الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبية — دورة تدريبية

الشعبة: جميع الشعب. — دورة أفريل 2015

الحل المفصّل للموضوع رقم 16. — إعداد: مصطفاي عبد العزيز

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(1;0;-2\right)$، $B\left(3;1;0\right)$ و $C\left(1;0;1\right)$

1. اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل B.

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء بحيث: $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

بيّن أنّ (Δ) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-2;-1;1\right)$ ويشمل النقطة B.

3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ).

4. أ - عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب - احسب بُعد النقطة A عن المستقيم (Δ)، ثمّ استنتج أنّ (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيينهما.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\left\{\left(B;e^t\right),\left(C;1\right)\right\}$.

أ - بيّن أنّ $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

ب - شكل جدول تغيّرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$.

ج - استنتج مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني:

I) ليكن $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

1) بيّن أنّه، من أجل كل عدد مركب z، $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$.

2) تحقق أنّ $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$، ثمّ استنتج جذرا آخر له.

3) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A=-1$، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب.

1) التحويل النقطي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=(1+i)z+i$.

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - لتكن M نقطة تختلف عن A، ماطبيعة المثلث AMM'.

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A، لاحقتها العدد المركب z_n.

نضع $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $M_{n+1}=S\left(M_n\right)$.

أ - أثبت أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $z_n=(1+i)^n-1$.

ب - عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O، A و M_n في استقامية.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

I- g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x-1)e^{x}-1$

1. أُدرس تغيّرات الدّالة g.
2. أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.2<\alpha<1.3$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II- f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{e^{x}+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
   ب - بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$. ثم استنتج تغيرات الدالة f.
   جـ - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2(\alpha-1)$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
2. أ - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$، مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
   ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).
3. أ - بيّن أنّ: $f(-\alpha)=-2$.
   ب - بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ).
   جـ - اكتب معادلة (T).
4. أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).
5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x\left(\dfrac{1}{e^{x}+1}-1\right)=m$.

التمرين الرابع:

(d) مستقيم مزود بمعلم $(O;\vec{i})$، A_0، B_0 نقطتان فاصلتاهما على الترتيب -4 و 3.

من أجل كل عدد طبيعي n، نسمي A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;1),(B_n;4)\}$

و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;3),(B_n;2)\}$

1/ علم النقط A_0، B_0، A_1 و B_1.

2/ النقطتان A_n و B_n فاصلتاهما على الترتيب a_n و b_n حيث $a_0=-4$ و $b_0=3$.

- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1}=\dfrac{1}{5}(a_n+4b_n)$ و $b_{n+1}=\dfrac{1}{5}(3a_n+2b_n)$.

3/ **أ -** برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3a_n+4b_n=0$.
   ب - بيّن أنّ (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان يطلب تعيين أساس كل منهما.

4/ **أ -** عبّر عن a_n و b_n بدلالة n.
   ب - عيّن نهايتي (a_n) و (b_n). فسّر النتائج هندسيا.

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له. (Δ') المستقيم المعرّف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1. جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ').
2. بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.
3. (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ). بيّن أنّ معادلة المستوي هي: $2x+y+2z-3=0$
4. $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)
5. أ - عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta")$ الذي يشمل A' و يوازي (Δ).

   ب - بيّن أنّ (Δ') و $(\Delta")$ يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$.
6. f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t)=BM^2$

   أ - بيّن أنّ: $f(t)=9t^2-24t+20$.

   ب - بيّن أنّ f تقبل قيمة حدّية صغرى $f(t_0)$ يُطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.

   جـ - تحقق أنّ $d=\sqrt{f(t_0)}$.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، A ، B و C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$

   أ - اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$.

   ب - عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

   جـ - بيّن أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربع.
3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

   أ - بيّن أنّ (Δ) هو محور الفواصل.

   ب - بيّن أنّ حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}+1$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,4<\alpha<1,5$
ب) استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(x+1)$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-1)\ln(x+1)+1$

(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ فإن: $f'(x)=g(x+1)$، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f.
4. بين أنّ: $f(\alpha-1)=5-\alpha-\frac{4}{\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha-1)$.

III) ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال $]-1;+\infty[$ و (T_{x_0}) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

نعرّف الدالة h على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$

1. بيّن أن $h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$ ثمّ أعط إشارة $h'(x)$ إعتمادا على رتابة الدالة f'.
2. استنتج تغيرات الدالة h، ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_{x_0}).
3. أعط معادلة لـ (T_0) ثم أنشئه.
4. بأخذ $\alpha\approx1,45$ و $f(\alpha-1)\approx0,8$ أنشئ (C_f) على المجال $]-1;3]$.

التمرين الرابع:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1) أ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f

ب ـ بيّن أنّه إذا كان $x\in[1;2]$ فإنّ $f(x)\in[1;2]$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان بـ: $u_0=1$ و $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1}=f(u_n)$ و $v_{n+1}=f(v_n)$.

أ ـ ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f والمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

ب ـ أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n: " $1\le u_n\le2$ " ؛ " $1\le v_n\le2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ ".

4) أ ـ أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

ب ـ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n-u_n\ge0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n-u_n\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

6) استنتج أنّ للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية l.

