alpha - 1 < 0,71$ ، أي : $\frac{1}{0,71} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0,70}$(2)

بضرب (1) في (2) نجد : $\frac{4,59}{0,71} < \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} < \frac{4,63}{0,70}$ ، ومنه : $6,46 < \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha - 1} < 6,61$

ب) إنشاء (Δ) والمنحني (C_g) :



ج) المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $x > 1$: $2 - 2\ln(x - 1) = \frac{-2}{\alpha - 1}x + m$ ،

$$\text{أي : } 2 - x - 2\ln(x - 1) = \frac{-2}{\alpha - 1}x - x + m$$

أي : $g(x) = \left(\frac{-2}{\alpha-1} - 1\right)x + m$ ، ومنه : $g(x) = \left(\frac{-\alpha-1}{\alpha-1}\right)x + m$.

ولدينا : $y = \frac{-\alpha-1}{\alpha-1}x + \underbrace{\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} + 1}_m + 1$ ، ومنه المناقشة تكون كالتالي :

❖ إذا كان : $m > \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} + 1$ فإن المعادلة تقبل حلين متميزين .

❖ إذا كان : $m = \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} + 1$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد .

❖ إذا كان : $m < \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} + 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

الجزء الثاني : $f(x) = [x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$ (1) نعلم أن :

، $[g(x)]^2 - 1 = [g(x)-1][g(x)+1] = [2-x-\ln(x-1)]^2 - 1 = [2-x-\ln(x-1)]^2 + 1$
 ومنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فإن : $[g(x)]^2 - 1 = [1-x-2\ln(x-1)][3-x-2\ln(x-1)]$
 وبحكم : $(-a) \times (-b) = a \times b$ ، أي : $[g(x)]^2 - 1 = [x-1+2\ln(x-1)][x-3+2\ln(x-1)]$.
 وعليه : $f(x) = [g(x)]^2 - 1$.

(2) حساب النهايات : (نستعمل الشكل : $f(x) = [g(x)]^2 - 1$)

❖ $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [g(x)]^2 - 1 = +\infty$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$: لأن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]^2 - 1 = +\infty$.

(3) حساب $f'(x)$ من أجل كل عددي حقيقي من $]1; +\infty[$: (نستعمل الشكل : $f(x) = [g(x)]^2 - 1$)
 ، ومنه : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x) \times g'(x)$.

x	1	2	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-
$g'(x)$	-		-
$g(x) \times g'(x)$	-	○	+

(ب) الدالة f متناقصة على المجال $]1; 2[$ ، و متزايدة على المجال $]2; +\infty[$.

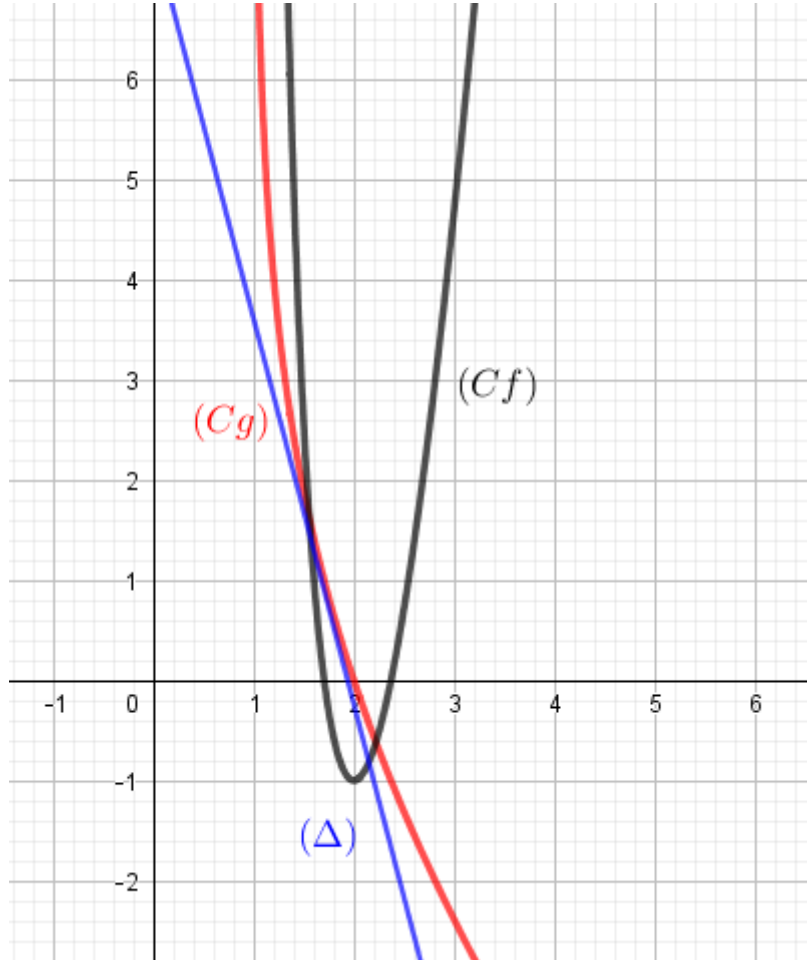
❖ جدول التغيرات :

