الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الإمتحان التجريبي لشهادة البكالوريا — دورة تدريبية

الشعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي. — دورة أفريل 2015

الحل المفصل للاختبار رقم 22 — إعداد: مصطفاي عبد العزيز – أحمد خامس

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (05.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ **الوحدة** $2cm$.

A النقطة التي لاحقتها $-2i$ ؛ f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-2\overline{z}+2i$

1. نعتبر النقطة B ذات اللاحقة $3-2i$.

أ ـ احسب لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالتحويل f.

ب ـ أنشئ النقط A ، B ، A' و B'.

2. بين أنه، إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$ فإن النقطة M' تنتمي أيضا إلى (Δ).

3. برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z فإنّ: $|z'+2i|=2|z+2i|$.

فسر هندسيا هذه المساواة.

4. من أجل كل نقطة M تختلف عن A، نسمي θ عمدة للعدد المركب $z+2i$.

أ ـ أثبت أن θ هي قيس للزاوية $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)$.

ب ـ برهن أن العدد $(z'+2i)(z+2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

جـ ـ استنتج عمدة لـ $z'+2i$ بدلالة θ.

د ـ ماذا يمكن أن تستنتج من أجل نصفي المستقيمين $[AM)$ و $[AM')$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$ ، $C(0;-1;-4)$ و $D(-1;1;2)$.

1- أ ـ بيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب ـ استنتج طبيعة المثلث ABC، ثمّ احسب مساحته.

2- أ ـ عيّن شعاعا $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=0$.

ب ـ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

جـ ـ تحقق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

د ـ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

3- أُحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ ـ تحقق أنّ $2x-5y+2z+3=0$ معادلة للمستوي (BCD).

ب ـ أُحسب بُعد النقطة A عن المستوي (BCD).

جـ ـ استنتج مساحة المثلث BCD.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

1. أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$.

ب - بيّن أنّ (u_n) متناقصة.

جـ - استنتج أنّ (u_n) متقاربة ثمّ احسب نهايتها.

2. (w_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln u_n$.

أ - أثبت، أنّه من أجل كل عدد طبيعي: $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب - نضع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$. بيّن أنّ $S = w_0 - w_{n+1}$ ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty} S$.

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)$

1. بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

2. احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II/ f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب كلا من $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى هندسيا

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ يكون: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) استنتج أنه إذا كان $x \in [0;4]$ فإن $f(x) \in [0;4]$

5) - بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

- ادرس وضعية (Δ) بالنسبة إلى (C_f)

6) ارسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحني (C_f)

7) h الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = [\ln(x+1)]^2$

أ - احسب $h'(x)$

ب - احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ: (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

III/ (u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) باستعمال المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كلا من u_0 ، u_1، u_2 ، u_3

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$

3) - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

- احسب عندئذ $\lim u_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2z+4+4i=0\,.........(1)$

تحقق أن $-2i$ حلا للمعادلة (1) ثم استنتج الحل الآخر

2) نعتبر النقط A، B، C ، D صور الأعداد z_A ، z_B ، z_C ، z_D على الترتيب حيث :

$z_A=-2i$ ، $z_B=-2+2i$ ، $z_C=2+4i$ ، $z_D=4$

أ - احسب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

ب -بين أن: $\dfrac{z_C-z_I}{z_D-z_I}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثم استنتج نوع المثلث ICD

جـ- عين مع التبرير نوع الرباعي $ABCD$

3) - بين أن العدد $(z_I)^{2016}$ هو عددا حقيقيا

- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(z_I)^n$ عددا تخيليا صرفا

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ و $D(4;-2;5)$.

1. بيّن النقط A، B و C تعيّن مستويا.
2. بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثمّ اكتب معادلة لهذا المستوي
3. نعتبر المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t\,;(t\in\mathbb{R}) \\ z=4-t \end{cases}$
4. تحقق أنّ النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأنّ (Δ) عمودي على المستوي (ABC).
5. نسمي H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)؛ تحقق أنّ H هي مركز ثقل المثلث ABC.
6. لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

أ - بيّن أنّ: $BM=\sqrt{6t^2-12t+8}$

ب - f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{6x^2-12x+8}$

- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها، ثمّ بيّن أنّ الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب ايجادها.

جـ - استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

التمرين الثالث : (5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases}$

1) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

3) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} \leq \frac{1}{7}u_n$

ب- باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

جـ - احسب نهاية المتتالية (u_n)

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n}{u_n + 18}$

أ -بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

ب -اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = \dfrac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}$ احسب مرة ثانية نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x - 1 + \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 0$، ثم استنتج أن الدالة f فردية

2) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم استنتج نهايتها عند $+\infty$

3) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\dfrac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (-x - 1)\right]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلة لكل منهما

5) أنشئ المنحني (C_f)

6) λ عدد حقيقي سالب تماما، نسمي $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = -x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = \lambda$

أ - عبر بدلالة λ عن المساحة $S(\lambda)$

ب -احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} S(\lambda)$

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل : (05.5 نقاط)

1. نعتبر النقطة B ذات اللاحقة $3-2i$.

أ ـ حساب لاحقتي النقطتين A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالتحويل f.

$$z_{A'}=-2\overline{z_A}+2i=-2(2i)+2i=-2i=z_A$$

$$z_{B'}=-2\overline{z_B}+2i=-2(3+2i)+2i=-6-2i$$

ب ـ إنشاء النقط A ، B ، A' و B'.

2. تبيان أنه، إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$ فإن النقطة M' تنتمي أيضا إلى (Δ).

$M\in(\Delta)$ معناه $z=x-2i$ حيث x عدد حقيقي إذن $z'=-2\left(\overline{x-2i}\right)-2i=-2(x-2i)+2i=-2x-2i$

أي $M'\in(\Delta)$.

3. برهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z فإنّ: $|z'+2i|=2|z+2i|$.

لدينا $\begin{cases} z'=-2\overline{z}+2i \\ z_A=-2\overline{z_A}+2i \end{cases}$ وبطرح المساواتين طرفا إلى طرف نجد $z'-z_A=-2\left(\overline{z}-\overline{z_A}\right)$ وهذا يعني أن

$z'-z_A=-2\left(\overline{z-z_A}\right)$ ومعناه $|z'-z_A|=\left|-2\left(\overline{z-z_A}\right)\right|$ ويكافئ $|z'-z_A|=2\left|\overline{z-z_A}\right|$ أي

$|z'+2i|=2|z+2i|$.

تفسير هندسيا هذه المساواة.

$|z'+2i|=2|z+2i|$ تعني $AM'=2AM$.

4. من أجل كل نقطة M تختلف عن A ، نسمي θ عمدة للعدد المركب $z+2i$.

أ ـ إثبات أن θ هي قيس للزاوية $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)$.

$$\theta=\arg(z+2i)=\arg(z-z_A)=\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)$$

ب ـ برهان أن العدد $(z'+2i)(z+2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

لدينا $z'-z_A=-2\left(\overline{z-z_A}\right)$ معناه $z'+2i=-2\left(\overline{z+2i}\right)$ يكافئ $(z'+2i)(z+2i)=-2\left(\overline{z+2i}\right)(z+2i)$

ويكافئ $(z'+2i)(z+2i)=-2|z+2i|^2$ وعليه العدد $(z'+2i)(z+2i)$ عدد حقيقي سالب أو معدوم.

جـ ـ استنتاج عمدة لـ $z'+2i$ بدلالة θ.

لدينا $\arg\left[(z'+2i)(z+2i)\right]=\pi+2k\pi$ معناه $\arg(z'+2i)+\arg(z+2i)=\pi+2k\pi$ ويكافئ

$\arg(z'+2i)=-\arg(z+2i)+\pi+2k\pi$ أي $\arg(z'+2i)=-\theta+\pi$.

د ـ ماذا يمكن أن تستنتج من أجل نصفي المستقيمين $[AM)$ و $[AM')$.

$\arg(z'+2i)=-\theta+\pi$ معناه $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+\pi$ نستنتج هكذا أن نصفي المستقيمين $[AM)$ و $[AM')$ متناظران بالنسبة لمحور التراتيب.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1- أ ـ تبيان أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2\times-1+1\times-2-1\times-4=0$ أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث ABC ، واحسب مساحته.

المثلث ABC قائم في C ومساحته $S(ABC)=\dfrac{AB\times BC}{2}$

حيث $AB=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ ، $BC=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$

إذن $S(ABC)=\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{21}}{2}=\dfrac{\sqrt{126}}{2}=\dfrac{3\sqrt{14}}{2}ua$

2- أ - تعيين شعاعا $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=0$.

نضع $\vec{u}(a;b;c)$ ؛ $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ معناه $2a+b-c=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=0$ معناه $-a-2b-4c=0$

إذن نحصل على الجملة $\begin{cases}2a+b-c=0........(1)\\-a-2b-4c=0....(2)\end{cases}$ بضرب المعادلة (1) بالعدد 2 وبجمع المعادلتين نجد

$3a-6c=0$ أي $a=2c$ وبالتعويض عن a في (1) نجد $4c+b-c=0$ أي $b=-3c$ وعليه $\vec{u}(2c;-3c;c)$

نأخذ مثلا $c=1$ نجد $\vec{u}(2;-3;1)$.

ب - استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) له معادلة من الشكل $2x-3y+z+d=0$ ولدينا $B\in(ABC)$ يعني $2\times1-3\times1+d=0$ أي

$d=1$ إذن للمستوي (ABC) المعادلة $2x-3y+z+1=0$.

جـ - التحقق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

بما أنّ $2x_D-3y_D+z_D+1=-2-3+2+1=-2\neq0$ فإن D لا تنتمي إلى المستوي (ABC)

و $ABCD$ هو رباعي وجوه.

د - حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$$d(D;(ABC))=\frac{|2x_D-3y_D+z_D+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

3- حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

$$V(ABCD)=\frac{1}{3}S(ABC)\times d(D;ABC)=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{14}}=1uv$$

4- أ - التحقق أنّ $2x-5y+2z+3=0$ معادلة للمستوي (BCD).

لدينا $2x_B-5y_B+2z_B+3=2-5+3=0$ ، $2x_C-5y_C+2z_C+3=5-8+3=0$ و

$2x_D-5y_D+2z_D+3=-2-5+4+3=0$ ومنه إحداثيات النقط B، C و D تحقق المعادلة $2x-5y+2z+3=0$

وعليه المعادلة $2x-5y+2z+3=0$ للمستوي (BCD).

ب - حساب بُعد النقطة A عن المستوي (BCD).

$$d(A;(BCD))=\frac{|2\times-1-5\times0+2\times1+3|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

جـ - استنتاج مساحة المثلث BCD.

لدينا $V(ABCD)=\frac{1}{3}S(BCD)\times d(A;(BCD))$ ومنه $S(BCD)=\dfrac{3V(ABCD)}{d(A;(BCD))}=\dfrac{3\times1}{\frac{\sqrt{33}}{11}}=\dfrac{33}{\sqrt{33}}=\sqrt{33}ua$

<u>التمرين الثالث: (4 نقاط)</u>

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_ne^{-u_n}\end{cases}$

1.أ - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

لدينا $u_0>1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

aziz_mus1@hotmail.fr

نفرض أنّ $u_n > 0$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$.

لدينا $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ومنه إشارة u_{n+1} هي من نفس إشارة u_n وبما أن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} > 0$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع إنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

ب ـ تبيان أنّ (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n\left(e^{-u_n} - 1\right)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$ معناه $-u_n < 0$ يكافئ $e^{-u_n} < 1$ ويكافئ $e^{-u_n} - 1 < 0$ وعليه $u_n\left(e^{-u_n} - 1\right) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ ـ استنتاج أنّ (u_n) متقاربة وحساب نهايتها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة وتقبل نهاية l حيث $l \in \mathbb{R}$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ إذا $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n e^{-u_n}$ وبما أن الدالة $x \mapsto xe^{-x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ فإن $l = le^{-l}$ ومنه $l - le^{-l} = 0$ ويكافئ $l\left(1 - e^{-l}\right) = 0$ أي $l = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. (w_n) متتالية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln u_n$.

أ ـ إثبات، أنّه من أجل كل عدد طبيعي : $u_n = w_n - w_{n+1}$.

