

## الموضوع الثالث

## التمرين الأول:

- $D$  و  $H$  نقطتان من الفضاء و  $I$  منتصف القطعة المستقيمة  $[DH]$ .
- (1) بين أنه، من أجل كل نقطة  $M$  من الفضاء يكون:  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = MI^2 - ID^2$ .
- (2) استنتج أن مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$  هي سطح كرة ( $S$ ) يطلب تعيين مركزه ونصف قطره.
- II/ الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:
- $A(3; 0; 0)$ ،  $B(0; 6; 0)$ ،  $C(0; 0; 4)$  و  $D(-5; 0; 1)$ .
- (1) أ) تحقق أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا.  
 ب) بين أن الشعاع  $\vec{n}(4; 2; 3)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$ .  
 ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .
- (2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل  $D$  ويعامد المستوي  $(ABC)$ .
- (3) نسمي  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ ؛ احسب إحداثيات النقطة  $H$ .
- (4) احسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(ABC)$ ، ثم اكتب معادلة لسطح الكرة ( $S$ ) المذكورة في الجزء I.
- (5) نعتبر النقطة  $N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$ .

- أ) أثبت أن  $N$  هي المسقط العمودي للنقطة  $C$  على المستقيم  $(AB)$ .  
 ب) احسب حجم رباعي الوجوه  $ABCD$ .

## التمرين الثاني:

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:  $z^2 - 2z + 2 = 0$
- 2- لتكن النقط  $M$ ،  $L$ ،  $K$  لواحقتها  $z_M = -i\sqrt{3}$ ،  $z_L = 1 - i$ ،  $z_K = 1 + i$  في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
- علم هذه النقط.
- 3- أ) نسمي  $N$  نظيرة  $M$  بالنسبة إلى  $L$ ، عيّن  $z_N$  لاحقة  $N$ .  
 ب) ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  يحول  $M$  إلى  $A$  ويحول  $N$  إلى النقطة  $C$ .
- عيّن  $z_A$  و  $z_C$  لاحقتي النقطتين  $A$  و  $C$  على الترتيب.  
 - عيّن لاحقة صورة النقطة  $L$  بالدوران  $r$ .
- 4- ليكن  $t$  الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{u}$  ذو اللاحقة  $2i$  ويحول  $M$  إلى النقطة  $D$  و  $N$  إلى النقطة  $B$ .
- عيّن  $z_D$  و  $z_B$  لاحقتي النقطتين  $D$  و  $B$  على الترتيب.  
 - عيّن لاحقة صورة النقطة  $L$  بالانسحاب  $t$ .
- 5- أ) بين أن:  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .  
 ب) ما طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

التمرين الثالث:

I- لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

نرمز بـ  $(C_g)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- عيّن  $a$  و  $b$  بحيث  $(C_g)$  يشمل النقطة  $A(\ln 2; \ln 2)$  ويقبل عند النقطة  $A$  مماسا موازيا لمحور الفواصل

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

1. بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

2. احسب نهايتي الدالة عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

3. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها.

4. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$ .

- استنتج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

5. بيّن أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثيتها.

6. بيّن أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-1,7 < \alpha < -1,6$ .

7. ارسم  $(\Delta)$  ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .

III- نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = [f(x)]^2$ .

- عيّن اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم شكل جدول تغيراتها.

التمرين الرابع:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة :  $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2. أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $y = 1$  :  $(\Delta)$  في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

3. احسب  $f(-x) + f(x)$  ، ماذا تستنتج ؟

4. بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-0,71; -0,70[$ .

5. أثبت أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمس المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين

يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس  $(T)$ .

6. أرسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

7. ناقش بيانها، وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد حلول المعادلة:  $f(x) = mx + 1$

8.  $h$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  حيث:  $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ .

أ) بيّن أن  $h$  دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيرات  $h$  ، أرسم  $(C_h)$  ، علل ذلك.

