الموضوع التاسع:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط:

$A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ و $D(1;1;1)$.

1) أ) تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) احسب احداثيات النقطة G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

3) بيّن أنّ (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثاني:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ - تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ - اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب - اكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل الأسّي.

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ - جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ - بيّن أنّ النقط A ، B و A' في استقامية

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - أُحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - احسب $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا.

2. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$y=x$ و $y=x+1$.

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .

4. أثبت أنّ $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f).

5. أ - بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

ب - هل توجد مماسات لـ(C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

جـ - ارسم (Δ)،(Δ') ثمّ المنحنى (C_f).

د - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

حل الموضوع التاسع:

التمرين الأوّل:

1) أ) التحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;3;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ و $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب) تبيين أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1(-3)+1(3)+1(0) = -3+3 = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1(-1)+1(0)+1(1) = -1+1 = 0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC) من الشكل $x+y+z+d=0$ وبما أنّ A تنتمي للمستوي (ABC) فإنّ $2-1+1+d=0$

ومنه $d=-2$ وعليه معادلة المستوي (ABC) هي $x+y+z-2=0$.

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) حساب احداثيات النقطة G.

$x_G = \frac{x_A+2x_B-x_C}{2} = \frac{2-2-1}{2} = \frac{-1}{2}$ ، $y_G = \frac{y_A+2y_B-y_C}{2} = \frac{-1+4-1}{2} = 2$

$z_G = \frac{z_A+2z_B-z_C}{2} = \frac{1+2-2}{2} = \frac{1}{2}$ وعليه $G\left(-\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

تبيين أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

لدينا G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$ ومنه $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = (1+2-1)\overrightarrow{MG}$

أي $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ معناه $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$ ومعناه $2MG = 2MD$ أي $MG = MD$

إذن (Γ) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

جـ) كتابة معادلة ديكارتية لـ (Γ).

لتكن I منتصف القطعة $[GD]$ إذن $I\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$.

المستوي (Γ) شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ و يشمل النقطة I.

معادلة المستوي (Γ) من الشكل $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+d=0$ وبما أنّ I تنتمي للمستوي (Γ) فإنّ $\frac{3}{8}-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+d=0$

ومنه $d=\frac{3}{4}$ وعليه معادلة (Γ) هي $\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$ أي $6x-4y+2z+3=0$.

3) تبيين أنّ (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}'(6;-4;2)$ شعاع ناظمي لـ (Γ) و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

واضح أنّ $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا إذن (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

تعيين تمثيل وسيطي لـ (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases} x+y+z-2=0..........(1) \\ 6x-4y+2z+3=0.....(2) \end{cases}$ بضرب المعادلة (1) بالعدد 4 وبجمع المعادلتين نجد

$10x+6z-5=0$ ومنه $x=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z$ وبتعويض x في (1) نجد $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}z+y+z-2=0$ ومنه $y+\frac{2}{5}z-\frac{3}{2}=0$

أي $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{5}z$ وبوضع $z=5t$ نجد $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-3t \\ y=\frac{3}{2}-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=5t \end{cases}$

التمرين الثاني:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ ـ التحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$P(6)=6^3-12\times6^2+24\times6-72=216-432+144-72=0$ ومنه 6 جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب ـ ايجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

$(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta$

وبالمطابقة مع $z^3-12z^2+24z-72$ نجد $\alpha-6=-12$ و $-6\beta=-72$ ومنه $\alpha=-6$ و $\beta=12$

إذن $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$

جـ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $z=6$ أو $z^2-6z+12=0.....(1)$

نحل المعادلة (1).

$\Delta=36-48=-12=(2\sqrt{3}i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{6+2i\sqrt{3}}{2}=3+i\sqrt{3}$

و $z_1=\frac{6-2i\sqrt{3}}{2}=3-i\sqrt{3}$ بالتالي حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $\{6;3+i\sqrt{3};3-i\sqrt{3}\}$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ ـ كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

$z_A=6e^{i0}$

$|z_B|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ومنه $z_B=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

بالتالي $z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=\overline{z_B}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب ـ كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6-6i\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الأسّي

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \text{ ، } \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

بالتالي $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ ـ استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=-\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أنّ $BA=CA$ و $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{3}$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ ايجاد الكتابة المركبة للتشابه S .

الكتابة المركبة للتشابه S هي $z'-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-z_C\right)$ أي $z'=i\sqrt{3}\left(z-z_C\right)+z_C$

ومنه $z'=i\sqrt{3}z-4i\sqrt{3}$.

ب ـ تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

$S(A)=A'$ يكافئ $z_{A'}=i\sqrt{3}z_A-4i\sqrt{3}$ ومنه $z_{A'}=6i\sqrt{3}-4i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$

جـ ـ تبيين أنّ النقط A ، B و A' في استقامية.

$$\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2i\sqrt{3}-6}{3+i\sqrt{3}-6}=\frac{2\left(-3+i\sqrt{3}\right)}{-3+i\sqrt{3}}=2$$ بما أنّ $\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي فإنّ A ، B و A' في استقامية.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

نرمز بـ $\left(C_f\right)$ لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-\frac{1}{e^x-1}=-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\frac{1}{e^x-1}=+\infty$.

ب ـ حساب $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ **و** $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ لأنّ $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} e^x - 1 = 0^-$ ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$ لأنّ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} e^x - 1 = 0^+$ ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$

التفسير: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

2. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f جدول تغيّراتها.

من أجل $x \neq 0$ لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وعليه الدّالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$y = x$ و $y = x + 1$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = 1 - 1 = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

$f(x) - x = \frac{-1}{e^x - 1}$ ؛ إشارة $f(x) - x$ هي عكس إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	—	‖	$+$
$f(x) - x$	$+$	‖	—
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ)	‖	(C_f) يقع تحت (Δ)

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ').

$$f(x) - (x + 1) = -\frac{1}{e^x - 1} - 1 = \frac{-e^x}{e^x - 1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $-e^x < 0$ ومنه إشارة $f(x) - (x + 1)$ هي عكس إشارة $e^x - 1$

aziz_mus1@hotmail.fr

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	‖	$+$
$f(x)-(x+1)$	$+$	‖	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) يقع فوق (Δ')	‖	(C_f) يقع تحت (Δ')

4. إثبات أنّ $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f).

$\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر إذا تحقق مايلي: من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}^*$

ومن أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x)+f(x)=1$

لدينا $x\in\mathbb{R}^*$ معناه $x\neq 0$ ومنه $-x\neq 0$ أي $-x\in\mathbb{R}^*$.

$$f(-x)+f(x)=-x+\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}=\frac{-e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}=1$$

إذن $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f).

5. أ - تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ وبالخصوص على المجال $[-1,4;-1,3]$ ولدينا $f(-1,4)\approx -0,07$ و $f(-1,3)\approx 0,07$ أي $f(-1,4)\times f(-1,3)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]-1,4;-1,3[$ يحقق $f(\beta)=0$.

ولدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[\ln 2;1]$ و لدينا $f(\ln 2)\approx -0,3$ و $f(1)\approx 0,4$ أي $f(\ln 2)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]\ln 2;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

ب - هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

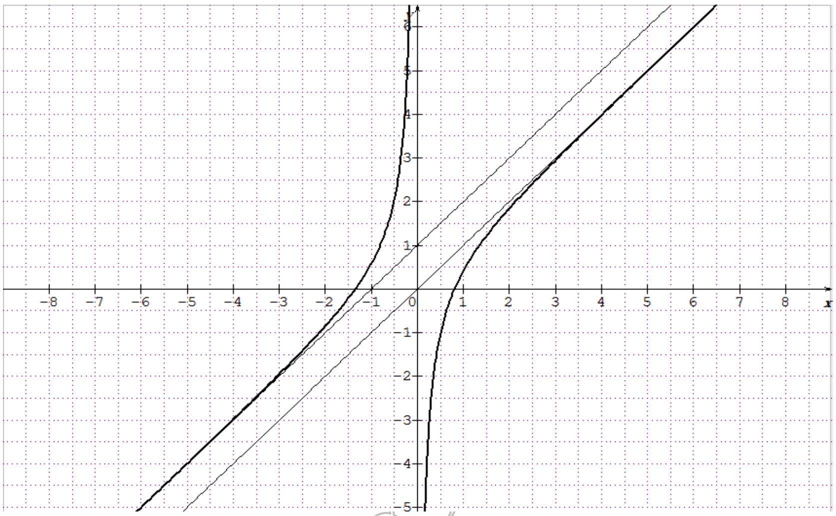
المماس يوازي (Δ) معناه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $1+\frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=1$ ويكافئ $\frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}=0$ أي $e^{x_0}=0$ وهذا مستحيل.

ومنه لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم (Δ).

جـ - رسم (Δ)، (Δ') والمنحنى (C_f).

aziz_mus1@hotmail.fr



د ـ المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x}=m$

$(m-1)e^{-x}=m$ تكافئ $m-1=me^{x}$ وتكافئ $-1=m\left(e^{x}-1\right)$ تكافئ $m=\dfrac{-1}{e^{x}-1}$ تكافئ $x+m=x-\dfrac{1}{e^{x}-1}$

أي $f(x)=x+m$ ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $\left(C_f\right)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

إذا كان $x<0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $0\leq m\leq 1$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m>1$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **.**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=1$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ **.**

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$f'(x)=0$ تعني $1-\ln x=0$ يكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ تعني $1-\ln x>0$ يكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ تعني $1-\ln x<0$ يكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

وجدول تغيّرات الدّالة f يكون كالتالي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\dfrac{2}{e}$	↘	1

2) أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا $f(x)-1=\dfrac{2\ln x}{x}$

$f(x)-1=0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}=0$ تكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$.

$f(x)-1>0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}>0$ تكافئ $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-1<0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}<0$ تكافئ $\ln x<0$ أي $0<x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=2(x-1)+1$ أي $(T):y=2x-1$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة على المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ ولدينا $f\left(e^{-0,4}\right)\approx-0,19$، $f\left(e^{-0,3}\right)\approx0,19$ أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,4}\right)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ فإنّ α وحيد .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

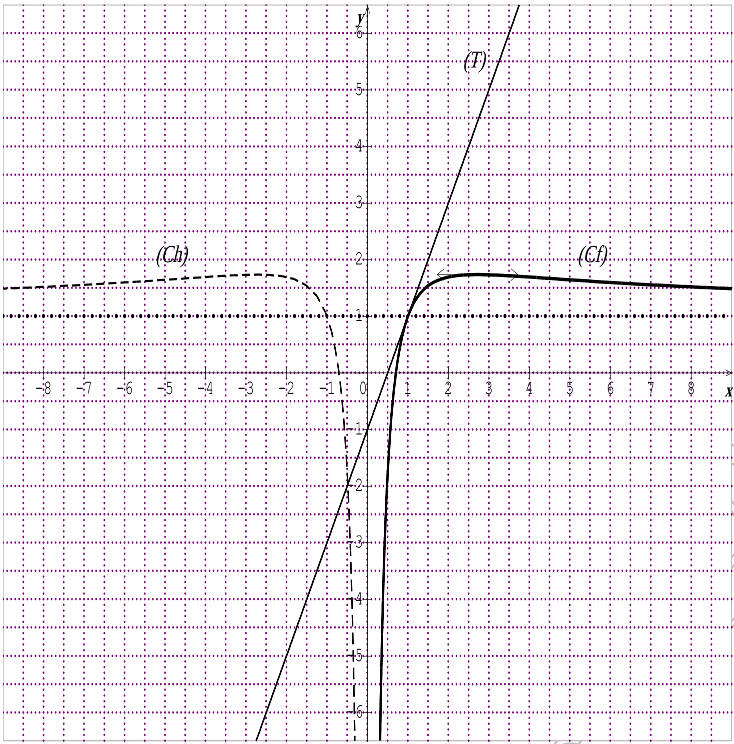
ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

ولدينا $h(x)-h(-x)=0$ ومنه $h(x)=h(-x)$ إذن الدالّة h زوجية.

ب) الرسم



جـ) المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=\frac{\ln x^2}{|x|}+1$ تكافئ

$m=\frac{2\ln|x|}{|x|}+1$ أي $h(x)=m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_h) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=m$.

إذا كان $m\le 1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $1<m<1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m=1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

$m>1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.