

**الموضوع الثامن****التمرين الأول:**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط :

$$A(1;1;1), B(1;-1;0), C(2;0;1).$$

1- بين أن النقاط  $A, B$  و  $C$  تعين مستويا  $(P_1)$  يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2-  $(P_2)$  المستوي الذي  $x - 2y - 2z + 6 = 0$  معادلة ديكارتية له.

- بين أن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3- بين أن النقطة  $O$  هي مرجح الجملة:  $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$ .

4- أ ) عيّن  $(S)$  مجموعة النقاط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:  $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$ .

ب) احسب إحداثيات  $D$  و  $E$  نقطتي تقاطع  $(S)$  و  $(\Delta)$ .

ج) ماهي طبيعة المثلث  $ODE$ ؟ ثم استنتج المسافة بين  $O$  و  $(\Delta)$ .

**التمرين الثاني:**

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\square$  المعادلة:  $z^2 - 2z + 10 = 0$ .

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقاط  $A, B, C$  و  $D$  لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 2 + i, z_B = 1 + 3i, z_C = -3 + i, z_D = 1 - 3i.$$

أ - أكتب العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  على الشكل الأسّي؛ ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

ب - اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $B$  ويجول  $A$  إلى  $C$  ثم حدّد نسبته وزاويته.

ج - عيّن  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$ ؛ علما أن  $D$  هي صورة  $E$  بالتشابه  $S$ .

3. لتكن  $F$  صورة  $B$  بالتحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته  $-\frac{1}{2}$ .

أ - بين أن  $F$  هي مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بـ 3 و 1 على الترتيب.

ب - عيّن  $z_F$  لاحقة النقطة  $F$ .

**التمرين الثالث:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\square$  كما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ،  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**I-1.** نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على كما يلي:  $h(x) = xe^x + 1$ .

أ ) ادرس تغيّرات الدالة  $h$ .

ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x: h(x) > 0$ .

2. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\square$  كما يلي:  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

أ ) احسب نهايتي الدالة  $g$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  مع  $\alpha > \beta$  ثم تحقق أن  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

د ) استنتج إشارة  $g(x)$  على  $\square$ .

**II-1.** احسب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  ثم فسّر النتائج هندسيا.

2. أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ .

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3. أ) تحقق أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ .

ب) عيّن حصراً للعدد  $f(\alpha)$  سعته  $10^{-2}$ .

4. عيّن معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5. أ) تحقق أن  $u(x) = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$  حيث  $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$  حيث  $u(x) = e^x - xe^x - 1$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $u$  ثم استنتج إشارة  $u(x)$ .

ج) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى  $(C)$  بالنسبة إلى المماس  $(T)$ .

6. أرسم  $(T)$  و  $(C)$ . (نقبل أن  $-1,84 < \beta < -1,85$  و  $-1,18 < f(\beta) < -1,19$ )

### التمرين الرابع:

I- الدالة  $g$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ .

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $g$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

2- بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث:  $0,31 < \alpha < 0,32$  وأن:  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ .

3- استنتج، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

II- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$ .

$(C_f)$  منحنى  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

2- أثبت أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ .

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

4- بيّن أن:  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصراً للعدد  $f(\alpha)$ .

5- مثل المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-1; 2]$ .

III- المنحنى الممثل للدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $h(x) = \ln(x+1)$ .

$A$  النقطة ذات الإحداثيتين  $(-1; 2)$  و  $M$  نقطة من  $(\Gamma)$  فاصلتها  $x$ .

1- أثبت أن المسافة  $AM$  تعطى بالعلاقة  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

2- الدالة  $k$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $k(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ- بيّن أن للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغيّر على المجال  $]-1; +\infty[$ .

ب- عيّن إحداثيتي النقطة  $B$  من  $(\Gamma)$ ، بحيث تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

ج- بيّن أن:  $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$ .

## حل الموضوع الثامن

## التمرين الأول:

1- إثبات أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعين مستويا  $(P_1)$ .لدينا  $\overrightarrow{AB}(0; -2; -1)$  و  $\overrightarrow{AC}(1; -1; 0)$  و  $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-2}$  إذن الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطينخطيا ومنه فإن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة فهي تعين مستويا  $(P_1)$ .تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(P_1)$ .الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  ليس لهما نفس الحامل وعليه  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  يشكل معلما للمستوي  $(P_1)$ .لتكن نقطة من الفضاء  $M(x; y; z)$ .إذا كانت  $M$  تنتمي من  $(P_1)$  فإنها تحقق:  $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ .حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان و  $\overrightarrow{AM} = (x-1; y-1; z-1)$ .

$$\text{ومنه } \begin{cases} x-1 = \beta \\ y-1 = -2\alpha - \beta \\ z-1 = -\alpha \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 1 - 2\alpha - \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

وهو تمثيل وسيطي للمستوي  $(P_1)$ .2-  $(P_2)$  المستوي الذي  $x-2y-2z+6=0$  معادلة ديكارتية له.- إثبات أن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متقاطعان.لدينا  $\vec{n}(1; -2; -2)$  شعاعا ناظميا للمستوي  $(P_2)$ .

$$\text{نفرض أن } \vec{n} \text{ ناظمي للمستوي } (P_1) \text{ إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1(0) - 2(-2) - 2(-1) = 6 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(1) - 2(-1) - 2(0) = 3 \end{cases} \text{ تناقض.}$$

إذن الشعاع  $\vec{n}$  ليس ناظميا للمستوي  $(P_1)$  وبالتالي المستويان  $(P_1)$  و  $(P_2)$  غير متوازيين فهما متقاطعان.كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$ .لتكن نقطة من الفضاء  $M(x; y; z)$ .

$$(1) \begin{cases} x = 1 + \beta \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = 1 - 2\alpha - \beta \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} z = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$$

إذا كانت  $M \in (\Delta)$  فإن إحداثياتها تحقق الجملة:نعوض كل من  $x$  و  $y$  و  $z$  من (1) و (2) و (3) بقيمهما في (4) نجد:

$$1 + \beta - 2(1 - 2\alpha - \beta) - 2(1 - \alpha) + 6 = 0 \text{ ومنه } 3\beta + 6\alpha + 3 = 0 \text{ وعليه } \beta = -2\alpha - 1.$$

$$\text{إذن } \begin{cases} x = 1 + (-2\alpha - 1) \\ y = 1 - 2\alpha - (-2\alpha - 1) \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

3- إثبات أن النقطة  $O$  هي مرجح الجملة:  $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$ .نسمي  $G$  هي مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$  وعليه

ومنه النقطة  $G$  منطقة على  $O$ .  $z_G = \frac{1+0-1}{1+1-1} = 0$  ،  $y_G = \frac{1-1-0}{1+1-1} = 0$  ،  $x_G = \frac{1+1-2}{1+1-1} = 0$   
 إذن النقطة  $O$  هي مرجح الجملة:  $\{(A;1), (B;1), (C;-1)\}$ .

**4- أ ) تعيين (S) مجموعة النقط  $M(x,y,z)$  من الفضاء التي تحقق:**  $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$   
 من أجل كل نقطة  $M$  من الفضاء يكون لدينا  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = (1+1-1)\vec{MO}$  أي  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MO}$   
 ومنه  $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$  تعني  $\|\vec{MO}\| = 2\sqrt{3}$  أي  $MO = 2\sqrt{3}$ .  
 إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزه  $O$  ونصف قطره  $2\sqrt{3}$ .  
**ب) حساب إحداثيات  $D$  و  $E$  نقطتي تقاطع (S) و  $(\Delta)$ .**  
 $x^2 + y^2 + z^2 = 12$  هي معادلة ديكارتية لـ (S).

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases} \text{ وعليه } (-2\alpha)^2 + 2^2 + (1-\alpha)^2 = 12 \text{ أي } 5\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$$

بعد حل المعادلة نجد:  $\alpha = -1$  أو  $\alpha = \frac{7}{5}$ .

$$\text{ومنه} \begin{cases} x = -2(-1) \\ y = 2 \\ z = 1+1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -2\left(\frac{7}{5}\right) \\ y = 2 \\ z = 1 - \frac{7}{5} \end{cases}$$

إذن يتقاطع (S) و  $(\Delta)$  في النقطتين  $D\left(-\frac{14}{5}; 2; -\frac{2}{5}\right)$  و  $E(2; 2; 2)$ .

**ج) طبيعة المثلث ODE.**

بما أن النقطتين  $D$  و  $E$  تنتميان لسطح الكرة (S) التي مركزها  $O$  فإن  $OE = OD$  ومنه  
 فإن المثلث ODE متساوي الساقين.

**استنتاج المسافة بين O و  $(\Delta)$ .**

بما أن النقطتين  $D$  و  $E$  تنتميان للمستقيم  $(\Delta)$  فإن  $(\Delta)$  هو المستقيم  $(DE)$ .  
 المثلث ODE متساوي الساقين بالتالي المسقط العمودي للنقطة  $O$  على  $(DE)$  هي النقطة  $H$   
 منتصف القطعة  $[DE]$  ومنه  $d(O; (DE)) = OH$ .

$$\text{ولدينا } H\left(-\frac{2}{5}; 2; \frac{4}{5}\right) \text{ وعليه } OH = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

$$\text{إذن } d(O; (\Delta)) = \sqrt{\frac{24}{5}}$$

**التمرين الثاني:**

**1. حل في مجموعة الأعداد المركبة □ المعادلة:  $z^2 - 2z + 10 = 0$ .**

$$\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z_1 = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \text{ ، } z_2 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i$$

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A, B, C$  و  $D$  لواحقتها على الترتيب:

$$z_D = 1 - 3i \text{ و } z_C = -3 + i, z_B = 1 + 3i, z_A = 2 + i$$

أ - كتابة العدد المركب  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$  على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-3 + i - 1 - 3i}{2 + i - 1 - 3i} = \frac{-4 - 2i}{1 - 2i} = \frac{(-4 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-10i}{5} = -2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

استنتاج طبيعة المثلث  $ABC$ .

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ وهذا يعني أن } (\overline{BA}; \overline{BC}) = -\frac{\pi}{2} \text{ بالتالي المثلث } ABC \text{ قائم في } B.$$

ب - كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $C$  وتحديد نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه  $S$  من الشكل  $z' - z_B = a(z - z_B)$  وبما أن  $S(A) = C$  فإن  $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$

$$\text{ومنه } \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -2i \text{ وعليه العبارة المركبة للتشابه } S \text{ هي } z' - z_B = -2i(z - z_B) \text{ أي } z' = -2iz - 5 + 5i$$

ج - تعيين  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$ ؛ علماً أن  $D$  هي صورة  $E$  بالتشابه  $S$ .

$$S(E) = D \text{ معناه } z_D = -2iz_E - 5 + 5i \text{ تكافئ } 1 - 3i = -2iz_E - 5 + 5i \text{ ومنه } z_E = \frac{6 - 8i}{-2i} = \frac{3 - 4i}{-i} \text{ أي } z_E = -4 + 3i$$

3. لتكن  $F$  صورة  $B$  بالتحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته  $-\frac{1}{2}$ .

أ - تبين أن  $F$  هي مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين ب: -3 و 1 على الترتيب.

$$\text{لدينا } \overline{AF} = -\frac{1}{2}\overline{AB} \text{ معناه } \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{AB} = 0 \text{ تكافئ } \overline{AF} + \frac{1}{2}(\overline{AF} + \overline{FB}) = 0 \text{ تكافئ } \frac{3}{2}\overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0$$

$$\text{تكافئ } -\frac{3}{2}\overline{FA} + \frac{1}{2}\overline{FB} = 0 \text{ تكافئ } -3\overline{FA} + \overline{FB} = 0 \text{ نستنتج أن } F \text{ هي مرجح النقطتين } A \text{ و } B \text{ المرفقتين ب: -3 و 1 على الترتيب.}$$

ب - تعيين  $z_F$  لاحقة النقطة  $F$ .

$$z_F = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-6 - 3i + 1 + 3i}{-2} = -\frac{5}{2}$$

**التمرين الثالث:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ،  $(C)$  تمثيلها البياني في معلم

ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . وحدة الرسم  $2cm$ .

I-1. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = xe^x + 1$ .

أ (دراسة اتجاه تغير الدالة  $h$ ).

الدالة  $h$  تقبل الإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

لدينا  $e^x > 0$  ومنه إشارة  $h'(x)$  كإشارة  $(1 + x)$ ;  $h'(-1) = 0$

من أجل  $x \in ]-1; -\infty[$ ،  $h'(x) < 0$  وعليه الدالة  $h$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; -1]$ .

من أجل  $x \in ]-1; +\infty[$  ،  $h'(x) > 0$  و عليه الدالة  $h$  متزايدة تماماً على المجال  $]-1; +\infty[$ .

(ب) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $h(x) > 0$ .

لدينا الدالة  $h$  تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند  $x = -1$  و عليه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $h(x) \geq h(-1)$  أي

$$h(x) \geq 1 - e^{-1} \text{ وبالتالي } h(x) > 0.$$

2. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

(أ) حساب نهايتي الدالة  $g$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - e^x = -\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$ .

$$g'(x) = 1 - e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{ معناه } 1 - e^x = 0 \text{ ويكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ معناه } 1 - e^x > 0 \text{ ويكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

$$g'(x) < 0 \text{ معناه } 1 - e^x < 0 \text{ ويكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

إذن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $]-\infty; 0]$  و متناقصة تماماً على  $[0; +\infty[$ .

جدول التغيرات.

| $x$     | $-\infty$ | $\beta$ | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------|---|----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +       | 0 | -        | -         |
| $g(x)$  |           |         | 1 |          |           |

(ج) تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  مع  $\alpha > \beta$

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  وتأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; 1]$  و  $0 \in ]-\infty; 1]$  إذن المعادلة

$$g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \beta \text{ في المجال } ]-\infty; 0].$$

ولدينا الدالة  $g$  مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  وتأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; 1]$  و  $0 \in ]-\infty; 1]$  إذن

$$\text{المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha \text{ في المجال } [0; +\infty[.$$

التحقق أن  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

لدينا  $g(1,14) \approx 0,013$  و  $g(1,15) \approx -0,008$  أي  $g(1,14) \times g(1,15) < 0$  ومنه  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

(د) استنتاج إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

| $x$    | $-\infty$ | $\beta$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|---------|----------|-----------|
| $g(x)$ | —         | 0       | +        | —         |

**II- 1. حساب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$  ثم فسّر النتائج هندسيا.**

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0$$

**2. أ) تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ .**

ليكن  $x$  عددا حقيقيا:

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - e^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

**ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$ .**

لدينا  $e^x > 0$  و  $(xe^x + 1)^2 > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(x)$ .

في المجموعة  $]-\infty; \beta[ \cup ]\alpha; +\infty[$  ،  $g(x) < 0$  أي  $f'(x) < 0$  وعليه الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجالين  $]-\infty; \beta[$  و  $]\alpha; +\infty[$

وفي المجال  $]\beta; \alpha[$  ،  $g(x) > 0$  أي  $f'(x) > 0$  وعليه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]\beta; \alpha[$ .

**جدول تغيرات الدالة  $f$ .**

| $x$     | $-\infty$ | $\beta$    |   |   | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|------------|---|---|-------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | —          | 0 | + | 0           | —         |
| $f(x)$  | $-1$      | $f(\beta)$ |   |   | $f(\alpha)$ | $0$       |

**3. أ) التحقق أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ .**

لدينا  $g(\alpha) = 0$  معناه  $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$  أي  $e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

**ب) تعيين حصرا للعدد  $f(\alpha)$  سعته  $10^{-2}$ .**

لدينا  $1,14 < \alpha < 1,15$  معناه  $2,14 < \alpha + 1 < 2,15$  يكافئ  $\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$  أي  $0,46 < f(\alpha) < 0,47$ .

**4. تعيين معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0.**

معادلة  $(T)$  هي:  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  أي  $y = x$ .



5. أ) التحقق أن  $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$  حيث  $u(x) = e^x - xe^x - 1$ .

ليكن  $x$  عددا حقيقيا:

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{-1 - x + e^x(1 - x^2)}{xe^x + 1} = \frac{-(x+1) + e^x(1+x)(1-x)}{xe^x + 1}$$

$$f(x) - x = \frac{(1+x)(e^x(1-x) - 1)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $u$  ثم استنتاج إشارة  $u(x)$ .

الدالة  $u$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

إشارة  $u'(x)$  هي نفس إشارة  $-x$

من أجل  $x > 0$  فإن  $u'(x) < 0$ ؛ ومن أجل  $x < 0$  فإن  $u'(x) > 0$  و  $u'(0) = 0$ .

وعليه الدالة  $u$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$  ومتناقصة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  ولها قيمة حدية عظمى هي

$$u(0) = 0 \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x: u(x) \leq 0.$$

ج) استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T).

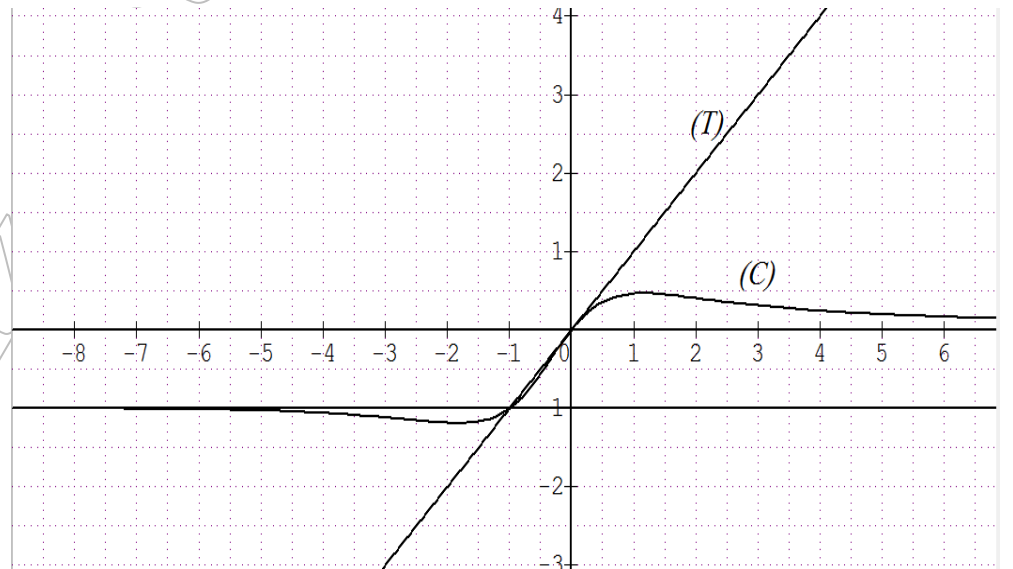
$$f(x) - x = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1} = \frac{(1+x)u(x)}{xe^x + 1}$$

| $x$        | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x+1$      | $-$       | $0$  | $+$ | $+$       |
| $u(x)$     | $-$       | $0$  | $0$ | $-$       |
| $f(x) - x$ | $+$       | $0$  | $0$ | $-$       |

في المجال  $]-\infty; -1[$ ، (C) يقع فوق (T) وفي المجال  $]-1; +\infty[$ ، (C) يقع تحت (T) ويشتركان في النقطتين

O و A(-1; -1)

6. رسم (T) و (C).





## التمرين الرابع:

I- الدالة  $g$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ .

1- دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

الدالة  $g$  تقبل على الاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ولدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :

$$2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ ،  $x+1 > 0$  و  $\frac{1}{x+1} > 0$  ومنه  $g'(x) > 0$  إذن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$ .

2- تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث:  $0,31 < \alpha < 0,32$  وأن:  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ .

الدالة  $g$  مستمرة على  $]-1; +\infty[$  لأنها تقبل الاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  وهي متزايدة تماماً على هذا المجال و خاصة

على المجال  $[0,31; 0,32]$  ولدينا  $g(0,31) \approx -0,01$ ،  $g(0,32) \approx 0,02$  أي  $g(0,32) \times g(0,31) < 0$  ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha$  من المجال  $]0,31; 0,32[$  بحيث  $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0 \text{ أي } \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

3- استنتاج، حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

من أجل  $x \in ]-1; \alpha[$  لدينا  $g(x) < g(\alpha)$  أي  $g(x) < 0$

ومن أجل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  لدينا  $g(x) > g(\alpha)$  أي  $g(x) > 0$  كما أن  $g(\alpha) = 0$ .

II- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$ .

( $C_f$ ) منحنى  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

2- إثبات أنه، من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$ .

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ولدينا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ .

من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $\frac{2}{x+1} > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  كإشارة  $g(x)$ .

أي  $f'$  سالبة على  $]-1; \alpha[$  وموجبة على  $[\alpha; +\infty[$

نستنتج هكذا أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $]-1; \alpha[$  و متزايدة تماما على  $[\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-1$      | $\alpha$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $0$         | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

4- تبين أن:  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$

لدينا  $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$  إذن  $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$$

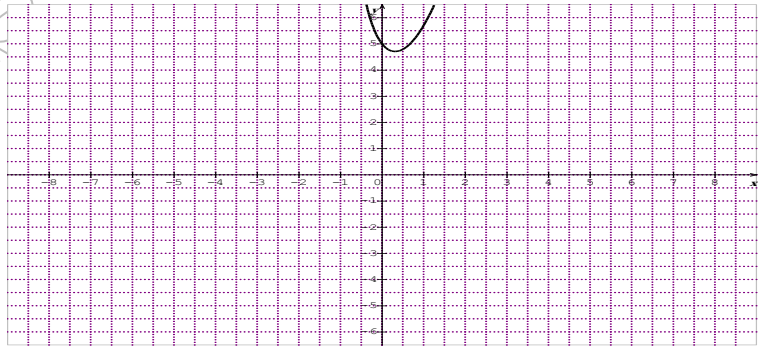
استنتاج حصرا للعدد  $f(\alpha)$ .

$0,31 < \alpha < 0,32$  معناه  $1,31 < \alpha+1 < 1,32$  يكافئ  $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$  ويكافئ

$2,7161 < 1 + (\alpha+1)^2 < 2,7424$  ومنه  $1,7424 \times 2,7424 < (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2) < 1,7161 \times 2,7161$  أي

$$4,6611 < f(\alpha) < 4,7783$$

5- تمثيل المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $]-1; 2]$ .



III- المنحنى الممثل للدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $h(x) = \ln(x+1)$ .

$A$  النقطة ذات الإحداثيتين  $(-1; 2)$  و  $M$  نقطة من  $(\Gamma)$  فاصلتها  $x$ .

1- إثبات أن المسافة  $AM$  تعطى بالعلاقة  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

لدينا  $M(x; \ln(x+1))$  ومنه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2- الدالة  $k$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بالعلاقة:  $k(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ - تبين أن للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]-1; +\infty[$  .

الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة  $k$  تقبل الاشتقاق على  $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا } k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $2\sqrt{f(x)} > 0$  ومنه إشارة  $k'(x)$  هي نفس إشارة  $f'(x)$  وبالتالي للدالتين  $k$  و  $f$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]-1; +\infty[$  .

**ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.**

ب - تعيين إحداثيتي النقطة  $B$  من  $(\Gamma)$  ، بحيث تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة  $k$  متناقصة تماماً على  $]-1; \alpha[$  ومتزايدة تماماً على  $[\alpha; +\infty[$  فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال  $]-1; +\infty[$  تبلغها من أجل  $x = \alpha$  ومنه  $AM$  تكون أصغر ما يمكن من أجل  $x = \alpha$  أي عند النقطة  $B(\alpha; \ln(\alpha+1))$

**ج - تبين أن:  $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$  .**

$$AB = k(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{(\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)} = (\alpha+1)\sqrt{1 + (\alpha+1)^2}$$