## حل الموضوع الثالث

## التمرين الأول:

## الجزء I.

(1) إثبات أنه، من أجل كل نقطة  $M$  من الفضاء يكون:  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = MI^2 - ID^2$ .  
 $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{ID}$  فإن  $[DH]$  منتصف القطعة المستقيمة  $MI$  و بما أن  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IH})$   
 ومنه  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{ID}) = MI^2 - ID^2$ .

(2) استنتاج أن مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$  هي سطح كرة  $(S)$   
 $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$  تكافئ  $MI^2 - ID^2 = 0$  و تكافئ  $MI = ID$  بالتالي مجموعة النقط  $M$  هي سطح كرة مركزه  $I$  ونصف قطره  $ID$ .

## الجزء II.

(1 أ) التحقق أن النقط  $A, B$  و  $C$  تعين مستويا.

لدينا  $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$  ،  $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$  و  $\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{6}$  إذن الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطيا  
 ومنه النقط  $A, B$  و  $C$  تعين مستويا.

(ب) تبين أن الشعاع  $\vec{n}(4;2;3)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$ .

لدينا  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4(-3) + 2(6) + 3(0) = 0$  و  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4(-3) + 2(0) + 3(4) = 0$

ومنه  $\vec{n}$  عمودي على كل من الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  وبالتالي  $\vec{n}$  ناظم للمستوي  $(ABC)$ .

(ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .

معادلة المستوي  $(ABC)$  من الشكل  $4x + 2y + 3z + d = 0$  وبما أن  $A$  تنتمي للمستوي  $(ABC)$  فإن  
 $4(3) + d = 0$  ومنه  $d = -12$  وعليه معادلة المستوي  $(ABC)$  هي  $4x + 2y + 3z - 12 = 0$ .

(2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل  $D$  ويعامد المستوي  $(ABC)$ .

بما أن  $(\Delta)$  يعامد  $(P)$  فإن  $\vec{n}$  هو شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta)$

من أجل كل نقطة  $M(x; y; z)$  من المستقيم  $(\Delta)$  لدينا:  $\overrightarrow{DM} = t\vec{n}$  حيث  $t$  عدد حقيقي.

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ أي } (t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x + 5 = 4t \\ y = 2t \\ z - 1 = 3t \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R})$$

(3) نسمي  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $D$  على المستوي  $(ABC)$ .

حساب إحداثيات النقطة  $H$ .

$H$  هي نقطة تقاطع  $(\Delta)$  والمستوي  $(ABC)$ .

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \dots\dots\dots(1) \\ y = 2t \dots\dots\dots(2) \\ z = 1 + 3t \dots\dots\dots(3) \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \dots\dots\dots(4) \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

نعوض كل من  $x$  و  $y$  و  $z$  من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:  $4(-5 + 4t) + 2(2t) + 3(1 + 3t) - 12 = 0$

$$H(-1; 2; 4) \text{ وعليه } \begin{cases} x = -5 + 4(1) \\ y = 2(1) \\ z = 1 + 3(1) \end{cases} \text{ ومنه } 29t - 29 = 0 \text{ أي } t = 1 \text{ إذن}$$

**(4) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).**

يمكن حساب المسافة بطريقتين

$$d(D; (ABC)) = \frac{|4(-5) + 2(0) + 3(1) - 12|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \quad \text{طريقة 1:}$$

$$d(D; (ABC)) = DH \quad \text{طريقة 2:}$$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{DH}(4; 2; 3) \text{ وعليه } DH = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29} \text{ إذن } d(D; (ABC)) = \sqrt{29}.$$

**كتابة معادلة لسطح الكرة (S).**

**I. تعيين إحداثيات I.**

$$I\left(-3; 1; \frac{5}{2}\right) \text{ إذن } z_I = \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_I = \frac{y_D + y_H}{2} = 1, \quad x_I = \frac{x_D + x_H}{2} = -3$$

$$ID = \frac{DH}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$MI = ID \text{ معناه } (x+3)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \text{ وهي معادلة السطح } (S).$$

$$(5) \text{ نعتبر النقطة } N\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$$

