الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبية دورة تدريبية

الشعبة: جميع الشعب. دورة أفريل 2015

اختبار رقم 17 في مادة: الرياضيات إعداد: مصطفاي عبد العزيز

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (خاص بالتقني والرياضي).

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0 = 8$؛ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ: $B_{n+1} = S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1. أنشئ النقط B_1، B_2 و B_3.
2. أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.
3. نعرّف متتالية (u_n) بـ: $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ ـ أثبت أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q.

ب ـ اكتب u_n بدلالة n.

ج ـ نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$؛ احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4. أ ـ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 4y = 2$.

ب ـ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

ـ أوجد قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(-2;0;1)$، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$.

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$، ثمّ استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

2) استنتج أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية وأنّ $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) أ ـ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)؛ المحوري للقطعة $[AB]$.

ب ـ بيّن أنّ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM = CM$ هي مستو (P') معادلته الديكارتية $4y + 2z - 7 = 0$.

جـ ـ بيّن أنّ (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4) أ ـ بيّن أنّ المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها.

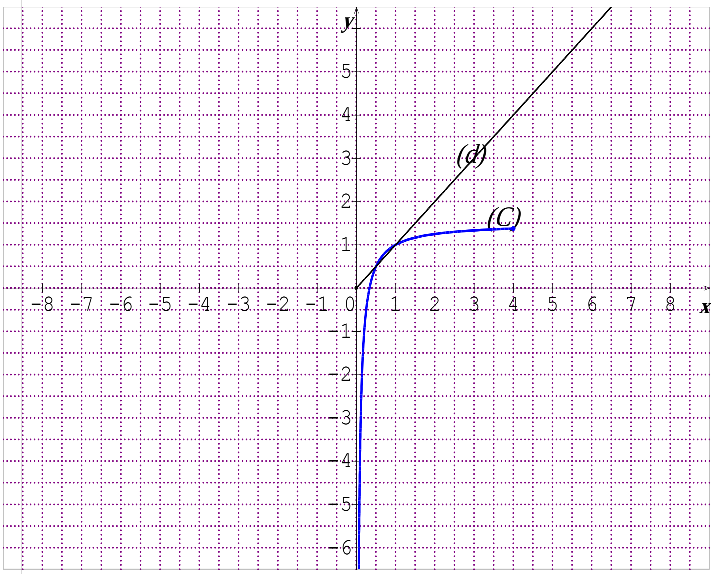
ب ـ استنتج أنّ ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

5) نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha^2-1),(B;\alpha^2+2),(C;-2\alpha^2)\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

ـ عيّن مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:



في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $]0;4]$ بالعلاقة $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1. أ ـ أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;4]$.

ب ـ حدّد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d)

3. نعرّف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ ـ مثّل على محور الفواصل وبدون حساب الحدود: u_0، u_1 و u_2

ب ـ ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

4. أ ـ برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_{n+1}<u_n\le 2$.

ب ـ استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

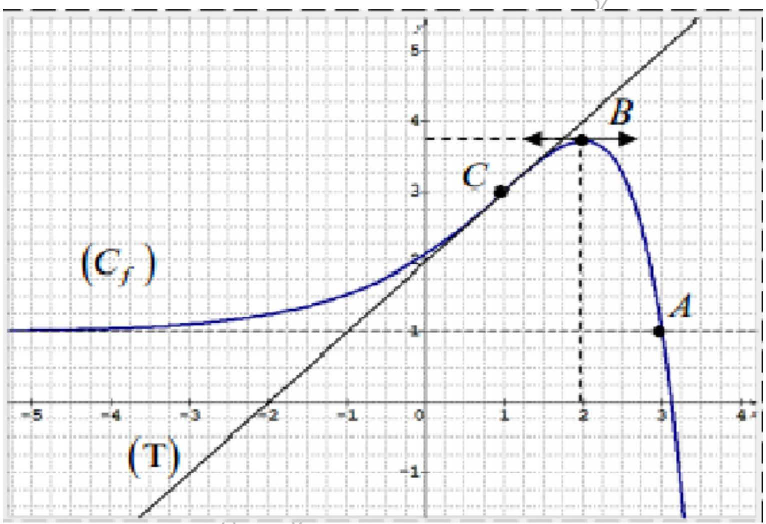
5. أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1<\frac{1}{2}(u_n-1)$.

ب ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n-1<\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ ـ استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$ مرّة أخرى.

التمرين الرابع:

في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة والقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$



المنحني (C) يمر من النقطة $A(3;1)$

ويقبل عند النقطة $B(2;e+1)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل؛ ومماسا (T) يخترق (C) عند النقطة $C(1;3)$.

بقراءة بيانية:

1. عيّن $f'(2)$، $f'(1)$، $f''(1)$، $\lim_{x\to-\infty}f(x)$
2. اكتب معادلة للمماس (T).
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]3;+\infty[$، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$.
4. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.
5. ناقش، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.
6. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;\alpha[$ بـ: $h(x)=f(x)-\ln[f(x)]$.

ـ أعط عبارة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة h، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

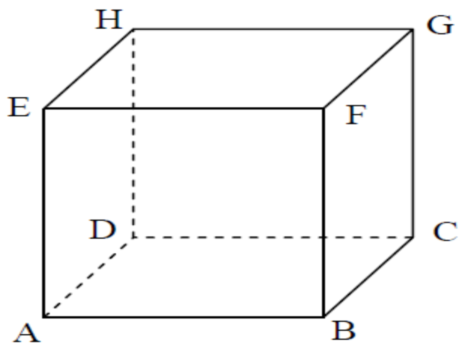
Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1؛ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$

والنقطة K هي مرجح الجملة المثقلة $\{(F;2),(D;1)\}$.



