الموضوع الرابع

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(3;-2;-1)$، $B(5;-3;2)$ ، $C(2;3;2)$ و $D(1;-5;-2)$.

1) بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا ؛ نرمز له بالرمز (P).

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P).

ب) عيّن احداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)، و λ عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ: $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H، ثمّ المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نسمي A، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ) اكتب العدد $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ وطبيعة المثلث OAB.

جـ) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

د) هل توجد قيّم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.

3) أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

4) أ) عيّن العناصر المميزة لــ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$$

ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $|z-z_1|=|z-z_3|$.

التمرين الثالث:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x-1$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) استنتج أنّ $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

aziz_mus1@hotmail.fr

3) علل أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}-x>0$.

II- 1. أ) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) احسب $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ) عيّن معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T).

جـ) علل أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أُرسم (T) و (C_f).

<u>التمرين الرابع:</u>

I- g هي الدالة المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقّق $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$.

3) عيّن، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^{2}$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عيّن اشارة $h'(x)$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة h.

II- f هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^{2}}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثمّ اكتب معادلة لـ(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^{2}}$، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

ب) بين أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

جـ) احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإنّ: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4- عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5- ارسم (T)، (T') و (C_f).

6- ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع الرابع

التمرين الأوّل:

1) **إثبات أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.**

$\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;5;3)$ و $\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{-1}$ ومنه إحداثيات الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة

أي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

2) **إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P).**

لدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+1(-1)-1(3)=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=2(-1)+1(5)-1(3)=0\end{cases}$

ومنه الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وعليه فإنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

معادلة ديكارتية للمستوي (P).

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من (P) لدينا: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ مع $\overrightarrow{AM}(x-3;y+2;z+1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $2(x-3)+(y+2)-(z+1)=0$ ومنه $2x+y-z-5=0$ هي معادلة المستوي (P).

3) **أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P).**

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) ولدينا $D\in(\Delta)$.

لتكن $M(x;y;z)$ من المستقيم (Δ) فإنّها تُحقق: $\overrightarrow{DM}=t\vec{n}/t\in\mathbb{R}$ مع $\overrightarrow{DM}=(x-1;y+5;z+2)$.

ومنه $\begin{cases}x-1=2t\\ y+5=t\\ z+2=-t\end{cases}$ أي $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-5+t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=-2-t\end{cases}$.

ب) تعيين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P).

إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) هي نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من النقطة D مع المستوي (P) أي هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

نحل الجملة $\begin{cases}x=1+2t\text{.............}(1)\\ y=-5+t\text{............}(2)\\ z=-2-t\text{............}(3)\\ 2x+y-z-5=0\text{..........}(4)\end{cases}$

نعوض كل من x و y و z من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$2(1+2t)+(-5+t)-(-2-t)-5=0$ ومنه $6t-6=0$ أي $t=1$.

ومنه $\begin{cases}x=3\\ y=-4\\ z=-3\end{cases}$ إذن $E(3;-4;-3)$.

4) **أ) إثبات أنّ:** $\lambda=\frac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

لدينا H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ إذن $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ ومنه $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتاج العدد الحقيقي λ.

$\overrightarrow{AD}(-2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{AB}(2;-1;3)$ ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=2(-2)-1(-3)+3(-1)=-4$

و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{14}$ إذن $\lambda=\dfrac{-4}{14}=-\dfrac{2}{7}$.

إحداثيات النقطة H.

نضع $H(x';y';z')$.

لدينا $\lambda\overrightarrow{AB}(2\lambda;-\lambda;3\lambda)$ و $\overrightarrow{AH}(x'-3;y'+2;z'+1)$ وعليه $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$ معناه

$x'-3=2\lambda$ و $y'+2=-\lambda$ و $z'+1=3\lambda$ ومنه $x'=2\lambda+3$ و $y'=-\lambda-2$ و $z'=3\lambda-1$.

وبما أنّ $\lambda=-\dfrac{2}{7}$ فإنّ: $x'=\dfrac{17}{7}$ و $y'=-\dfrac{12}{7}$ و $z'=-\dfrac{13}{7}$ إذن $H\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{12}{7};-\dfrac{13}{7}\right)$.

المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

$d(D;(AB))=DH=\dfrac{3\sqrt{70}}{7}$.

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

$(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ يكافئ $z=i$ أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0.....(1)$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=3-4=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z=\sqrt{3}+i$ أو $z=\sqrt{3}-i$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ) كتابة العدد $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

ب) استنتاج قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$ وطبيعة المثلث OAB.

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ ومنه $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\dfrac{\pi}{3}$ ولدينا $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$ ومنه $OA=OB$ إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

جـ) تعيين مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

لدينا $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي موجب معناه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$ وعليه $n = 6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

د) هل توجد قيّم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلي صرف معناه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومعناه $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $\frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$

أي $n = \frac{3}{2} + 3k$ وتكافئ $2n = 3 + 6k ....(1)$ والمعادلة (1) لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}$ لأن $2n$ زوجي و $3+6k$ فردي

ومنه لا يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا.

3) أ) تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل $z' - z_1 = \alpha(z - z_1)$ وبما أن S يحول B إلى C فإنّ

$z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$ ومنه $\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = \frac{-\sqrt{3}}{2} i = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

ومنه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z - z_1)$ أي $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2} iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i$.

نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أنّ $S(B) = C$ فإنّ $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في A.

4) أ) تعيين العناصر المميزة لـ(E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$ تكافئ $AM^2 + CM^2 = 5$

طريقة 1:

نضع $M(x; y)$

$AM = \sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y-1)^2}$ ومنه $AM^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y-1)^2$

$BM = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ ومنه $CM^2 = x^2 + (y-1)^2$

ومنه $AM^2 + CM^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + x^2 + 2(y-1)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y-1)^2$

$AM^2 + CM^2 = 5$ معناه $2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y-1)^2 = 5$ ومعناه $x^2 - \sqrt{3}x + (y-1)^2 = 1$

وتكافئ $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + (y-1)^2 = 1$ أي $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{7}{4}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

طريقة 2:

لتكن I منتصف $[AC]$ ومنه $z_I=\frac{z_1+z_3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i$.

$AM^2+CM^2=5$ معناه $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=5$

ومعناه $AI^2+IM^2+2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}+CI^2+IM^2+2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IM}=5$

تكافئ $2IM^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+AI^2+CI^2=5$

ولدينا $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ومنه $2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)=0$ لأن I منتصف $[AC]$ ومنه $2IM^2+AI^2+CI^2=5.......(1)$

$AI^2=|z_I-z_A|^2=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{3}{4}$ ، $CI^2=|z_I-z_C|^2=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{3}{4}$.

(1) تكافئ $2IM^2+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=5$ أي $IM^2=\frac{7}{4}$ ومنه $IM=\sqrt{\frac{7}{4}}$

بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

ب) تعيين (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $|z-z_1|=|z-z_3|$.

$|z-z_1|=|z-z_2|$ تكافئ $AM=CM$ إذن (E') هي محور القطعة $[AC]$.

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=e^x-x-1$.

1) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0$ معناه $e^x-1=0$ ويكافئ $e^x=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ معناه $e^x-1>0$ ويكافئ $e^x>1$ أي $x>0$

$g'(x)<0$ معناه $e^x-1<0$ ويكافئ $e^x<1$ أي $x<0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) استنتاج أنّ $g(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x.

لدينا $g(0)=e^0-0-1=0$ ؛

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $x=0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq g(0)$ أي $g(x)\geq 0$.

3) تعليل أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x-x>0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq 0$ يكافئ $e^x-x-1\geq 0$ أي $e^x-x\geq 1$ وبالتالي $e^x-x>0$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

II- 1. أ) حساب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=-1$$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=0$$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

ب) تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$.

2. أ) حساب $f'(x)$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

لدينا $e^x>0$ و $(e^x-x)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-x)$

من أجل $x\in]1;+\infty[$، $1-x<0$ ومنه $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

من أجل $x\in]-\infty;1[$، $1-x>0$ ومنه $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3. أ) تعيين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

معادلة المماس (T) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T).

ليكن x عددا حقيقيا : $f(x)-x=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{-xg(x)}{e^x-x}$

لدينا $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ ومنه إشارة $f(x)-x$ على $\mathbb{R}$ هي نفس إشارة $-x$

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ ومنه $f(x)-x<0$

إذا كان $x<0$ فإنّ $-x>0$ ومنه $f(x)-x>0$

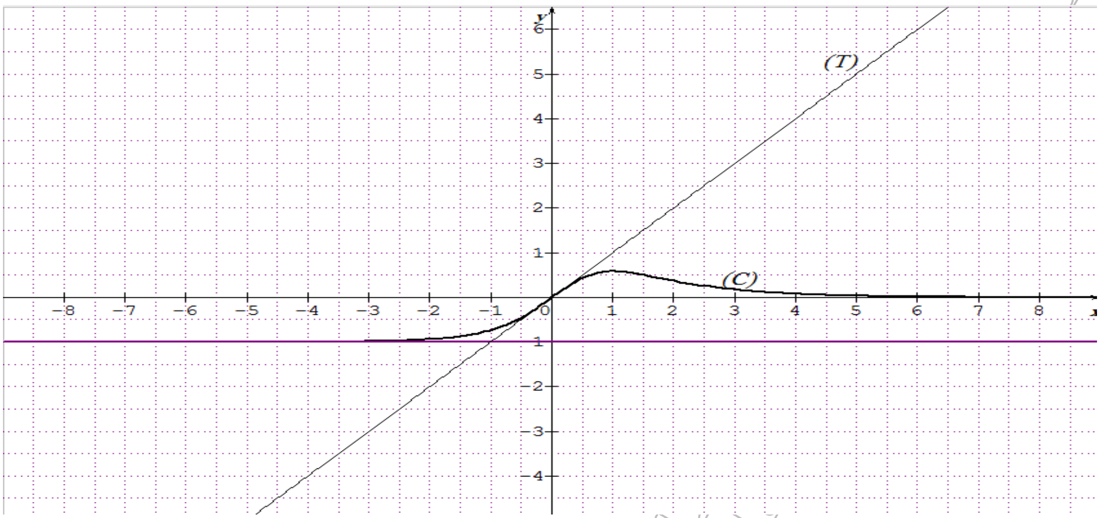
وعليه من أجل $x\in]-\infty;0[$، (C_f) يوجد فوق (T)، ومن أجل $x\in]0;+\infty[$، (C_f) يوجد تحت (T)

و (T) يخترق (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم.

جـ) تعليل أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

بما أنّ المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O فإن النقطة O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

رسم (T) و (C_f).



التمرين الرابع:

I - g هي الدالة المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} g(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1}{x+1}\left[2(x+1)\ln(x+1)-x\right]=+\infty$$

لأنّ $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} 2(x+1)\ln(x+1)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2t\ln t=0$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \dfrac{1}{x+1}=+\infty$.

$$g(3)=2\ln 4-\frac{3}{4}$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;3]$ ولدينا :

$$g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x+1$.

x	-1		$\frac{-1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج هكذا أنّ الدّالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدّالة g.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2\ln 2+1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4\ln 2-\frac{3}{4}$

2) تبيين أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقّق $-0,8<\alpha<-0,7$.

الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2+1;+\infty[$ و $0\in[-2\ln 2+1;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وكذلك لدينا الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ و $0\in\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$. وبما أنّ $g(0)=2\ln(0+1)-\frac{0}{0+1}=0$ فإنّ $\beta=0$ ولدينا $g(-0,8)\approx 0,8$ و $g(-0,7)\approx -0,8$ أي $g(-0,8)\times g(-0,7)<0$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$

3) تعيين، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

x	-1		α		0		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x)=2g'(x)\times g(x)$$

ب) تعيين اشارة $h'(x)$.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة h متزايدة تماما على كل من $\left[\alpha;-\frac{1}{2}\right]$ و $[0;3]$ ومتناقصة تماما على كل من $]-1;\alpha]$ و $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

جدول تغيّرات الدالة h.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$(-2\ln 2+1)^2$	↘	0	↗	$h(3)$

II- f هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- تبيين أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$$ لأنّ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0.

كتابة معادلة لـ(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(T):y=x$

2- أ) بيّن أنّه، من أجل $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$.

من أجل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$، لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}.x^2}{(\ln(x+1))^2}=\frac{x\left[2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right]}{(\ln(x+1))^2}=\frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب) تبيين أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ **.**

$g(\alpha)=0$ معناه $2\ln(\alpha+1)-\frac{\alpha}{\alpha+1}=0$ تكافئ $\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ تكافئ $\frac{1}{\ln(\alpha+1)}=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$

ومنه $\frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=\frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha}=2\alpha(\alpha+1)$ أي $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$.

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$.

$-0,8<\alpha<-0,7$ معناه $-1,6<2\alpha<-1,4$ ويكافئ $1,4<-2\alpha<1,6........(1)$

ولدينا $0,2<\alpha+1<0,3........(2)$

إذن $0,28<-2\alpha(\alpha+1)<0,48$ ومنه $-0,48<2\alpha(\alpha+1)<-0,28$ أي $-0,48<f(\alpha)<-0,28$.

جـ) حساب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)$.

$$f(3)=\frac{3^2}{\ln(3+1)}=\frac{9}{\ln 4}$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1}\frac{x^2}{\ln(x+1)}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} x^2=1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1}\ln(x+1)=-\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	-1		α		3
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{9}{\ln 4}$

3- أ) تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإنّ: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

نضع $u(x)=x-\ln(x+1)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;3]$ لدينا : $u'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة x.

من أجل $]-1;0[$ ، $u'(x)<0$ ومن أجل $]0;3[$ ، $u'(x)>0$

إذن الدّالة u متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;3]$ ولها قيمة حديّة صغرى على المجال $]-1;3]$ تبلغها من أجل $x=0$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3]$ ، $u(x)\geq 0$ أي $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

$$f(x)-x=\frac{x^2}{\ln(x+1)}-x=\frac{x^2-x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=\frac{x\left(x-\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$\ln(x+1)>0$ يكافئ $x+1>1$ أي $x>0$

$\ln(x+1)<0$ يكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

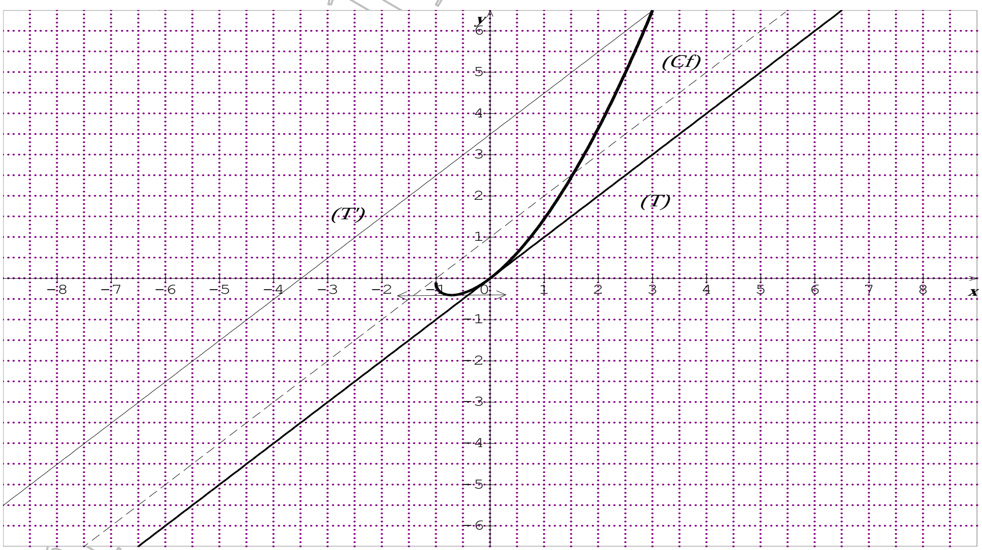
x	-1		0		3
x		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$+$	0	$+$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) فوق (T)	(T) يمس (C_f) في النقطة O	(C_f) فوق (T)	

4- تعيين معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

معادلة المستقيم (T') من الشكل $y=x+b$ وبما أنه يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 فهو يشمل النقطة $A\left(3;\frac{9}{\ln 4}\right)$ إذن $\frac{9}{\ln 4}=3+b$ ومنه $b=\frac{9}{\ln 4}-3$.

وعليه معادلة المستقيم (T') هي $y=x+\frac{9}{2\ln 2}-3$.

5- رسم (T)، (T') و (C_f).



6- المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m<0$ أو $m>\frac{9}{2\ln 2}-3$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=0$ فإنّ المعادلة لها حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $0<m<1$ فإنّ المعادلة لها حلان مختلفان.

إذا كان $1\le m\le\frac{9}{2\ln 2}-3$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد.