

الموضوع السابع:**التمرين الأول:**

1- نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط:

$$C(-1; 0; -6), B(-1; 0; -2), A(1; 1; 2)$$

- بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على

المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

2- لتكن S مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تُحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

- بيّن أنّ S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

3- G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

أ - عيّن إحداثيات النقطة G ثم تأكد أنّها تنتمي إلى S .

ب - أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمسّ سطح الكرة S في النقطة G .

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_B = \overline{z_A}, \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A \text{).}$$

أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي.

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

ج - نضع: $S = h \circ r$. (يرمز \circ إلى تركيب التحويلين h و r).

- عيّن طبيعة التحويل S ، مبرزاً عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C, D, E ؛ حيث: $S(O) = C, S(C) = D, S(D) = E$

- بيّن أنّ النقط O, Ω, E في استقامة.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الثالث:

| x | $f(x)$ |
|------|--------|
| 0,20 | 0,037 |
| 0,21 | 0,016 |
| 0,22 | -0,005 |
| 0,23 | -0,026 |
| 0,24 | -0,048 |
| 0,25 | -0,070 |

I - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

(2) احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ ،

ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرًا للعدد α .

(4) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

(5) عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II - الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) ادرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty; 1[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(2) أ) تحقّق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم بين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقّق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g وشكّل جدول تغيّراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II - لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن وضع $t = \frac{1}{e^x}$).

2- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

- استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

- استنتج مجموعة صور \mathbb{R} بواسطة الدالة f .

4- بين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في مستو مزدود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$.

حل الموضوع السابع

التمرين الأول:

تبين أن مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرسم له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \text{ ومنه } AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$$

$$BM^2 = (x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 \text{ ومنه } BM = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 1 \text{ تكافئ } [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2] - [(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2] = 1$$

وتكافئ $-4x - 2y - 8z = 0$ أي $-2x - y - 4z = 0$ وهي معادلة مستو ناظمه الشعاع $\overrightarrow{AB}(-2; -1; -4)$ ومنه المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) .

$$-2 \text{ لتكن } S \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ التي تحقق: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

- إثبات أن S هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها R .

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0 \text{ معناه } (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 - 6 = 0$$

$$\text{ومنه } 9 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \text{ إذن } S \text{ هي سطح كره مركزها } \omega(1; 1; 1)$$

وطول نصف قطرها $R = 3$.

$$-3 \text{ نقطة } G \text{ من الفضاء معرفة بالعلاقة } \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

أ - تعيين إحداثيات النقطة G ثم التأكد أنها تنتمي إلى S .

$$G \text{ هي مرجح الجملة } \{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\} \text{ وعليه } x_G = \frac{x_A - x_B + x_C}{1 - 1 + 1} = 1$$

$$y_G = \frac{y_A - y_B + y_C}{1 - 1 + 1} = 1, \quad z_G = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = -2 \text{ إذن } G(1; 1; -2)$$

التأكد أن G تنتمي إلى S .

يمكن التأكد بسهولة أن G تنتمي إلى S بتعويض إحداثيات G في معادلة S نجد:

$$9 = (1-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2 \text{ وهذا يعني أن } G \text{ تنتمي إلى } S.$$

ب - كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة S في النقطة G .

المستوي (Q) ناظمه الشعاع $\overrightarrow{\omega G}$ ويشمل النقطة G . ولدينا $\overrightarrow{\omega G}(0.0.-3)$.

ومن معادلة (Q) من الشكل $-3z + d = 0$ وبما أن G يشمل (Q) فإن $-3(-2) + d = 0$ ومنه $d = -6$

وعليه $-3z - 6 = 0$ ومنه $z + 2 = 0$ هي معادلة للمستوي (Q) .

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = (\sqrt{3}i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ و } z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B و M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z \text{ على الترتيب (يرمز } \overline{z_A} \text{ إلى مرافق } z_A).$$

أ - كتابة z_A على الشكل الأسّي .

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب - تعيين مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$.

$$\arg[(z - z_A)^2] = \arg(z_A) - \arg(z_B) \text{ معناه } 2\arg(z - z_A) = \arg(z_A) + \arg(z_A)$$

ومنه $2\arg(z - z_A) = 2\arg(z_A)$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة A .

3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$.

- تعيين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

العبارة المركبة للتحويل r من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = z_A$ و $b = \sqrt{3}z_B$.