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(4) نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = 1 \\ g(x) = -1 \end{array} \right. \text{ ونمته : } [g(x)]^2 = 1 \text{ ، أي : } [g(x)]^2 - 1 = 0 \text{ ، أي : } f(x) = 0$$

و عليه : $x = \alpha$ ، أو $x = \beta$. إذن : (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين : $A(\alpha; 0)$ و $B(\beta; 0)$.
❖ الإنشاء :



(5) لدينا : $h(x) = (\cos x + 2 \ln \cos x)(-2 + \cos x + 2 \ln \cos x)$.

(أ) نلاحظ أن : $h(x) = f(1 + \cos x)$ ، ومنه : $h = f \circ u$ ، حيث : $u(x) = 1 + \cos x$.

(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{❖ حساب النهاية : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(1 + \cos x) = +\infty \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

❖ التفسير الهندسي : المنحني (Γ) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الترتيب معادلته : $x = \frac{\pi}{2}$.

❖ إستنتاج إتجاه تغير الدالة h : لدينا $h(x) = f(1 + \cos x)$.

- من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، يكون : $0 < \cos x \leq 1$ ، أي : $1 < 1 + \cos x \leq 2$ ، ومنه : $1 + \cos x \in]1; 2]$.

والدالة f متناقصة على $]1;2]$.

- ومن جهة أخرى لدينا الدالة $x \mapsto 1 + \cos x$ متناقصة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ومنه: الدالة h متزايدة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، وذلك حسب مبرهنة إتجاه تغيّر دالة مركبة.

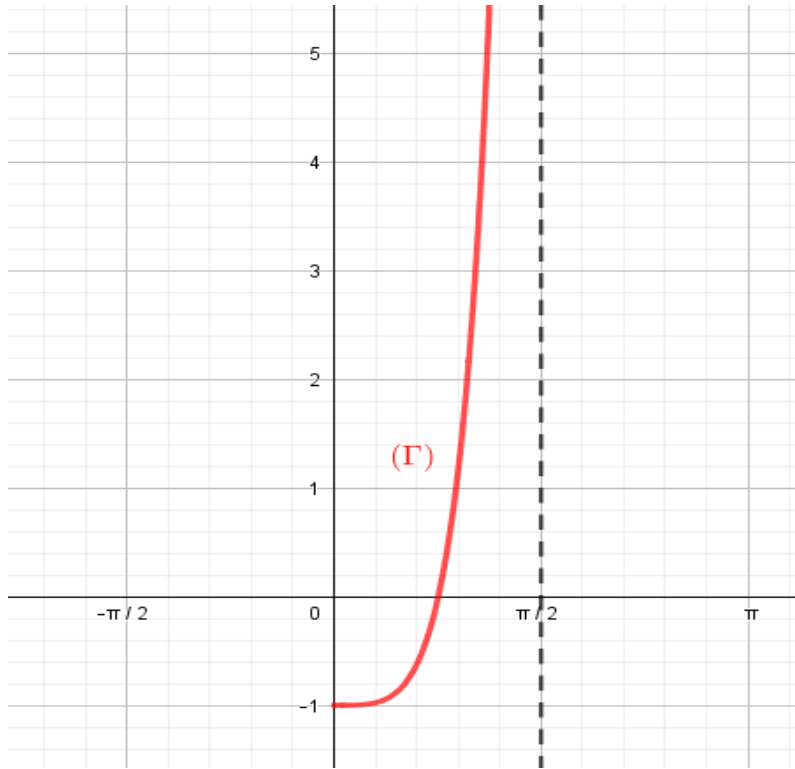
(ج) جدول التغيرات للدالة h :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	-1	$+\infty$

❖ $h(0) = f(1 + \cos(0))$ ، أي:

$$h(0) = f(2) = -1$$

❖ الإنشاء:



كتابة الأستاذ: ب.ع

حل المسألة رقم 07

لدينا : $f(x) = x + 1 + 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

(1) حساب نهايات الدالة f و تفسير النتائج هندسياً :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \text{ و } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} 2 \ln(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 0 \text{ : لأن } , \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ و } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} 2 \ln(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 0 \text{ : لأن } , \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} -2} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 0^+ \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} 2 \ln(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \xrightarrow{>} -2} 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = -\infty \text{ : لأن } , \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(\frac{x+2}{x+1}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \xrightarrow{>} -1} 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = +\infty \text{ : لأن } , \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

(\diamond) التفسير الهندسي :

