الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة تدريبية

الشعبة: جميع الشعب. — دورة ماي 2015

الحل المفصّل للاختبار رقم 19. — إعداد: مصطفاي عبد العزيز

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-5z^2+8z-6$

أ) تحقّق أنّ 3 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)$.

جـ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2z_B$ و $z_D=\mathrm{Re}(z_C+z_A)$.

أ) عيّن مركز الدوران R الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول A إلى C.

ب) بيّن أنّ النقط A، B، C تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) عيّن $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معيّنا.

3) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث:

$z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$.

أ) عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

ب) جد لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T، ثمّ بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان.

4) أ) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z-z_C=z_A.\overline{z_A}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

ب) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$.

1. بيّن أنّ النقط A، B، D تعيّن مستويا .

2. بيّن أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).

3. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

4. H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB).

أ ـ احسب إحداثيات النقطة H.

ب ـ استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

جـ ـ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

5. لتكن (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MB^2-MA^2=28$.

أ ـ تحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (γ).

ب ـ عيّن طبيعة المجموعة (γ).

التمرين الثالث:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها.
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n=\ln(u_n)$.

أ ـ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب ـ اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

4. نضع $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $P_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_n$.

أ ـ احسب S_n ثم P_n بدلالة n.

ب ـ عين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n=e^{\frac{7}{4}}$.

التمرين الرابع:

I - 1. الدّالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة u.

ب ـ بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ ـ بيّن أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v).

ب ـ أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $v(x)\leq 0$.

جـ ـ استنتج، أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $\frac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$.

3. أثبت أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
3. احسب $f(1)$، ثمّ مثّل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$.

(**نأخذ:** $f(2)\approx 2,3$ ، $f(1,64)\approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(0;2;-1\right)$، $B\left(0;0;1\right)$، $C\left(0;0;-1\right)$ و $H\left(0;0;h\right)$ حيث h عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

1/ حدّد معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_h\right)$ المار من النقطة H والمتعامد مع المستقيم $\left(BC\right)$.

2/ أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$.

ب/ حدد المستقيم $\left(AB\right)$ بمعادلتين ديكارتيتين.

جـ/ تحقق أن المستقيم $\left(AB\right)$ يقطع المستوي $\left(P_h\right)$ في النقطة $N\left(0;1-h;h\right)$.

3/ $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ مستقيمان من الفضاء معرّفان كما يلي :

$$\left(\Delta\right):\begin{cases}x-z=1\\y=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \left(\Delta'\right):\begin{cases}x=-2t+2\\y=2t\\z=-2t+1\end{cases};\left(t\in\mathbb{R}\right)$$

- عيّن بدلالة h إحداثيات P و Q نقطتي تقاطع $\left(P_h\right)$ مع كل من $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ على الترتيب.

4/ أ/ بين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل .

ب/ نفرض أن h ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ بيّن أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت يطلب تحديده.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتاليتين $\left(u_n\right)$ و $\left(v_n\right)$ العدديتين حيث: $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $v_n=\frac{n\pi}{3}$ ونسمي M_n النقطة التي لاحقتها z_n حيث: $z_n=u_ne^{iv_n}$

1) أ) بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ هندسية و $\left(v_n\right)$ حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأوّل لكل منهما.

ب) عيّن مجموعة قيّم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى محور الفواصل.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ وحدة الطول $4cm$.

أ) عين لواحق النقط M_0، M_1، M_2 و M_3.

ب) احسب أطوال المثلث OM_nM_{n+1} بدلالة u_n.

جـ) ما طبيعة المثلث OM_nM_{n+1}.

3) نعتبر المتتالية $\left(a_n\right)$ المعرفة بـ: $a_n=\left|z_{n+1}-z_n\right|$.

أ) بيّن أن $\left(a_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}.$$

1. أ ـ احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأوّل u_1.

ب ـ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

جـ ـ احسب S_n بدلالة n حيث: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$؛ ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$.

2. (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$.

أ ـ احسب v_2 و v_3.

ب ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$.

ـ بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ ـ اكتب w_n بدلالة n، ثمّ استنتج v_n بدلالة n.

التمرين الرابع:

I ـ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. احسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
3. شكل جدول تغيّرات الدالة f.
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.
5. احسب $f(1)$ ثم ارسم (C_f).
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.
7. أ ـ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب ـ احسب بـ cm^2 وبدلالة المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$، ثم احسب $\lim_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)$.

