على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين:
$A(2;-5;4)$ و $B(3;-4;6)$

والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \; (t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$

1- أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B.

ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D).

2- (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ).

- برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)؛ ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D).

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D).

ب) أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P).

التمرين الثاني:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C ذات اللاحقات: $z_A=-i$ ، $z_B=i$ و $z_C=-4i$ على الترتيب.

1. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq -i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\dfrac{iz-4}{z+i}$

أ - عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

ب - عيّن (E') مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا.

2. أ - بيّن أنه، إذا كان $M\neq A$ فإنّ $OM'=\dfrac{CM}{AM}$.

ب - استنتج أنّه إذا كانت M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية فإن M تنتمي إلى مستقيم (Δ) يُطلب تعيينه.

3.أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $-i$؛ $(z'-i)(z+i)=-3$ واستنتج أن $AM\cdot BM'=3$

ب - بيّن أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 3 فإنّ M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

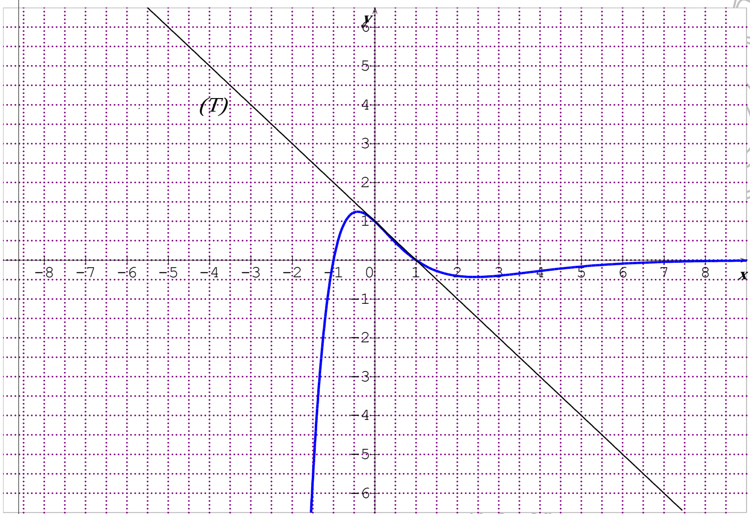
التمرين الثالث:

1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\dfrac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،
$$u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$$
أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<2$.
ب ـ بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$
أ ـ بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
ب ـ اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
جـ ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=(u_n-1)\times(u_n-1)\times\ldots\times(u_n-1)$
ـ اكتب P_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$.

التمرين الرابع:

I- g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$؛ (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (T) مماس (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0.



1. بقراءة بيانية عيّن $g(-1)$، $g(0)$ و $g'(0)$.
2. اكتب معادلة للمماس (T).
3. باستعمال المعطيات السابقة بيّن أنّ:
$$g(x)=(1-x^2)e^{-x}$$

II- f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
2. أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$
ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
3. أ ـ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.
ب ـ اكتب معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
ج ـ ارسم (Δ) و (C_f).
4. عين بيانيا، قيّم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx+1$ حلا وحيدا.

III- h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(x^2)$.
أ ـ باستعمال مشتقة مركب دالتين ، عيّن اتجاه تغير الدالة h.
ب ـ شكل جدول تغيّرات الدّالة h.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط: $A(0;0;2)$، $B(0;0;-4)$، $C\left(\sqrt{5};0;1\right)$، $D\left(\sqrt{5};0;-3\right)$ و $E(0;0;-1)$؛ وليكن (S) سطح الكرة الذي مركزه E ونصف قطره 3.

1) أ ـ بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.
ب ـ هل النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي ؟ برّر.
ج ـ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) أ ـ اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S)، ثمّ تحقق أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى (S).
ب ـ عيّن نقط تقاطع (S) مع محاور الإحداثيات.

3) ادرس حسب قيّم العدد الحقيقي λ الوضع النسبي للسطح (S) والمستوي (P_λ) ذو المعادلة $z=\lambda$.

4) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}).

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=14$ و من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=5u_n-6$.

1– احسب u_1، u_2، u_3، u_4.
ماذا تخمن بالنسبة إلى الرقمين الأخيرين للعدد u_n ؟

2– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+2}\equiv u_n[4]$، واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k:
$u_{2k}\equiv 2[4]$ و أن: $u_{2k+1}\equiv 0[4]$.

3– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2u_n=5^{n+2}+3$، واستنتج أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإن:
$2u_n\equiv 28[100]$

4– عين رقمي الآحاد و العشرات للعدد u_n و ذلك حسب قيم n.

5– برهن أن $PGCD(u_n,u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

التمرين الثالث:

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ وحدة الرسم $2cm$ نعتبر النقطتين A و B صورتي العددين 1 و $3+2i$ على الترتيب
ونسمي f التحويل النقطي التي يحول النقطة M تختلف عن A ولاحقتها z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\dfrac{z-1+2i}{z-1}$

1) احسب لاحقتي النقطتين O'، B' صورتي النقطتين O، B على الترتيب بالتحويل f، ثم أنشئ A، O'، B و B'

2) أ) من أجل كل عدد مركب $z\neq 1$؛ احسب الجداء $(z'-1)(z-1)$.
ب) بين أنه مهما تكن النقطة M تختلف عن A فإن: $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM'}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ و
$AM.AM'=2$

3) بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A وتشمل O فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C') يُطلب إيجاد مركزها ونصف قطرها.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

4) أ - احسب قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.

ب - ليكن (d) نصف المستقيم المفتوح الذي حدّه النقطة A و يشمل B، بين أنه إذا كانت النقطة M التي تختلف عن A تنتمي إلى (d) فإن M' تنتمي إلى نصف مستقيم يطلب تحديده.

ج - نسمي E النقطة التي تنتمي إلى $(C)\cap(d)$، ما هو موضع النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل f

التمرين الرابع:

I- g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^{x}$

1. ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ: $0.8<\alpha<0.9$.
3. عيّن، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II- f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^{x}+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.
2. **أ)** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).
3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.
4. **أ)** بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^{x}+2)^{2}}$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

   ب) بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.
5. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).
6. ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III- (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0\leq U_n<\alpha$.

2) باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0، U_1 و U_2، ثمّ خمّن اتجاه تغيّر (U_n)

3) برهن أنّ المتتالية (U_n) متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

حل الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين:

$A(2;-5;4)$ و $B(3;-4;6)$

والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \;(t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$

1- أ) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B.

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (D).

$M(x;y;z)\in(D)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث λ عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-5+\lambda \;(\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=4+2\lambda \end{cases}$

ب) دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D).

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{u}(1;-1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

و $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستقيمان (Δ) و (D) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (Δ) و (D).

ندرس وجود ثنائية t و λ من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $\begin{cases} 1+t=2+\lambda ....(1) \\ 2-t=-5+\lambda .....(2) \\ 4+t=4+2\lambda .....(3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد $3=-3+2\lambda$ ومنه $\lambda=3$ وبالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases} 1+t=5 \\ 2-t=-2 \\ 4+t=10 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} t=4 \\ t=4 \\ t=6 \end{cases}$ وهذا مستحيل إذن (Δ) و (D) غير متقاطعين وبالتالي فهما ليسا من نفس المستوي

2- (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ).

- تبيين أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)؛

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي (P) وهما وغير مرتبطين خطيا.

ولدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3\times1+1\times1-2\times2=0$ و $\vec{n}.\vec{u}=3\times1+1\times-1-2\times1=0$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ أي الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P).

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

المستوي (P) له معادلة من الشكل $3x+y-2z+d=0$ ولدينا $A\in(P)$ تعني $6-5-8+d=0$
أي $d=7$ وعليه $3x+y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D).

أ) تعيين إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D).

لدينا $M(1+t;2-t;4+t)$ و $N(2+\lambda;-5+\lambda;4+2\lambda)$ ومنه $\overrightarrow{MN}(1+\lambda-t;-7+\lambda+t;2\lambda-t)$

(MN) عمودي على (Δ) يكافئ $\overrightarrow{MN}.\vec{u}=0$ ويكافئ $1(1+\lambda-t)-1(-7+\lambda+t)+1(2\lambda-t)=0$
أي $2\lambda-3t+8=0$.

(MN) عمودي على (D) يكافئ $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$ ويكافئ $1(1+\lambda-t)+1(-7+\lambda+t)+2(2\lambda-t)=0$
ومنه $6\lambda-2t-6=0$ أي $3\lambda-t-3=0$.

إذن نحصل على الجملة $\begin{cases}2\lambda-3t+8=0\\3\lambda-t-3=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2\lambda-3t+8=0\\-9\lambda+3t+9=0\end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد $-7\lambda+17=0$

أي $\lambda=\dfrac{17}{7}$ وبالتعويض نجد $\dfrac{51}{7}-t-3=0$ أي $t=\dfrac{30}{7}$

وعليه $M\left(1+\dfrac{30}{7};2-\dfrac{30}{7};4+\dfrac{30}{7}\right)$ أي $M\left(\dfrac{37}{7};\dfrac{-16}{7};\dfrac{58}{7}\right)$

و $N\left(2+\dfrac{17}{7};-5+\dfrac{17}{7};4+2\left(\dfrac{17}{7}\right)\right)$ أي $N\left(\dfrac{31}{7};\dfrac{-18}{7};\dfrac{62}{7}\right)$.

ب) حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P).

$$d(M;(P))=\frac{|3(1+t)+(2-t)-2(4+t)+7|}{\sqrt{9+1+4}}=\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

<u>التمرين الثاني:</u>

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C ذات اللاحقات: $z_A=-i$ ، $z_B=i$ و $z_C=-4i$ على الترتيب.

1. نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq -i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\dfrac{iz-4}{z+i}$

أ ـ تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

لدينا $z'=\dfrac{iz-4}{z+i}=\dfrac{i(z+4i)}{z+i}=\dfrac{i(z-z_C)}{z-z_A}$ ومنه

$$\arg(z')=\arg i+\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right)$$

z' تخيليا صرفا معناه $z'=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $z\neq -i$

$M\in(E)$ معناه $M=C$ أو $\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ و $M\neq A$.

أي $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right)=k\pi$ و $M\neq A$.

بالتالي النقط A، C و M في استقامية إذن (E) هي المستقيم (AC) باستثناء النقطة A.

ب - تعيين (E') مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا.

z' حقيقيا معناه $z'=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg(z')=k\pi$ و $z\neq -i$

$M\in(E')$ معناه $M=C$ أو $\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right)=k\pi$ و $M\neq A$.

أي $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CM}\right)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $M\neq A$.

إذن (E') هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ باستثناء النقطة A.

2. أ - تبيين أنه، إذا كان $M\neq A$ فإنّ $OM'=\frac{CM}{AM}$.

$z'=\frac{i\left(z-z_C\right)}{z-z_A}$ معناه $|z'|=\left|\frac{i\left(z-z_C\right)}{z-z_A}\right|$ ويكافئ $|z'|=\frac{|i||z-z_C|}{|z-z_A|}$ أي $OM'=\frac{CM}{AM}$

ب - استنتاج أنّه إذا كانت M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية فإن M تنتمي إلى مستقيم (Δ) يُطلب تعيينه.

M' تنتمي إلى الدائرة المثلثية معناه $OM'=1$ ومنه $\frac{CM}{AM}=1$ أي $AM=CM$ وبالتالي M تنتمي إلى المستقيم (Δ) محور القطعة $[AC]$.

3.أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z، $(z\neq -i)$؛ $(z'-i)(z+i)=-3$

لدينا $z'-i=\frac{iz-4}{z+i}-i=\frac{iz-4-iz+1}{z+i}=\frac{-3}{z+i}$ ومنه $(z'-i)(z+i)=-3$.

استنتاج أن $BM'.AM=3$

لدينا $(z'-i)(z+i)=-3$ معناه $|(z'-i)(z+i)|=3$ ويكافئ $|z'-i|\times|z+i|=3$ أي $BM'.AM=3$

ب - تبيين أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A ونصف قطرها 3 فإنّ M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$M\in(C)$ معناه $AM=3$ ومنه $BM'\times 3=3$ أي $BM'=1$ وبالتالي M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها B وطول نصف قطرها 1.

<u>التمرين الثالث:</u>

1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1}=1+\sqrt{u_n-1}$$

أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n<2$.

لدينا $1<u_0<2$ إذن خاصية الإبتداء صحيحة.

ليكن n عددا طبيعيا.

نفرض أنّ $1<u_n<2$ ومنه $0<u_n-1<1$ ومعناه $0<\sqrt{u_n-1}<1$ (لأن الدالة الجذر متزايدة تماما)

ويكافئ $1+1<1+\sqrt{u_n-1}<1+0$ أي $1<u_{n+1}<2$

إذن حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1<u_n<2$.

ب ـ تبيين أنّ المتتالية (u_n) متزايدة .

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\left[\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right]\left[\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right]}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1-(u_n-1)^2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}=\frac{(u_n-1)(1-(u_n-1))}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(-u_n+2)}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$

ومنه $u_n-1>0$ و $\sqrt{u_n-1}>0$ أي $\sqrt{u_n-1}+u_n-1>0$

ولدينا $u_n<2$ معناه $-u_n>-2$ أي $-u_n+2>0$ إذن $(u_n-1)(-u_n+2)>0$

وعليه $\frac{(u_n-1)(-u_n+2)}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

استنتاج أنها متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة.

تنبيه: المتتالية (u_n) ليست بالضرورة متقاربة نحو العدد 4 لأن هذه المبرهنة لاتسمح لنا بمعرفة نهاية المتتالية

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ ـ تبيين أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right)=\ln\left(\sqrt{u_n-1}\right)=\ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأوّل $v_0=\ln(u_0-1)=\ln\left(\frac{3}{2}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

ب ـ كتابة كلا من v_n و u_n بدلالة n،

$$v_n=-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

كتابة u_n بدلالة n.

لدينا $v_n=\ln(u_n-1)$ معناه $u_n-1=e^{v_n}$ أي $u_n=e^{v_n}+1$

وعليه $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln\frac{1}{2}}+1=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^t=1$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1=2$

جـ ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)$

ـ كتابة P_n **بدلالة** n ، **ثمّ احسب** $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

لدينا $u_n-1=e^{v_n}$

$$P_n=(u_0-1)\times(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\ldots+v_n}$$

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإنّ:

$$v_0+v_1+\ldots+v_n=v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)=(-\ln 2)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right)=2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

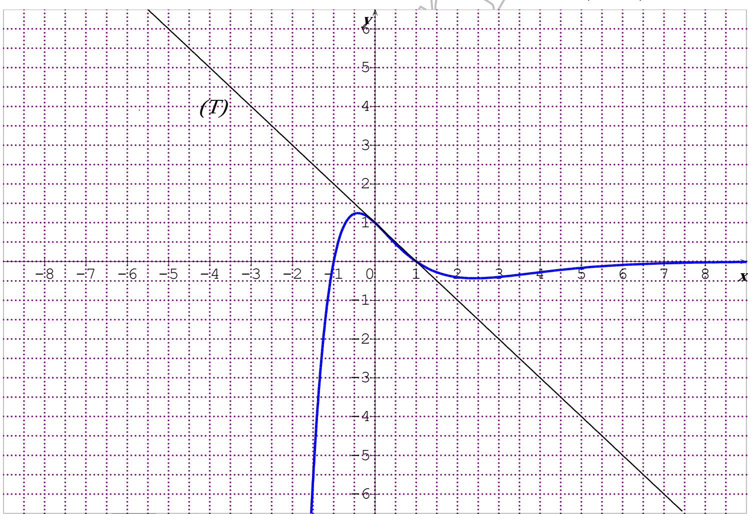
$$=(\ln 4)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

إذن $P_n=e^{(\ln 4)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(\ln 4)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}=e^{\ln 4}=4$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

التمرين الرابع:

I- g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$ ؛ (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (T) مماس (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 0.



1. تعيين $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.

$g(0)=1$ ، $g(-1)=0$

$g'(0)$ هو معامل توجيه المماس (T) .

$$g'(0)=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

2. كتابة معادلة للمماس (T) .

$y=g'(0)(x-0)+g(0)$ ومنه

$y=-1(x-0)+1$ أي $y=-x+1$

3. باستعمال المعطيات السابقة تبيين أنّ:

$g(x)=(1-x^2)e^{-x}$

لدينا $g(-1)=0$ معناه $(1+a)e^{-b}=0$ ويكافئ $1+a=0$ أي $a=-1$

ومنه $g(x)=(1-x^2)e^{bx}$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=-2xe^{bx}+be^{bx}(1-x^2)=e^{bx}(-bx^2-2x+b)$

$g'(0)=-1$ معناه $e^{b\times 0}(-b\times 0-2\times 0+b)=-1$ أي $b=-1$

وعليه $g(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

II- f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)^2e^{-x}=+\infty$

تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0$$

2. أ - تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$

$f'(x)=2(x+1)e^{-x}-e^{-x}(x+1)^2=e^{-x}(x+1)(2-x-1)=e^{-x}(x+1)(1-x)$

$f'(x)=e^{-x}(1-x^2)=g(x)$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f،

إشارة $g(x)$ من البيان كالتالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $[-1;1]$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

3. أ ـ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ وبالإخص عند 0 ولدينا:

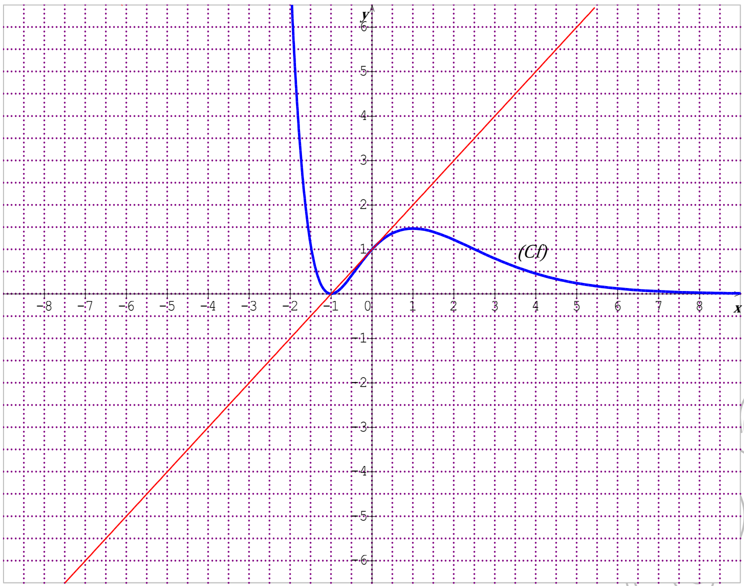
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g'(0)=1$ وتفسير هذا بيانيا وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(0;1)$ معامل توجيهه يساوي 1.

ب ـ كتابة معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه

$y=1(x-0)+1$ أي $y=x+1$.

ج ـ رسم (Δ) و (C_f).



4. تعيين بيانيا، قيّم الوسيط الحقيقي m، حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx+1$ حلا وحيدا.

إذا كان $m>1$ المعادلة تقبل حلا واحدا معدوما

III- h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$h(x)=f(x^2)$.

أ ـ باستعمال مشتقة مركب دالتين، عيّن اتجاه تغير الدالة h.

الدالة h تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$h'(x)=2xf'(x^2)=2x(1-x^4)e^{-x^2}=2x(1-x^2)(1+x^2)e^{-x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2(1+x^2)e^{-x^2}>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $x(1-x^2)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة h متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-1]$ و $[0;1]$ ومتناقصة تماما على كل من $[-1;0]$ و $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة h.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$			0		0		0		
$h(x)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	1	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط: $A\left(0;0;2\right)$ ، $B\left(0;0;-4\right)$ ، $C\left(\sqrt{5};0;1\right)$ ، $D\left(\sqrt{5};0;-3\right)$ و $E\left(0;0;-1\right)$ ؛ وليكن $\left(S\right)$ سطح الكرة الذي مركزه E ونصف قطره 3.

1) أ - تبيين أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

$\overrightarrow{AB}\left(0;0;-6\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{5};0;-1\right)$ لايوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - هل النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي ؟ برّر.

النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي معناه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.

إحداثيات الشعاع $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ هي $\left(\sqrt{5}\beta;0;-6\alpha-\beta\right)$ و $\overrightarrow{AD}\left(\sqrt{5};0-5\right)$

لدينا إذن $\begin{cases}\sqrt{5}=\sqrt{5}\beta\\0=0\\-5=-6\alpha-\beta\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\beta=1\\0=0\\\alpha=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ وعليه $\left(\alpha,\beta\right)=\left(\dfrac{2}{3},1\right)$

وبالتالي النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

ملاحظة: يمكن ملاحظة أن النقط A ، B ، C و D لها نفس الترتيبة فهي تنتمي إلى نفس المستوي.

ج - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

لدينا النقط A، B ، C لها نفس الترتيبة 0 إذن فهي تنتمي للمستوي الذي معادلته $y=0$ أي $y=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.

2) أ - كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة $\left(S\right)$، ثمّ تحقق أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى $\left(S\right)$.

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in\left(S\right)$ معناه $EM=3$ ويكافئ $\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z+1\right)^2}=3$ أي $x^2+y^2+\left(z+1\right)^2=9$

وعليه $x^2+y^2+z^2+2z-8=0$ هي المعادلة الديكارتية لـ $\left(S\right)$.

ب - تعيين نقط تقاطع $\left(S\right)$ مع محاور الإحداثيات.

مع محور الفواصل.

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in\left(Ox\right)$ معناه $M\left(x;0;0\right)$

$M\in\left(S\right)\cap\left(Ox\right)$ يعني $x^2-8=0$ أي $x=\sqrt{8}$ أو $x=-\sqrt{8}$

وعليه $\left(S\right)\cap\left(Ox\right)=\left\{I\left(\sqrt{8};0;0\right),I'\left(-\sqrt{8};0;0\right)\right\}$

مع محور التراتيب.

$M\in\left(Oy\right)$ معناه $M\left(0;y;0\right)$

$M\in\left(S\right)\cap\left(Oy\right)$ يعني $y^2-8=0$ أي $y=\sqrt{8}$ أو $y=-\sqrt{8}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

وعليه $(S)\cap(Oy)=\left\{H\left(0;\sqrt{8};0\right),H'\left(0;-\sqrt{8};0\right)\right\}$

مع محور الرواقم.

$M\in(Oz)$ معناه $M\left(0;0;z\right)$

$M\in(S)\cap(Oz)$ يعني $z^2+2z-8=0$ ويكافئ $(z+1)^2=9$ ومنه $z+1=3$ أو $z+1=-3$

أي $z=2$ أو $z=-4$.

وعليه $(S)\cap(Oz)=\left\{F\left(0;0;2\right),F'\left(0;0;-4\right)\right\}$.

3) **دراسة حسب قيّم العدد الحقيقي λ الوضع النسبي للسطح (S) والمستوي (P_λ) ذو المعادلة $z=\lambda$.**

لدينا $d\left(E;(P_\lambda)\right)=\dfrac{|-1-\lambda|}{1}=|1+\lambda|$

إذا كان $|1+\lambda|=3$ أي $1+\lambda=3$ أو $1+\lambda=-3$ أي $\lambda=2$ أو $\lambda=-4$

فإن (P_λ) يمس سطح الكرة (S).

إذا كان $|1+\lambda|>3$ أي $1+\lambda>3$ أو $1+\lambda<-3$ أي $\lambda>2$ أو $\lambda<-4$

فإنّ $(P_\lambda)\cap(S)=\varnothing$.

إذا كان $|1+\lambda|<3$ أي $-3<1+\lambda<3$ أي $-4<\lambda<2$

فإن (P_λ) يقطع (S) في دائرة مركزها $E'(0;0;\lambda)$ المسقط العمودي للنقطة E على المستوي (P_λ).

ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{3^2-|\lambda+1|^2}=\sqrt{9-\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)}=\sqrt{-\lambda^2-2\lambda+8}$

4) **تعيين مركز ونصف قطر الدائرة مقطع سطح الكرة (S) بالمستوي (P_{-2}).**

حسب ما سبق إحداثيات مركز الدائرة هي $(0;0;-2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{-(-2)^2-2(-2)+8}=\sqrt{8}$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=14$ و من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=5u_n-6$.

1- **حساب** u_1، u_2، u_3، u_4.

$u_1=5u_0-6=64$

$u_2=5u_1-6=314$

$u_3=5u_2-6=1564$

$u_4=5u_3-6=7814$

تخمين الرقمين الأخيرين للعدد u_n ؟

يمكن وضع التخمين التالي: إذا كان n زوجيا فإن آخر رقمين للعدد u_n هما 6 و 4 وإذا كان فرديا 1 و 4.

2- **برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+2}\equiv u_n[4]$.**

لدينا $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6$ أي $u_{n+2}=25u_n-36$ ومنه

$u_{n+2}-u_n=24u_n-36=4(6u_n-9)$ وعليه $u_{n+2}-u_n\equiv 0[4]$ أي $u_{n+2}\equiv u_n[4]$.

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $u_{2k}\equiv 2[4]$

لدينا $u_0=14[4]$ أي $u_0=2[4]$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_{2k}\equiv 2[4]$ ونبرهن أنّ $u_{2(k+1)}\equiv 2[4]$ أي نبرهن $u_{2k+2}\equiv 2[4]$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا حسب السؤال السابق $u_{n+2} \equiv u_n[4]$ ومنه $u_{2k+2} \equiv u_{2k}[4]$ ولدينا حسب الفرضية $u_{2k} \equiv 2[4]$

إذن $u_{2k+2} \equiv 2[4]$ وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي k، $u_{2k} \equiv 2[4]$

استنتاج أن: $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6$ ومنه $u_{2k+1} \equiv 5\times 2-6[4]$ أي $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n = 5^{n+2}+3$.

لدينا $2u_0 = 28$ و $5^{0+2}+3 = 28$ ومنه $2u_0 = 5^{0+2}+3$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2u_n = 5^{n+2}+3$ ونبرهن أنّ $2u_{n+1} = 5^{n+3}+3$

لدينا $2u_n = 5^{n+2}+3$ معناه $10u_n = 5\left(5^{n+2}+3\right)$ يكافئ $10u_n - 12 = 5\left(5^{n+2}+3\right)-12$ ويكافئ

$2(5u_n - 6) = 5^{n+3}+3$ أي $2u_{n+1} = 5^{n+3}+3$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2u_n = 5^{n+2}+3$.

واستنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $2u_n \equiv 28[100]$

لدينا $2u_0 = 28$ ومنه $2u_0 \equiv 28[100]$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $2u_n \equiv 28[100]$ ونبرهن أنّ $2u_{n+1} \equiv 28[100]$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 5u_n - 6$ معناه $2u_{n+1} = 5\times 2u_n - 12$

إذن $2u_{n+1} \equiv 5\times 28-12[100]$ أي $2u_{n+1} \equiv 128[100]$ وعليه $2u_{n+1} \equiv 28[100]$.

4- تعيين رقمي الآحاد و العشرات للعدد u_n و ذلك حسب قيم n .

لنعين باقي قسمة العدد u_n على 100.

لدينا $2u_n \equiv 28[100]$ ومنه $u_n \equiv 14[50]$ أي $u_n \equiv 50k+14$

من أجل $k=2p$ يكون $u_n \equiv 100p+14$ فيكون $u_n \equiv 2[4]$ أي n زوجي (حسب ما سبق)

وبالتالي إذا كان n زوجيا فإن رقم آحاد u_n هو 4 ورقم عشراته هو 1.

من أجل $k=2p+1$ يكون $u_n \equiv 100p+64$ فيكون $u_n \equiv 0[4]$ أي n فردي

إذن إذا كان n فرديا فإن رقم آحاد u_n هو 4 ورقم عشراته هو 6.

5- برهان أن $PGCD(u_n, u_{n+1})$ ثابت ثم عين قيمته.

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_n و u_{n+1} .

لدينا d يقسم u_n و d يقسم u_{n+1} ومنه d يقسم $u_{n+1} - 5u_n$ أي d يقسم 6.

إذن القيم الممكنة للعدد d هي $\{1;2;3;6\}$ ؛ بما أن رقم آحاد u_n زوجي فإن القيم الممكنة هي $\{2;6\}$

ولدينا $2u_n = 5^{n+2}+3$ معناه $2u_n \equiv 5^{n+2}+3[3]$ ومعناه $2u_n \equiv (-1)^{n+2}[3]$ وعليه $-u_n \equiv (-1)^n[3]$

إذن $u_n \equiv (-1)^{n+1}[3]$ أي $u_n \equiv 1[3]$ أو $u_n \equiv -1[3]$ ومنه u_n لا يقبل القسمة على 3 فهو لا يقبل القسمة على 6 وبالتالي $PGCD(u_n; u_{n+1}) = 2$.

التمرين الثالث:

1) **حساب لاحقتي النقطتين O', B' صورتي النقطتين O، B على الترتيب بالتحويل f** ،

$$z_{O'} = \frac{z_O - 1 + 2i}{z_O - 1} = 1 - 2i \quad ، \quad z_{B'} = \frac{z_B - 1 + 2i}{z_B - 1} = \frac{2+4i}{2+2i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

2) أ) **حساب الجداء $(z'-1)(z-1)$.**

aziz_mus1@hotmail.fr

$z'-1=\frac{z-1+2i}{z-1}-1=\frac{z-1+2i-z+1}{z-1}$

$z'-1=\frac{2i}{z-1}$ ومنه $(z'-1)(z-1)=2i$.

ب) تبيين أنه مهما تكن النقطة M تختلف عن A فإن: $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $AM.AM'=2$

لدينا $\arg[(z'-1)(z-1)]=\arg(2i)$ معناه $\arg(z'-1)+\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

لدينا $|(z'-1)(z-1)|=|2i|$ معناه $|z'-1|\times|z-1|=2$ أي $AM.AM'=2$

3) تبيين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها A وتشمل O فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C') يُطلب إيجاد مركزها ونصف قطرها.

$M\in(C)$ معناه $AM=AO=1$ ولدينا من أجل كل نقطة M تختلف عن A $AM.AM'=2$

ومنه $AM'=2$ إذن M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها A ونصف قطرها 2.

4) أ ـ **حساب قيسا للزاوية الموجهة** $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.

$(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)=\arg(2+2i)=\arg(2(1+i))=\frac{\pi}{4}$

ب ـ ليكن (d) نصف المستقيم المفتوح الذي حدّه النقطة A و يشمل B،

بين أنه إذا كانت النقطة M التي تختلف عن A تنتمي إلى (d) فإن M' تنتمي إلى نصف مستقيم يطلب تحديده.

لدينا من أجل كل نقطة M تختلف عن A ، $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ولدينا $M\in(d)$ معناه $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{4}$ ومنه $\frac{\pi}{4}+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

أي $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{2}+2k'\pi$ إذن M' تنتمي إلى (d).

ج ـ نسمي E النقطة التي تنتمي إلى $(C)\cap(d)$، تعيين موضع النقطة E' صورة النقطة E بالتحويل f

$E\in(C)\cap(d)$ معناه $E'\in(C')\cap(d)$.

التمرين الرابع:

I- g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=-[e^x+xe^x]=e^x(-1-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-1-x)$.

من أجل $x<-1$ يكون $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$.

ومن أجل $x>-1$ يكون $g'(x)<0$ إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}2-xe^x=2$.

و $\lim_{x\to+\infty} xe^x=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-xe^x=-\infty$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	$-\infty$		-1		α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+e^{-1}$	$\searrow$	0	$-\infty$

2. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]2;2+e^{-1}]$ و 0 لا ينتمي إلى المجال $]2;2+e^{-1}]$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-1]$ فإنّ: $g(x)\neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2+e^{-1}]$ و 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty;2+e^{-1}]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

التحقّق أنّ: $0.8<\alpha<0.9$.

لدينا $g(0.8)\approx 0.22$ ، $g(0.9)\approx -0.21$ إذن $g(0.8)\times g(0.9)<0$ ومنه $0.8<\alpha<0.9$.

3. تعيين، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ كما أن $g(\alpha)=0$.

II- f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تبيين أنّ: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}}=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$.

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2. أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} 2x+2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x+2=2$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب) تبيين أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ ، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2-xe^x-e^x-2x-2}{e^x+2}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=0$$ لأن $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

3. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ').

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-(x+1)=\dfrac{-xe^x-e^x}{e^x+2}=\dfrac{e^x(-x-1)}{e^x+2}$

ومنه إشارة $f(x)-(x+1)$ مثل إشارة $(-x-1)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) و (Δ') يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;0)$.	(C_f) تحت (Δ')

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ').

$$f(x)-x=\frac{2x+2}{e^x+2}-x=\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة $f(x)-x$ مثل إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\alpha)$.	(C_f) تحت (Δ)

4. أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$،

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{e^x+2}=\frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{e^x+2}$$

$$f'(x)=\frac{4-2xe^x}{e^x+2}=\frac{2(2-xe^x)}{e^x+2}=\frac{2g(x)}{e^x+2}$$

اتجاه تغيّر الدّالة f.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه:

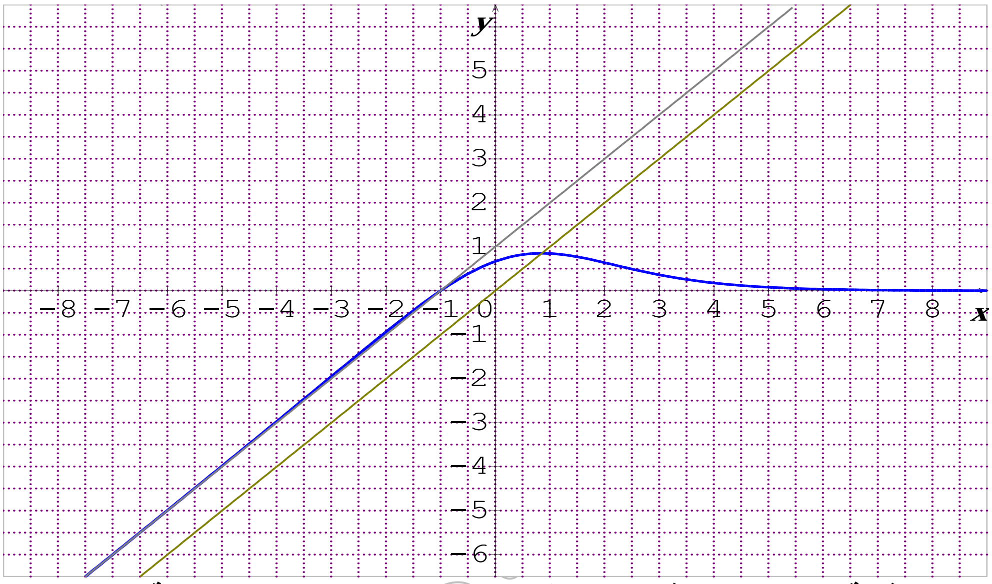
من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ يكون $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ يكون $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

ب) تبيين أنّ: $f(\alpha)=\alpha$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{e^x+2}$ ومنه $f(\alpha)-\alpha=\dfrac{g(\alpha)}{e^\alpha+2}=0$ أي $f(\alpha)=\alpha$

5. رسم (Δ)، (Δ') و (C_f).



6. المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

إذا كان $m \le -1$ فإن $f(m) \le 0$ ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $m \in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن $f(m) \in]0;\alpha[$ ومنه المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=0$ ومنه المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

III- (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1) **برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le U_n < \alpha$.**

لدينا $0 \le U_0 < \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $0 \le U_n < \alpha$ ونبرهن صحة $0 \le U_{n+1} < \alpha$

لدينا $0 \le U_n < \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;\alpha]$ فإن $f(0) \le f(U_n) < f(\alpha)$

لدينا $f(0)=\frac{2}{3}$ و $f(\alpha)=\alpha$ ومنه $\frac{2}{3} \le f(U_n) < \alpha$ أي $0 \le U_{n+1} < \alpha$

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le U_n < \alpha$.

2) تخمين اتجاه تغيّر (U_n)

من الرسم يبدو أن المتتالية متزايدة .

3) **برهان أنّ المتتالية (U_n) متقاربة،**

لدينا $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n$ ولدينا حسب ما سبق من أجل كل $x \in]-\infty;\alpha]$، $f(x)-x \ge 0$

وبما أنّ $0 \le U_n < \alpha$ فإن $f(U_n)-U_n \ge 0$ أي $U_{n+1}-U_n \ge 0$ ومنه المتتالية متزايدة (U_n) وبما أنها محدودة من الأعلى بالعدد α فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \le \alpha$.

حساب نهايتها.

لدينا المتتالية متقاربة ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

بما أنّ $U_{n+1}=f(U_n)$ والدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فإنّ $l=f(l)$ ومنه $l=\alpha$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$.