المنحني (C_f) يقبل مستقيمان موازيان لحامل محور الفواصل معادلتهما : $x = -2$ و $x = -1$ بجواري $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

$$(2) \text{ ا } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = 0 \text{ : نحسب :}$$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجواري $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق : } f(x) - (x+1) = 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$$(\diamond) \text{ نقارن بين : } \left(\frac{x+2}{x+1}\right) \text{ و } 1 \text{ ، أي : } \frac{x+2}{x+1} - 1 = \frac{x+2-x-1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$	$\circ$	$+$

نعلم أن :

إذن الوضعية تكون كما يلي :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}$	$-$			$+$
$2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$	$-$			$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)			(C_f) يقع فوق (Δ)

(3) لنبين أن النقطة K هي مركز التناظر للمنحني (C_f) :

❖ أولاً : العدد $-\frac{3}{2}$ هو مركز D_f .

❖ ثانياً : لنبين أن : $f(2a-x) + f(x) = 2b$ ، حيث : $a = -\frac{3}{2}$ و $b = -\frac{1}{2}$ ، أي : $f(-3-x) + f(x) = -1$

أي : $f(-3-x) + f(x) = (-3-x) + 1 + 2\ln\left(\frac{-3-x+2}{-3-x+1}\right) + x + 1 + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ ، أي :

$f(-3-x) + f(x) = -1 + 2\ln\left(\frac{-x-1}{-x-2}\right) + 2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ ، أي :

$f(-3-x) + f(x) = -1 + 2\left[\ln\left(\frac{-x-1}{-x-2}\right) + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right]$ ، أي : $f(-3-x) + f(x) = -1 + 2\left[\ln\left(\frac{-x-1}{-x-2} \times \frac{x+2}{x+1}\right)\right]$

أي : $f(-3-x) + f(x) = -1 + 2 \times 0$ ، ومنه : $f(-3-x) + f(x) = -1$ ، وهو المطلوب .

إذن : النقطة $K\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ هي مركز التناظر للمنحني (C_f) .

(4) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

❖ نحسب $f'(x)$: $f'(x) = 1 + 2 \times \frac{\frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}}{\frac{x+2}{x+1}} = 1 + 2 \times \frac{-1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x+2}$ ، أي :

$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+2) - 2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x + x + 2 - 2}{(x+1)(x+2)}$ ،

ومنه : $f'(x) = \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x+2)}$. إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن : $(x+1)(x+2) > 0$.

نلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$(x^2 + 3x)$	$+$	$\circ$	$\circ$	$+$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-3)$			$f(0)$	$+\infty$

$$f(-3) = -2 - 4 \ln 2 \quad (\diamond)$$

$$f(0) = 1 + 2 \ln 2 \quad (\diamond)$$

(5) معامل التوجيه هو: $\frac{2}{3}$ ، أي نحل المعادلة: $f'(x) = \frac{2}{3}$.

$$\text{أي: } \frac{x^2 + 3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{3}, \text{ أي: } 3x^2 + 9x = 2(x+1)(x+2), \text{ أي: } 3x^2 + 9x = 2x^2 + 2x + 4x + 4$$

$$\text{ومنه: } x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ إذن: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \end{cases}, \text{ و عليه يوجد مماسين معامل توجيه كل منهما هو } \frac{2}{3}.$$

❖ لنكتب معادلة كل منهما :

(1) المماس الأول عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

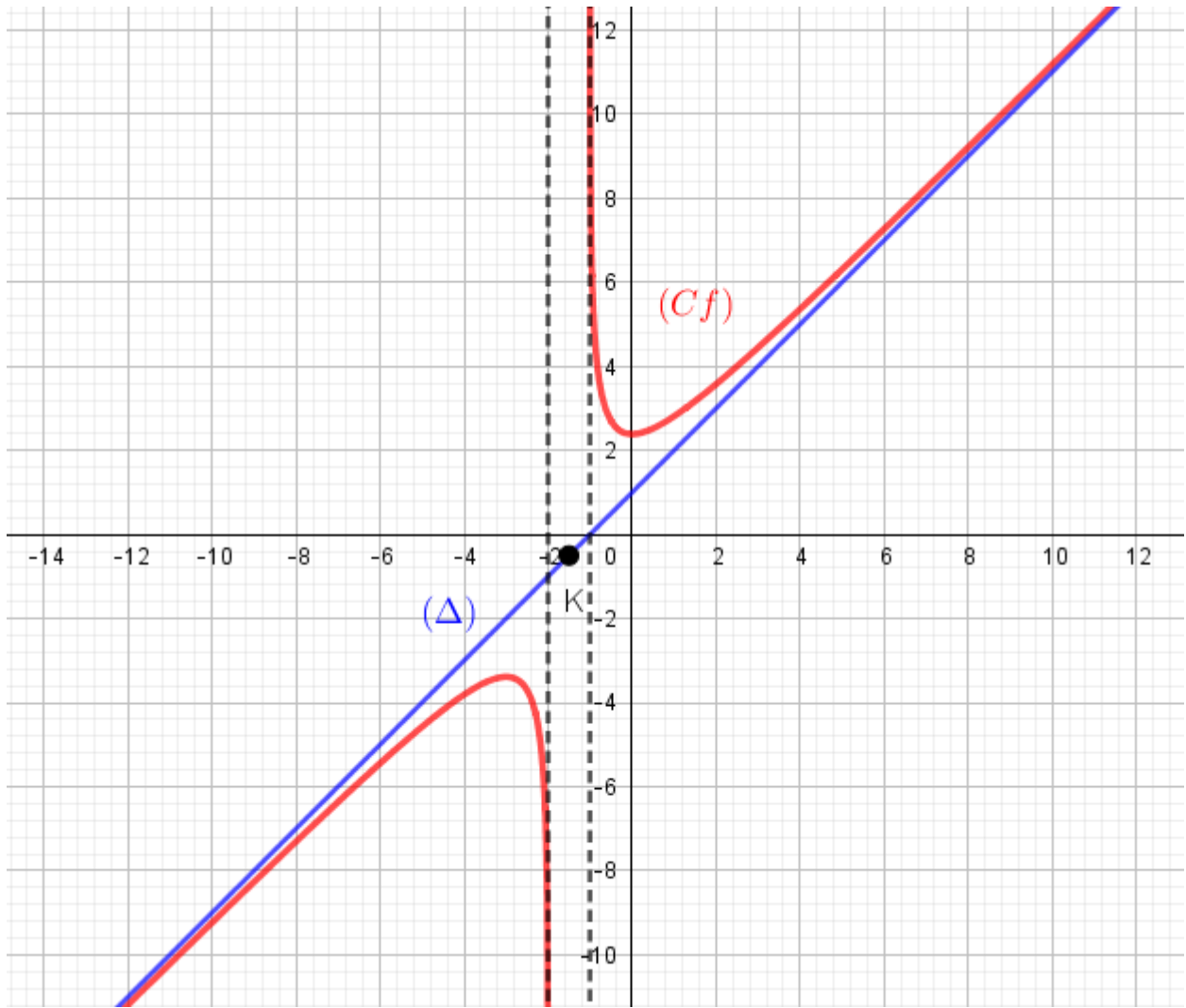
$$(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1), \text{ أي: } (T_1): y = \frac{2}{3}(x-1) + 2 + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{أي: } (T_1): y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2 + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right), \text{ ومنه: } (T_1): y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

(2) المماس الأول عند النقطة ذات الفاصلة -4 :

$$(T_2): y = f'(-4)(x+4) + f(-4), \text{ أي: } (T_2): y = \frac{2}{3}(x+4) - 3 + 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{أي: } (T_2): y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - 3 + 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right), \text{ ومنه: } (T_2): y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$



(7) لدينا من أجل كل $m > 0$ والمعادلة: $2 \ln\left(\frac{mx + m}{x + 2}\right) = x + 1$.

$$\text{أي: } 2 \ln\left[\frac{m(x+1)}{x+2}\right] = x+1 \text{ ، أي: } 2 \ln m + 2 \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = x+1 \text{ ، أي: } 2 \ln m = x+1 - 2 \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\text{نعلم أن: } \ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a} \text{ ، ومنه: } 2 \ln m = x+1 + 2 \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

إذن المعادلة تصبح من الشكل: $f(x) = 2 \ln m$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = 2 \ln m$. و عليه فإن المناقشة تكون كما يلي :

❖ إذا كان: $2 \ln m < -2 - 4 \ln 2$ ، أي: $\ln m < -1 - 2 \ln 2$ ، أي: $m < e^{-1-2 \ln 2}$.
فإن: المعادلة تقبل حلين سالبين .

❖ إذا كان: $2 \ln m = -2 - 4 \ln 2$ ، أي: $m = e^{-1-2 \ln 2}$ ، فإن: المعادلة تقبل حل واحد سالب هو -3 .

❖ إذا كان: $-2 - 4 \ln 2 < 2 \ln m < 1 + 2 \ln 2$ ، أي: $e^{-1-2 \ln 2} < m < e^{\frac{1+2 \ln 2}{2}}$ ، فإن: المعادلة لا تقبل حلول .

❖ إذا كان: $2 \ln m = 1 + 2 \ln 2$ ، أي: $m = e^{\frac{1+2 \ln 2}{2}}$ ، فإن: المعادلة تقبلا حل واحد معدوم .

❖ إذا كان: $2 \ln m > 1 + 2 \ln 2$ ، أي: $m > e^{\frac{1+2 \ln 2}{2}}$ ، فإن: المعادلة تقبل حلين موجبين .