و $|a| = |z_A| = 1$ و $\arg(a) = \arg(z_A) = \frac{3\pi}{4}$ ومنه r دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة

$$z_\Omega = \frac{\sqrt{3}z_B}{1 - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{i(3 + i\sqrt{3})}{3 + i\sqrt{3}} = i$$

ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$.

- تعيين نسبة ومركز التحاكي h .

نسبة التحاكي هي -2 ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_\Omega = i = \frac{3i}{3i - (-2)} = \frac{3i}{1 - (-2)}$ أي مركز التحاكي h هو Ω .

ج - نضع: $S = h \circ r$. (يرمز \circ إلى تركيب التحويلين r و h).

- تعيين طبيعة التحويل S ، وعناصره المميزة.

يمكن اعتبار h تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته π ومركزه Ω

و r تشابه مباشر نسبته 1 وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه Ω إذن S هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين أي نسبته 2

ووزاويته $\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه Ω .

التحقق أن عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$.

العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' - z_\Omega = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_\Omega)$ أي $z' - i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$ ومنه $z' = 2e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i) + i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ، حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$.

- إثبات أن النقط O ، Ω و E في استقامية.

لدينا $S(D) = E$ ومنه $S[S(C)] = E$ أي $S \circ S(C) = E$ يكافئ $S \circ S[S(O)] = E$ يكافئ $S \circ S \circ S(O) = E$

نستنتج أن E هي صورة O بالتحويل $S \circ S \circ S$ ولدينا $S \circ S \circ S$ تشابه مباشر زاويته $3 \times \frac{\pi}{4}$ أي زاويته π

ومركزه Ω ومنه $(\overline{\Omega O}, \overline{\Omega E}) = \pi$ وهذا يعني أن النقط O ، Ω و E في استقامية.

طريقة 2:

$$(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(O) = C$$

$$(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(C) = D$$

$$(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{\pi}{3} \text{ معناه } S(D) = E$$

$$(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \text{ بالجمع طرفا إلى طرف نجد}$$

ولدينا حسب علاقة شال $(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega})$ ومنه $(\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{O\Omega}) = \pi$ وهذا يعني أن النقط O ، Ω و E في استقامة.

5. أ - تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

$z = 2e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z - i = 2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z - i| = 2$ أي $\Omega M = 2$ بالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 2.

ب - تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي، $M'(z')$ صورتها بالتشابه S إذن $\Omega M' = 2\Omega M$

إذا كانت M نقطة من (Γ) فإن $\Omega M = 2$ ولدينا $\Omega M' = 2\Omega M$ ومنه $\Omega M' = 2 \times 2 = 4$ أي $\Omega M' = 4$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

طريقة 2:

$$z = 2e^{i\theta} + i \text{ معناه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}((2e^{i\theta} + i) - i) + i \text{ ومنه } z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(2e^{i\theta}) + i \text{ أي } z' - i = 4e^{i(\frac{\pi}{3} + \theta)}$$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

التمرين الثالث:

I - f الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 2$ بجوار $-\infty$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب معادلته $x = -1$.

(2) حساب $f'(x)$. وتبيين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

الدالة f عبارة عن عمليات على دوال قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ فهي تقبل الإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right)$$

من أجل كل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة f .

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 |
| $f'(x)$ | | — |
| $f(x)$ | 2 | $-\infty$ |

(3) تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا α .

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 2[$ و $]-\infty; 2[$ و $0 \in]-\infty; 2[$ إذن

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1[$.

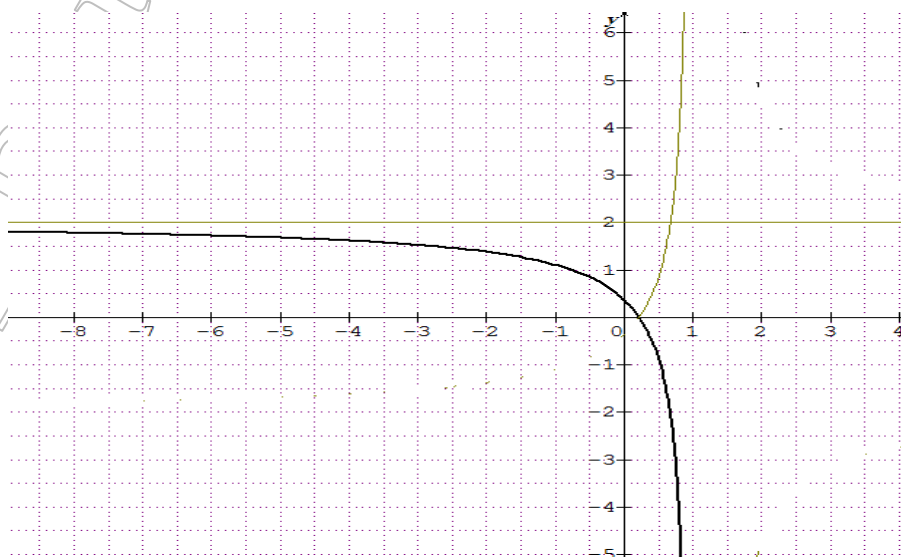
إيجاد حصرا للعدد α باستعمال جدول القيم أعلاه.

نلاحظ أن $f(0,21) \approx 0,016$ و $f(0,22) \approx -0,005$ إذن $f(0,21) \times f(0,22) < 0$ ومنه $0,21 < \alpha < 0,22$

(4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

$$\begin{cases} |f(x)| = f(x); x \in]-\infty; \alpha] \\ |f(x)| = -f(x); x \in [\alpha; 1[\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} |f(x)| = f(x); f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x); f(x) \leq 0 \end{cases}$$

إذن (C') ينطبق على (C) في المجال $]-\infty; \alpha]$ و (C') يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[\alpha; 1[$.



(5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة من أجل قيم m من المجال $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$ (لاحظ أن $f(0) = \frac{1}{e}$)

II- الدالة المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$ (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

(1) دراسة تغيرات الدالة g على $]-\infty; 1[$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1)$ ؛ نضع $t = 2x-1$ لما x يتحول إلى $-\infty$ فإن t يتحول إلى $-\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = -\infty$

الدالة g تقبل الاشتقاق على المجال $]-\infty; 1[$ ولدينا: $g'(x) = 2f'(2x-1)$

إذا كان $x < 1$ فإن $2x-1 < 1$ ومنه $f'(2x-1) < 0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$

يمكن إتباع طريقة إتجاه تغير مركب دالتين.

نعتبر الدالة $u: x \mapsto 2x-1$ المعرفة على المجال $]-\infty; 1[$ إذن $g(x) = f(u(x)) = (f \circ u)(x)$

الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty; 1[$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x); \lim_{x \rightarrow 1} u(x) =]-\infty; 1[$ والدالة f

متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

جدول تغيرات الدالة g .

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 |
| $g'(x)$ | | — |
| $g(x)$ | 2 | $-\infty$ |

(2) أ) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثم تبين أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha+1-1) = f(\alpha) = 0$$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha+1-1) = 2f'(\alpha)$$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

$$y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \text{ ومنه } y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

(ج) التحقق من أن: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

لدينا $f(\alpha) = 0$ يكفي $\frac{\alpha}{\alpha-1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0$ أي $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$

ومنه $2f'(\alpha) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{-2}{(\alpha-1)^2} \left(\frac{-1}{\alpha-1}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}$

إذن معادلة المستقيم (T) هي: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3} \left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x + \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

التمرين الرابع:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1-e^x+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة g .

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ | | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | 0 |

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

نضع $t = \frac{1}{e^x}$ عندئذ $e^x = \frac{1}{t}$ إذا كان x يتوّل إلى $+\infty$ فإن t يتوّل إلى 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) = e^x \ln(e^{-x}(e^x+1)) = e^x [-x + \ln(e^x+1)] = -xe^x + e^x \ln(e^x+1)$$

- استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x + e^x \ln(e^x+1) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x+1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) e^x = e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} = g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

جدول تغيرات الدالة f .

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | | |
| $f(x)$ | 0 | 1 |

- استنتاج مجموعة صور \square بواسطة الدالة f .

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على \square ولدينا $f([-\infty; +\infty[) =]1; 2[$

4- تبين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على \square وتأخذ قيمها في المجال $]1; 2[$ و $\frac{1}{2} \in]1; 2[$ إذن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل

حلاً وحيداً α .

5- رسم (C_f)

6- المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

$$\text{حلول المعادلة: } e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$$

$$e^x \ln(1+e^{-x}) = m \text{ تكافئ } e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0 \text{ أي}$$

$$f(x) = m$$

إذا كان $m \leq 0$ أو $m \geq 1$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.