$w_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\left(u_n e^{-u_n}\right) = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n = w_n - u_n$ ومنه $u_n = w_n - w_{n+1}$.

ب ـ نضع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. **تبيان أنّ** $S = w_0 - w_{n+1}$ **وحساب** $\lim_{n\to+\infty} S$.

لدينا ما يلي $\begin{cases} u_0 = w_0 - w_1 \\ u_1 = w_1 - w_2 \\ u_2 = w_2 - w_3 \\ . \\ . \\ u_n = w_n - w_{n+1} \end{cases}$ وبالجمع طرفا إلى طرف نجد $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = w_0 - w_{n+1}$ أي $S = w_0 - w_{n+1}$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} w_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln u_{n+1} = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \ln t = -\infty$ لأنّ $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

إذن $\lim_{n\to+\infty} S = \lim_{n\to+\infty} \left[w_0 - w_{n+1}\right] = +\infty$.

التمرين الرابع : (06 نقاط)

I/ 1. تبيان أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x) = 2(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا $2(x+1) > 0$ و $\dfrac{1}{x+1} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

2.حساب $g(0)$، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

$g(0) = (0+1)^2 - 1 + \ln(0+1) = 0$.

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

من أجل $x \in]-1;0[$ لدينا $g(x) < g(0)$ أي $g(x) < 0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(0)$ أي $g(x)>0$ ؛ كما أنّ $g(0)=0$.

II/ f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ يكون : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

ليكن $x\in]-1;+\infty[$.

$$f'(x)=1-\left(\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

لدينا إشارة $f'(x)$ كإشارة $g(x)$.

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

وجدول تغيّراتها يكون كالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

إذا كان $0\le x\le 4$ فإنّ $f(0)\le f(x)\le f(4)$ أي $0\le f(x)\le 4-\dfrac{\ln 5}{5}$ وبما أنّ $4-\dfrac{\ln 5}{5}<4$ فإنّ

$0\le f(x)\le 4$ إذا من أجل $x\in[0;4]$ فإن $f(x)\in[0;4]$.

5. - تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{\ln t}{t}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$.

دراسة وضعية (Δ) بالنسبة إلى (C_f)

$$f(x)-x=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

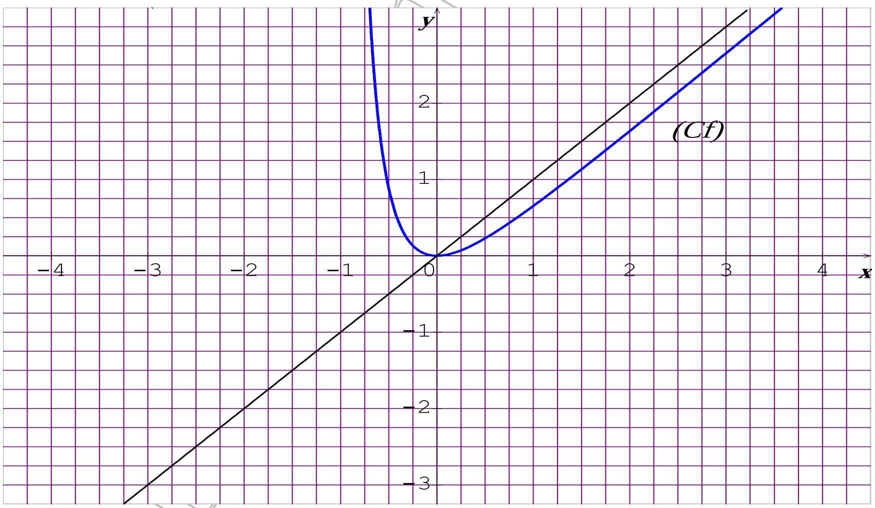
$f(x)-x=0$ يعني $-\ln(x+1)=0$ يكافئ $\ln(x+1)=0$ ويكافئ $x+1=1$ أي $x=0$.

$f(x)-x>0$ يعني $-\ln(x+1)>0$ يكافئ $\ln(x+1)<0$ ويكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$.

$f(x)-x<0$ يعني $-\ln(x+1)<0$ يكافئ $\ln(x+1)>0$ ويكافئ $x+1>1$ أي $x>0$.

x	-1 $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)-x$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ) — (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O. — (C_f) تحت (Δ)

6. رسم كلا من (Δ) و (C_f).



7. h الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\left[\ln(x+1)\right]^2$

أ ـ احسب $h'(x)$.

الدالة h تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $h'(x)=2\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\ln(x+1)=\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}$.

ب ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ: (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما

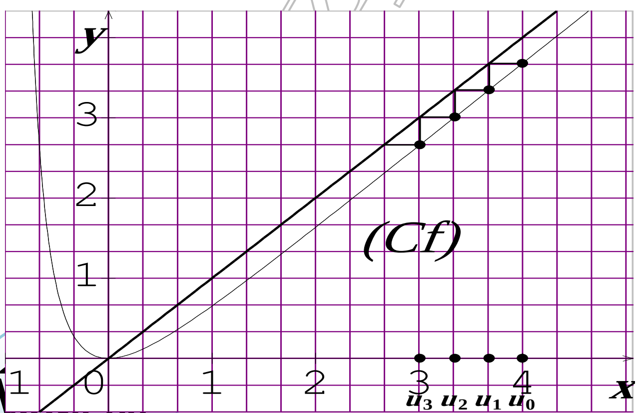
$x=0$ ، $x=1$

$$A=\int_0^1 x-f(x)dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1$$

$$A=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(1+1)\right)^2\right]-\left[\frac{1}{2}\left(\ln(0+1)\right)^2\right]=\frac{1}{2}(\ln 2)^2ua$$

III/ (u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=4\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1. تمثيل على حامل محور الفواصل كلا من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3



2. برهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$0\le u_n\le 4$

لدينا $0\le u_0\le 4$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $0\le u_n\le 4$ وحسب نتيجة السؤال 4 فإنّ

$0\le f(u_n)\le 4$

أي $0\le u_{n+1}\le 4$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$0\le u_n\le 4$ و هذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

3- تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[0;+\infty[$، $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n \le 4$

فإن $f(u_n)-u_n\le 0$ أي $u_{n+1}-u_n\le 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة.

- حساب $\lim u_n$

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ وبما أن $u_{n+1}=f(u_n)$ والدالة مستمرة على $]-1;+\infty[$

فإن $f(l)=l$ ومنه $f(l)-l=0$ وحسب ما سبق $l=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

1. **التحقق أن $-2i$ حلا للمعادلة (1)**

$$(-2i)^2+2(-2i)+4+4i=-4-4i+4+4i=0$$

استنتاج الحل الآخر

إذا كان z حلا للمعادلة (1) فإن $z-2i=\frac{2}{1}=2$ أي $z=2+2i$.

2. أ ـ حساب z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

$$z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-2i+2+4i}{2}=1+i$$

ب ـ تبيين أن: $\frac{z_C-z_I}{z_D-z_I}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$\frac{z_C-z_I}{z_D-z_I}=\frac{2+4i-1-i}{4-1-i}=\frac{1+3i}{3-i}=\frac{i(-i+3)}{3-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $IC=ID$ و $(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IC})=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ICD قائم في I ومتساوي الساقين.

جـ تعيين مع التبرير نوع الرباعي $ABCD$

لدينا $\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{-2+2i+4}{2}=1+i=z_I$ أي منتصف $[BD]$.

بما أن $(ID)\perp(IC)$ فإن $(BD)\perp(AC)$ ولدينا $IC=IA=ID=IB$ أي $AC=BD$.

إذن $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان و متقايستان ومتعامدتان وبالتالي $ABCD$ مربع.

ـ تبيان أن العدد $(z_I)^{2016}$ هو عددا حقيقيا

$z_I=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن $(z_I)^{2016}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}e^{i\frac{2016\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}e^{i504\pi}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}\in\mathbb{R}$.

ـ تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(z_I)^n$ عددا تخيليا صرفا

لدينا $(z_I)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$(z_I)^n$ تخيلي صرف معناه $\arg(z_I)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $n=2+4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

التمرين الثاني :

1. إثبات أنّ النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة .

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$ و $\frac{-5}{-1}\neq\frac{-2}{-1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A، B و C ليست على استقامة واحدة .

2. إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times-1-1\times-1+1\times1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times-2-1\times-5+1\times-1=0$

بما أنّ $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ و الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (ABC) لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x-1;y-2;z-3)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+(z-3)=0$ أي $2x-y+z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. ليكن المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t\,;(t\in\mathbb{R})\\ z=4-t\end{cases}$.

ـ إثبات أنّ النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) وأنّ هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

$D\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases}4=2-2t\\ -2=-1+t\\ 5=4-t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ إذن من أجل $t=-1$ نجد النقطة $D(4;-2;5)$ من المستقيم (Δ).

من التمثيل الوسيطي نجد $\vec{u}(-2;1;-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

و $\vec{n}(2;-1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه $\vec{u}=-\vec{n}$ وعليه الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي فإنّ (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5 ـ تبيين أن H هي مركز ثقل المثلث ABC.

نجد أولا إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

نحل الجملة $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t\\ z=4-t\\ 2x-y+z-3=0\end{cases}$ ومنه $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$.

ومنه $-6t+6=0$ أي $t=1$ إذن $H(0;0;3)$.

لدينا $\overrightarrow{HA}(1;2;0)$، $\overrightarrow{HB}(0;1;1)$ و $\overrightarrow{HC}(-1;-3;-1)$.

ومنه $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(1+0-1;2+1-3;0+1-1)$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}(0;0;0)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ وبما أن النقط A، B و C ليست في استقامية فإن H هي مركز ثقل المثلث ABC.

6. **أ ـ تبيين أنّ:** $BM=\sqrt{6t^2-12t+8}$

$M\in(\Delta)$ معناه إحداثيات M من الشكل $M(2-2t;-1+t;4-t)$.

$$BM=\sqrt{(2-2t-0)^2+(-1+t-1)^2+(4-t-4)^2}=\sqrt{4-8t+4t^2+4-4t+t^2+t^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

أي $BM=\sqrt{6t^2-12t+8}$.

ب - f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{6x^2-12x+8}$

- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{12x-12}{2\sqrt{6x^2-12x+8}}=\dfrac{6(x-1)}{\sqrt{6x^2-12x+8}}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $(x-1)$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

وجدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)\geq\sqrt{2}$ ومنه الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\sqrt{2}$.

وعليه المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) هي $\sqrt{2}$.

التمرين الثالث: (5 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+21} \end{cases}$

1. تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

لدينا $u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_n>0$ ونبرهن أن $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ معناه $3u_n>0$ و $u_n+21>0$ أي $u_{n+1}>0$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

2. تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+21}-u_n=\frac{3u_n-u_n^2-21u_n}{u_n+21}=\frac{-u_n(u_n+18)}{u_n+21}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3. أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\leq\frac{1}{7}u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي ، $u_n>0$ معناه $u_n+21>21$ يكافئ $\dfrac{1}{u_n+21}<\dfrac{1}{21}$ ويكافئ $\dfrac{3u_n}{u_n+21}<\dfrac{3u_n}{21}$

أي $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$.

طريقة ثانية:

لندرس إشارة $7u_{n+1}-u_n$.

$$7u_{n+1}-u_n=\frac{21u_n}{u_n+21}-u_n=\frac{21u_n-u_n^2-21u_n}{u_n+21}=\frac{-u_n^2}{u_n+21}$$

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$ فإنّ $u_n+21>0$ و $-u_n^2<0$ أي $7u_{n+1}-u_n<0$ معناه $7u_{n+1}<u_n$

أي $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$.

aziz_mus1@hotmail.fr

ب- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا $1 = \left(\frac{1}{7}\right)^0$ ومنه $u_0 \le \left(\frac{1}{7}\right)^0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ ونبرهن أن $u_{n+1} \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$.

لدينا $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ معناه $\frac{1}{7}u_n \le \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$ يكافئ $\frac{1}{7}u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ إذن $u_{n+1} \le \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$ ومنه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

جـ - حساب نهاية المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي لدينا $0 < u_n \le \left(\frac{1}{7}\right)^n$ وبما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ فحسب النهايات بالمقارنة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+18} = \frac{\frac{3u_n}{u_n+21}}{\frac{3u_n}{u_n+21}+18} = \frac{\frac{3u_n}{u_n+21}}{\frac{21u_n+378}{u_n+21}} = \frac{3u_n}{21u_n+378} = \frac{3u_n}{21(u_n+18)} = \frac{1}{7}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0}{u_0+18} = \frac{1}{19}$.

ب - $v_n = \frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n$.

استنتاج أن: $u_n = \dfrac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

$v_n = \frac{u_n}{u_n+18}$ معناه $v_n u_n + 18v_n = u_n$ يكافئ $u_n - v_n u_n = 18v_n$ ويكافئ $u_n(1-v_n) = 18v_n$ أي $u_n = \frac{18v_n}{1-v_n}$

وعليه $$u_n = \frac{18\times\frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{18\times\frac{1}{19}\left(\frac{1}{7}\right)^n}{\frac{19-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{19}} = \frac{18\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{18\left(\dfrac{1}{7}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^n} = 0$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right) = 0$.

التمرين الرابع : (06 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -x-1+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x)+f(x)=0$ ، ثم استنتج أن الدالة f فردية

ليكن x عددا حقيقيا:

$$f(-x)+f(x) = x-1+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}-x-1+\frac{2e^x}{e^x+1} = -2+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}+\frac{2e^x}{e^x+1} = -2+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}\left(1+e^x\right)}+\frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$f(-x)+f(x) = -2+\frac{2}{1+e^x}+\frac{2e^x}{e^x+1} = -2+\frac{2+2e^x}{e^x+1} = -2+2=0$$

ومنه $f(-x)=-f(x)$ ومن أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ وعليه الدالة f فردية.

2. حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ واستنتاج نهايتها عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x-1+\dfrac{2e^x}{e^x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x}{e^x+1} = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -f(-x) = \lim_{t\to-\infty} -f(t) = -\infty$$

3. تبيين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = -\dfrac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$.

$$f'(x) = -1+\frac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2} = -1+\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = \frac{-\left(e^x+1\right)^2+2e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = -\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيراتها

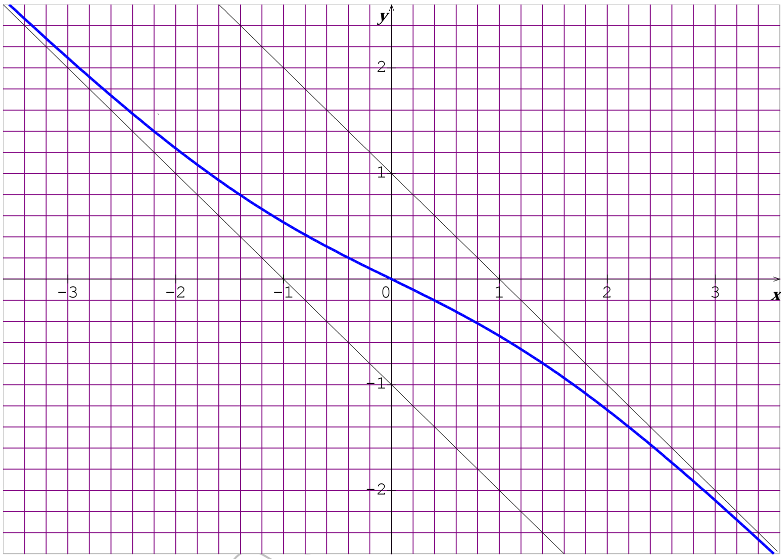
x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

4. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{e^x+1} = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y=-x-1$ و $y=-x+1$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب.

5. رسم المنحني (C_f)



$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{0} f(x)-(-x-1)dx=\int_{\lambda}^{0}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[2\ln\left(e^{x}+1\right)\right]_{\lambda}^{0}=2\ln 2-2\ln\left(e^{\lambda}+1\right)ua$ .6

لدينا $\lim_{\lambda\to-\infty}\ln\left(e^{\lambda}+1\right)=0$ ومنه $\lim_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}2\ln 2-2\ln\left(e^{\lambda}+1\right)=2\ln 2$.