7) عيّن القيمة المضبوطة للعدد l.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A\left(1;0;-2\right)$، $B\left(3;1;0\right)$ و $C\left(1;0;1\right)$

1. كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل B.

لدينا نصف قطر سطح الكرة (S) هو $AB=\sqrt{4+1+4}=3$.

$M\left(x;y;z\right)\in(S)$ معناه $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+2\right)^2=9$ أي $x^2+y^2+z^2-2x+4z-5=0$

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء بحيث: $\begin{cases}x+2z-3=0\\ y+z-1=0\end{cases}$

تبيين أنّ (Δ) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-2;-1;1\right)$ ويشمل النقطة B.

$\begin{cases}x+2z-3=0\\ y+z-1=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=-2z+3\\ y=-z+1\end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases}x=-2t+3\\ y=-t+1\\ z=t\end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

وهذه الأخيرة تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ) شعاعه التوجيهي $\vec{u}\left(-2;-1;1\right)$ ويشمل النقطة B.

3. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ).

بما أنّ (P) يعامد (Δ) فإن $\vec{u}\left(-2;-1;1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(P)$ معناه $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ حيث $\overrightarrow{AM}\left(x-1;y;z+2\right)$

ومنه $-2\left(x-1\right)-y+1\left(z+2\right)=0$ أي $-2x-y+z+4=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

4. أ ـ تعيين إحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه $M\left(-2t+3;-t+1;t\right)$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

$M\in(\Delta)\cap(P)$ معناه $-2\left(-2t+3\right)-\left(-t+1\right)+t+4=0$ ويكافئ $6t-3=0$ أي $t=\dfrac{1}{2}$

وعليه $M\left(-2\left(\dfrac{1}{2}\right)+3;\dfrac{-1}{2}+1;\dfrac{1}{2}\right)$ أي $M\left(2;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

إذن $(\Delta)\cap(P)=\{E\}$ حيث $E\left(2;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

ب ـ حساب بُعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) هي E وعليه $d\left(A;(\Delta)\right)=AE$.

لدينا $AE=\sqrt{\left(2-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^2}=\sqrt{\dfrac{30}{4}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ إذن $d\left(A;(\Delta)\right)=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

استنتاج أنّ (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيينهما.

بما أنّ $d\left(A;(\Delta)\right)<AB$ (AB هو نصف قطر الكرة (S)) فإنّ (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين.

لتكن $M\left(x;y;z\right)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه $M\left(-2t+3;-t+1;t\right)$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$M\in(\Delta)\cap(S)$ معناه $(-2t+3-1)^2+(-t+1)^2+(t+2)^2=9$ تكافئ $6t^2-6t=0$ أي $t=0$ أو $t=1$

وعليه $(\Delta)\cap(S)=\{A;C\}$.

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(B;e^t),(C;1)\}$.

أ ـ تبيين أنّ $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

لدينا $e^t\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ معناه $e^t\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ وتكافئ $(e^t+1)\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{BC}$ أي $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{1+e^t}\overrightarrow{BC}$.

ب ـ تشكيل جدول تغيّرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t)=\frac{1}{1+e^t}$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(t)=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي t لدينا $f'(t)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t}=1$$

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+e^t}=0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	1 ↘	0

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f: من أجل كل عدد حقيقي t، $f(t)\in]0;1[$.

ج ـ استنتاج مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$.

لدينا $\overrightarrow{BG}=f(t)\overrightarrow{BC}$ مع $f(t)\in]0;1[$ إذن مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C.

<u>التمرين الثاني:</u>

I) ليكن $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3+z^2-4z+6$.

1) **تبيين أنّه، من أجل كل عدد مركب z،** $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$.

ليكن z عددا مركبا

$$\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-4z+6}=\bar{z}^3+\bar{z}^2-4\bar{z}+\bar{6}=\bar{z}^3+\bar{z}^2-4\bar{z}+6=P(\bar{z})$$

2) **التحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود** $P(z)$.

$$P(1+i)=(1+i)^3+(1+i)^2-4(1+i)+6=(1+i)\left[(1+i)^2+1+i-4\right]+6$$

$$P(1+i)=(1+i)(2i+1+i-4)+6=-6+6=0$$

استنتاج جذر آخر له.

لدينا $P(\overline{1+i})=\overline{P(1+i)}$ معناه $P(1-i)=\bar{0}$ أي $P(1-i)=0$ إذن $1-i$ أيضا جذر لـ $P(z)$.

3) **حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة** $P(z)=0$.

ليكن z_0 جذرا لكثير الحدود $P(z)$؛ لدينا إذن $P(z)=(z-(1+i))(z-(1-i))(z-z_0)$ أي

$$P(z)=(z^2-2z+2)(z-z_0)=z^3+z^2(-z_0-2)+z(2+2z_0)-2z_0$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

بالمطابقة نجد $z_0=-3$.

يمكن استعمال طريقة أخرى مباشرة: لدينا $-(1+i)(1-i)z_0=6$ ومنه $-2z_0=6$ أي $z_0=-3$.