حل المسألة رقم 08

لدينا : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

(1) لدينا : $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

(أ) دراسة اتجاه تغير الدالة h_n :

❖ لنحسب $h'_n(x)$: $h'_n(x) = n \times \frac{1}{1+x} + \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$ ، ومنه : $h'_n(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $h'_n(x) > 0$.
إذن الدالة h_n متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

(ب) $h_n(0) = 0$ ، إذن : نلخص إشارة $h_n(x)$ في الجدول التالي :

x	-1	0	$+\infty$
$h_n(x)$	-	○	+

(2) $f_1(x) = x \ln(1+x)$ و $h_1(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

❖ حساب $f'_1(x)$: $f'_1(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \times x = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$ ، ومنه : $f'_1(x) = h'_1(x)$.

❖ حساب $f'_n(x)$: $f'_n(x) = \frac{1}{1+x} \times x^n + n \cdot x^{n-1} \times \ln(1+x)$ ، نعلم أن : $x^n = x \times x^{n-1}$ ، أي تصبح :

$f'_n(x) = x^{n-1} \left[n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right]$ ، ومنه : $f'_n(x) = x^{n-1} \times h_n(x)$. وهو المطلوب

(ب) في حالة n فردي يكون : $(n-1)$ زوجياً ، ومنه يكون : $x^{n-1} \geq 0$ ،

وبالتالي تكون إشارة $f'_n(x)$ من إشارة $h_n(x)$.

❖ جدول التغيرات في حالة n فردي :

x	-1	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	○	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

❖ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^n) = -1$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$.

❖ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

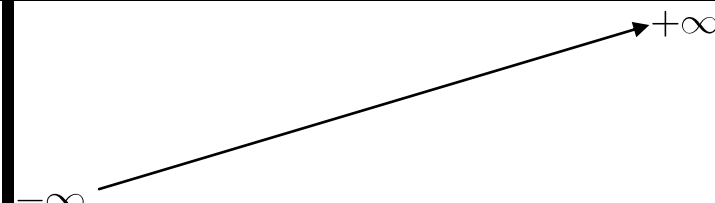
(ج) في حالة n زوجي يكون: $(n-1)$ فردياً، أي إشارة x^{n-1} تكون كما يلي :

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	$-$	$\circ$	$+$

وبالتالي :

x	-1	0	$+\infty$
x^{n-1}	$-$	$\circ$	$+$
$h_n(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f'_n(x)$	$+$	$\circ$	$+$

(❖) جدول التغيرات في حالة n زوجي :

x	-1	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$+$	$\circ$	$+$
$f_n(x)$			

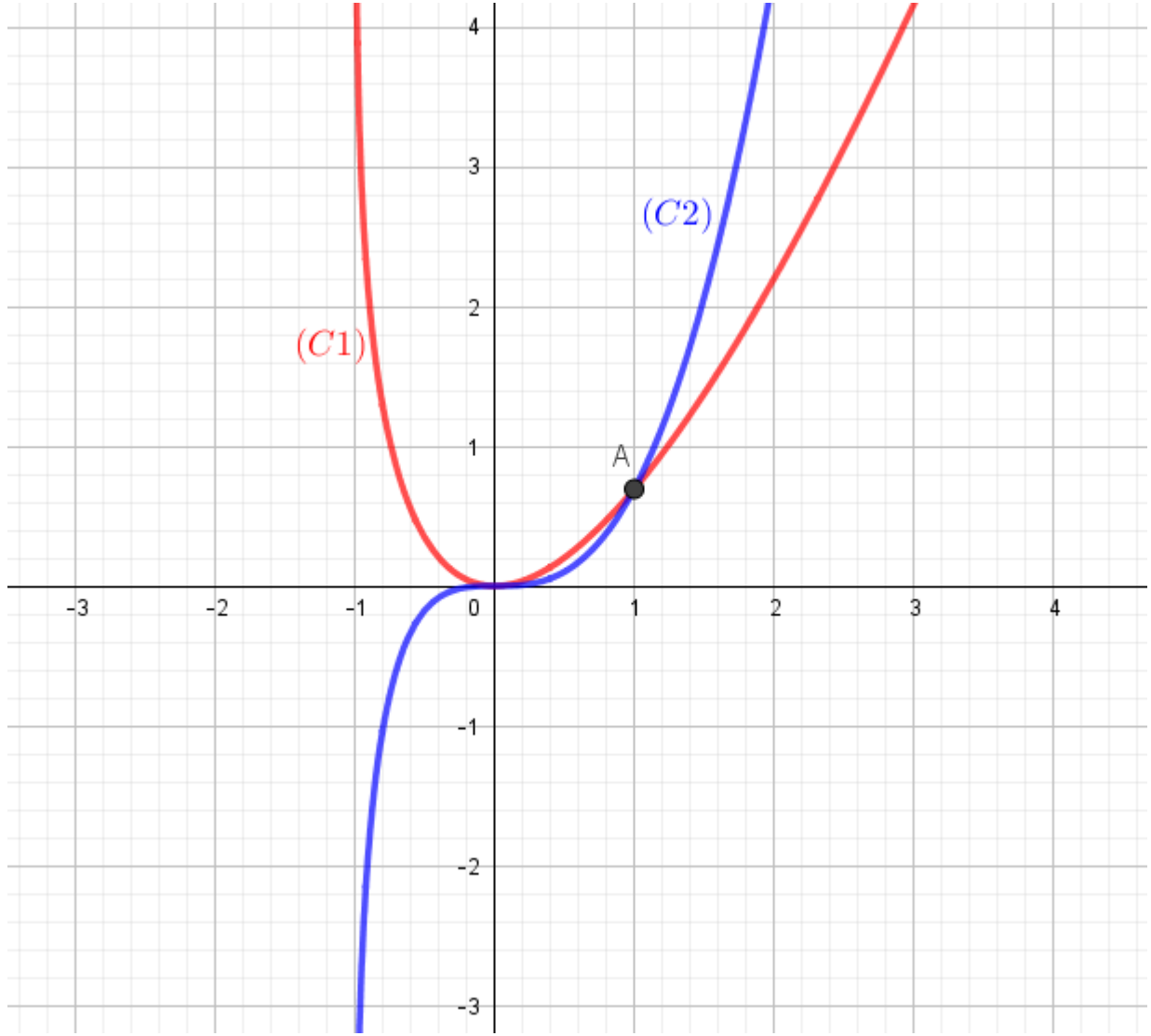
$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^n) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = -\infty \quad (\diamond)$$

$$\cdot \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad (\diamond)$$

(3أ) دراسة وضعيّة المنحنيين (C_1) و (C_2) :

أي ندرس إشارة الفرق : $f_1(x) - f_2(x)$ ، حيث : $f_1(x) = x \ln(1+x)$ و $f_2(x) = x^2 \ln(1+x)$.
 $(\diamond) f_1(x) - f_2(x) = x \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x)$ ، ومنه : $f_1(x) - f_2(x) = x \ln(1+x)(1-x)$.
توضيح : (أخرجنا $(x \ln(1+x))$ كعامل مشترك) . إذن الوضعيّة تكون كما يلي :

x	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$\ln(1+x)$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$\circ$	$-$
$f_1(x) - f_2(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
الوضعيّة	(C_1) يقع فوق (C_2)		(C_1) يقع فوق (C_2)	
	(C_1) يمس (C_1) في النقطة $O(0,0)$		(C_1) يقطع (C_1) في النقطة $A(1; \ln 2)$	



كتاب الأستاذ : **ب. ع.**

حل مختصر للمسألة رقم 09

الجزء الأول : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} - 1$.

(1) حساب نهايات الدالة g :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+2) = \ln 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$\diamond$ حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{-2}{(x+2)^2} = \frac{x-x-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2} = -\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2(x+2)}{x(x+2)^2} + \frac{2x}{x(x+2)^2} = \frac{-2x-4+2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ تكون $g'(x) < 0$ ، ومنه الدالة g متناقصة تماماً على $]0, +\infty[$.
 $\diamond$ جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$	$+\infty$	-1

(3) الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0, +\infty[$ فهي مستمرة ورتيبة على $[0, 36; 0, 38]$

$$\text{أي : } \begin{cases} f(0, 36) = 0, 03 \\ f(0, 38) = -0, 005 \end{cases} \text{ و } f(0, 38) < 0 < f(0, 36) \text{ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة}$$

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \text{ من المجال } [0, 36; 0, 38] .$$

(4) إشارة $g(x)$: سنلخص الإشارة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	$\circ$	—

الجزء الثاني : $f(x) = x \ln(x+2) - x \ln x - x$.

(1) حساب نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ ، لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+2)] = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

(2) حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$:

$$\text{لنضع : } h = \frac{1}{x} \text{ ، أي : } x = \frac{1}{h} \text{ ، أي : } \begin{matrix} x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$$

ملاحظة: $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

$$\text{أي، } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1+2h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2h)}{h} \quad (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2h)}{2h} = 1 \text{ لأن، } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2h)}{2h} \times 2 = 2$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \text{ ومنه:}$$

(3) إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\text{أي، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \ln(x+2) - x \ln x - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+2) - \ln x] - x \quad (\diamond)$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[x \cdot \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \right] = -\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+2)] \text{ نحسب: (4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+2)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x + x - 2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2 \right] = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \text{ لدينا مما سبق: } (\diamond)$$

إذن: المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

(5) أ) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

$$\text{حساب } f'(x): f'(x) = \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \times x - \left(\ln x + \frac{1}{x} \times x\right) - 1 \text{ أي، } f'(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{x+2} - 1 - 1$$

$$f'(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{x+2} - 1 - 1 \text{ أي، } f'(x) = \ln(x+2) - \ln x + \frac{x}{x+2} - 1 - 1$$

$$\text{أي: } f'(x) = g(x) \text{ ومنه: } f'(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} - 1$$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

(\diamond) جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

$$\text{ب) لنبيّن أن: } f(\alpha) = 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2}$$

$$\text{لدينا: } g(\alpha) = 0 \text{ أي: } \ln(\alpha+2) - \ln \alpha - \frac{2}{\alpha+2} - 1 = 0$$

ومنه : $\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha+2} + 1$

❖ لنحسب $f(\alpha) = \alpha \ln(\alpha+2) - \alpha \ln \alpha - \alpha$: أي ، $f(\alpha) = \alpha \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \alpha$ ،

نعوض الآن : $f(\alpha) = \alpha\left(\frac{2}{\alpha+2} + 1\right) - \alpha$: أي ، $f(\alpha) = \alpha\left[\left(\frac{\alpha+2}{\alpha} + 1\right) - 1\right]$ ،

أي : $f(\alpha) = \alpha \cdot \frac{2}{\alpha+2}$ ، ومنه : $f(\alpha) = 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+2}$ وهو المطلوب .

❖ حصر $f(\alpha)$:

لدينا : (1) $0,38 < \alpha < 0,36$ ، أي : $2,38 < \alpha + 2 < 2,36$ ، أي : $\frac{1}{2,36} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{2,38}$ ،

أي : (2) $\frac{2}{2,36} < \frac{2}{\alpha+2} < \frac{2}{2,38}$. نضرب (1) في (2) نجد : $0,30 < f(\alpha) < 0,32$.

(6) إيجاد نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محاور الفواصل :

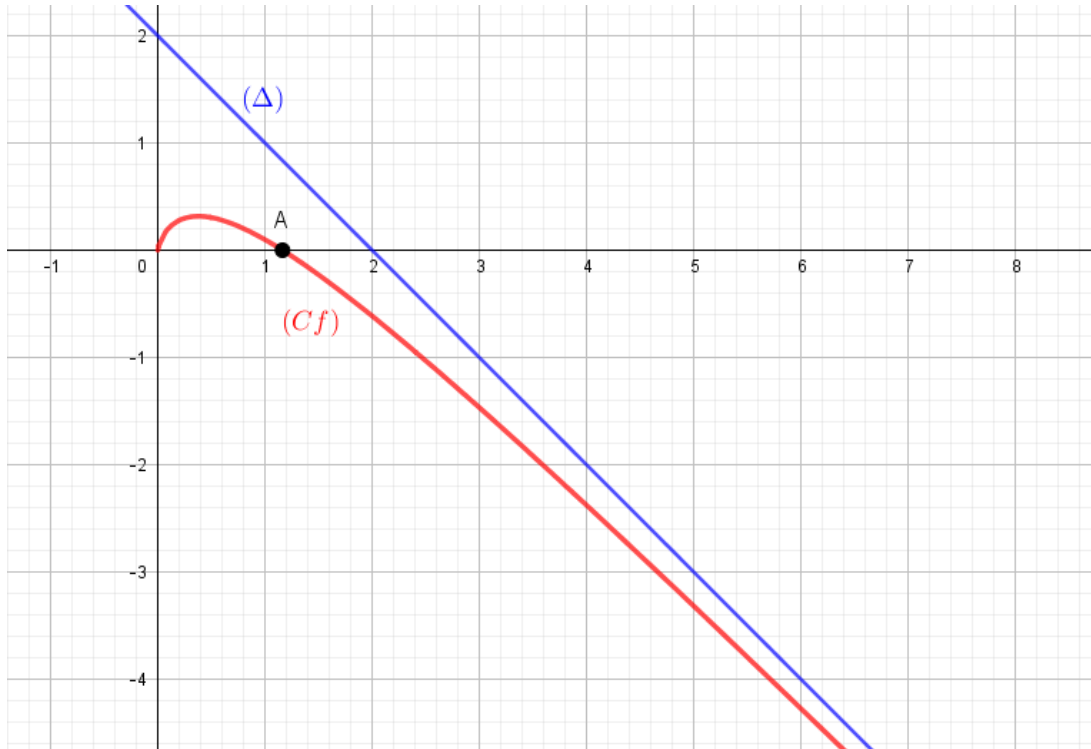
أي نحل المعادلة : $f(x) = 0$

$x \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 \right] = 0$: أي ، $x \left[\ln(x+2) - \ln x - 1 \right] = 0$: أي ، $x \ln(x+2) - x \ln x - x = 0$

أي : $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 = 0$: أي ، $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$: أي ، $\frac{x+2}{x} = e$: أي ، $1 + \frac{2}{x} = e$: أي ،

$\frac{2}{x} = e - 1$ ، ومنه : $x = \frac{2}{e-1}$. إذن : $(C_f) \cap (xx') = \left\{ A\left(\frac{2}{e-1}; 0\right) \right\}$.

(7) الإنشاء :



لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f_m(x) = \frac{x^2-1}{2} - m \ln x$.

(1) حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - m \ln x - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} \left(1 - 2m \frac{\ln x}{x^2} \right) - \frac{1}{2} = +\infty$.

لأن : $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \right)$ و $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \right)$. ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$.

(2) حساب : $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x)$: (حسب قيم m) : لدينا : $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2} = -\frac{1}{2} \right)$ و $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \right)$.

ومنه : أ - إذا كان : $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty$.

ب - إذا كان : $m = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\frac{1}{2}$.

ج - إذا كان : $m > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty$.

(3) الدالة f_m قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f_m'(x) = x - \frac{m}{x} = \frac{x^2-m}{x}$.

• عند استنتاج جدول التغيرات للدالة f_m نميز ثلاث حالات :

أ - حالة $m < 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f_m'(x) > 0$.

x	0	$+\infty$
$f_m'(x)$		+
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب - حالة $m = 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f_0(x) = \frac{x^2-1}{2}$ ، و $f_0'(x) = x$. ومنه :

x	0	$+\infty$
$f_m'(x)$		+
$f_m(x)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

ج - حالة $m > 0$: من أجل كل x من $]0; +\infty[$: إشارة $f_m'(x)$ من إشارة $x^2 - m$: أي : $\begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$

x	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	○	+
$f_m(x)$	$+\infty$	$f_m(\sqrt{m})$	$+\infty$

و عليه :

(4) إثبات وجود منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 :

لدينا : النقطة $M_0(x_0; y_0)$ حيث : $x_0 > 0$ ، ومنه f_m معرفة عند x_0 ، ولدينا من جهة أخرى المنحنى (C_m) يشمل

النقطة $M_0(x_0; y_0)$ أي : $f_m(x_0) = y_0$. و عليه : $\frac{x_0^2 - 1}{2} - m \ln x_0 = y_0$ أي : $(\ln x_0)m = \frac{x_0^2 - 1}{2} - y_0$

أي : $(\ln x_0)m = \frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2}$ ، و عليه : $m = \frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2 \ln x_0}$. ومنه يوجد حل وحيد هو : $\frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2 \ln x_0}$.

إذن نستنتج أنه يوجد منحنى وحيد (C_m) يشمل النقطة M_0 .

(5) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A مع تعيين إحداثياتها :

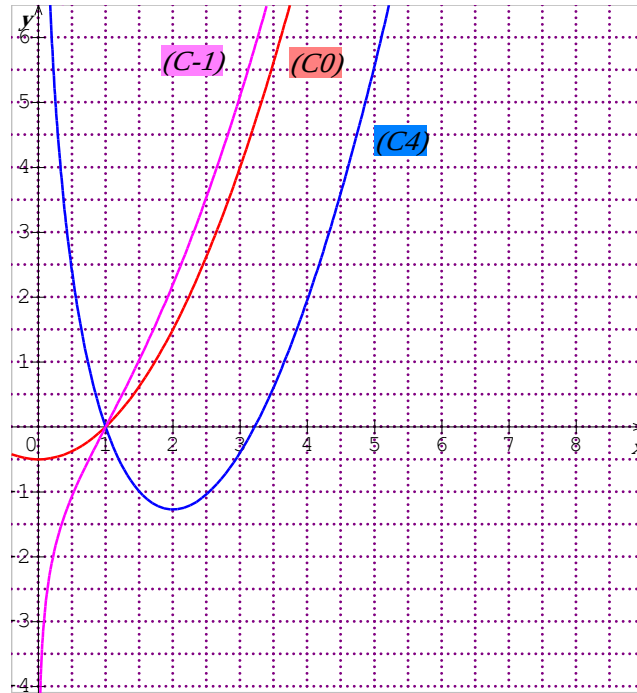
ط (1) جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة معناه : $f_m(x_0) = y_0$ أي : $y_0 = \frac{x_0^2 - 1}{2} - m \ln x_0$ أي :

$A(1;0)$ ومنه جميع المنحنيات (C_m) تشمل $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \ln x_0 = 0 \\ y_0 - \frac{x_0^2 - 1}{2} = 0 \end{cases}$ معناه : $m \ln x_0 + y_0 - \frac{x_0^2 - 1}{2} = 0$

أو كحالة خاصة : أي أن إحداثيات النقطة A لا تتعلق بـ m أي : (نعدم الذي هو مضروب في m في العبارة) ، (نعلم

أن : $\ln(1) = 0$) . أي : نضع $x = 1$ و منه : $f_m(1) = 0$ ، إذن : كل المنحنيات (C_m) تشمل النقطة $A(1;0)$.

(6) رسم كلا من : (C_0) ، (C_{-1}) ، باستعمال مبرمج : (sine qua non) :



www.etudook.com

كتابت الأستاذ : ب. ع