II ـ نسمي f^n المشتقة من الرتبة n حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $f^n(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.
2. نرمز بـ(C_n) للمنحنى الممثل للدالة f^n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ولتكن النقطة $M_n(x_n;y_n)$ من (C_n) والتي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل.

أ ـ احسب y_n و x_n بدلالة n، ثمّ تحقّق أنّ M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y=\frac{e^{2x}}{4^x}$.

ب ـ أثبت أنّ (x_n) متتالية حسابية، احسب نهايتها.

جـ ـ أثبت أنّ (y_n) متتالية هندسية، احسب نهايتها.

Mostefai
A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-5z^2+8z-6$

أ) التحقّق أنّ 3 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$P(3)=3^3-5\times3^2+8\times3-6=27-45+24-6=0$

ب) ايجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)$.

$(z-3)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+(\alpha-3)z^2+(\beta-3\alpha)-3\beta$ وبالمطابقة مع z^3-5z^2+8z-6 نجد

$\alpha-3=-5$ و $-3\beta=-6$ أي $\alpha=-2$ و $\beta=2$.

إذن $P(z)=(z-3)(z^2-2z+2)$

جـ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ معناه $z=3$ أو $z^2-2z+2=0.....(1)$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=1-2=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=1+i$ و $z_2=1-i$.

إذا $P(z)=0$ يكافئ $z\in\{3;1+i;1-i\}$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2z_B$ و $z_D=\mathrm{Re}(z_C+z_A)$.

أ) تعيين مركز الدوران R الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ و يحول A إلى C.

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ ومنه $z'=iz+b$ وبما أنّ $R(A)=C$

فإن $z_C=iz_A+b$ ومنه $b=z_C-iz_A$ أي $b=3-3i$.

وعليه العبارة المركبة للدوران R هي $z'=iz+3-3i$.

ومنه مركز الدوران R هو النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{3-3i}{1-i}=3=z_D$ أي مركزه النقطة D.

ب) تبيان أنّ النقط A، B، C تنتمي إلى دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $R(A)=C$ معناه النقطة D تنتمي إلى محور القطعة $[AC]$ لأن مركز الدوران R هي D.

ولدينا $z_B=\overline{z_A}$ معناه محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل وبما z_D هو عدد حقيقي فإن النقطة D تنتمي إلى

إلى محور الفواصل أي تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ وهذا يعني أن D تنتمي إلى تقاطع محاور المثلث ABC

وبالتالي النقط A، B، C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $DA=\sqrt{5}$.

جـ) تعيين $z_{D'}$ لاحقة النقطة D' حتى يكون الرباعي $ADBD'$ معيّنا.

$ADBD'$ معيّن معناه $ADBD'$ متوازي أضلاع لأنّ $DA=DB$.

$ADBD'$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{DA}$ ويكافئ $z_{D'}-z_B=z_A-z_D$ ويكافئ $z_{D'}=z_A-z_D+z_B$

أي $z_{D'}=-1$.

3) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث:

$z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$.

أ) تعيين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$z'-1+i=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1+i)$ معناه $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_B)$ أي T هو دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) ايجاد لاحقة النقطة E صورة النقطة O بالتحويل T.

$T(O)=E$ معناه $z_E-z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_O-z_B)$ وتكافئ $z_E=i(-z_B)+z_B$ أي $z_E=z_B(1-i)=-2i$.

تبيين أنّ المستقيمين (AB) و (CE) متعامدان.

لدينا $z_A-z_B=2i$ و $z_C-z_E=2$ إذن $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_E}=i$ وهذا يعني أنّ $(\overrightarrow{EC};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$ ومنه المستقيمان (AB) و (CE) متعامدان.

4) **أ) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z-z_C=z_A.\overline{z_A}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.**

$z-z_C=z_A.\overline{z_A}e^{i\theta}$ معناه $z-z_C=|z_A|^2e^{i\theta}$ و $\theta\in\mathbb{R}$ ويكافئ $z-z_C=2e^{i\theta}$ و $\theta\in\mathbb{R}$ أي $|z-z_C|=2$

وبالتالي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 2.

ب) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ معناه $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ وبالتالي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

<u>التمرين الثاني:</u>

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$\overrightarrow{AD}(1;5;2)$ ، $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$ ، $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$ و $C(2;8;-4)$.