الجزء الأوّل:

1. أثبت أنّ إحداثيات النقطة K هي $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.
2. أثبت أنّ المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان.
3. احسب الطول EK.

الجزء الثاني:

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ حيث $HM=m$ مع $m\in[0;1]$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$ فإن حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$.
2. أثبت أن معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) هي: $(m-1)x+y-mz=0$.
3. نسمي d_m المسافة بين النقطة E والمستوي (MFD).

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$، $d_m=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

ب) عيّن وضعية النقطة M على القطعة $[HG]$ بحيث تكون من أجلها المسافة d_m أكبر ما يمكن.

ج) استنتج أنّه إذا كانت المسافة d_m أكبر ما يمكن فإنّ النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

التمرين الثاني: (خاص بالتقني والرياضي)

1. من أجل كل عدد حقيقي t أنشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$.
2. a، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a=\overline{102}$، $b=\overline{125}$ و $c=\overline{13154}$.
   - أ ـ علما أنّ $ab=c$ جد قيمة العدد الحقيقي p.
   - ب ـ اكتب كلا من الأعداد a، b و c في النظام العشري.
3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x-53y=15......(1)$
   - أ ـ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $x\equiv 52[53]$
   - ب ـ استنتج حلول المعادلة (1).
4. نعتبر الآن x و y عددان طبيعيان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.
   - أ ـ عيّن القيم الممكنة للعدد d.
   - ب ـ جد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.
5. أ ـ ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.
   - ب ـ من أجل كل $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1)؛ عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x\times1432^{2y}$ على 7.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B ، C، D ذات اللاحقات:

$z_A=4-i$ ، $z_B=4+i$ ، $z_C=1+2i$ و $z_D=-i$ على الترتيب.

1) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى D.

أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S محددا نسبته وزاويته.

ب - عيّن z_E لاحقة النقطة E؛ علما أنّ O هي صورة E بالتشابه S.

2) أ - اكتب العدد المركب $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي.

ب - ما طبيعة المثلث BCD .

ج - بيّن أنّ النقط A، B ، D و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|2iz+2-9i|=1$.

أ - تحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ).

ب - عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

التمرين الرابع:

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$، ثمّ تحقق أنّ $0.5<\alpha<1$.

3. عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

II - f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e+1)^2}$.

ب - بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha$، ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة f.

3. أ - بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^x+1}$.

ب - استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

4. ارسم (Δ) و (C_f).

III - 1. بيّن أنه إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإنّ $f(x)\in[0;\alpha]$.

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$ ومن أجل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.

ب - باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: u_0، u_1 و u_2 ثمّ خمّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ - برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم جد نهايتها.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الاوّل:

التمرين الأوّل: (خاص بالتقني والرياضي).

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي بحيث $A_0B_0=8$ ؛ وليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A_0 نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$

نعرّف متتالية النقط (B_n) بـ: $B_{n+1}=S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1. أنشئ النقط B_1 ، B_2 و B_3.

2. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $A_0=S(A_0)$ و $B_{n+1}=S(B_n)$ و $B_{n+2}=S(B_{n+1})$

ومنه المثلث $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ هو صورة المثلث $A_0B_nB_{n+1}$ بالتشابه S وبالتالي المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

3. نعرّف متتالية (u_n) بـ: $u_n=B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ - إثبات أنّ (u_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها q.

لدينا $B_{n+1}=S(B_n)$ و $B_{n+2}=S(B_{n+1})$ إذن $B_{n+1}B_{n+2}=\frac{1}{2}B_nB_{n+1}$ أي $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

ب - كتابة u_n بدلالة n.

$$u_n=u_0q^n=u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ج - نضع: $S_n=u_0+u_1+....+u_n$ ؛ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

$$S_n=u_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=2u_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

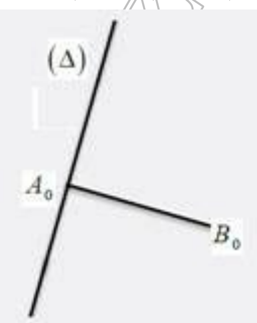
لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2u_0$.

4. أ - حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $3x-4y=2$.

لاحظ أن الثنائية $(2;1)$ حلا للمعادلة لدينا إذن $\begin{cases}3x-4y=2\\3\times2-4\times1=2\end{cases}$ بالطرح نجد $3(x-2)-4(y-1)=0$

ومنه $3(x-2)=4(y-1)$ لدينا 4 يقسم $3(x-2)$ والعددان 4 و 3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 4 يقسم $(x-2)$ ومنه $x-2=4k$ أي $x=4k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في $3(x-2)=4(y-1)$ نجد $3\times4k=4(y-1)$ أي $y=3k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

وبالتالي حلول المعادلة هي الثنائيات من الشكل $(4k+2;3k+1)$ حيث k عدد صحيح.



ب - ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0.

- إيجاد قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ).