إذن $P(z)=0$ معناه $z\in\{1+i;1-i;-3\}$

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها

$z_A=-1$، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب.

1) التحويل النقطي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=(1+i)z+i$.

أ ـ تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

الكتابة المركبة للتحويل S من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1+i$ و $b=i$.

لدينا $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة

$\frac{b}{1-a}=\frac{i}{-i}=-1=z_A$ أي مركز التشابه المباشر S هو A.

ب ـ تعيين طبيعة المثلث AMM'.

لدينا $S(M)=M'$ معناه $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)=\frac{\pi}{4}$ و $AM'=\sqrt{2}AM$.

لدينا $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}\right)=-AM^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}$

$$=-AM^2+AM.AM'\cos\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)$$

$$=-AM^2+AM\times\sqrt{2}AM\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-AM^2+AM^2$$

أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'}=0$ ومنه المثلث AMM' قائم في M.

لدينا $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}\right)=\frac{\pi}{4}$ و $\left(\overrightarrow{MM'};\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن $\left(\overrightarrow{M'A};\overrightarrow{M'M}\right)=\frac{\pi}{4}$.

وبالتالي المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A، لاحقتها العدد المركب z_n.

نضع $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $M_{n+1}=S(M_n)$.

أ ـ إثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $z_n=(1+i)^n-1$.

نستعمل البرهان بالتراجع.

$z_0=(1+i)^0-1=0$

نفرض أن $z_n=(1+i)^n-1$ ونبرهن أن $z_{n+1}=(1+i)^{n+1}-1$

لدينا $M_{n+1}=S(M_n)$ معناه $z_{n+1}=(1+i)z_n+i$ ومنه

$$z_{n+1}=(1+i)\left((1+i)^n-1\right)+i=(1+i)^{n+1}-1-i+i=(1+i)^{n+1}-1$$

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n=(1+i)^n-1$

ب ـ تعيين قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O، A و M_n في استقامية.

النقط O، A و M_n في استقامية معناه $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM_n}\right)=k\pi$ أي $\arg\left(\frac{z_n-z_A}{-z_A}\right)=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه $\arg(z_n-z_A)-\arg(-z_A)=k\pi$

aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\arg\left(-z_A\right)=0$ و $\left(\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}\right)=\left(1+i\right)^n=\left(1+i\right)^n-1+1=z_n-z_A$ أي $\arg\left(z_n-z_A\right)=\frac{n\pi}{4}$

$\arg\left(z_n-z_A\right)-\arg\left(-z_A\right)=k\pi$ معناه $\frac{n\pi}{4}=k\pi$ أي $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

التمرين الثالث:

I- g هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x-1$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g .

$$\lim_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x-1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1\right)e^x-1=+\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'\left(x\right)=e^x+e^x\left(x-1\right)=xe^x$

إشارة $g'\left(x\right)$ هي نفس إشارة x لأن $e^x>0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $\left]-\infty;0\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[0;+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'\left(x\right)$	$-$	0	$+$
$g\left(x\right)$	-1 ↘	-2	↗ $+\infty$

2. إثبات أنّ المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.2<\alpha<1.3$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;0\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-2;-1\right]$ و 0 لا ينتمي إلى المجال $\left]-2;-1\right[$ إذن من أجل كل $x\in\left]-\infty;0\right]$ فإنّ $g\left(x\right)\neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2;+\infty\right[$ و 0 ينتمي إلى المجال $\left]-2;+\infty\right[$ إذن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]0;+\infty\right[$ وبما أنّ $g\left(1.2\right)\approx-0.36$ و $g\left(1.3\right)\approx 0.10$

أي $g\left(1.2\right)\times g\left(1.3\right)<0$ فإن $1.2<\alpha<1.3$.

3. استنتاج إشارة $g\left(x\right)$ حسب قيم x.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\infty;\alpha\right[$ ، $g\left(x\right)<0$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال ، $\left]\alpha;+\infty\right[$ ، $g\left(x\right)>0$ كما أنّ $g\left(\alpha\right)=0$.

II- f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=\frac{2x}{e^x+1}$.

و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ- حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^x+1}=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{2(e^x+1)-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x+2-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-2(-e^x-1+xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

استنتاج تغيرات الدالة f.

إشارة $f'(x)$ هي عكس نفس إشارة $g(x)$ وعليه:

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ يكون $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ يكون $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

جـ ـ تبيين أنّ: $f(\alpha)=2(\alpha-1)$،

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $(\alpha-1)e^\alpha-1=0$ أي $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{2\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\dfrac{2\alpha(\alpha-1)}{\alpha}=2(\alpha-1)$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $1.2<\alpha<1.3$ يكافئ $0.2<\alpha-1<0.3$ إذن $1.2\times0.2<\alpha(\alpha-1)<1.3\times0.3$ أي $0.24<f(\alpha)<0.39$

2. أ ـ تبيين أنّ المستقيم (Δ) **ذا المعادلة** $y=2x$ ، **مستقيم مقارب للمنحنى** (C_f) **بجوار** $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^x+1}-2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2xe^x-2x}{e^x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2xe^x}{e^x+1}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب ـ دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ).