**(أ) إثبات أن N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).**

تكون N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) إذا تحقق ما يلي:  $\overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$  و  $N \in (AB)$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{CN}\left(\frac{12}{5}; \frac{6}{5}; 4\right) \text{ ومنه } \overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{12}{5}(-3) + \frac{6}{5}(6) + 0(0) = 0 \text{ وهذا يعني أن } \overrightarrow{CN} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{ولدينا } \overrightarrow{AN}\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; 0\right) \text{ و } \overrightarrow{AB}(-3; 6; 0) \text{ ومنه } \overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AN} \text{ إذن الشعاعان } \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AN} \text{ مرتبطان خطياً ومنه}$$

N تنتمي للمستقيم (AB) وبالتالي N هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

**(ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD.**

$$V = \frac{1}{3} S \times DH \text{ حيث } S \text{ هي مساحة المثلث } ABC.$$

$$\text{لدينا } CN = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{36}{25} + 16} = \sqrt{\frac{580}{25}} = \sqrt{\frac{116}{5}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}}, \quad AB = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{ومنه } S = \frac{1}{2} AB \times CN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{29} \text{ وعليه } V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{29} \times \sqrt{29} = 29 \text{ وحدة مكعبة}$$

## التمرين الثاني:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :  $z^2 - 2z + 2 = 0$ 

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 \quad \text{للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

2- لتكن النقط  $M, L, K$  لواحقها  $z_M = -i\sqrt{3}$  ،  $z_L = 1-i$  ،  $z_K = 1+i$ 

- تعليم النقط .

3- أ) نسمي  $N$  نظيرة  $M$  بالنسبة إلى  $L$  ،تعيين  $z_N$  لاحقة  $N$  .

$$\overrightarrow{LN} = -\overrightarrow{LM} \quad \text{معناه} \quad z_N - z_L = -(z_M - z_L) \quad \text{ومنه} \quad z_N = -(z_M - z_L) + z_L$$

$$\text{أي} \quad z_N = 2+i(\sqrt{3}-2) \quad \text{بالتالي} \quad z_N = -(-i\sqrt{3}-1+i) + 1-i$$

(ب) ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  يحول  $M$  إلى  $A$  ويحول  $N$  إلى النقطة  $C$ - تعيين  $z_A$  و  $z_C$  لاحقتي النقطتين  $A$  و  $C$  على الترتيب.الكتابة المركبة للدوران  $r$  هي :  $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$  أي  $z' = iz$  .

$$r(M) = A \quad \text{معناه} \quad z_A = iz_M = i(-i\sqrt{3}) \quad \text{ومنه} \quad z_A = \sqrt{3}$$

$$r(N) = C \quad \text{معناه} \quad z_C = iz_N = i(2+i(\sqrt{3}-2)) \quad \text{ومنه} \quad z_C = 2-\sqrt{3}+2i$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة  $L$  بالدوران  $r$  .

$$r(L) = K \quad \text{ومنه} \quad z' = 1+i = z_K \quad \text{وعليه} \quad z' = iz_L = i(1-i)$$

4- ليكن  $t$  الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{u}$  ذو اللاحقة  $2i$  ويحول  $M$  إلى النقطة  $D$  و  $N$  إلى النقطة  $B$  .- تعيين  $z_D$  و  $z_B$  لاحقتي النقطتين  $D$  و  $B$  على الترتيب.العبارة المركبة للانسحاب  $t$  هي :  $z' = z + z_u$  أي  $z' = z + 2i$ 

$$t(M) = D \quad \text{معناه} \quad z_D = z_M + 2i \quad \text{ومنه} \quad z_D = -i\sqrt{3} + 2i = i(2-\sqrt{3})$$

$$t(N) = B \quad \text{معناه} \quad z_B = z_N + 2i \quad \text{ومنه} \quad z_B = 2+i(\sqrt{3}-2) + 2i \quad \text{أي} \quad z_B = 2+i\sqrt{3}$$

- تعيين لاحقة صورة النقطة  $L$  بالانسحاب  $t$  .

$$t(L) = K \quad \text{ومنه} \quad z' = 1+i = z_K \quad \text{وعليه} \quad z' = z_L + 2i = 1-i + 2i$$

$$5- أ) تبين أن:  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$  .$$

$$z_A - z_B = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$i(z_C - z_B) = i(2 - \sqrt{3} + 2i - 2 - i\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}$$

$$\text{ومنه} \quad \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \quad \text{أي} \quad z_A - z_B = i(z_C - z_B)$$

استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$  .

$$\text{لدينا} \quad \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \quad \text{ومنه} \quad \left| \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وهذا يعني أن  $BA = BC$  و  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$  إذن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين وقائم في  $B$ .

**(ب) طبيعة الرباعي  $ABCD$ .**

$$\left\{ \begin{array}{l} r(M) = A \\ r(N) = C \\ r(L) = K \end{array} \right. \text{ لدينا } [MN] \text{ ولدينا } [AC] \text{ منتصف } K \text{ منتصف}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t(M) = D \\ t(N) = B \\ t(L) = K \end{array} \right. \text{ ولدينا } [BD] \text{ منتصف } K \text{ منتصف}$$

ومنه الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع (قطراه متناصفان).

وزيادة على ذلك لدينا  $BA = BC$  و  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$  إذن  $ABCD$  مربع.

### التمرين الثالث:

I- لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

نرمز بـ  $(C_g)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**- تعيين  $a$  و  $b$  بحيث  $(C_g)$  يشمل النقطة  $A(\ln 2; \ln 2)$  ويقبل عند النقطة مماسا موازيا لمحور الفواصل**

$$(C_g) \text{ يشمل النقطة } A(\ln 2; \ln 2) \text{ معناه } g(\ln 2) = \ln 2 \text{ يكافئ } (\ln 2)a + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 \text{ ويكافئ } (\ln 2)a + b - 2 = \ln 2$$

$$g'(x) = a - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}, x \text{ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي}$$

$(C_g)$  يقبل عند النقطة  $A$  مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه  $g'(\ln 2) = 0$  ويكافئ  $a - 1 = 0$  أي  $a = 1$  بالتعويض عن قيمة  $a$  في المعادلة (1) نجد  $(\ln 2) + b = \ln 2 + 2$  ومنه  $b = 2$  وعليه  $(a; b) = (1; 2)$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \text{ كما يلي: II- نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}$$

$(C_f)$  لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$$1. \text{ تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي } x: f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{4e^x + 8 - 4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

2. حساب نهايتي الدالة عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} = +\infty$$

3. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} + 4e^x + 4 - 8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2}$$

إذن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .جدول تغيرات الدالة  $f$ 

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

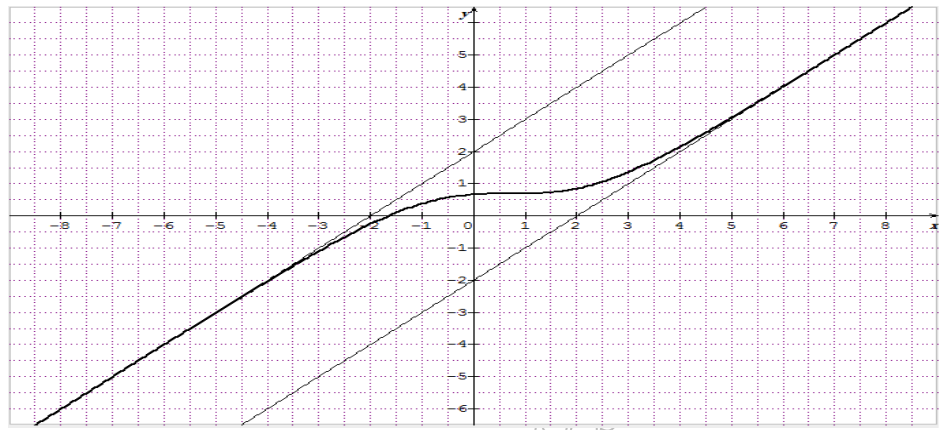
4. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2)$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 2} = 0$$

- استنتاج أن  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = 0$  ومنه  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = x - 2$  بجوار  $+\infty$ .و لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) = 0$  ومنه  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب  $(\Delta')$  مائل معادلته  $y = x + 2$  بجوار  $-\infty$ .5. تبين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $\omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.بما أن  $f'(x)$  تنعدم عند العدد  $\ln 2$  ولا تغير من إشارتها فإن النقطة  $A(\ln 2; \ln 2)$  هي نقطة إنعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .6. تبين أن  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-1,7 < \alpha < -1,6$ .الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  وبالخصوص على المجال  $[-1,7; -1,6]$  ولدينا  $f(-1,6) = 0,03$  و  $f(-1,7) = -0,03$  أي  $f(-1,7) \times f(-1,6) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$  من المجال  $[-1,7; -1,6]$  بحيث  $f(\alpha) = 0$  وبالتالي  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $-1,7 < \alpha < -1,6$ .7. رسم  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .





III - نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = [f(x)]^2$ .

- تعيين اتجاه تغير الدالة  $h$ .

نضع  $u(x) = x^2$  عندئذ  $h(x) = [f(x)]^2 = u[f(x)] = (u \circ f)(x)$  لدينا  $u'(x) = 2x$  ومنه  $h'(x) = f'(x) \times u'(f(x)) = f'(x) \times 2f(x) = 2f'(x) \times f(x)$  لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $2f'(x) \geq 0$  ومنه إشارة  $h'(x)$  هي نفس إشارة  $f(x)$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)$		0	+	+
$h'(x)$	-	0	+	+

الدالة  $h$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; \alpha]$  و متزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

يمكن اتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين:

لدينا الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $]-\infty; \alpha]$  وتأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; 0]$  والدالة  $u$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  وبالتالي الدالة  $h$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; \alpha]$ .  
و لدينا الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; +\infty[$  وتأخذ قيمها في المجال  $[0; +\infty[$  والدالة  $u$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  وبالتالي الدالة  $h$  متزايدة تماماً على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

جدول تغيرات الدالة  $h$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$0$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

$$h(\alpha) = [f(\alpha)]^2 = 0$$



## التمرين الرابع:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بالعلاقة:  $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$   
 $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = -\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2 = -\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة  $f'(x)$  هي من نفس إشارة  $\ln x^2 - 2$ .

$f'(x) = 0$  معناه  $\ln x^2 - 2 = 0$  ويكافئ  $\ln x^2 = 2$  ويكافئ  $x^2 = e^2$  أي  $x = e$  أو  $x = -e$

$f'(x) > 0$  معناه  $\ln x^2 - 2 > 0$  ويكافئ  $\ln x^2 > 2$  ويكافئ  $x^2 > e^2$  أي  $x > e$  أو  $x < -e$

إشارة  $f'(x)$ .

$x$	$-\infty$	$-e$	$0$	$e$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

الدالة  $f$  متزايدة على كل من  $[-e; -\infty[$  و  $[e; +\infty[$  ومتناقصة على كل من  $]-e; 0]$  و  $]0; e]$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-e$	$0$	$e$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$1$	$\frac{e+2}{e}$	$+\infty$	$\frac{e-2}{e}$	$1$	$+\infty$

2. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $y = 1$  في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$f(x) = 1$  معناه  $1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1$  يكافئ  $\ln x^2 = 0$  ويكافئ  $x^2 = 1$  أي  $x = 1$  أو  $x = -1$

إذن  $(C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$

3. حساب  $f(-x) + f(x)$ .

ليكن  $x$  عددا حقيقيا غير معدوم؛  $f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}^*$  ولدينا  $f(-x) + f(x) = 2$  وعليه النقطة  $\omega(0;1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$

4. تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على المجال  $]-0,71; -0,70[$

الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-0,71; -0,70[$  ولدينا  $f(-0,71) \approx 0,04$ ،  $f(-0,70) \approx -0,02$  أي  $f(-0,71) \times f(-0,70) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  في المجال  $]-0,71; -0,70[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$ .

5. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمس المنحنى  $(C_f)$  في نقطتين.

لدينا معادلة المماس  $(T)$  من الشكل:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$-x_0 \left( \frac{\ln x_0^2 - 2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1 \text{ وتكافئ } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ معناه } A(0;1) \in (T)$$

$$\text{وتكافئ } \left( \frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \frac{-2 \ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ ومنه } x_0^2 = e$$

أي  $x_0 = \sqrt{e}$  أو  $x_0 = -\sqrt{e}$ . إذن  $(C_f)$  يقبل مماسين يشملان النقطة  $A(0;1)$  عند النقطتين اللتين فاصلتيهما  $\sqrt{e}$  و  $-\sqrt{e}$  ولدينا  $f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$  و  $f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e}$  إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أن المنحنى

$(C_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  يشمل النقطة  $A(0;1)$  ويمس المنحنى  $(C_f)$  في النقطتين اللتين إحداثيتيهما  $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$  و  $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$ .

كتابة معادلة المماس  $(T)$ .

$$y = \frac{-1}{e}x + 1 \text{ ومنه } y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$

6. رسم المماس  $(T)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

7. المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي

$m$  عدد حلول المعادلة:  $f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$

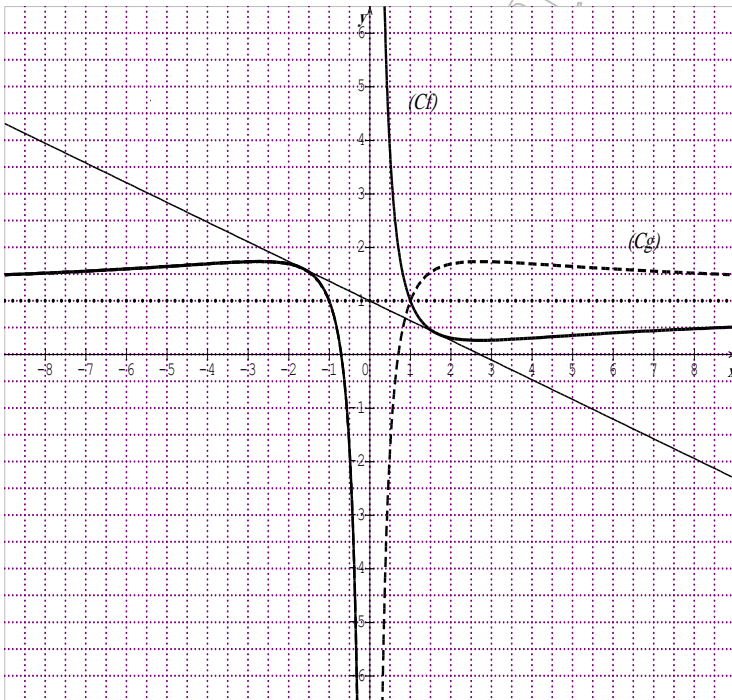
والمستقيم ذي المعادلة  $y = mx + 1$ .

إذا كان  $m < -\frac{1}{e}$  فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان  $m = -\frac{1}{e}$  فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان  $-\frac{1}{e} < m < 0$  فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان  $m \geq 0$  فإن المعادلة تقبل حلين.



8. الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  حيث:  $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$ .

**أ) تبين أن  $h$  دالة زوجية.**

من أجل  $x \in \mathbb{R}^*$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}^*$ .

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x) \text{ ولدينا}$$

$$\begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases}$$

إذن  $(C_h)$  ينطبق على  $(C_f)$  في المجال  $]-\infty; 0]$  وبما أن  $h$  زوجية فإن  $(C_h)$  متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.