1. **تبيين أنّ النقط A ، B ، D تعيّن مستويا .**

الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطيا لأن $x_{\overrightarrow{BD}}=0$ و $x_{\overrightarrow{AD}}\neq 0$ ومنه النقط A، B و D تعيّن مستويا .

2. **تبيين أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).**

لدينا $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}=1\times1-3\times5+7\times2=0$ و $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}=1\times0-3\times7+7\times3=0$ ومنه $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{BD}$

ومنه $\overrightarrow{CD}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABD) وبالتالي المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD).

3. **كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).**

لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ هي $(1;-2;-1)$ وعليه $\overrightarrow{AB}(1;-2;-1)$.

ولدينا $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$ إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$ هي $(2;0;1)$ إذن $\overrightarrow{OA}(2;0;1)$ أي $A(2;0;1)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AB) لدينا $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

ومنه $\begin{cases}x=2+t\\ y=-2t\\ z=1-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

4. H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB).

أ ـ حساب إحداثيات النقطة H.

لدينا $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$ معناه $\overrightarrow{OD}(3;5;3)$ وعليه $D(3;5;3)$.

$H \in (AB)$ معناه إحداثيات النقطة H من الشكل $H\left(2+t;-2t;1-t\right)$ ومنه $\overrightarrow{DH}\left(-1+t;-2t-5;-2-t\right)$.

ولدينا $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB}=0$ معناه $1(-1+t)-2(-2t-5)-(-2-t)=0$ ويكافئ $11+6t=0$ أي $t=-\frac{11}{6}$.

وعليه $H\left(2-\frac{11}{6};-2\left(-\frac{11}{6}\right);1+\frac{11}{6}\right)$ أي $H\left(\frac{1}{6};\frac{11}{3};\frac{17}{6}\right)$.

ب ـ استنتاج المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

لدينا $DH=\sqrt{\left(\frac{1}{6}-3\right)^2+\left(\frac{11}{3}-5\right)^2+\left(\frac{17}{6}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{354}}{6}$ وعليه $d\left(D;(AB)\right)=DH=\frac{\sqrt{354}}{6}$.

جـ ـ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه يعطى $\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع.

فإنّ $V(ABCD)=\frac{1}{3}S(ABD)\times d$ ، حيث d هو بُعد النقطة C عن المستوي (ABD)

بما أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD) فإنّ النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (ABD) أي $d=CD$.

ولدينا $AB=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ ، $CD=\sqrt{1^2+(-3)^2+7^2}=\sqrt{59}$.

وعليه $V(ABCD)=\frac{1}{3}\times\frac{AB.DH}{2}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{59}}{2}\times\sqrt{59}=\frac{59}{6}uv$.

5. لتكن (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $MB^2-MA^2=28$.

أ ـ التحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (γ).

لدينا $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}$ وإحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BD}$ هي $(1;-10;4)$ وعليه $\overrightarrow{CB}(1;-10;4)$.

إذن $CB^2=1^2+(-10)^2+4^2=117$

ولدينا $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$ وإحداثيات الشعاع $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$ هي $(0;-8;5)$ وعليه $\overrightarrow{CA}(0;-8;5)$.

إذن $CA^2=0+64+25=89$ وعليه $CB^2-CA^2=117-89=28$ وبالتالي $C\in(\gamma)$.

ب ـ تعيين طبيعة المجموعة (γ).

$MB^2-MA^2=28$ معناه $\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)^2=28$ ويكافئ

$MC^2+CB^2+2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CB}-MC^2-CA^2-2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CA}=28$ ويكافئ $2\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)+CB^2-CA^2=28$

ومعناه $2\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\right)+28=28$ أي $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}=0$ وبالتالي (γ) هي المستوي الذي يشمل C ويكون $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له وهذا المستوي هو (CDH).

<u>التمرين الثالث:</u>

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0=e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

لدينا $u_0>1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $u_n>1$ ومنه $\sqrt{u_n}>1$ أي $u_{n+1}>1$ وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أنّ $u_n > 1$ فإنّ $u_n{}^2 > u_n$ ومنه $u_n > \sqrt{u_n}$ أي $u_n > u_{n+1}$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتتاج تقاربها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ ـ تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ليكن n عددا طبيعيا

$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln\sqrt{u_n} = \ln u_n{}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}v_n$؛ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأوّل

. $v_0 = \ln u_0 = \ln e = 1$

ب ـ كتابة v_n و u_n بدلالة n

$v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $u_n = e^{v_n} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

حساب نهاية المتتالية (u_n).

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$.

4. نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

أ ـ حساب S_n ثم P_n بدلالة n.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\dots+v_n} = e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

ب ـ تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

$P_n = e^{\frac{7}{4}}$ معناه $e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = e^{\frac{7}{4}}$ يكافئ $2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{7}{4}$ ويكافئ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{7}{8}$ ويكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8}$

أي $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ وعليه $n = 3$.

<u>التمرين الرابع:</u>

I - 1. الدّالة u معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة u.

الدالة u تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا $u'(x) = e^x - 3$.

$u'(x) = 0$ تعني $e^x - 3 = 0$ وتكافئ $e^x = 3$ أي $x = \ln 3$.

$u'(x) > 0$ تعني $e^x - 3 > 0$ وتكافئ $e^x > 3$ أي $x > \ln 3$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$u'(x)<0$ تعني $e^x-3<0$ و $x>0$ وتكافئ $e^x<3$ و $x>0$ أي $0<x<\ln 3$.
وبالتالي الدالة u متناقصة تماما على المجال $]0;\ln 3]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\ln 3;+\infty[$.

ب ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

لدينا الدالة u تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ تأخذها عند $x=\ln 3$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $u(x)\ge u(\ln 3)$ ولدينا $u(\ln 3)\approx 0.99$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $u(x)>0$ أي $e^x-3x+4-e>0$ وبالتالي $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ ـ تبيان أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v).

الدالة v تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $v'(x)=-9x^2+8x+\frac{1}{x}=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}$

$$v'(1)=\frac{-9(1)^3+8(1)^2+1}{x}=0$$

ب ـ إثبات أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le 0$.

لدينا $v'(x)=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}=\frac{(x-1)(-9x^2-x-1)}{x}$

المعادلة $-9x^2-x-1=0$ لاتقبل حلولا إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $-9x^2-x-1<0$.

x	0		1		$+\infty$
x	‖	$+$		$+$	
$-9x^2-x-1$	‖	$-$		$-$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$v'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة v متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية عظمى على المجال $]0;+\infty[$ تبلغها من أجل $x=1$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le v(1)$ أي $v(x)\le 0$.

جـ ـ استنتاج، أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)\le 0$ معناه $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$ معناه $-1+\ln x\le 3x^3-4x^2$ يكافئ $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le\frac{3x^3-4x^2}{x^2}$ أي $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$.

3. **إثبات أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ يكافئ $\frac{1-\ln x}{x^2}\ge -3x+4......(1)$
ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4......(2)$ وبجمع (1) و (2) طرفا إلى طرف نجد $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **حساب:** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - ex = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - e\right) = +\infty$

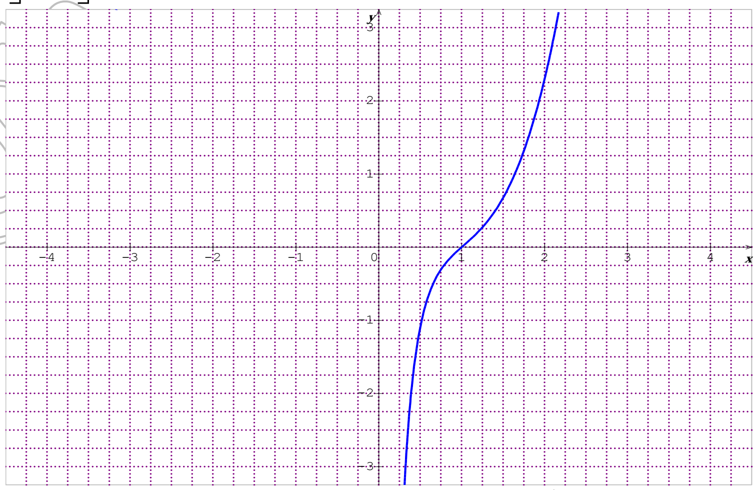
ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - ex + \frac{\ln x}{x} = +\infty$.

2. **تبيين أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x) = e^x - e + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = e^x - e + \frac{1-\ln x}{x^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، لدينا $e^x - e + \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$ أي $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3. **حساب $f(1)$ ، و تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right]$.**



4. حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = \frac{1}{2}$ و $x = 2$.

$$A = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)d(x) + \int_{1}^{2} f(x)d(x) = -\left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{1}^{2}$$

$$A = -\left[\left(e - \frac{e}{2}\right) - \left(\sqrt{e} - \frac{e}{8} + \frac{(\ln 2)^2}{2}\right)\right] + \left[e^2 - 2e + \frac{(\ln 2)^2}{2} - \left(e - \frac{e}{2}\right)\right]$$

$$A = \left[e^2 + \sqrt{e} - \frac{25}{8}e + (\ln 2)^2\right] ua$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(0;2;-1\right)$ ، $B\left(0;0;1\right)$ ، $C\left(0;0;-1\right)$ و $H\left(0;0;h\right)$ حيث h عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

1/ تحديد معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_h\right)$ المار من النقطة H والمتعامد مع المستقيم $\left(BC\right)$.

لدينا $\overrightarrow{BC}\left(0;0;-2\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(P_h\right)$ ومنه المستوي $\left(P_h\right)$ له معادلة من الشكل $-2z+d=0$ ولدينا $H\in\left(P_h\right)$ معناه $-2h+d=0$ أي $d=2h$ ومنه $-2z+2h=0$ وتكافئ $z-h=0$ وهي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_h\right)$.

2/ أ/ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(0;-2;2\right)$ شعاع توجيه للمستقيم $\left(AB\right)$.

$M\left(x;y;z\right)\in\left(AB\right)$ معناه $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

ومنه $\begin{cases}x=0\\ y=-2\lambda\ ;\left(\lambda\in\mathbb{R}\right)\\ z=2\lambda+1\end{cases}$.

ب/ تحديد المستقيم $\left(AB\right)$ بمعادلتين ديكارتيتين.

$\begin{cases}x=0\\ y=-2\lambda\ ;\left(\lambda\in\mathbb{R}\right)\\ z=2\lambda+1\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=0\\ y+z=1\end{cases}$ وهو تمثيل ديكارتي للمستقيم $\left(AB\right)$.

جـ/ التحقق أن المستقيم $\left(AB\right)$ يقطع المستوي $\left(P_h\right)$ في النقطة $N\left(0;1-h;h\right)$.

لدينا $z_N-h=h-h=0$ ومنه $N\in\left(P_h\right)$.

ولدينا $\overrightarrow{BN}\left(0;1-h;h-1\right)$ ومنه $\overrightarrow{BN}=\dfrac{h-1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $N\in\left(AB\right)$.

إذن $\left(P_h\right)\cap\left(AB\right)=\{N\}$.

3/ $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ مستقيمان من الفضاء معرّفان كما يلي :

$$\left(\Delta\right):\begin{cases}x-z=1\\ y=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \left(\Delta'\right):\begin{cases}x=-2t+2\\ y=2t\ \ ;\left(t\in\mathbb{R}\right)\\ z=-2t+1\end{cases}$$

ـ تعيين بدلالة h إحداثيات P و Q نقطتي تقاطع $\left(P_h\right)$ مع كل من $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$ على الترتيب.

تعيين بدلالة h إحداثيات P

لدينا $P\in\left(\Delta\right)$ معناه $\begin{cases}x_P-z_P=1\\ y=0\end{cases}$

$P\in\left(P_h\right)$ معناه $z_P-h=0$ أي $z_P=h$ وعليه $\begin{cases}x_P-h=1\\ y_P=0\\ z_P=h\end{cases}$ أي $P\left(1+h;0;h\right)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

تعيين بدلالة h إحداثيات Q

$Q\in(\Delta')$ معناه $Q(-2t+2;2t;-2t+1)$

$Q\in(P_h)$ معناه $z_Q-h=0$ وعليه $-2t+1-h=0$ أي $t=\frac{1-h}{2}$.

إذن $Q\left(-2\left(\frac{1-h}{2}\right)+2;2\left(\frac{1-h}{2}\right);-2\left(\frac{1-h}{2}\right)+1\right)$ أي $Q(h+1;1-h;h)$.

4/ أ/ **تبيين أن الرباعي $HPQN$ مستطيل.**

لدينا $\overrightarrow{HP}(1+h;0;0)$ و $\overrightarrow{NQ}(1+h;0;0)$ ومنه $\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{HP}$.

زيادة على هذا لدينا $\overrightarrow{HN}(0;1-h;0)$ إذن $\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HP}=0$ ومنه الرباعي $HPQN$ مستطيل.

ب/ نفرض أن h ينتمي إلى المجال $]-1;1[$

تبيان أن محيط المستطيل $HPQN$ عدد ثابت يطلب تحديده.

لدينا $HN=\sqrt{0+(1-h)^2+0}=\sqrt{(1-h)^2}=1-h$ لأنّ $1-h>0$.

و $HP=\sqrt{(1+h)^2+0+0}=\sqrt{(1+h)^2}=1+h$ لأنّ $1+h>0$.

ومنه محيط المستطيل $HPQN$ هو $p=2(HP+HN)=2(1+h+1-h)=4$.

<u>التمرين الثاني:</u>

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) العدديتين حيث: $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $v_n=\frac{n\pi}{3}$ ونسمي M_n النقطة التي لاحقتها z_n

حيث: $z_n=u_ne^{iv_n}$

1) أ) **تبيين أن المتتالية (u_n) هندسية و (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأوّل لكل منهما.**

لدينا $u_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}u_n$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$.

$v_{n+1}=\frac{(n+1)\pi}{3}=\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=v_n+\frac{\pi}{3}$ إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{3}$.

ب) **تعيين مجموعة قيّم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى محور الفواصل.**

M_n تنتمي إلى محور الفواصل معناه z_n حقيقي معناه $\arg(z_n)=k\pi$ يكافئ $\frac{n\pi}{3}=k\pi$ أي $n=3k$ مع $k\in\mathbb{N}$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ وحدة الطول $4cm$.

أ) عين لواحق النقط M_0، M_1، M_2 و M_3.

$z_0=u_0e^{iv_0}=1e^{i0}=1$ ، $z_1=u_1e^{iv_1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $z_2=u_2e^{iv_2}=\frac{1}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{8}+i\frac{\sqrt{3}}{8}$

$z_3=u_3e^{iv_3}=\frac{1}{8}e^{i\pi}=-\frac{1}{8}$.

ب) **حساب أطوال المثلث OM_nM_{n+1} بدلالة** u_n.

$OM_n=|z_n|=u_n$ ، $OM_{n+1}=|z_{n+1}|=u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ ،

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$M_nM_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|u_{n+1}e^{iv_{n+1}}-u_ne^{iv_n}\right|=\left|\frac{1}{2}u_ne^{i\left(v_n+\frac{\pi}{3}\right)}-u_ne^{iv_n}\right|=\left|u_ne^{iv_n}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)\right|$$

$$M_nM_{n+1}=\left|u_ne^{iv_n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right)\right|=\left|u_ne^{iv_n}\left(\frac{-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right|=\left|u_ne^{iv_n}\right|\times\left|\frac{-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}u_n$$

جـ) طبيعة المثلث OM_nM_{n+1}.

لدينا $M_nM_{n+1}^2+OM_{n+1}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_n\right)^2+\left(\frac{1}{2}u_n\right)^2=\frac{3}{4}u_n^2+\frac{1}{4}u_n^2=u_n^2=OM_n^2$

حسب النظرية العكسية لفيثاغورس فإن المثلث OM_nM_{n+1} قائم في M_{n+1}.

يمكن اتباع طريقة أخرى لتعيين طبيعة المثلث OM_nM_{n+1}.

لدينا $z_{n+1}=u_{n+1}e^{iv_{n+1}}=\frac{1}{2}u_ne^{iv_n+\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}u_ne^{iv_n}$ أي $z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n$ ومنه $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

وهذا يعني أنّ $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)=\frac{\pi}{3}$ أي $\begin{cases}\frac{OM_{n+1}}{OM_n}=\frac{1}{2}\\ \left(\overrightarrow{OM_n};\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{3}\end{cases}$

لدينا إذن $\cos\left(\overrightarrow{OM_n};\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ لكن $\frac{OM_{n+1}}{OM_n}=\frac{1}{2}$ إذن $\cos\left(\overrightarrow{OM_n};\overrightarrow{OM_{n+1}}\right)=\frac{OM_{n+1}}{OM_n}$ وبالتالي

المثلث OM_nM_{n+1} قائم الزاوية في M_{n+1} لأن النسب المثلثية محققة في هذا المثلث.

3) نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بـ: $a_n=|z_{n+1}-z_n|$.

أ ـ تبيين أن (a_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأوّل

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n$ فيكون $\begin{cases}z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n\\ z_{n+2}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_{n+1}\end{cases}$ وبالطرح نجد

$z_{n+2}-z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_{n+1}-\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-z_n)$ وهذا يعني أن $|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+1}-z_n)\right|$

ومنه $|z_{n+2}-z_{n+1}|=\frac{1}{2}|z_{n+1}-z_n|$ أي $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ إذن (a_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأوّل

$a_0=|z_1-z_0|=M_1M_0$ لدينا $OM_0=1$ لكن $\frac{OM_1}{OM_0}=\frac{1}{2}$ أي $OM_1=\frac{1}{2}OM_0=\frac{1}{2}$ وبما أنّ المثلث OM_0M_1

قائم في M_1 فإنّ $M_1M_0=\sqrt{OM_0^2-OM_1^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ملاحظة هامة: يمكن حساب الحد الأول a_0 مباشرة ولكن تعمدت حسابها بطريقة أخرى حتى يستفيد الطالب من حساباته السابقة وكيفية توظيفها.

الطريقة المباشرة: $a_0=|z_1-z_0|=\left|\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-1\right|=\left|\frac{-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب - حساب $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

لدينا $a_n = a_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أنّ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإنّ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأوّل u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}.$$

1. أ - حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأوّل u_1.

لدينا $u_1 \times u_3 = u_2^2$ ومنه $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ تعني $u_2^3 = 216$ أي $u_2 = 6$.

لدينا $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{q}$ و $u_3 = qu_2 = 6q$.

$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$ معناه $\frac{6}{q} + 12 + 6q = 32$ بضرب طرفي المعادلة بالعدد q نجد $6 + 12q + 6q^2 = 32q$

أي $6q^2 - 20q + 6 = 0$ بعد حساب المميز نجد $q = 3$ أو $q = \frac{1}{3}$.

من أجل $q = \frac{1}{3}$ نجد $u_3 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة وعليه $q = 3$.

ب - كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2(3)^{n-1}$$

جـ - حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$؛

$$S_n = u_1\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{2}\right) = 3^n - 1$$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$S_n = 728$ معناه $3^n - 1 = 728$ معناه $3^n = 729$ يكافئ $\ln 3^n = \ln 729$ ويكافئ $n\ln 3 = \ln 729$ أي

$$n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$$

.2 (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$.

أ - حساب v_2 و v_3.

$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = 5$ ؛ $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$.

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- تبيين أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{u_{n+1}} - \frac{2}{3}$ ولدينا (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ إذن $u_{n+1} = 3u_n$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $w_{n+1}=\dfrac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3u_n}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n}+\dfrac{u_n}{3u_n}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{2}w_n$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$.

جـ - كتابة w_n بدلالة n ،

$$w_n=w_0\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج v_n بدلالة n.

لدينا $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{2}{3}$ يكافئ $v_n=u_n\left(w_n+\dfrac{2}{3}\right)$ ويكافئ $v_n=2(3)^n\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{2}{3}\right)$ أي $v_n=(3)^{n-1}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+4\right)$

التمرين الرابع:

I - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الرسم $2cm$.

1. حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{2x}-2xe^{2x}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2xe^{2x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

2. حساب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، واستنتاج اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على ولدينا: $f'(x)=-2e^{2x}+2e^{2x}(1-2x)=-4xe^{2x}$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $-4x$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

3. جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

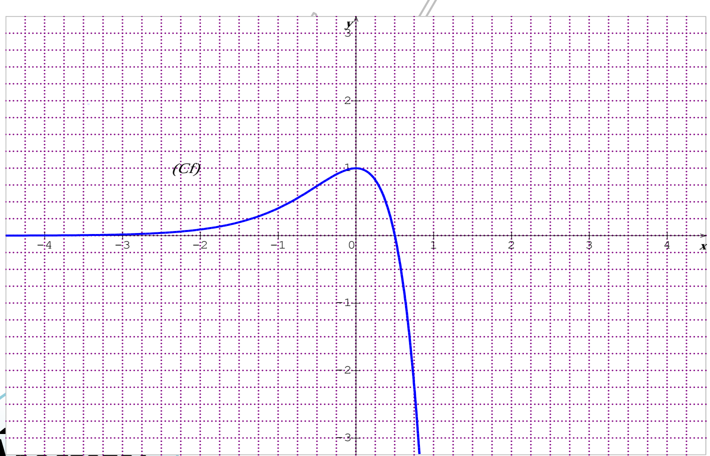
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ و استنتاج نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

$f(x)=0$ معناه $(1-2x)e^{2x}=0$ يكافئ $1-2x=0$

أي $x=\dfrac{1}{2}$. وعليه $(C_f)\cap(Ox)=\left\{A\left(\dfrac{1}{2};0\right)\right\}$.

5. حساب $f(1)$ ثم ارسم (C_f).

$f(1)=(1-2)e^2=-e^2$



6. المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

إذا كان $m\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $f(m)\in]-\infty;0]$ ومنه

المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ فإن $f(m)\in\left]0;1\right[$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

إذا كان $m=0$ فإن $f(m)=1$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.

7. أ ـ تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

$$F'(x)=ae^{2x}+2e^{2x}(ax+b)=e^{2x}(a+2ax+2b)$$

بالمطابقة نجد $2a=-2$ و $a+2b=1$ أي $a=-1$ و $b=1$ وعليه $F(x)=(-x+1)e^{2x}$.

ب ـ حساب بـ cm^2 وبدلالة المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$،

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(\lambda)$$

$$S(\lambda)=\left(\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}\right)=\left[\frac{1}{2}e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}\right]ua$$

ومنه $S(\lambda)=4\left[\frac{1}{2}e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}\right]cm^2$ لأنّ $ua=2\times 2cm^2$.

حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)$.

لدينا $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(-\lambda+1)e^{2\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}-\lambda e^{2\lambda}+e^{2\lambda}=0$ ومنه $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}4\left[\frac{1}{2}e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}\right]=2e$

II ـ نسمي f^n المشتقة من الرتبة n حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $f^n(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

لدينا $f^1(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أنّ $f^n(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ من أجل عدد غير معدوم n ونبرهن أنّ $f^{n+1}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}$ أي نبرهن $f^{n+1}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$.

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)=2^n\left[\left(-2e^{2x}\right)+2e^{2x}(1-n-2x)\right]$$

$$f^{(n+1)}(x)=2^n\left[2e^{2x}(-1+1-n-2x)\right]$$

$$f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}[-n-2x]e^{2x}$$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

2. نرمز بـ(C_n) للمنحنى الممثل للدالة f^n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ولتكن النقطة $M_n(x_n;y_n)$ من (C_n) والتي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل.

أ ـ حساب y_n و x_n بدلالة n،

(C_n) يقبل مماسا عند النقطة $M_n(x_n;y_n)$ يوازي حامل محور الفواصل معناه $f^{(n+1)}(x_n)=0$ ويكافئ

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr

و $2^{n+1}\left[-n-2x_n\right]e^{2x_n}=0$ وعليه $-n-2x_n=0$ أي $x_n=-\frac{n}{2}$ و

$y_n=f^{(n)}\left(-\frac{n}{2}\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{n}{2}\right)\right)e^{-n}$ أي $y_n=\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

التحقّق أنّ M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y=\frac{e^{2x}}{4^x}$.

لدينا $\begin{cases} x_n=-\frac{n}{2} \\ y_n=\left(\frac{2}{e}\right)^n \end{cases}$ معناه $\begin{cases} n=-2x_n \\ y_n=\left(\frac{2}{e}\right)^n \end{cases}$ و منه $y_n=\left(\frac{2}{e}\right)^{-2x_n}$ إذن $y_n=\frac{2^{-2x_n}}{e^{-2x_n}}=\frac{e^{2x_n}}{2^{2x_n}}=\frac{e^{2x_n}}{4^{x_n}}$

وبالتالي M_n نقطة من المنحنى (C) الذي معادلته $y=\frac{e^{2x}}{4^x}$.

ب ـ إثبات أنّ (x_n) متتالية حسابية،

$x_{n+1}-x_n=\frac{-n-1}{2}+\frac{n}{2}=-\frac{1}{2}$ إذن (x_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{2}$.

حساب نهايتها.

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{2}=-\infty$$

جـ ـ إثبات أنّ (y_n) متتالية هندسية،

$y_{n+1}=\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}=\left(\frac{2}{e}\right)^n\frac{2}{e}=\frac{2}{e}y_n$ إذن (y_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$.

حساب نهايتها.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} y_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n=0$ لأنّ $-1<\frac{2}{e}<1$.