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x)-2x=\dfrac{-2xe^x}{e^x+1}$

إشارة $f(x)-2x$ هي نفس إشارة $-2x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-2x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $O(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	

3. أ - تبيين أنّ: $f(-\alpha)=-2$.

لدينا $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$ معناه $e^{-\alpha}=\alpha-1$ إذن $f(-\alpha)=\frac{2\alpha}{e^{-\alpha}+1}=\frac{-2\alpha}{\alpha-1+1}=-2$

ب - تبيين أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ).

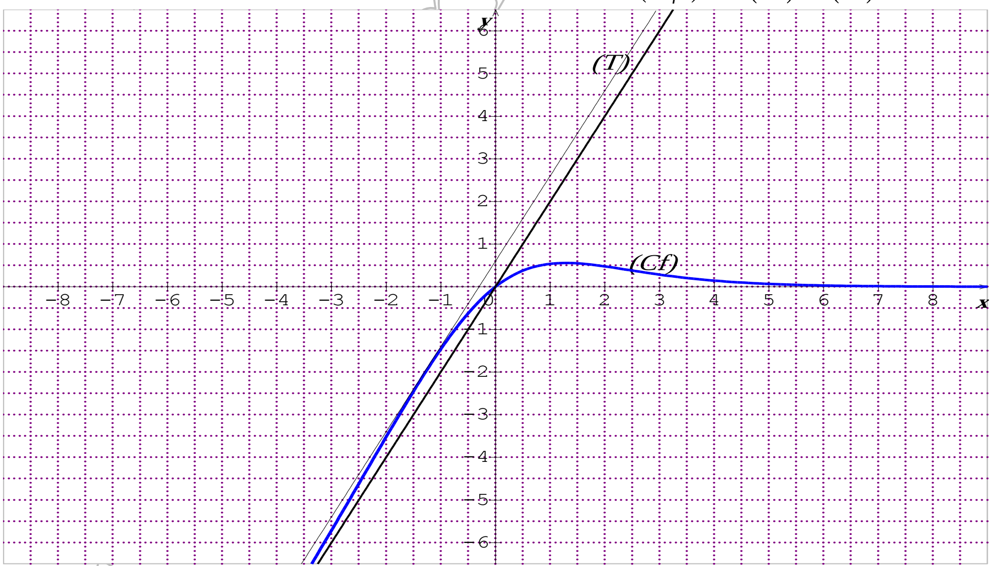
لدينا $f'(-\alpha)=\frac{-2g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{-2((-\alpha-1)e^{-\alpha}-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{-2((-\alpha-1)(\alpha-1)-1)}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{-2(-\alpha^2)}{\alpha^2}=2$

إذن معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ يساوي 2 أي المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$ موازيا للمستقيم (Δ).

جـ - كتابة معادلة (T).

$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$ ومنه $y=2(x+\alpha)-2$ أي $(T): y=2x+2\alpha-2$

4. إنشاء (Δ)، (T) و (C_f).



5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2x\left(\frac{1}{e^x+1}-1\right)=m$.

$2x\left(\frac{1}{e^x+1}-1\right)=m$ تكافئ $\frac{2x}{e^x+1}-2x=m$ وتكافئ $\frac{2x}{e^x+1}=2x+m$ أي $f(x)=2x+m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=2x+m$.

إذا كان $m<0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا.

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما.

إذا كان $0<m<2\alpha-2$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين.

إذا كان $m=2\alpha-2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا و هو $-\alpha$.

إذا كان $m>2\alpha-2$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

التمرين الرابع:

(d) مستقيم مزود بمعلم $(O;\vec{i})$، A_0، B_0 نقطتان فاصلتاهما على الترتيب -4 و 3.

من أجل كل عدد طبيعي n، نسمي A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;1),(B_n;4)\}$

و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;3),(B_n;2)\}$

1/ **تعليم النقط** A_0، B_0، A_1 **و** B_1.

$a_1=\frac{a_0+4b_0}{5}=\frac{-4+12}{5}=\frac{8}{5}$ ، $b_1=\frac{3a_0+2b_0}{5}=\frac{-12+6}{5}=\frac{-6}{5}$.

2/ النقطتان A_n و B_n فاصلتاهما على الترتيب a_n و b_n حيث $a_0=-4$ و $b_0=3$.

- تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_n+4b_n)$ و $b_{n+1}=\frac{1}{5}(3a_n+2b_n)$.

لدينا A_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;1),(B_n;4)\}$ ومنه $a_{n+1}=\frac{a_n+4b_n}{4+1}=\frac{1}{5}(a_n+4b_n)$

و B_{n+1} مرجح الجملة $\{(A_n;3),(B_n;2)\}$ ومنه $b_{n+1}=\frac{3a_n+2b_n}{2+3}=\frac{1}{5}(3a_n+2b_n)$

3/ **أ - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3a_n+4b_n=0$.**

لدينا $3a_0+4b_0=3\times-4+4\times3=0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $3a_n+4b_n=0$ من أجل عدد طبيعي كيفي n و نبرهن أنّ $3a_{n+1}+4b_{n+1}=0$

لدينا $3a_{n+1}+4b_{n+1}=\frac{3}{5}(a_n+4b_n)+\frac{4}{5}(3a_n+2b_n)$

$$3a_{n+1}+4b_{n+1}=\frac{3a_n+12b_n+12a_n+8b_n}{5}$$

$3a_{n+1}+4b_{n+1}=\frac{15a_n+20b_n}{5}$ أي $3a_{n+1}+4b_{n+1}=3a_n+4b_n=0$

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3a_n+4b_n=0$.