لدينا $B_{n+1}=S(B_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

aziz_mus1@hotmail.fr

$B_1=S\left(B_0\right)$

$B_2=S\left(B_1\right)$ ومنه $B_2=S\left(S\left(B_0\right)\right)=S\circ S\left(B_0\right)$

$B_3=S\left(B_2\right)$ ومنه $B_3=S\left(S\circ S\left(B_0\right)\right)=S\circ S\circ S\left(B_0\right)$

$B_n=\underbrace{S\circ S\circ.....\circ S}_{n\ \text{مرة}}\left(B_0\right)$

نعلم أن تركيب التشابهات ذات المركز A_0 والنسبه $\frac{1}{2}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ هو تشابه مباشر مركزه A_0 نسبته $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وزاويته $\frac{3n\pi}{4}$ لدينا B_n صورة B_0 بالتشابه $\underbrace{S\circ S\circ.....\circ S}_{n\ \text{مرة}}$ إذن $\left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}\right)=\frac{3n\pi}{4}$.

$B_n\in(\Delta)$ معناه $\left(\overrightarrow{A_0B_0};\overrightarrow{A_0B_n}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ويكافئ $\frac{3n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $\frac{3n}{4}=\frac{1}{2}+k$ وعليه $3n-4k=2$

وحسب ما سبق $n=4\alpha+2$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

<u>التمرين الثاني:</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(-2;0;1\right)$، $B\left(1;2;-1\right)$ و $C\left(-2;2;2\right)$.

1) **حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.**

النقط $\overrightarrow{AB}\left(3;2;-2\right)$، $\overrightarrow{AC}\left(0;2;1\right)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times0+2\times2-2\times1=2$.

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية $\widehat{BAC}$

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$ إذن $2=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

ومنه $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{AB\times AC}$ لكن $AB=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$ و $AC=\sqrt{0+4+1}=\sqrt{5}$

إذن $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{\sqrt{17\times5}}\approx0.22$ وعليه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\approx77^\circ$.

2) استنتج أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية وأنّ $2x-y+2z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

بما أنّ $\widehat{BAC}\neq0$ و $\widehat{BAC}\neq\pi$ فإنّ النقط A، B و C تعين مستويا.

ولدينا $2x_A-y_A+2z_A+2=2(-2)-0+2(1)+2=0$، $2x_B-y_B+2z_B+2=2(1)-2+2(-1)+2=0$

و $2x_C-y_C+2z_C+2=2(-2)-2+2(2)+2=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة

$2x-y+2z+2=0$ وعليه $2x-y+2z+2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) **أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)؛ المحوري للقطعة $[AB]$.**

لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ إذن $I\left(\frac{-1}{2};1;0\right)$.

المستوي (P) شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}\left(3;2;-2\right)$ إذن له معادلة من الشكل $3x+2y-2z+d=0$ ولدينا $I\in(P)$

يعني $\frac{-3}{2}+2+d=0$ أي $d=\frac{-1}{2}$ ومنه $3x+2y-2z-\frac{1}{2}=0$ وتكافئ $6x+4y-4z-1=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

ب ـ تبيين أنّ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي مستو (P') معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$.

(P') هو المستوي المحوري للقطعة $[AC]$ أي هو المستوي الذي يشمل $H\left(-2;1;\frac{3}{2}\right)$ منتصف $[AC]$ وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$.

إذن المستوي (P') له معادلة من الشكل $2y+z+d=0$ ولدينا $H\in(P')$ تعني $2+\frac{3}{2}+d=0$ أي $d=-\frac{7}{2}$

ومنه $2y+z-\frac{7}{2}=0$ وتكافئ $4y+2z-7=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي (P').

جـ - تبيين أنّ (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases}6x+4y-4z-1=0\\4y+2z-7=0\end{cases}$ وبوضع $y=t$ تصبح الجملة $\begin{cases}6x+4t-4z-1=0.....(1)\\4t+2z-7=0...........(2)\end{cases}$

من (2) نجد $z=-2t+\frac{7}{2}$ وبالتعويض في (1) نجد $6x+4t-4\left(-2t+\frac{7}{2}\right)-1=0$ ومنه $6x+12t-15=0$

أي $x=-2t+\frac{5}{2}$ وعليه $(\Delta):\begin{cases}x=-2t+\frac{5}{2}\\y=t\\z=-2t+\frac{7}{2}\end{cases}$.

4) أ - تبيين أنّ المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا $\vec{u}(-2;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{n}(2;1;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وهما مرتبطان خطيا إذن (Δ) يعامد المستوي (ABC) فهما يتقاطعان في نقطة ω.

لدينا $\omega\in(\Delta)$ ومنه إحداثيات ω من الشكل $\omega\left(-2t+\frac{5}{2};t;-2t+\frac{7}{2}\right)$

ولدينا $\omega\in(ABC)$ معناه $2x_\omega-y_\omega+2z_\omega+2=0$ وعليه $2\left(-2t+\frac{5}{2}\right)-t+2\left(-2t+\frac{7}{2}\right)+2=0$

ويكافئ $-4t+5-t-4t+7+2=0$ أي $t=\frac{14}{9}$ وعليه $\omega\left(-2\left(\frac{14}{9}\right)+\frac{5}{2};\frac{14}{9};-2\left(\frac{14}{9}\right)+\frac{7}{2}\right)$

أي $\omega\left(\frac{-11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$.

ب - استنتاج أنّ ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

لدينا $\omega\in(\Delta)$ معناه $\omega\in(P)$ و $\omega\in(P')$ ومنه $\omega A=\omega B=\omega C$ وبما أنّ $\omega\in(ABC)$ فإن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

5) نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha^2-1),(B;\alpha^2+2),(C;-2\alpha^2)\}$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$.

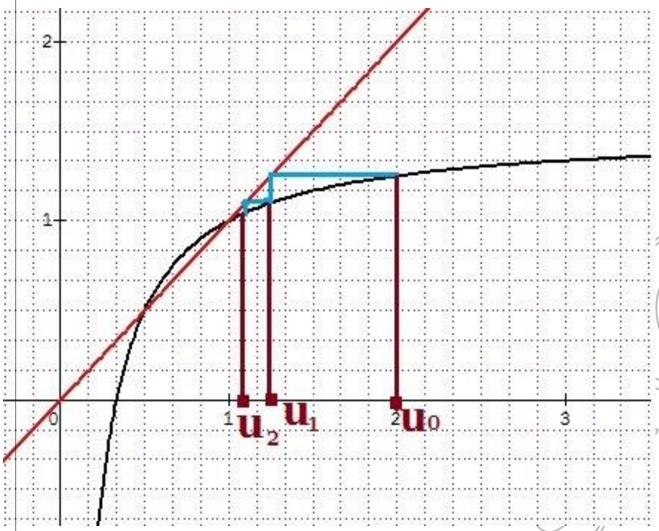
- تعيين مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بما أنّ $(\alpha^2-1)+(\alpha^2+2)-2\alpha^2=1$ فإنّ G_α موجودة من أجل كل عدد حقيقي α.

لدينا
$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = \dfrac{(\alpha^2-1)\times -2+(\alpha^2+2)\times 1-2\alpha^2\times -2}{1} \\ y_{G_\alpha} = \dfrac{(\alpha^2-1)\times 0+(\alpha^2+2)\times 2-2\alpha^2\times 2}{1} \\ z_{G_\alpha} = \dfrac{(\alpha^2-1)\times 1+(\alpha^2+2)\times -1-2\alpha^2\times 2}{1} \end{cases}$$
معناه
$$\begin{cases} x_{G_\alpha} = 3\alpha^2+4 \\ y_{G_\alpha} = -2\alpha^2+4 \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z_{G_\alpha} = -4\alpha^2-3 \end{cases}$$

وبوضع $\alpha^2=\beta$ نجد $\begin{cases} x_{G_\alpha} = 3\beta+4 \\ y_{G_\alpha} = -2\beta+4 \quad (\beta\in\mathbb{R}^+) \\ z_{G_\alpha} = -4\beta-3 \end{cases}$ إذن مجموعة النقط G_α هي نصف مستقيم مبدؤه $J(4;4;-3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(3;-2;-4)$.

التمرين الثالث:



في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة على المجال $]0;4]$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}$، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

1. أ ـ **إثبات أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;4]$.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0;4]$ ولدينا
$$f'(x)=\frac{3(2x)-2(3x-1)}{4x^2}=\frac{1}{2x^2}$$
من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;4]$، $f'(x)>0$
وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0;4]$.

ب ـ تحديد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (d)
$$f(x)-x=\frac{3x-1}{2x}-x=\frac{3x-1-2x^2}{2x}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		4
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$2x$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من أجل $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;4[$، $f(x)-x<0$ ومنه المنحنى (C) يقع تحت (d).

وفي المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$ ، $f(x)-x>0$ ومنه المنحنى (C) يقع تحت (d).

يتقاطعان في نقطتين إحداثيتيهما $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و $(1;1)$.

3. نعرّف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ ـ تمثيل على محور الفواصل الحدود: u_0، u_1 و u_2

ب ـ يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو العدد 1.

4. **أ ـ برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n :** $1 < u_{n+1} < u_n \le 2$.

لدينا $u_1 = f(u_0) = \frac{5}{4}$ ومنه $1 < u_1 < u_0 \le 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $1 < u_{n+1} < u_n \le 2$ ونبرهن أنّ $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \le 2$.

$1 < u_{n+1} < u_n \le 2$ معناه $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \le f(2)$ لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$.

ويكافئ $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \le \frac{5}{4}$ أي $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \le 2$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $1 < u_{n+1} < u_n \le 2$.

ب ـ استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} < u_n$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة وبما أنها محدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

حساب نهايتها.

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$

$u_{n+1} = f(u_n)$ تعني $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة عند العدد l فإنّ $l = f(l)$

ومنه $l = \frac{3l-1}{2l}$ يكافئ $2l^2 - 3l + 1 = 0$ أي $l = 1$ أو $l = \frac{1}{2}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 < u_n \le 2$

فإنّ $l = 1$ إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

5. **أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ليكن n عددا طبيعيا؛

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n - 1}{2u_n}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 1$ معناه $2u_n > 2$ يكافئ $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ وبما أن $u_n - 1 > 0$، فإن

$\frac{u_n - 1}{2u_n} < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ أي $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ب ـ استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

نستعمل البرهان بالتراجع.

لدينا $u_0 - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\frac{1}{2}(u_n - 1) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $\frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ وحسب السؤال السابق لدينا

من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومنه $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{2}(u_n - 1) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ أي $u_{n+1} - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ - استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرّة أخرى.

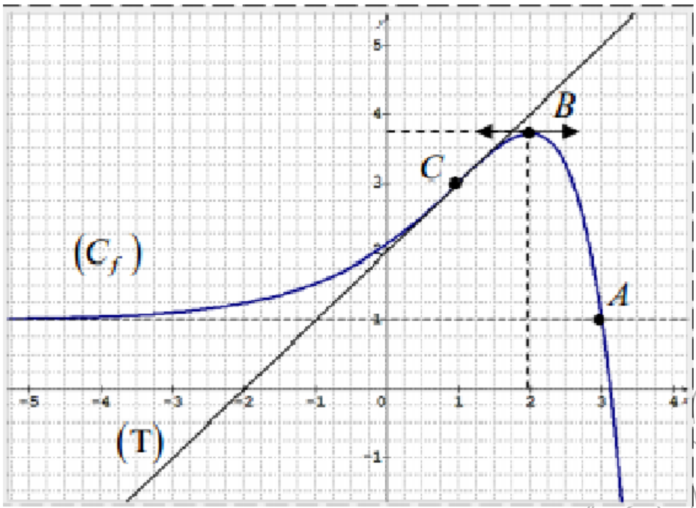
لدينا $0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ حسب النهايات بالمقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

<u>التمرين الرابع:</u>

في الشكل المقابل (C) هو التمثيل البياني للدّالة f المعرّفة والقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

المنحنى (C) يمر من النقطة $A(3;1)$

ويقبل عند النقطة $B(2;e+1)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل؛ ومماسا (T) يخترق (C) عند النقطة $C(1;3)$.



بقراءة بيانية:

1. تعيين $f'(2)$، $f'(1)$، $f''(1)$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$f'(2)=0$ لأنّ المماس عند النقطة B ذات الفاصلة 2 ميله معدوم

$f'(1)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1 أي هو معامل توجيه المماس (T).

$$f'(1) = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$$

لدينا المماس (T) يخترق المنحنى (C) عند نقطة التماس $C(1;3)$ وهذا يعني أن النقطة $C(1;3)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) وبما أن الدالة تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن $f''(1)=0$.

2. كتابة معادلة للمماس (T).

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y = 1(x-1)+3$ أي $(T): y = x+2$.

3. تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]3;+\infty[$.

لدينا الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ فهي مستمرة على هذا المجال وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ و $0 \in]-\infty;1]$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]3;+\infty[$.

استنتاج إشارة $f(x)$.

من البيان نستخلص إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4. تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

5. المناقشة، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

إذا كان $m\in[3;+\infty[$ فإنّ $f(m)\in]-\infty;1]$ ومنه المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $m\in]-\infty;2[\cup]2;3[$ فإنّ $f(m)\in]1;e+1[$ ومنه المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=2$ فإن $f(m)=e+1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

6. لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;\alpha[$ بـ: $h(x)=f(x)-\ln[f(x)]$.

- عبارة $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(x)(f(x)-1)}{f(x)}$$

- استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة h.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;\alpha[$، $f(x)>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)(f(x)-1)$.

من أجل $x\in]-\infty;3[$، $f(x)>1$ أي $f(x)-1>0$

من أجل $x\in]3;+\infty[$، $f(x)<1$ أي $f(x)-1<0$

توضيح: في المجال $]-\infty;3[$، (C) يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y=1$ أي $f(x)>1$

x	$-\infty$		2		3		α
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة h متزايدة على كل من $]-\infty;2]$ و $[3;\alpha[$ ومتناقصة تماما على $[2;3]$.

جدول تغيّرات الدالة h.

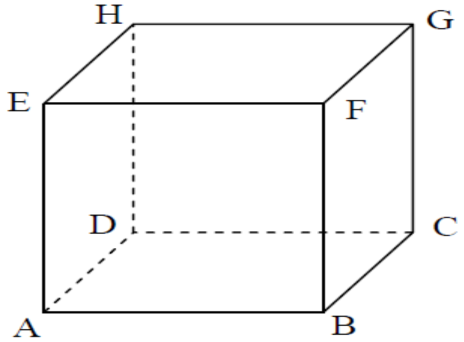
x	$-\infty$		2		3		α
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

حل الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1؛ الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$

والنقطة K هي مرجح الجملة المثقلة $\{(F;2),(D;1)\}$.



الجزء الأوّل:

1. إثبات أنّ إحداثيات النقطة K هي $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

لدينا $D(0;0;0)$، $F(1;1;1)$

$2\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ معناه $2\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

aziz_mus1@hotmail.fr

يكافئ $3\overrightarrow{KD}=-2\overrightarrow{DF}$ أي $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$ ومنه

$x_K=\frac{2}{3}x_F$ ، $y_K=\frac{2}{3}y_F$ و $z_K=\frac{2}{3}z_F$ وبالتالي إحداثيات K هي $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ في المعلم $\left(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$.

2. إثبات أنّ المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان.

لدينا $E(1;0;1)$ ومنه $\overrightarrow{EK}\left(\frac{2}{3}-1;\frac{2}{3};\frac{2}{3}-1\right)$ أي $\overrightarrow{EK}\left(\frac{-1}{3};\frac{2}{3};\frac{-1}{3}\right)$ ولدينا $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$.

إذن $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times1-\frac{1}{3}\times1=\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{EK}\perp\overrightarrow{DF}$ وبالتالي المستقيمان (EK) و (DF) متعامدان.

3. حساب الطول EK.

$$EK=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

<u>الجزء الثاني:</u>

لتكن M نقطة من القطعة $[HG]$ حيث $HM=m$ مع $m\in[0;1]$

1. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$ فإن حجم رباعي الوجوه $EMFD$ يساوي $\frac{1}{6}$.

$V(EMFD)=\frac{1}{3}S(EMF)\times DH$ ؛ لتكن I المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (EF) إذن

$MI=HE=1$ وعليه $S(EMF)=\frac{EF\times MI}{2}=\frac{1}{2}ua$.

وبالتالي $V(EMFD)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}uv$.

2. إثبات أن معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) هي: $(m-1)x+y-mz=0$.

لدينا $D(0;0;0)$ ، $F(1;1;1)$ و $M(0;m;1)$.

$$(m-1)x_D+y_D-mz_D=(m-1)\times0+0-m\times0=0$$
$$(m-1)x_F+y_F-mz_F=(m-1)\times1+1-m\times1=0$$
$$(m-1)x_M+y_M-mz_M=(m-1)\times0+m-m\times1=0$$

ومنه إحداثيات النقط D ، F و M تحقق المعادلة $(m-1)x+y-mz=0$ وعليه $(m-1)x+y-mz=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (MFD).

3. نسمي d_m المسافة بين النقطة E والمستوي (MFD).

أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $[0;1]$، $d_m=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

لدينا $E(1;0;1)$ إذن $d_m=\frac{|(m-1)\times1+0-m|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

ب) تعيين وضعية النقطة M على القطعة $[HG]$ بحيث تكون من أجلها المسافة d_m أكبر ما يمكن.

تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن عندما يكون $\sqrt{2m^2-2m+2}$ أصغر ما يمكن.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f\left(m\right)=\sqrt{2m^2-2m+2}$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0;1]$ ولدينا $f\,'\left(m\right)=\dfrac{4m-2}{2\sqrt{2m^2-2m+2}}=\dfrac{2m-1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

إشارة $f\,'\left(m\right)$ هي نفس إشارة $2m-1$.

$f\,'\left(m\right)=0$ تعني $2m-1=0$ أي $m=\dfrac{1}{2}$.

$f\,'\left(m\right)>0$ تعني $2m-1>0$ أي $\dfrac{1}{2}<m<1$.

$f\,'\left(m\right)<0$ تعني $2m-1<0$ أي $0<m<\dfrac{1}{2}$.

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f\,'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		$\searrow$		$\nearrow$	

تكون $f\left(m\right)$ أصغر ما يمكن من أجل $m=\dfrac{1}{2}$ وبالتالي تكون المسافة d_m أكبر ما يمكن عندما يكون $m=\dfrac{1}{2}$

وبالتالي M تكون منتصف القطعة $[HG]$.

ج) استنتاج أنّه إذا كانت المسافة d_m أكبر ما يمكن فإنّ النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (MFD)

من أجل $m=\dfrac{1}{2}$ تكون $-\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}z=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (MFD) شعاعه الناظمي $\vec{n}\left(\dfrac{-1}{2};1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

لدينا $-\dfrac{1}{2}x_K+y_K-\dfrac{1}{2}z_K=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=0$ ومنه $K\in\left(MFD\right)$.

ولدينا $\overrightarrow{EK}\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$ ومنه $\overrightarrow{EK}=\dfrac{2}{3}\vec{n}$ أي $\overrightarrow{EK}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة E على المستوي $\left(MFD\right)$.

يمكن إثبات أنّ $K\in\left(MFD\right)$ و $d_{\frac{1}{2}}=EK$.

<u>التمرين الثاني:</u> (خاص بالتقني والرياضي)

1. نشر العبارة $\left(t-6\right)\left(t^2+1\right)$ من أجل كل عدد حقيقي t

$\left(t-6\right)\left(t^2+1\right)=t^3+t-6t^2-6$

2. a، b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a=\overline{102}$، $b=\overline{125}$ و $c=\overline{13154}$.

أ ـ علما أنّ $ab=c$ إيجاد قيمة العدد الحقيقي p.

لدينا $a=2\times p^0+0\times p^1+p^2=2+p^2$، $b=5\times p^0+2\times p^1+p^2=5+2p+p^2$

$b=4\times p^0+5\times p^1+p^2+3p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

$ab=c$ معناه $(2+p^2)(5+2p+p^2)=4+5p+p^2+3p^3+p^4$

ويكافئ $10+4p+2p^2+5p^2+2p^3+p^4=4+5p+p^2+3p^3+p^4$ ويكافئ $p^3-6p^2+p-6=0$

أي $(t-6)(t^2+1)=0$ ومنه $t=6$.

ب ـ كتابة كلا من الأعداد a، b و c في النظام العشري.

$a=2+6^2=38$، $b=5+2\times6+6^2=53$ و $c=4+5\times6+6^2+3\times6^3+6^4=2014$

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $38x-53y=15 ....(1)$

أ ـ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $x\equiv52[53]$

$38x-53y=15$ يكافئ $38x=15+53y$ و هذا يعني أن $38x\equiv15[53]$ ولدينا $38\equiv-15[53]$

ومنه $-15x\equiv15[53]$ أي $x\equiv-1[53]$ وعليه $x\equiv52[53]$.

ب ـ استنتاج حلول المعادلة (1).

لدينا $x=53k+52$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في (1) نجد $38(53k+52)-53y=15$ ومنه $y=38k+37$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x;y)$ من الشكل $(53k+52;38k+37)$ و $k\in\mathbb{Z}$

4. نعتبر الآن x و y عددان طبيعيان ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ ـ تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $38x-53y$ أي d يقسم 15 وبالتالي $d\in\{1;3;5;15\}$.

ب ـ إيجاد كل الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون $d=15$.

نضع $x=15x'$ و $y=15y'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما.

نحصل على $38\times15x'-53\times15y'=15$ ومنه $38x'-53y'=1$ لدينا الثنائية $(7;5)$ حلا خاصا للمعادلة

ومنه $\begin{cases}38x'-53y'=1\\38\times7-53\times5=1\end{cases}$ بالطرح نجد $38(x'-7)-53(y'-5)=0$ أي $38(x'-7)=53(y'-5)$

لدينا 53 يقسم $38(x'-7)$ والعددان 53 و 38 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 53 يقسم $x'-7$ ومنه $x'-7=53\alpha$ أي $x'=53\alpha+7$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبالتعويض في $38(x'-7)=53(y'-5)$ نجد $38\times53\alpha=53(y'-5)$ ومنه $y'-5=38\alpha$ أي $y'=38\alpha+5$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ وبما أنّ $38x'-53y'=1$ فإنه حسب مبرهنة بيزو يكون العددان x' و y' أوليان فيما بينهما وبالتالي $x=15(53\alpha+7)$ أي $x=795\alpha+105$ و $y=15(38\alpha+5)$ أي $y=570\alpha+75$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

5. أ ـ دراسة، حسب قيّم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

لدينا $4^0\equiv1[7]$، $4^1\equiv4[7]$، $4^2\equiv2[7]$ ، $4^3\equiv1[7]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p، $4^{3p}\equiv1[7]$، $4^{3p+1}\equiv4[7]$ و $4^{3p+2}\equiv2[7]$.

ب ـ من أجل كل $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x\times1432^{2y}$ على 7.

$2013^x\times1432^{2y}=2013^{53k+52}\times1432^{2(38k+37)}$

لدينا $2013\equiv4[7]$ و $1432\equiv4[7]$ معناه $2013^x\times1432^{2y}\equiv4^{53k+52}\times4^{2(38k+37)}[7]$

ويكافئ $2013^x\times1432^{2y}\equiv4^{129k+126}[7]$ ويكافئ $2013^x\times1432^{2y}\equiv4^{3(43k+42)}[7]$ أي $2013^x\times1432^{2y}\equiv1[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x\times1432^{2y}$ على 7 هو 1.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

التمرين الثالث:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C، D ذات اللاحقات: $z_A=4-i$، $z_B=4+i$، $z_C=1+2i$ و $z_D=-i$ على الترتيب.

1) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى D.

أ ـ كتابة العبارة المركبة للتشابه S محددا نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z'-z_A=\alpha(z-z_A)$ وبما أنّ $S(B)=D$ فإنّ $z_D-z_A=\alpha(z_B-z_A)$

أي $\alpha=\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=2i$ إذن الكتابة المركبة للتشابه S هي $z'-z_A=2i(z-z_A)$ وبعد التبسيط نجد $z'=2iz+2-9i$.

نسبة التشابه S هي 2 وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

ب ـ تعيين z_E لاحقة النقطة E؛ علما أنّ O هي صورة E بالتشابه S.

$S(E)=O$ معناه $0=2iz_E+2-9i$ ومنه $z_E=\dfrac{-2+9i}{2i}$ أي $z_E=\dfrac{9}{2}+i$.

2) **أ ـ كتابة العدد المركب $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري ثمّ على الشكل الأسي.**

$$\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-i-4-i}{1+2i-4-i}=\frac{-4-2i}{-3+i}=\frac{(-4-2i)(-3-i)}{10}=\frac{12+4i+6i-2}{10}$$

$$\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

ب ـ تعيين طبيعة المثلث BCD.

لدينا $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه $\begin{cases}\dfrac{BD}{BC}=\sqrt{2}\\(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

إذن $\cos(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\dfrac{BC}{BD}$ ومنه المثلث BCD قائم في C لأن النسب المثلثية محققة.

وبما أنّ $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\pi}{4}$ و $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}$ فإنّ $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})=\dfrac{\pi}{4}$ أي المثلث BCD متساوي الساقين.

وبالتالي المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين.

طريقة ثانية:

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$ ومنه $\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})^2=BD^2+BC^2-2\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}$

$CD^2=BD^2+BC^2-2\left(BD\times BC\cos(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})\right)$ لكن $BD=\sqrt{2}BC$ و $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\dfrac{\pi}{4}$

إذن $CD^2=(\sqrt{2}BC)^2+BC^2-2\left(\sqrt{2}BC\times BC\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=3BC^2-2BC^2$

ومنه $CD^2=BC^2$ أي $CD=BC$ ومنه المثلث BCD متساوي الساقين رأسه C.

aziz_mus1@hotmail.fr

وبما أنّ $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\pi}{4}$ فإن $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{4}$ وبالتالي $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}$.

وبالتالي المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين.

طريقة ثالثة:

$\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=1+i$ معناه $\frac{z_D-z_B+z_C-z_C}{z_C-z_B}=1+i$ وتكافئ $\frac{-z_B+z_C}{z_C-z_B}+\frac{z_D-z_C}{z_C-z_B}=1+i$

وتكافئ $1-\frac{z_C-z_D}{z_C-z_B}=1+i$ أي $\frac{z_C-z_D}{z_C-z_B}=-i$ وبالتالي المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين.

ج - تبيين أنّ النقط A، B ، D و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا المثلث BCD قائم في C وهذا يعني أنّ النقط B ، D و C تنتمي لنفس الدائرة التي قطرها $[BD]$

ولدينا $S(B)=D$ معناه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي المثلث ABD قائم في A ومنه النقطة A أيضا تنتمي للدائرة التي قطرها $[BD]$ وبالتالي النقط A، B ، D و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها $[BD]$ وهذه الدائرة مركزها ω ذات اللاحقة 2 منتصف القطعة $[BD]$ ونصف قطرها $\omega D=\sqrt{5}$.

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|2iz+2-9i|=1$.

أ - التحقق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ).

لدينا $|2iz_B+2-9i|=|z_D|=1$ ومنه النقطة B تنتمي إلى (Γ).

ب - تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة.

$|2iz+2-9i|=1$ معناه $|z'|=1$ وتكافئ $OM'=1$ حيث z' لاحقة النقطة M' صورة النقطة M بالتشابه S.

S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ و $S(E)=O$ إذن $OM'=2EM$ ومنه $2EM=1$ أي $EM=\frac{1}{2}$

وبالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

<u>التمرين الرابع:</u>

I- لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1. دراسة تغيّرات الدالة g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-e^x-xe^x=e^x(-1-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $e^x>0$ و $-1-x<0$ إذن $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

$g(0)=1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-xe^x=-\infty$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	1 $\searrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;1]$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]-\infty;1]$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;+\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

التحقق أنّ $0.5<\alpha<1$.

لدينا $g(0.5)\approx 018$ و $g(1)\approx -1.71$ إذن $g(0.5)\times g(1)<0$ ومنه $0.5<\alpha<1$.

3. تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

من أجل $x\in[0;\alpha[$، $g(x)>0$ ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ كما أن $g(\alpha)=0$.

II - f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

2. أ - تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e+1)^2}$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{e^x+1-e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب - تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha$،

$$f(\alpha)-\alpha=\frac{\alpha+1}{e^\alpha+1}-\alpha=\frac{\alpha+1-\alpha e^\alpha-\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{g(\alpha)}{e^\alpha+1}$$

لكن $g(\alpha)=0$ إذن $f(\alpha)-\alpha=0$ أي $f(\alpha)=\alpha$.

تشكيل جدول تغيّرات الدالة f.

لدينا إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$، وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;\alpha[$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

3. أ ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^x+1}$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;+\infty[$.

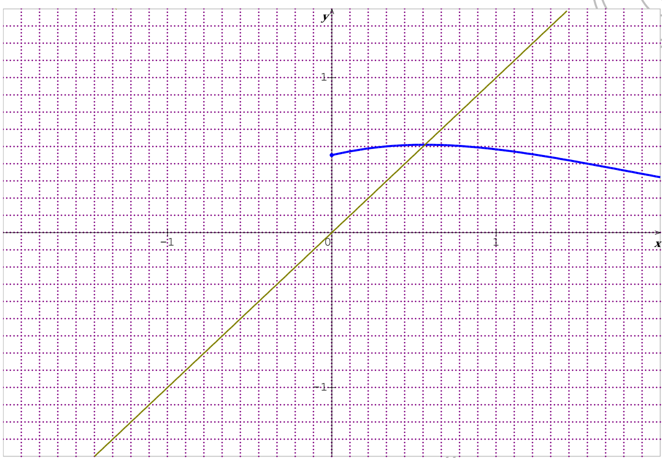
$$f(x)-x=\frac{x+1}{e^x+1}-x=\frac{x+1-xe^x-x}{e^x+1}=\frac{1-xe^x}{e^x+1}=\frac{g(x)}{e^x+1}$$

ب ـ استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

إشارة $f(x)-x$ هي نفس إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) متقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\alpha)$	(C_f) تحت (Δ)	

4. رسم (Δ) و (C_f).



III - 1. تبيين أنه إذا كان $x\in[0;\alpha]$ فإنّ $f(x)\in[0;\alpha]$.

لدينا الدالة f متزايدة تماما عل المجال $[0;\alpha]$.

إذا كان $0\le x\le\alpha$ فإن $f(0)\le f(x)\le f(\alpha)$ ومنه

$\frac{1}{2}\le f(x)\le\alpha$ أي $0\le f(x)\le\alpha$.

إذن من أجل كل $x\in[0;\alpha]$ فإنّ $f(x)\in[0;\alpha]$.

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ ـ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.

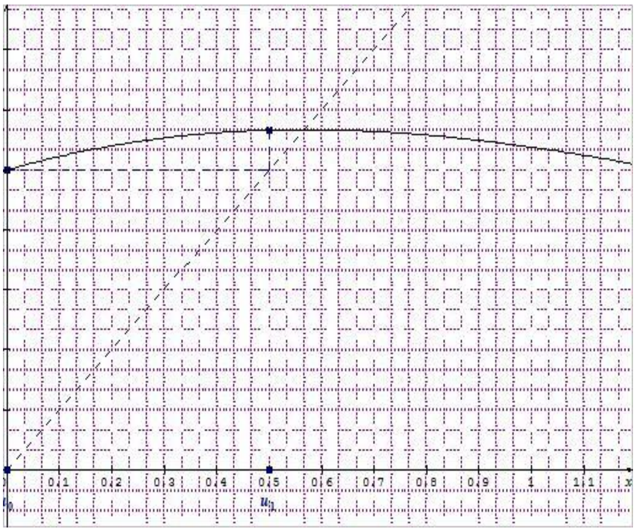
$u_1=f(u_0)=\frac{1}{2}$ ومنه $0\le u_0\le u_1\le\alpha$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$ ونبرهن صحة الخاصية $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha$.

لدينا $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ وحسب نتيجة السؤال السابق فإن

$0\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le\alpha$ أي $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le\alpha$.

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.



ب ـ تخمين إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

من الرسم يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

جـ ـ برهان أن المتتالية (u_n) متقاربة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le u_{n+1}$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة.

ايجاد نهايتها.

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$

إذن l يحقق $l = f(l)$ وبما أن $f(\alpha) = \alpha$ فإنّ $l = \alpha$

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr