الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبية | **دورة تدريبية**
الشعبة: علوم تجريبية. | **دورة: ماي 2015**

الحل المفصّل للاختبار الحادي والعشرين | **إعداد: مصطفاي عبد العزيز– أحمد خامس**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

<u>الموضوع الأوّل</u>

<u>التمرين الأوّل:</u>

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3+3\sqrt{3}z^2+9z-21\sqrt{3}=0.....(E)$

1- تحقق أن $\sqrt{3}$ حل للمعادلة (E).

2- أ - بيّن أنّه يمكن كتابة (E) على الشكل $(z-\sqrt{3})(z^2+az+b)=0$ حيث a و b عددين حقيقيين يُطلب تعيينهما

ب - استنتج حلول المعادلة (E).

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}$، $z_B=-2\sqrt{3}-3i$ و $z_C=-2\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1- نسمي D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.

- بيّن أن لاحقة النقطة D هي $z_D=\sqrt{3}+6i$.

2- أ - بيّن أنّ $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC والرباعي $ABCD$.

ب - عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

3- أ - عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى تكون D مرجحا للجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;1)\}$.

ب - عيّن مجموعة M النقط من المستوي، بحيث $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})=0$.

4- G_m مرجح للجملة $\{(A;-1),(B;m),(C;1)\}$. عيّن مجموعة النقط G_m لمّا يتغيّر m في $\mathbb{R}^*$.

<u>التمرين الثاني:</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(1;4;-5)$، $B(3;2;-4)$، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ والشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$.

1. بيّن أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ - بيّن أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=11+2t\\y=4+t\\z=t\end{cases}$

ب - بيّن أنّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$، تحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - جد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ(Γ) واستنتج أنّ (Γ) مستو، $\overrightarrow{EF}$ شعاع ناظمي له.

ب - عيّن قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأوّل u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}$

1) عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض في كل ما يأتي أنّ: $u_0=2$

أ ـ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

ب ـ ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جـ ـ هل المتتالية متقاربة ؟ برّر إجابتك.

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ ـ بين ان متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب ـ احسب، بدلالة n كلا من S_n و π_n ؛ حيث:

$S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $\pi_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

التمرين الرابع:

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ(C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ عيّن a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل.

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.

ب ـ احسب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أن المستقيمين (Δ) و(Δ') اللذين معادلتيهما على الترتيب $y=x+2$ و $y=x-2$ مقاربان للمنحنى (C_f)

3. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

4. بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1.7<\alpha<-1.6$.

5. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).

6. احسب، بدلالة α مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

III ـ نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

ـ عيّن اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ شكل جدول تغيراتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(-2;0;1\right)$، $B\left(1;2;-1\right)$ و $C\left(-2;2;2\right)$.

1) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$، ثمّ الطولين AB و AC.

ب) عيّن قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ بالدرجة مقرّبة إلى الوحدة، ثم استنتج أن النقط A، B و C ليست في استقامية.

2) تحقق أن المعادلة $2x-y+2z+2=0$ للمستوي $\left(ABC\right)$.

3) نعتبر المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$.

أ) بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ والمعرف بتمثيله الوسيطي التالي $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\;;\left(t\in\mathbb{R}\right)\\ z=t\end{cases}$ هو تقاطع المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.

ب) استنتج أن المستويات $\left(P\right)$، $\left(P'\right)$ و $\left(ABC\right)$ تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

4) ليكن $\left(S\right)$ سطح الكرة ذي المركز $\omega\left(1;-3;1\right)$ ونصف القطر 3.

أ) اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة $\left(S\right)$.

ب) ادرس تقاطع سطح الكرة $\left(S\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$.

جـ) بيّن أن المستوي $\left(ABC\right)$ يمسّ سطح الكرة $\left(S\right)$.

التمرين الثاني:

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $\left(z+\sqrt{3}-1\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=1-\sqrt{3}$، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ) اكتب كلا من z_A، z_B و z_C على شكل أسّي؛ ثمّ بيّن أن $z_B{}^{2016}+z_C{}^{2016}=2^{2017}$.

ب) بين أن $z_B{}^{n}+z_C{}^{n}$ حقيقي من أجل كل عدد طبيعي n، ثم عين قيّم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B{}^{n}+z_C{}^{n}=2^{n}$

3) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_C}{z_A-z_B}$ على شكل أسّي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

4) عيّن اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $\left[BC\right]$، ثمّ احسب الطولين BC و GA.

5) نسمي $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $BM^2+CM^2=12......\left(1\right)$.

أ) تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، المساواة $\left(1\right)$ تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0....\left(2\right)$.

ب) تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة $\left(S\right)$؛ ثمّ حدّد المجموعة $\left(S\right)$ مع إعطاء عناصرها المميزة.

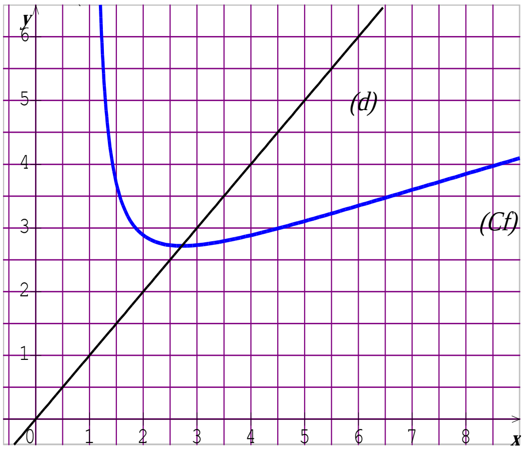
جـ) علم بدقة النقط A، B، C و G ثم أنشئ $\left(S\right)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$.



نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. أ ـ ادرس اتجاه تغير الدالة f.
   ب ـ باستعمال (C_f) و (d) مثّل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3.
2. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq e$.
4. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة ولتكن نهايتها l
5. بيّن أنّ $l=f(l)$، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x+1$

1. أُدرس تغيّرات الدالة g.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$، وعلل أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $xe^x+1>0$.
3. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)-g'(x)=1-e^x$، ثم استنتج $\int_0^1 g(x)dx$ وفسّره هندسيا.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{xe^x}{xe^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجتين بيانيا.
2. أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\frac{(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$
   ب استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.
3. بين أن $y=x$ معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) في المبدأ.
4. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-x=\frac{-xg(x)}{xe^x+1}$ واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T).
5. ارسم (C_f) والمنحنى (T).

III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.
2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة واستنتج أنها متقاربة.
3. احسب نهاية المتتالية (u_n).

حل الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3+3\sqrt{3}z^2+9z-21\sqrt{3}=0.....(E)$

1- **التحقق أن $\sqrt{3}$ حل للمعادلة (E).**

$$\sqrt{3}^3+3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^2+9\sqrt{3}-21\sqrt{3}=3\sqrt{3}+9\sqrt{3}+9\sqrt{3}-21\sqrt{3}=0$$

2- أ - بيّن أنّه يمكن كتابة (E) على الشكل $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)=0$ حيث a و b عددين حقيقيين يُطلب تعيينهما

$$\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)=z^3+\left(a-\sqrt{3}\right)z^2+\left(b-\sqrt{3}a\right)z-\sqrt{3}b$$

وبالمطابقة مع $z^3+3\sqrt{3}z^2+9z-21\sqrt{3}$ نجد $a-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ و $-b\sqrt{3}=-21\sqrt{3}$ أي $a=4\sqrt{3}$ و $b=21$.

إذن $z^3+3\sqrt{3}z^2+9z-21\sqrt{3}=\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2+4\sqrt{3}z+21\right)$.

ب - **استنتاج حلول المعادلة (E).**

(E) تكافئ $z=\sqrt{3}$ أو $z^2+4\sqrt{3}z+21....(1)$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=12-21=-9=(3i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=-2\sqrt{3}-3i$ و $z_2=-2\sqrt{3}+3i$.

إذن (E) تكافئ $z\in\left\{\sqrt{3};-2\sqrt{3}-3i;-2\sqrt{3}+3i\right\}$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط A، B و C لواحقها على $z_A=\sqrt{3}$، $z_B=-2\sqrt{3}-3i$ و $z_C=-2\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1- نسمي D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.

- **تبيان أن لاحقة النقطة D هي $z_D=\sqrt{3}+6i$.**

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ معناه $z_D-z_C=z_A-z_B$ ويكافئ $z_D=z_A-z_B+z_C$ ويكافئ $z_D=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3i-2\sqrt{3}+3i$ أي $z_D=\sqrt{3}+6i$.

2- أ - **تبيان أنّ $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.**

لدينا $z_C-z_B=-2\sqrt{3}+3i+2\sqrt{3}+3i=6i$ و $z_A-z_B=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3i=3\sqrt{3}+3i$

إذن $$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{6i}{3\sqrt{3}+3i}=\frac{6i}{3\sqrt{3}+3i}=\frac{6i\left(3\sqrt{3}-3i\right)}{\left(3\sqrt{3}+3i\right)\left(3\sqrt{3}-3i\right)}=\frac{6i\left(3\sqrt{3}-3i\right)}{36}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{6}$$

أي $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC

لدينا $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ معناه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أنّ $BC=BA$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{3}$ وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ ومنه $ABCD$ متوازي إضلاع ولدينا $BC=BA$ إذن $ABCD$ معين.

ب ـ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC.

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

إذن مركز الدائرة (γ) هي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}+3i}{3}=\frac{-3\sqrt{3}}{3}$ أي $z_G=-\sqrt{3}$.

تعيين نصف قطر الدائرة (γ).

نصف قطر الدائرة (γ) هو GA حيث $GA=|z_A-z_G|=|2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$.

3- **أ ـ تعيين العددين الحقيقيين α و β حتى تكون D مرجحا للجملة** $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;1)\}$.

لدينا $\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ معناه $\alpha(z_A-z_D)+\beta(z_B-z_D)+z_C-z_D=0$ ويكافئ

$-6\alpha i+\beta(-3\sqrt{3}-9i)-3\sqrt{3}-3i=0$ ويكافئ $-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\beta+i(-6\alpha-9\beta-3)=0$

ويكافئ $-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\beta=0$ و $-6\alpha-9\beta-3=0$ أي $\beta=-1$ و $\alpha=1$.

طريقة أخرى:

لدينا $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ معناه $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}$ يكافئ $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ وعليه $(\alpha;\beta)=(1;-1)$.

ب ـ تعيين مجموعة النقط M من المستوي، بحيث $(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})=0$.

لدينا D مرجح للجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(1-1+1)\overrightarrow{MD}$ أي $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$.

و $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$.

$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})=0$ تعني $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AC}=0$ وبالتالي مجموعة النقط M المطلوبة هي المستقيم الذي يشمل D و $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له وهذا المستقيم هو (BD) لأنّ $ABCD$ معيّن (قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان).

4- G_m مرجح للجملة $\{(A;-1),(B;m),(C;1)\}$.

تعيين مجموعة النقط G_m لمّا يتغيّر m في $\mathbb{R}^*$.

لدينا $-\overrightarrow{G_mA}+m\overrightarrow{G_mB}+\overrightarrow{G_mC}=\vec{0}$ معناه $\overrightarrow{AG_m}+m\overrightarrow{G_mB}+\overrightarrow{G_mC}=\vec{0}$ ويكافئ $m\overrightarrow{G_mB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

ويكافئ $m\overrightarrow{G_mB}=-\overrightarrow{AC}$ أي $\overrightarrow{BG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{AC}$ أي المستقيمان (BG_m) و (AC) متوازيان

وبالتالي مجموعة النقط G_m هي المستقيم الذي يشمل B ويوازي المستقيم (AC) باستثناء النقطة B.

التمرين الثاني:

1. إثبات أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $x_A-2z_A-11=1-2(-5)-11=0$ و $x_B-2z_B-11=3-2(-4)-11=0$

و $x_C-2z_C-11=5-2(-3)-11=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة $x-2z-11=0$

وبالتالي للمستوي (ABC) المعادلة $x-2z-11=0$.

2. تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

M تنتمي لـ(T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$.

ومنه $\begin{cases}x+2=k\\ y-8=5k\ (k\in\mathbb{R})\\ z-4=k\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-2+k\\ y=8+5k\ (k\in\mathbb{R})\\ z=4-k\end{cases}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ - إثبات أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) الذي تمثيل وسيطي له $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من (ABC) و (P) نجد:

$(11+2t)-2(t)-11=0$ و $(11+2t)-(4+t)-t-7=11-11+2t-2t=0$

ومنه (Δ) محتوى في (ABC) ومحتوى في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب - إثبات أنّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ هو شعاع توجيه لـ(T) و $\vec{v}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ(Δ).

و $\frac{1}{5}\neq\frac{2}{1}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ).

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $\begin{cases} 11+2t=-2+k \,....(1) \\ 4+t=8+5k \,........(2) \\ t=4-k \,..............(3) \end{cases}$.

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4+(4-k)=8+5k$ ومنه $k=0$

بالتعويض في (3) نجد $t=4$ وبتعويض t و k بقيمهما في (1) نجد $19=-2$ وهذا مستحيل.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$، التحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.

$E\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ -4=t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$ بما أن t وحيد فإن $E\in(\Delta)$.

$F\in(T)$ معناه $\begin{cases} -3=-2+k \\ 3=8+5k \\ 5=4-k \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k=-1 \\ k=-1 \\ k=-1 \end{cases}$ بما أنّ k وحيد فإن $F\in(T)$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ(Γ).

لدينا $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$.

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)+3y-9(-4-z)=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$

هي معادلة ديكارتية لـ(Γ) وهي معادلة مستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

ب - تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

لتكن I منتصف $[EF]$ ومنه $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة I.

ومنه $-6(0)+3\left(\frac{3}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)+54-\alpha=0$ أي $\alpha=63$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

طريقة ثانية:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$.

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ معناه $\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EI}\right).\overrightarrow{FE}=0$ ومعناه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}=0$ أي $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}$ ومنه

ومنه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}$.

لدينا $\overrightarrow{IE}\left(3;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$ إذن $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}=3\times6-\frac{3}{2}\times-3-\frac{9}{2}\times-9=18+45=63$

ومنه $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ تعني $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$.

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$ وعليه $\alpha=63$

<u>التمرين الثالث:</u>

(u_n) متتالية معرفة بحدّها الأوّل u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{3u_n-1}{2u_n}$

1) **تعيين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.**

(u_n) ثابتة معناه $u_0=u_n=u_{n+1}$ ومعناه $u_0=\frac{3u_0-1}{2u_0}$ ويكافئ $2u_0^2-3u_0+1=0$

$\Delta=9-8=1$

$u_0=\frac{3+1}{4}=1$ أو $u_0=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$.

2) نفرض في كل ما يأتي أنّ: $u_0=2$

أ ـ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

لدينا $u_0>1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_n>1$ ونبرهن أنّ $u_{n+1}>1$

لدينا $u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}$ وحسب الفرضية $u_n>1$ إذن $u_n-1>0$ و $2u_n>0$ ومنه $u_{n+1}-1>0$

أي $u_{n+1}>1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ليكن n عددا طبيعيا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-2x^2+3x-1}{2x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$، فإنّ $\frac{-2x^2+3x-1}{2x}<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$

فإنّ $\frac{-2u_n^2+3u_n-1}{2u_n}<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

جـ ـ هل المتتالية متقاربة ؟ برّر إجابتك

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1.

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ ـ تبيين أن متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\left(\dfrac{3u_n-1}{2u_n}\right)-1} = \frac{\dfrac{u_n-1}{2u_n}}{\dfrac{2u_n-1}{u_n}} = \frac{u_n-1}{2u_n}\times\frac{u_n}{2u_n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{2u_n-1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $\frac{1}{3}$ $= \dfrac{u_0-1}{2u_0-1} = v_0$.

ب ـ حساب، بدلالة n كلا من S_n و π_n ؛ حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$.

$$S_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)$$

لدينا $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\pi_n = v_0\times v_1\times\ldots\times v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\ldots\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\ldots+n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الرابع:

I ـ لتكن الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \dfrac{4e^x}{e^x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

نرمز بـ(C_g) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ـ تعيين a و b بحيث (C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل

(C_g) يشمل النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ معناه $g(\ln 2) = \ln 2$ يكافئ $(\ln 2)a + b - \dfrac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2} = \ln 2$ ويكافئ

$(\ln 2)a + b - 2 = \ln 2$ أي $(\ln 2)a + b = 2 + \ln 2 \ldots\ldots(1)$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x) = a - \dfrac{8e^x}{(e^x+2)^2}$

(C_g) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه $g'(\ln 2) = 0$ ويكافئ $a - 1 = 0$ أي $a = 1$

بالتعويض عن قيمة a في المعادلة (1) نجد $(\ln 2)\times 1 + b = 2 + \ln 2$ ومنه $b = 2$.

II ـ نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr

1. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+4-\frac{4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{4e^x+8-4e^x}{e^x+2}=x-2+\frac{8}{e^x+2}$$

ب.حساب نهايتي الدّالة عند $-\infty$ **و** $+\infty$ **.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+2}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2+\dfrac{8}{e^x+2}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{e^x+2}=0$.

ج. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}+4e^x+4-8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}$$

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$+\infty$	$\ln 2$	$-\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$-\infty$

4. إثبات أن (C_f) **يقبل مستقيمين مقاربين.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{4e^x}{e^x+2}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2=2$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=x-2$ بجوار $+\infty$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$.

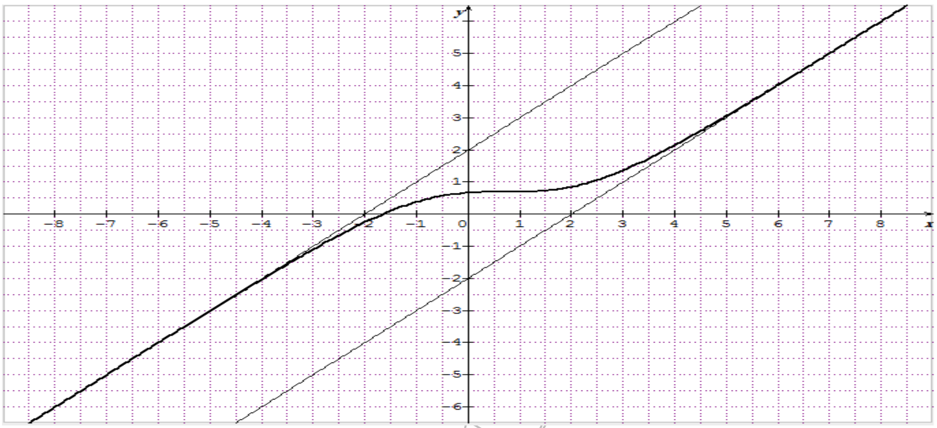
5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) **يقبل نقطة انعطاف** ω **يطلب تعيين إحداثييها.**

بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند العدد $\ln 2$ ولاتغير من إشارتها فإن النقطة $A(\ln 2;\ln 2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6. تبيين أنّ (C_f) **يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها** α **حيث** $-1,7<\alpha<-1,6$ **.**

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1,7;-1,6]$ ولدينا $f(-1.6)=0.03$، $f(-1.7)=-0.03$ أي $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,7;-1,6[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبالتالي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-1,7<\alpha<-1,6$.

7. رسم (Δ) ، (Δ') **و** (C_f)**.**



.6 حساب، بدلالة α مساحة حيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A=\int_{\alpha}^{0}\left[x+2-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{0}\frac{4e^x}{e^x+2}dx=4\int_{\alpha}^{0}\frac{e^x}{e^x+2}dx=4\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_{\alpha}^{0}$$

$$A=4\left[\ln 3-\ln\left(e^{\alpha}+2\right)\right]ua$$

III ـ نعتبر الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\left[f(x)\right]^2$.

ـ تعيين اتجاه تغيّر الدّالة h .

نضع $u(x)=x^2$ عندئذ $h(x)=\left[f(x)\right]^2=u\left[f(x)\right]=(u\circ f)(x)$

لدينا $u'(x)=2x$ ومنه $h'(x)=f'(x)\times u'(f(x))=f'(x)\times 2f(x)=2f'(x)\times f(x)$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2f'(x)\geq 0$ ومنه إشارة $h'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغيّر مركب دالتين:

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;0]$ والدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;+\infty[$ والدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

جدول تغيرات الدّالة h .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$h(\alpha)=\left[f(\alpha)\right]^2=0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(-2;0;1\right)$، $B\left(1;2;-1\right)$ و $C\left(-2;2;2\right)$.

1) **أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$، والطولين AB و AC.**

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(3;2;-2\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(0;2;1\right)$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times 0+2\times 2+1\times -2=2$.

$AB=\sqrt{3^2+2^2+\left(-2\right)^2}=\sqrt{17}$ و $AC=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

ب) تعيين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ بالدرجة مقرّبة إلى الوحدة.

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ معناه $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$ ويكافئ

$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{17\times 5}}\approx 0.22$ وعليه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\approx 77^\circ$.

2) **استنتاج أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية.**

بما أنّ $\widehat{BAC}\neq 0$ و $\widehat{BAC}\neq\pi$ فإنّ النقط A، B و C تعين مستويا.

2) **التحقق أن المعادلة $2x-y+2z+2=0$ للمستوي $\left(ABC\right)$.**

لدينا $2x_A-y_A+2z_A+2=2\left(-2\right)-0+2\left(1\right)+2=0$، $2x_B-y_B+2z_B+2=2\left(1\right)-2+2\left(-1\right)+2=0$

و $2x_C-y_C+2z_C+2=2\left(-2\right)-2+2\left(2\right)+2=0$ ومنه إحداثيات النقط A، B و C تحقق المعادلة

$2x-y+2z+2=0$ إذن للمستوي $\left(ABC\right)$ المعادلة: $2x-y+2z+2=0$.

3) نعتبر المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $x+y-3z+3=0$ و $x-2y+6z=0$.

أ) تبيين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ والمعرف بتمثيله الوسيطي التالي $\begin{cases}x=-2\\ y=-1+3t\\ z=t\end{cases};\left(t\in\mathbb{R}\right)$ هو تقاطع المستويين $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$.

لدينا $\vec{n}\left(1;1;-3\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(P\right)$ و $\vec{n}'\left(1;-2;6\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(P'\right)$

لدينا $x_{\vec{n}}=x_{\vec{n}'}$ بينما $y_{\vec{n}}\neq y_{\vec{n}'}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي المستويان $\left(P\right)$ و $\left(P'\right)$ متقاطعان وتقاطعهما مستقيم.

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in\left(P\right)\cap\left(P'\right)$ معناه $\begin{cases}x+y-3z+3=0\\ x-2y+6z=0\end{cases}$ ويكافئ $\begin{cases}2x+2y-6z+6=0\\ x-2y+6z=0\end{cases}$ وبجمع المعادلتين نجد

$3x+6=0$ أي $x=-2$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد $-2-2y+6z=0$ أي $y=-1+3z$ وبوضع $z=t$

نجد $x=-2$ و $y=-1+3t$ و $z=t$.

إذن $M\left(-2;-1+3t;t\right)$ وعليه $\left(P\right)\cap\left(P'\right)=\left(\Delta\right)$.

ب) استنتاج أن المستويات $\left(P\right)$، $\left(P'\right)$ و $\left(ABC\right)$ تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

لدينا $\left(P\right)\cap\left(P'\right)=\left(\Delta\right)$ وعليه $\left(P\right)\cap\left(P'\right)\cap\left(ABC\right)=\left(\Delta\right)\cap\left(ABC\right)$

$\vec{u}\left(0;3;1\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم $\left(\Delta\right)$ و $\vec{u}'\left(2;-1;2\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$

وبما أنّ $\vec{u}.\vec{u}'=0\times 2+3\times -1+1\times 2=1$ أي $\vec{u}.\vec{u}'\neq 0$ فإن المستوي $\left(ABC\right)$ لا يوازي المستقيم $\left(\Delta\right)$ فهما متقاطعان في نقطة.

$M\in(\Delta)$ معناه $M(-2;-1+3t;t)$

$M\in(\Delta)\cap(ABC)$ معناه $2(-2)-(-1+3t)+2(t)+2=0$ ويكافئ $-1-t=0$ أي $t=-1$.

وعليه $M(-2;-1+3\times-1;-1)$ أي $(\Delta)\cap(ABC)=\{E\}$ حيث $E(-2;-4;-1)$.

4) ليكن (S) سطح الكرة ذي المركز $\omega(1;-3;1)$ ونصف القطر 3.

أ) كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).

(S) هي مجموعة النقط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x;y;z)$ والتي تحقق $\omega M=3$.

$M\in(S)$ يكافئ $\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2}=3$ ويكافئ $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

بعد إجراء مختلف الحسابات نجد $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z-3=0$ وهي معادلة لـ (S).

ب) دراسة تقاطع سطح الكرة (S) والمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(S)\cap(\Delta)$ معناه $(-2-1)^2+((-1+3t)+3)^2+(t-1)^2=9$ ويكافئ $4+9t^2+12t+4+t^2-2t+1=9$

وتكافئ $10t^2+10t=0$ أي $t=0$ أو $t=-1$.

وعليه $(S)\cap(\Delta)=\{E;H\}$ حيث $H(-2;-1:0)$.

جـ) تبيين أن المستوي (ABC) يمسّ سطح الكرة (S).

$d(\omega;(P))=\dfrac{|2\times1+3+2\times1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{9}{3}=3$ وهذه المسافة مساوية لنصف قطر الكرة (S) إذن المستوي (ABC) يمسّ سطح الكرة (S).

<u>**التمرين الثاني:**</u>

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $(z+\sqrt{3}-1)(z^2-2z+4)=0$

(E) تكافئ $z+\sqrt{3}-1=0$ أو $z^2-2z+4=0$ أي $z=1-\sqrt{3}$ أو $z^2-2z+4=0...(1)$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=1-3=-3=3i^2=(i\sqrt{3})^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$.

إذن (E) تكافئ $z\in\{1-\sqrt{3};1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=1-\sqrt{3}$، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

أ) كتابة كلا من z_A، z_B و z_C على شكل أسّي؛

✍ **تذكّر:** كل عدد حقيقي موجب عمدته 0 وكل عدد حقيقي سالب عمدته π.

$z_A=1-\sqrt{3}e^{i\pi}$

$$z_B=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C=\overline{z_B}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

تبيان أن $z_B^{2016}+z_C^{2016}=2^{2017}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

$$z_B^{2016}+z_C^{2016}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016}+\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2016}=2^{2016}e^{i\frac{2016\pi}{3}}+2^{2016}e^{-i\frac{2016\pi}{3}}$$
$$=2^{2016}\left(\cos\frac{2016\pi}{3}+i\sin\frac{2016\pi}{3}\right)+2^{2016}\left(\cos-\frac{2016\pi}{3}+i\sin-\frac{2016\pi}{3}\right)$$
$$=2\left(2^{2016}\cos\frac{2016\pi}{3}\right)=2\left(2^{2016}\cos 672\pi\right)=2\times 2^{2016}=2^{2017}$$

ب) تبيين أن $z_B^{\,n}+z_C^{\,n}$ حقيقي من أجل كل عدد طبيعي n.

تذكير: $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$

$$z_B^{\,n}+z_C^{\,n}=2^ne^{i\frac{n\pi}{3}}+2^ne^{-i\frac{n\pi}{3}}=2^ne^{i\frac{n\pi}{3}}+\overline{2^ne^{i\frac{n\pi}{3}}}=2\left(2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)\in\mathbb{R}$$

تعيين قيّم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^{\,n}+z_C^{\,n}=2^n$.

$z_B^{\,n}+z_C^{\,n}=2^n$ معناه $2\left(2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)=2^n$ يكافئ $\cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2}$ أي $\cos\frac{n\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}$

ومنه $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $\frac{n\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $n=1+6k$ مع $k\in\mathbb{N}$ أو $n=-1+6k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

3) **كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}$ على شكل أسّي،**

$$\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=\frac{1-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}=\frac{-1+i}{-1-i}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC.

$\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و هذا يعني أنّ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$

أي $AC=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ إذا المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

4) **تعيين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$، و حساب الطولين BC و GA.**

$$z_G=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2}=1$$
$$BC=\left|z_C-z_B\right|=\left|1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}\right|=\left|-2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$$
$$GA=\left|z_A-z_G\right|=\left|1-\sqrt{3}-1\right|=\left|-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$$

5) نسمي (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $BM^2+CM^2=12......(1)$.

أ) التحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، المساواة (1) تكافئ $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0....(2)$.

$BM^2+CM^2=12$ معناه $BM^2+CM^2-2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ وتكافئ

$\left(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right)^2+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ وتكافئ $\left(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MC}\right)^2+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ وتكافئ

$\left(\overrightarrow{BC}\right)^2+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ ومعناه $BC^2+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ لكن لدينا $BC=2\sqrt{3}$

إذن (1) تكافئ $12+2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=12$ وتكافئ $2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$ أي $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$.

ب) التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S).

A تنتمي إلى المجموعة (S) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$.

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_A-z_B}\right)=\frac{-\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{-\pi}{2}$ ويكافئ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CA}$

أي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$ وبالتالي النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S).

تحديد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة.

$M\in(S)$ إذا وفقط إذا $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0$ أي $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{CM}$ وبالتالي (S) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$ أي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $GA=\sqrt{3}$.

جـ) تعليم بدقة النقط A، B ، C و G ثم أنشئ (S).

$|z_B|=|z_C|=2$ معناه $OB=OC=2$ إذن النقطتين B و C تنتميان إلى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 2 حيث فاصلتي النقطتين B و C هي 1.

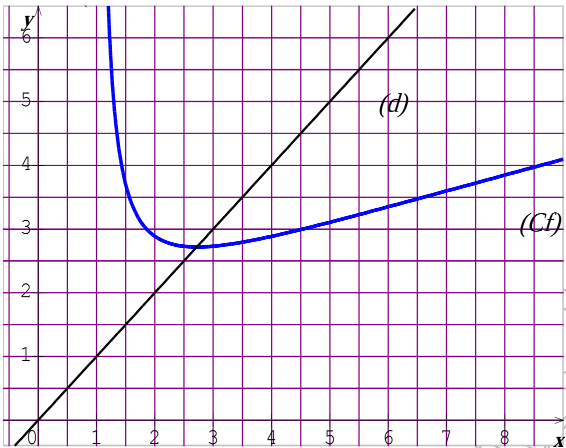
B هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المستقيم ذي المعادلة $x=1$ والتي تقع في الربع الأول.

C هي نقطة تقاطع الدائرة (C) مع المستقيم ذي المعادلة $x=1$ والتي تقع في الربع الرابع.

النقطة A هي نقطة تقاطع (S) مع محور الفواصل حيث فاصلة النقطة A سالبة.

<u>التمرين الثالث:</u>

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.



والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. أ ـ دراسة اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\ln(x)-1$.

$f'(x)=0$ تعني $\ln(x)-1=0$ ويكافئ $\ln(x)=1$ أي $x=e$

$f'(x)>0$ تعني $\ln(x)-1>0$ ويكافئ $\ln(x)>1$ أي $x>e$

$f'(x)<0$ تعني $\ln(x)-1<0$ و $x>1$ ويكافئ $\ln(x)<1$ و $x>1$ أي $1<x<e$.

بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;e]$ ومتزايدة تماما على المجال $[e;+\infty[$.

ب ـ تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3.

2. إعطاء تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq e$.

لدينا $u_0\geq e$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n عددا طبيعيا.

نفرض أن $u_n\geq e$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[e;+\infty[$ فإنّ $f(u_n)\geq f(e)$ أي $u_{n+1}\geq e$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq e$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع.

4. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{\ln u_n}-u_n=u_n\left(\frac{1}{\ln u_n}-1\right)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq e$ معناه $\ln u_n \geq 1$ يكافئ $\frac{1}{\ln u_n} \leq 1$ ويكافئ $\frac{1}{\ln u_n} - 1 \leq 0$ إذن

$u_n\left(\frac{1}{\ln u_n} - 1\right) \leq 0$ أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج ان (u_n) متقاربة ولتكن نهايتها l

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

5. تبيين أنّ $l = f(l)$،

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ معناه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$

والدالة f مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ وبالأخص عند l إذن $l = f(l)$.

حساب نهاية المتتالية (u_n).

$l = f(l)$ معناه $l = \frac{l}{\ln l}$ يكافئ $\frac{l}{\ln l} - l = 0$ ويكافئ $\frac{l - l\ln l}{\ln l} = 0$ أي $\frac{l(1-\ln l)}{\ln l} = 0$ ومنه $l = 0$ أو

$1 - \ln l = 0$ أي $l = 0$ أو $l = e$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq e$ فإنّ $l = e$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

التمرين الرابع:

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1. دراسة تغيّرات الدالة g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي مثل إشارة x.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x - e^x + 1 = 1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^x + 1 = +\infty$

جدول تغيراتها يكون كالتالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	1 ↘	0	↗ $+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$،

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq 0$.

تعليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $xe^x + 1 > 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) \geq 0$ معناه $(x-1)e^x + 1 \geq 0$ ويكافئ $xe^x - e^x + 1 \geq 0$ أي

$xe^x + 1 \geq e^x$ أي $xe^x + 1 > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

3. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x) - g'(x) = 1 - e^x$،

لدينا $g(x) = xe^x - e^x + 1$ معناه $g(x) = g'(x) - e^x + 1$ أي $g(x) - g'(x) = 1 - e^x$.

استنتاج $\int_0^1 g(x)dx$ وفسّره هندسيا.

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 [g'(x) - e^x + 1]dx = [g(x) - e^x + x]_0^1 = [g(1) - e + 1] - [g(0) - 1]$$

$$\int_0^1 g(x)dx=(2-e)+1=3-e$$

بما أنّ $\int_0^1 g(x)dx>0$ فإن $\int_0^1 g(x)dx$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة g ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{xe^x+1}=0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)}=1$$

تفسير النتيجتين بيانيا.

(C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب $y=0$ و $y=1$.

2. أ ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$

الدالة f تقبل الأشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(xe^x+1)-(e^x+xe^x)xe^x}{(xe^x+1)^2}=\frac{(e^x+xe^x)\left[(xe^x+1)-xe^x\right]}{(xe^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x+xe^x}{(xe^x+1)^2}=\frac{(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$$

ب استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x>0$ و $(xe^x+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ كإشارة $(x+1)$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;-1[$، $f'(x)<0$.

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)>0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.

جدول تغيّراتها.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\dfrac{-1}{e-1}$	$\nearrow$	1

3. تبيين $y=x$ **معادلة لـ** (T) **مماس المنحنى** (C_f) **في المبدأ.**

$y=f'(0)(x+0)+f(0)$ ومنه $y=1(x+0)+0$ أي $(T):y=x$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

4. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{xe^x+1}$

$$f(x)-x=\frac{xe^x}{xe^x+1}-x=\frac{xe^x-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{-x\left(-e^x+xe^x+1\right)}{xe^x+1}=\frac{-x\left(e^x(x-1)+1\right)}{xe^x+1}=\frac{-xg(x)}{xe^x+1}$$

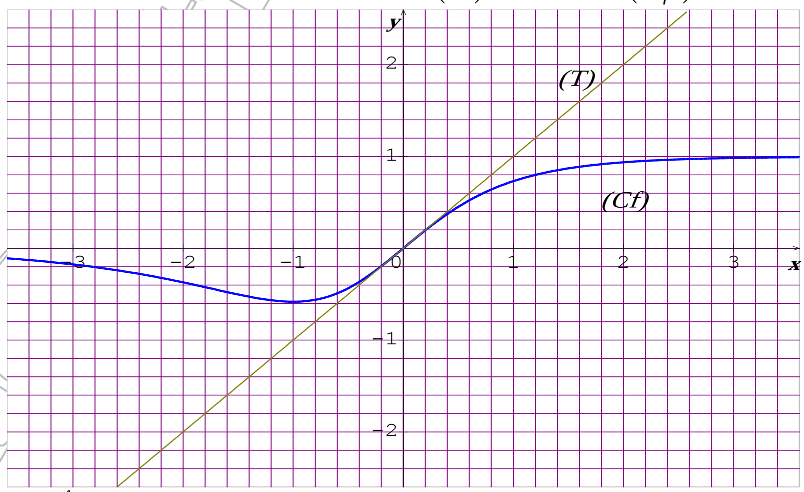
استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T).

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $xe^x+1>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $-xg(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (T)		(C_f) تحت (T)	

(C_f) و (T) يتقاطعان في النقطة O.

5. رسم (C_f) والمنحنى (T).



III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. برهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

لدينا $u_0>0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $u_n>0$ من أجل عدد طبيعي ونبرهن أن $u_{n+1}>0$.

لدينا $u_n>0$ وبما أن الدالة متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $f(u_n)>f(0)$ أي $u_{n+1}>0$

إذا حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

2. تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f(x)-x<0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\in]0;+\infty[$ فإن $f(u_n)-u_n<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة ونهايتها عدد حقيقي l.

3. حساب نهاية المتتالية (u_n).

لدينا المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

فإن $l=f(l)$ ومنه $f(l)-l=0$ وعليه $\dfrac{-lg(l)}{le^l+1}=0$ أي $l=0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.