ب - تبيين أنّ (a_n) و (b_n) متتاليتان هندسيتان يطلب تعيين أساس كل منهما.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $3a_n+4b_n=0$ معناه $4b_n=-3a_n$ ومنه $a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_n-3a_n)$ أي $a_{n+1}=\frac{-2}{5}a_n$

إذن (a_n) متتالية هندسة أساسها $\frac{-2}{5}$.

ولدينا $3a_n=-4b_n$ ومنه $b_{n+1}=\frac{1}{5}(-4b_n+2b_n)$ أي $b_{n+1}=\frac{-2}{5}b_n$ إذن (b_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{-2}{5}$.

4/ **أ - التعبير عن a_n و b_n بدلالة n.**

$a_n=a_0\left(\frac{-2}{5}\right)^n=-4\left(\frac{-2}{5}\right)^n$ ، $b_n=b_0\left(\frac{-2}{5}\right)^n=3\left(\frac{-2}{5}\right)^n$.

ب - تعيين نهايتي (a_n) و (b_n). فسّر النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^n=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i}:\vec{j};\vec{k})$، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له. (Δ') المستقيم المعرّف بجملة المعادلتين: $\begin{cases}x+z=0\\ y=3\end{cases}$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) .

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $(\Delta):\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t\,;(t\in\mathbb{R}) \\ z=3-2t \end{cases}$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ').

$\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=-z \\ y=3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-t' \\ y=3 \\ z=t' \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

2. تبيين أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{u}'(-1;0;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ').

ومنه المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيين لأن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطيا.

نفرض أنّ (Δ) و (Δ') متقاطعان إذن $\begin{cases} -t'=1+t........(1) \\ 3=1+2t........(2) \\ t'=3-2t......(3) \end{cases}$

من (2) نجد $t=1$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases} -t'=2 \\ 3=3 \\ t'=1 \end{cases}$ تناقض إذن (Δ) و (Δ') غير متقاطعان فهما ليسا من نفس المستوي.

3. (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ).

تبيين أنّ معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+2z-3=0$

نضع $\vec{n}(2;1;2)$ لدينا $\vec{n}\vec{u}=2\times1+1\times2-2\times2=0$ و $\vec{n}\vec{u}'=2\times-1+1\times0+2\times1=0$

ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

ولدينا $E(0;3;0)$ نقطة من (Δ') تحقق المعادلة $2x+y+2z-3=0$ وبالتالي $2x+y+2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة ثانية:

المستوي (P) معيّن بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-2)$ و $\vec{u}'(-1;0;1)$ و النقطة $E(0;3;0)$.

لدينا إذن $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=3+2\alpha \\ z=-2\alpha+\beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (P).

وبما أنّ $2(\alpha-\beta)+3+2\alpha+2(-2\alpha+\beta)-3=0$ فإنّ $2x+y+2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P).

4. $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$.

حساب d المسافة بين M والمستوي (P)

$$d(M;(P))=\frac{|2(1+t)+1+2t+2(3-2t)-3|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{3}=2$$

5. أ - تعيين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)،

ليكن (d) المستقيم الذي يشمل A ويعامد المستوي (P) ومنه $\vec{n}$ شعاع توجيه للمستقيم (d).

$M(x;y;z)\in(d)$ معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{n}$

ومنه $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = \lambda + 1 \;;(\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2\lambda + 3 \end{cases}$

لدينا $A' \in (d)$ معناه $A'(2\lambda+1; \lambda+1; 2\lambda+3)$ ولدينا $A' \in (P)$ معناه $2x_{A'} + y_{A'} + 2z_{A'} - 3 = 0$

وعليه $2(2\lambda+1) + \lambda + 1 + 2(2\lambda+3) - 3 = 0$ ومنه $9\lambda + 6 = 0$ أي $\lambda = \frac{-2}{3}$ إذن $A'\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta")$ الذي يشمل A' و يوازي (Δ).

$M(x;y;z) \in (\Delta")$ معناه $\overrightarrow{A'M} = \alpha \vec{u} \,/\, \alpha \in \mathbb{R}$

ومنه $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \alpha \\ y = \frac{1}{3} + 2\alpha \;; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \frac{5}{3} - 2\alpha \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta")$.

ب ـ تبيين أنّ (Δ') و $(\Delta")$ يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$.

لدينا $\begin{cases} x_B + z_B = 0 \\ y_B = 3 \end{cases}$ ومنه $B \in (\Delta')$

$B \in (\Delta")$ معناه $\begin{cases} 1 = -\frac{1}{3} + \alpha \\ 3 = \frac{1}{3} + 2\alpha \\ -1 = \frac{5}{3} - 2\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \alpha = \frac{4}{3} \\ \alpha = \frac{4}{3} \end{cases}$ α وحيد ومنه $B \in (\Delta")$.

إذن $(\Delta') \cap (\Delta") = \{B\}$.

6. f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t) = BM^2$

أ ـ تبيين أنّ: $f(t) = 9t^2 - 24t + 20$.

$$f(t) = BM^2 = (1+t-1)^2 + (1+2t-3)^2 + (3-2t+1)^2$$

$$f(t) = t^2 + 4t^2 - 8t + 4 + 4t^2 - 16t + 16$$

$$f(t) = 9t^2 - 24t + 20$$

ب ـ تبيين أنّ f تقبل قيمة حدّية صغرى $f(t_0)$ يُطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي t: $f'(t) = 18t - 24$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(t)$		0	
$f(t)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

الدالة تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $t=\dfrac{4}{3}$ وهي $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=4$ وعليه $t_0=\dfrac{4}{3}$ و $f\left(t_0\right)=4$.

جـ - التحقق أنّ $d=\sqrt{f\left(t_0\right)}$.

$d=2=f\left(t_0\right)$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ **.**

$\Delta=2-4=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، A، B و C نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

أ - كتابة على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$.

$z_A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\overline{z_A}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $\dfrac{z_A}{z_B}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ب - تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$

$z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ ومنه $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وعليه $z_{A'}=i$ **.**

$z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_B$ ومنه $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i(0)}$ وعليه $z_{B'}=1$ **.**

$z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C$ ومنه $z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_A+z_B\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}.z_A+e^{i\frac{\pi}{4}}.z_B=z_{A'}+z_{B'}=1+i$

جـ - تبيين أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

لدينا $z_{A'}=i$ و $z_{C'}-z_{B'}=1+i-1=i$ ومنه $z_{C'}-z_{B'}=z_{A'}$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{OA'}$

زيادة على هذا لدينا $\dfrac{z_{A'}}{z_{B'}}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وهذا يعني أنّ $OA'=OB'$ و $\left(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA'}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

إذن $OA'C'B'$ مربع.

طريقة ثانية:

لدينا $z_C=z_A+z_B$ **معناه** $z_C-z_B=z_A$ **أي** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$

ولدينا $\dfrac{z_A}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $OA=OB$ و $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع وبالتالي صورته بالدوران السابق $OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$.

أ - تبيين أنّ (Δ) هو محور الفواصل.

$\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$ تعني $AM=BM$ بالتالي (Δ) هو محور القطعة $[AB]$ وبما أنّ $z_B=\overline{z_A}$ فإنّ محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل أي (Δ) هو محور الفواصل.

ب - تبيين أنّ حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ **عددان حقيقيان.**

يتساوى عددان مركبان إذا تساوى طويلاتاهما وعمدتاهما بترديد 2π

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ومنه $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ ومنه $\left|\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2\right|=|i|$ ومنه $\left(\frac{|z-z_A|}{|z-z_B|}\right)^2=1$ وتكافئ $\frac{|z-z_A|}{|z-z_B|}=1$ أي $|z-z_A|=|z-z_B|$

ومنه صورة العدد المركب z تنتمي (Δ) (محور الفواصل) وهذا يعني أنّ الحلين حقيقيين.

التمرين الثالث:

I) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln x-\frac{2}{x}+1$

1. دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} \ln x-\frac{2}{x}+1=-\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln x-\frac{2}{x}+1=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4<\alpha<1.5$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[1.4;1.5]$ ولدينا $g(1.4)\approx-0.09$ و $g(1.5)\approx0.07$ أي $g(1.4)\times g(1.5)<0$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.4<\alpha<1.5$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g(x+1)$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

تعيين إشارة $g(x+1)$.

إذا كان $x>\alpha-1$ فإن $x+1>\alpha$ ومنه $g(x+1)>0$

إذا كان $-1<x<\alpha-1$ فإن $0<x+1<\alpha$ ومنه $g(x+1)<0$

ومن أجل $x=\alpha-1$ يكون $x+1=\alpha$ ومنه $g(x+1)=0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-1)\ln(x+1)+1$

(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} \ln(x+1)=\lim_{t\xrightarrow{>}0}\ln t=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} x-1=-2$

إذن $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(x-1)\ln(x+1)+1=+\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln(x+1)+1=+\infty$

2. تبيين أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ فإنّ: $f'(x)=g(x+1)$،

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{x+1-2}{x+1}=\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}+1=g(x+1)$$

استنتاج إتجاه تغير الدالة f.

إذا كان $-1<x<\alpha-1$ فإن $g(x+1)<0$ أي $f'(x)<0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha-1]$.

إذا كان $x>\alpha-1$ فإنّ $g(x+1)>0$ أي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha-1;+\infty[$.

3. جدول تغيرات الدالة f.

x	-1		$\alpha-1$		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. تبيين أنّ: $f(\alpha-1)=5-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}$

لدينا $g(\alpha)=0$ معناه $\ln\alpha-\dfrac{2}{\alpha}+1=0$ أي $\ln\alpha=\dfrac{2}{\alpha}-1$

ومنه $f(\alpha-1)=(\alpha-2)\ln(\alpha)+1=(\alpha-2)\left(\dfrac{2}{\alpha}-1\right)+1$

$$f(\alpha-1)=2-\alpha-\frac{4}{\alpha}+2+1=5-\alpha-\frac{4}{\alpha}$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha-1)$.

لدينا $1.4<\alpha<1.5$ تعني $-1.5<-\alpha<-1.4$ أي $3.5<5-\alpha<3.6$

ولدينا $\dfrac{1}{1.5}<\dfrac{1}{\alpha}<\dfrac{1}{1.4}$ معناه $\dfrac{4}{1.5}<\dfrac{4}{\alpha}<\dfrac{4}{1.4}$ يكافئ $2.66<\dfrac{4}{\alpha}<2.85$ أي $-2.85<-\dfrac{4}{\alpha}<-2.66$

إذن $3.5-2.85<5-\alpha-\dfrac{4}{\alpha}<3.6-2.66$ أي $0.65<f(\alpha)<0.94$.

III) ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال $]-1;+\infty[$ و (T_{x_0}) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

نعرّف الدالة h على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$.

1. تبيين أن $h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$

$$h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$$

إشارة $h'(x)$ إعتمادا على رتابة الدالة f'.

لدينا $f'(x)=g(x+1)$ أي $f'(x)=g\circ u(x)$ حيث $u:x\mapsto x+1$

بما أنّ الدالة u متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]0;+\infty[$ والدالة g متزايدة تماما على المجال الموجب فإن الدالة f' متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

<u>طريقة ثانية:</u>

$$f''(x)=g'(x+1)$$

إذا كان $x\in]-1;+\infty[$ فإن $(x+1)\in]0;+\infty[$ ومنه $g'(x+1)>0$ أي $f''(x)>0$ ومنه الدالة f' متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

إعتمادا على تزايد الدالة f'.

إذا كان $x>x_0$ فإن $f'(x)>f'(x_0)$ ومنه $f'(x)-f'(x_0)>0$ أي $h'(x)>0$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

إذا كان $-1 < x < x_0$ فإن $f'(x) < f'(x_0)$ ومنه $f'(x) - f'(x_0) < 0$ أي $h'(x) < 0$.

$h'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

2. استنتاج تغيرات الدالة h،

الدالة h متزايدة تماما على المجال $]x_0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-1;x_0]$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ تبلغها عند $x = x_0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$، $h(x) > h(x_0)$

أي $h(x) > 0$. لأنّ $h(x_0) = f(x_0) - [f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0)] = 0$.

استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T_{x_0}).

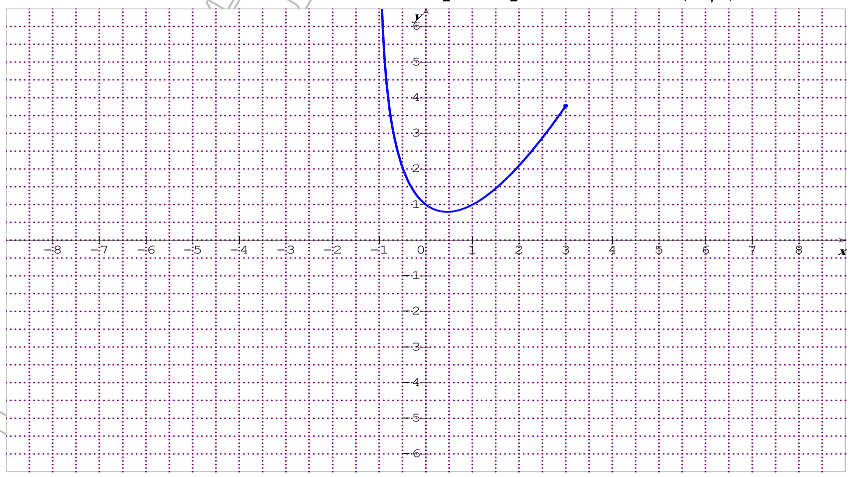
من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا $h(x) > 0$ أي $f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)] > 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد فوق مماسه (T_{x_0}).

3. معادلة لـ (T_0) ثم أنشئه.

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $y = -1(x-0)+1$ أي $(T_0): y = -x+1$.

4. إنشاء (C_f) على المجال $]-1;3]$.



التمرين الرابع:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

1) **أ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f**

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;2]$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;2]$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;2]$.

ب ـ تبيين أنّه إذا كان $x \in [1;2]$ فإنّ $f(x) \in [1;2]$

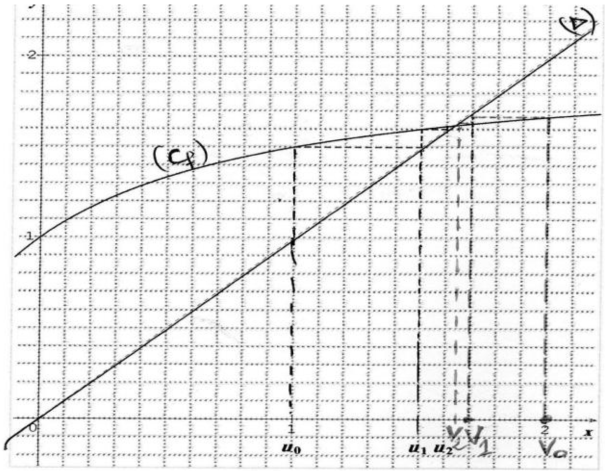
لدينا الدالة f متزايدة تماما على $[0;2]$.

إذا كان $1 \le x \le 2$ فإن $f(1) \le f(x) \le f(2)$ ومنه $\dfrac{3}{2} \le f(x) \le \dfrac{5}{2}$ وبما أنّ $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right] \subset [1;2]$ فإن

$1 \le f(x) \le 2$ إذن من أجل $x \in [1;2]$ فإنّ $f(x) \in [1;2]$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان بـ: $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = f(u_n)$ و $v_{n+1} = f(v_n)$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr



أ ـ رسم المنحنى (C) الممثل للدالة f والمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

ب ـ إعطاء تخمينا حول اتجاه تغيّر و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

من الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو نفس العدد وهو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

3) برهن بالتراجع عن الخواص التالية:

من أجل كل عدد طبيعي n: " $1\le u_n\le 2$ " ؛ " $1\le v_n\le 2$ " ؛ " $u_n\le u_{n+1}$ " و " $v_n\ge v_{n+1}$ ".

*لدينا $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $1\le u_n\le 2$ ونبرهن صحة الخاصية $1\le u_{n+1}\le 2$

لدينا $1\le u_n\le 2$ وحسب نتيجة السؤال 1) ب فإن $1\le f(u_n)\le 2$ أي $1\le u_{n+1}\le 2$.

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le 2$.

* لدينا $v_0=2$ ومنه $1\le v_0\le 2$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $1\le v_n\le 2$ ونبرهن صحة الخاصية $1\le v_{n+1}\le 2$

لدينا $1\le v_n\le 2$ وحسب نتيجة السؤال 1) ب فإن $1\le f(v_n)\le 2$ أي $1\le v_{n+1}\le 2$.

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le v_n\le 2$

* لدينا $u_0=1$ و $u_1=f(u_0)=\frac{3}{2}$ ومنه $u_0\le u_1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_n\le u_{n+1}$ ونبرهن أن $u_{n+1}\le u_{n+2}$

لدينا $u_n\le u_{n+1}$ ولدينا الدالة f متزايدة تماما على $[0;2]$ ومنه $f(u_n)\le f(u_{n+2})$ أي $u_{n+1}\le u_{n+2}$.

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\le u_{n+1}$.

* $v_0=2$ و $v_1=f(v_0)=\frac{5}{3}$ ومنه $v_0\ge v_1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أن $v_n\ge v_{n+1}$ ونبرهن أن $v_{n+1}\ge v_{n+2}$

لدينا $v_n\ge v_{n+1}$ ولدينا الدالة f متزايدة تماما على $[0;2]$ ومنه $f(v_n)\ge f(v_{n+2})$ أي $v_{n+1}\ge v_{n+2}$.

وعليه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n\ge v_{n+1}$.

4) **أ ـ إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي** n ؛ $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{2v_n+1}{v_n+1}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$=\frac{2v_nu_n+2v_n+u_n+1-2u_nv_n-2u_n-v_n-1}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

$$=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

ب ـ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n-u_n\ge 0$ و $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{1}{4}(v_n-u_n)$.

نستعمل البرهان بالتراجع.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $u_0=1$ و $v_0=2$ ومنه $v_0-u_0\geq 0$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنّ $v_n-u_n\geq 0$ ونبرهن أنّ $v_{n+1}-u_{n+1}\geq 0$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ولدينا $(v_n+1)(u_n+1)>0$ وحسب الفرضية $v_n-u_n\geq 0$ إذن $\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}\geq 0$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\geq 0$.

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\geq 0$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

لدينا $u_n\geq 1$ و $v_n\geq 1$ ومنه $u_n+1\geq 2$ و $v_n+1\geq 2$ إذن $(u_n+1)(v_n+1)\geq 4$ يكافئ $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\dfrac{1}{4}$

وبما أنّ $v_n-u_n\geq 0$ فإن $\dfrac{v_n-u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\dfrac{1}{4}v_n-u_n$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.

5) **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي** n ؛ $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

نستدل على هذه الخاصية بالتراجع.

لدينا $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=1$ و $v_0-u_0=1$ ومنه $v_0-u_0\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفترض أن $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ونبرهن صحة الخاصية $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

لدينا $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ معناه $\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ أي $\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

لكن مما سبق لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$

ومنه $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$ أي $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

6) **استنتاج أنّ للمتتاليتين** (u_n) **و** (v_n) **نفس النهاية** l.

لدينا $0<v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ فحسب النهايات بالمقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq u_{n+1}$ و $v_n\geq v_{n+1}$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l.

7) **تعيين القيمة المضبوطة للعدد** l.

المتتالية (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0;2]$

إذن بإخذ نهاية طرفي العلاقة نجد $l=f(l)$ ومنه $l=\dfrac{2l+1}{l+1}$ وتكافئ $l^2-l-1=0$ أي $l=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ أو $l=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

وبما أنّ $1\leq u_n\leq 2$ فإن $1\leq l\leq 2$ أي $l=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr