

## الموضوع الخامس

## التمرين الأول:

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط:
- $A(1; 4; -5)$  ،  $B(3; 2; -4)$  ،  $C(5; 4; -3)$  و  $D(-2; 8; 4)$  والشعاع  $\vec{u}(1; 5; -1)$ .
1. بين أن  $x - 2z - 11 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .
  2. حدّد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(T)$  الذي يشمل النقطة  $D$  ويوازي  $\vec{u}$ .
  3. ليكن  $(P)$  المستوي ذو المعادلة:  $x - y - z - 7 = 0$ .

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

أ - بين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(P)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  تمثيله الوسيطى

- ب - بين أن المستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$  ليسا من نفس المستوي.
4. تعطى النقطتان  $E(3; 0; -4)$  و  $F(-3; 3; 5)$  ، تحقق أن:  $E \in (\Delta)$  و  $F \in (T)$ .
5. لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء حيث:  $\overline{ME} \cdot \overline{FE} = \alpha$  مع  $\alpha$  عدد حقيقي.
- أ - جد بدلالة  $\alpha$  معادلة ديكارتية لـ  $(\Gamma)$  واستنتج أن  $(\Gamma)$  مستو،  $\overline{EF}$  شعاع ناظمي له.
- ب - عيّن قيمة  $\alpha$  حتى يكون  $(\Gamma)$  المستوي المحوري للقطعة  $[EF]$ .

## التمرين الثانى:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1)  $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$ .
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  لواحقتها على الترتيب
- $$z_A = 1 \quad , \quad z_B = -1 + 2i \quad , \quad z_C = -1 - 2i$$
- اكتب العدد  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسى واستنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .
3. لتكن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $z = -1 + 2e^{i\theta}$  مع  $\theta \in ]-\pi; \pi[$
- ولتكن  $(F)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$  مع  $\lambda \in \mathbb{R}$
- أ - تحقق أن النقطة  $A$  تنتمي إلى كل من  $(E)$  و  $(F)$ .
- ب - اكتب معادلة ديكارتية لكل من  $(E)$  و  $(F)$ ؛ و عيّن نقطتي تقاطعهما.
4. ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ويحول  $A$  إلى  $B$
- أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه  $S$  و عيّن نسبته وزاويته.
- ب - عيّن  $(E')$  و  $(F')$  صورتا  $(E)$  و  $(F)$  بالتشابه  $S$ .
- ج - استنتج تقاطع  $(E')$  و  $(F')$

**التمرين الثالث:**

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. ادرس تغيّرات الدالة  $g$ .
2. بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-0,38 < \alpha < -0,37$ .
3. استنتج إشارة  $g(x)$ ؛ حسب قيم  $x$ .

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ .  
( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x)$ .
2. ادرس تغيّرات الدالة  $f$ .
3. بيّن أنّ المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) بجوار  $+\infty$ .
4. ادرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة للمستقيم  $(d)$ .
5. بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.
6. بيّن أنّ  $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$ .
7. ارسم ( $d$ ) و ( $C_f$ )؛ نأخذ  $\alpha \approx -0,375$ .

III- ( $\Delta_\beta$ ) مستقيم معادلته  $y = 2x + \beta$  حيث  $\beta$  عدد حقيقي.

1. عيّن  $\beta$  حتى يكون ( $\Delta_\beta$ ) مماسا للمنحنى في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
2. ناقش بيانها، حسب قيم العدد الحقيقي  $\beta$ ، عدد حلول المعادلة:  $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$ .

**التمرين الرابع:**

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1 + e^{-x})$ .

( $C_f$ ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. بيّن أنّه يمكن كتابة  $f(x)$ ، على الشكل:  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1 + e^x)$ .

2. برهن أنّ الدالة  $f$  زوجية.

3. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة  $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

5. أثبت أنّ المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين ( $\Delta$ ) و ( $\Delta'$ ) يطلب تعيين معادلتيهما.

6. ارسم ( $\Delta$ )، ( $\Delta'$ ) و ( $C_f$ ).

7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$ .

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$ ،  $g(x) = f(\ln x)$ .

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة  $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

## حل الموضوع الخامس

## التمرين الأول:

1. إثبات أن  $x - 2z + 11 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .  
 لدينا  $x_B - 2z_B - 11 = 3 - 2(-4) - 11 = 0$  و  $x_A - 2z_A - 11 = 1 - 2(-5) - 11 = 0$  و  $x_C - 2z_C - 11 = 5 - 2(-3) - 11 = 0$  ومنه إحداثيات النقطة  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحقق المعادلة  $x - 2z - 11 = 0$  وبالتالي  $x - 2z - 11 = 0$  هي معادلة المستوي  $(ABC)$ .

2. تحديد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(T)$  الذي يشمل النقطة  $D$  ويوازي  $\vec{u}$ .  
 لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء.

$M$  تنتمي لـ  $(T)$  إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي  $k$  بحيث  $\overrightarrow{DM} = k\vec{u}$ .  
 ومنه  $\begin{cases} x + 2 = k \\ y - 8 = 5k \\ z - 4 = -k \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ .  
 3. ليكن  $(P)$  المستوي ذو المعادلة:  $x - y - z - 7 = 0$ .

أ - إثبات أن المستويين  $(ABC)$  و  $(P)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  تمثيله الوسيطى  $\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من  $(ABC)$  و  $(P)$  نجد:

$$(11 + 2t) - (4 + t) - t - 7 = 11 - 11 + 2t - 2t = 0 \text{ و } (11 + 2t) - 2(t) - 11 = 0$$

ومنه  $(\Delta)$  محتوئ في  $(ABC)$  ومحتوئ في  $(P)$  وعليه  $(ABC)$  و  $(P)$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$ .

ب - إثبات أن المستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$  ليسا من نفس المستوي.

لدينا  $\vec{u}(1; 5; -1)$  هو شعاع توجيه لـ  $(T)$  و  $\vec{v}(2; 1; 1)$  هو شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$ .

و  $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{5}$  إذن  $(T)$  و  $(\Delta)$  غير متوازيين.

ندرس تقاطع  $(T)$  و  $(\Delta)$ .

$$\begin{cases} 11 + 2t = -2 + k \dots\dots (1) \\ 4 + t = 8 + 5k \dots\dots\dots (2) \\ t = 4 - k \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ نحل الجملة (*)}$$

ندرس إمكانية وجود ثنائية  $t$  و  $k$  من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة (\*).

بتعويض  $t$  بقيمة من (3) في (2) نجد  $4 + (4 - k) = 8 + 5k$  ومنه  $k = 0$

بالتعويض في (3) نجد  $t = 4$  وبتعويض  $t$  و  $k$  بقيمتهما في (1) نجد  $19 = -2$  تناقض.

إذن  $(T)$  و  $(\Delta)$  غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان  $E(3; 0; -4)$  و  $F(-3; 3; 5)$ ، التحقق أن:  $E \in (\Delta)$  و  $F \in (T)$ .

$$\begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases} \text{ بما أن } t \text{ وحيدة فإن } E \in (\Delta) \text{ معناه } \begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ -4 = t \end{cases}$$

$$F \in (T) \text{ معناه } \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases} \text{ وبما أن } k \text{ وحيدة فإن } F \in (T).$$

5. لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء حيث:  $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha$  مع  $\alpha$  عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدلالة  $\alpha$  معادلة ديكارتية لـ  $(\Gamma)$ .

$$\overrightarrow{FE}(6; -3; -9) \text{ و } \overrightarrow{ME}(3-x; -y; -4-z)$$

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) + 3y - 9(-4-z) = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

هي معادلة ديكارتية لـ  $(\Gamma)$  وهي معادلة مستو شعاعه الناظمي  $\overrightarrow{EF}$ .

ب - تعيين قيمة  $\alpha$  حتى يكون  $(\Gamma)$  المستوي المحوري للقطعة  $[EF]$ .

$$\text{لتكن } I \text{ منتصف } [EF] \text{ ومنه } I\left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

المستوي المحوري للقطعة  $[EF]$  شعاعه الناظمي  $\overrightarrow{EF}$  ويشمل النقطة  $I$ .

$$\text{ومنه } -6\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 54 - \alpha = 0 \text{ أي } \alpha = 63$$

طريقة أخرى:

المستوي المحوري للقطعة  $[EF]$  هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق  $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ معناه } (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EI}) \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ ومعناه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0$$

$$\text{أي } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FE} \text{ ومنه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE}$$

$$\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{FE} = 3(6) - \frac{3}{2}(-3) - \frac{9}{2}(-9) = 18 + 45 = 63 \text{ ومنه } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$$

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \text{ تعني } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$$

إذن المستوي المحوري للقطعة  $[EF]$  هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق  $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = 63$  وعليه  $\alpha = 63$

التمرين الثاني:

$$1. \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة } (1) z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0 \dots\dots\dots$$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه العدد 1 هو حل ظاهري للمعادلة (1).

$$\text{ومنه } (z^3 + z^2 + 3z - 5) = (z-1)(z^2 + az + b) \text{ حيث } a \text{ و } b \text{ عدنان حقيقيان}$$

$$z^3 + z^2 + 3z - 5 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b \text{ بالمطابقة نجد } a=2 \text{ و } b=5$$

$$\text{ومنه } (z^3 + z^2 + 3z - 5) = (z-1)(z^2 + 2z + 5)$$

$$(1) \text{ تكافئ } z=1 \text{ أو } z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = -1 - 2i \text{ أو } z = -1 + 2i$$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي  $\{1; -1 - 2i; -1 + 2i\}$ .

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  لواحها على الترتيب

$$z_A = 1, z_B = -1 + 2i, z_C = -1 - 2i$$

كتابة العدد  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الأسّي واستنتاج طبيعة المثلث  $ABC$ .

$$\text{لدينا } z_B - z_A = -1 + 2i - 1 = -2 + 2i \text{ و } z_C - z_A = -1 - 2i - 1 = -2 - 2i$$

ومنه  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2-2i}{-2+2i} = \frac{1+i}{1-i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  ومنه  $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$  و  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$  وهذا يعني أن

$AC = AB$  و  $\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$  بالتالي المثلث  $ABC$  متساوي الساقين وقائم في  $A$ .

3. لتكن  $(E)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $z = -1 + 2e^{i\theta}$  مع  $\theta \in ]-\pi; \pi[$

ولتكن  $(F)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  بحيث:  $z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$  مع  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**أ. التحقق أن النقطة  $A$  تنتمي إلى كل من  $(E)$  و  $(F)$ .**

$A$  تنتمي إلى  $(E)$  إذا وجد عدد حقيقي  $\theta$  بحيث  $z_A = -1 + 2e^{i\theta}$

لدينا  $z_A = -1 + 2 = -1 + 2e^{i0}$  إذن من أجل  $\theta = 0$  نجد النقطة  $A$  من  $(E)$ .

$A$  تنتمي إلى  $(F)$  إذا وجد عدد حقيقي  $\lambda$  بحيث  $z_A = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا  $z_A = -1 - 2i + 2 + 2i = -1 + 2i + 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  إذن من أجل  $\lambda = 2\sqrt{2}$  نجد النقطة  $A$  من  $(F)$ .

**ب. كتابة معادلة ديكارتية لـ  $(E)$**

$z = -1 + 2e^{i\theta}$  معناه  $z + 1 = 2e^{i\theta}$  بوضع  $z_I = -1$  ومنه  $z - z_I = 2e^{i\theta}$  وتكافئ  $|z - z_I| = 2$  أي  $IM = 2$

إذن  $(E)$  هي الدائرة التي مركزها  $I(-1; 0)$  ونصف قطرها 2 والمعادلة الديكارتية لـ  $(E)$  هي  $(x+1)^2 + y^2 = 4$

**كتابة معادلة ديكارتية لـ  $(F)$**

$z = -1 - 2i + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$  معناه  $z - z_C = \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$  إذن  $(F)$  هي المستقيم الذي يشمل  $C$  وميله  $\arg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

إذن معادلة  $(F)$  من الشكل  $y = x + b$  وبما أن  $C \in (F)$  فإن  $-2 = -1 + b$  ومنه  $b = -1$

وعليه معادلة  $(F)$  هي  $y = x - 1$ .

**تعيين نقطتي تقاطعهما.**

$$\text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ (x+1)^2 + (x-1)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

إذن  $(x; y) \in \{(1; 0); (-1; -2)\}$  ومنه  $(E)$  و  $(F)$  يتقاطعان في النقطتين  $A$  و  $C$ .

4. ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  ويحول  $A$  إلى  $B$

**أ. كتابة العبارة المركبة للتشابه  $S$  وتعيين نسبته وزاويته.**

الكتابة المركبة للتشابه  $S$  من الشكل  $z' - z_C = a(z - z_C)$  وبما أن  $S(A) = B$  فإن  $z_B - z_C = a(z_A - z_C)$

ومنه  $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{4i}{2+2i} = 1+i$  وعليه الكتابة المركبة للتشابه  $S$  هي  $z' - z_C = (1+i)(z - z_C)$

أي  $z' = (1+i)z - 2 + i$ .

$|a| = |1+i| = \sqrt{2}$  ومنه نسبة التشابه  $S$  هي  $\sqrt{2}$

$\arg(a) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$  ومنه زاوية التشابه  $S$  هي  $\frac{\pi}{4}$ .

**ب - تعيين  $(E')$  و  $(F')$  صورتا  $(E)$  و  $(F)$  بالتشابه  $S$ .**

نضع  $I' = S(I)$  ومنه  $z_{I'} = -3$  وبما أن نسبة التشابه  $S$  هي  $\sqrt{2}$  فإن  $(E')$  هي الدائرة التي مركزها  $I'$  ونصف قطرها  $2\sqrt{2}$

بما أن  $S(A) = B$  و  $S(C) = C$  فإن  $(F')$  هي المستقيم  $(BC)$  لأن  $(F)$  هي المستقيم  $(AC)$ .

**ج - استنتاج تقاطع  $(E')$  و  $(F')$** 

بما أن  $(E)$  و  $(F)$  يتقاطعان في النقطتين  $A$  و  $C$  فإن  $(E')$  و  $(F')$  يتقاطعان في النقطتين  $S(A)$  و  $S(C)$  أي في النقطتين  $B$  و  $C$ .

**التمرين الثالث:**

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

**1. دراسة تغيرات الدالة  $g$ .**

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} - e^{-x} + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

الدالة  $g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:  $g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1) = e^{-x}(2-x)$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $e^{-x} > 0$  ومنه إشارة  $g'(x)$  مثل إشارة  $(2-x)$  وعليه  $g'(2) = 0$

من أجل كل  $x \in ]-\infty; 2]$  فإن  $2-x \geq 0$  أي  $g'(x) \geq 0$  إذن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على المجال  $]-\infty; 2]$ .

ومن أجل كل  $x \in [2; +\infty[$  فإن  $2-x < 0$  أي  $g'(x) < 0$  إذن الدالة  $g$  متناقصة تماماً على المجال  $[2; +\infty[$ .

**جدول تغيرات الدالة  $g$ :**

$x$	$-\infty$	$\alpha$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$		$2+e^{-2}$	2

2. تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-0,38 < \alpha < -0,37$ .

لدينا الدالة  $g$  مستمرة على المجال  $]-\infty; 2]$  وبالتالي على المجال  $[-0,38; -0,37]$  و  $g(-0,38) \approx -0,01$

$g(-0,37) \approx 0,01$  إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $[-0,38; -0,37]$

بحيث  $g(\alpha) = 0$  وبما أن الدالة  $g$  متزايدة تماماً على المجال  $]-\infty; 2]$  فإن  $\alpha$  وحيد.

**3. إشارة  $g(x)$ ؛ حسب قيم  $x$ .**

من أجل كل  $x \in ]-\infty; \alpha[$ ،  $g(x) < 0$

و من أجل كل  $x \in ]\alpha; +\infty[$ ،  $g(x) > 0$  كما أن  $g(\alpha) = 0$

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x)$ .

ليكن  $x$  عددا حقيقيا؛

$$f'(x) = 2 - [e^{-x} - xe^x] = 2 + e^{-x}(x - 1) = g(x)$$

2. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $g(x)$  وعليه  $f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

من أجل  $x \in ]-\infty; \alpha[$  فإن  $f'(x) < 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha[$ .

و من أجل  $x \in ]\alpha; +\infty[$  فإن  $f'(x) > 0$  وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $]\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. تبين أن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

إذن المستقيم  $(d)$  ذا المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

4. دراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(d)$ .

لدينا  $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$  ومنه إشارة  $f(x) - (2x + 1)$  هي نفس إشارة  $-x$ .

في المجال  $]-\infty; 0[$ ،  $-x > 0$  أي  $f(x) - (2x + 1) > 0$  ومنه  $(C_f)$  يقع فوق  $(d)$ .

و في المجال  $]0; +\infty[$ ،  $-x < 0$  أي  $f(x) - (2x + 1) < 0$  ومنه  $(C_f)$  يقع تحت  $(d)$ .

و  $(C_f)$  يقطع  $(d)$  في النقطة  $A(0; 1)$ .

5. تبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف.

لدينا  $f''(x) = g'(x)$  ومنه إشارة  $f''(x)$  هي نفس إشارة  $g'(x)$ .

$f''(x)$  تنعدم من أجل 2 وتغير من إشارتها بجوار 2 وهذا يعني أن النقطة  $B(2; f(2))$  هي نقطة إنعطاف

للمنحنى  $(C_f)$ .

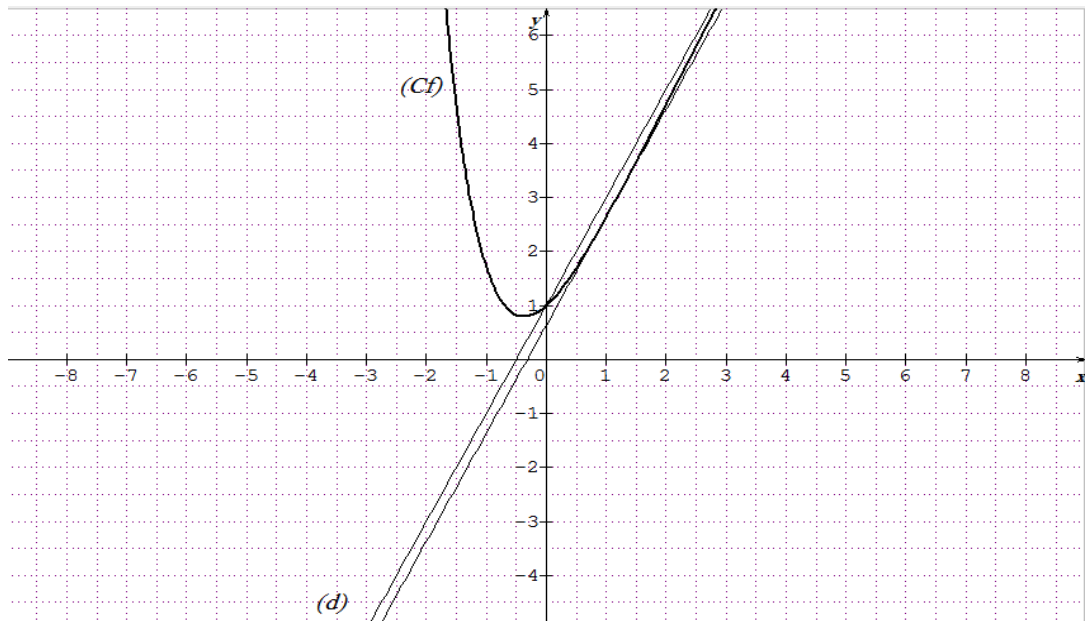
$$6. \text{ تبين أن } f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

لدينا  $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$  ولدينا  $g(\alpha) = 0$  معناه  $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$  أي  $e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha - 1}$

$$\text{إذن } f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{(2\alpha + 1)(\alpha - 1) + 2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

7. رسم  $(d)$  و  $(C_f)$ ؛ نأخذ  $\alpha \approx -0,375$ .





III-  $(\Delta_\beta)$  مستقيم معادلته  $y = 2x + \beta$  حيث  $\beta$  عدد حقيقي.

1. تعيين  $\beta$  حتى يكون  $(\Delta_\beta)$  مماساً للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x) = 2 \text{ معناه } (x-1)e^{-x} + 2 = 2 \text{ يكافئ } (x-1)e^{-x} = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$\text{لدينا } f(1) = 3 - e^{-1}$$

$(\Delta_\beta)$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  إذا كان يشمل النقطة  $A(1; 3 - e^{-1})$  ومنه  $3 - e^{-1} = 2(1) + \beta$  أي  $\beta = 1 - e^{-1}$

إذن من أجل  $\beta = 1 - e^{-1}$  يكون  $(\Delta_\beta)$  مماساً للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1; 3 - e^{-1})$ .

2. المناقشة بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي  $\beta$ ، عدد حلول المعادلة:  $-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0$

$$-\frac{x}{e^x} + 1 - \beta = 0 \text{ تكافئ } \beta = -\frac{x}{e^x} + 1 \text{ تكافئ } 2x + \beta = -\frac{x}{e^x} + 1 + 2x \text{ ومنه } 2x + \beta = -xe^{-x} + 1 + 2x$$

$$\text{أي } f(x) = 2x + \beta$$

إذا كان  $\beta \in ]-\infty; 1 - e^{-1}[$  فإن المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان  $\beta = 1 - e^{-1}$  فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً مضاعفاً وهو 1.

إذا كان  $\beta \in ]1 - e^{-1}; 1[$  فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان  $\beta \in [1; +\infty[$  فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.



## التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$ .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. تبين أنه يمكن كتابة  $f(x)$  ، على الشكل:  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$ .

$$\begin{aligned} \text{لدينا } f(x) &= \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) = f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x + \ln e^x + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x - x + \ln(e^x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x + \ln(e^x + 1) \end{aligned}$$

2. إثبات أن الدالة  $f$  زوجية.

من أجل  $x \in \mathbb{R}$  فإن  $-x \in \mathbb{R}$  لأن لكل عدد حقيقي معاكس ولدينا  $f(-x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = f(x)$  ومنه الدالة  $f$  زوجية.

3. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x &= +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty \end{aligned}$$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$ .

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1-e^x+2e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $2(e^x+1) > 0$  ومنه إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $e^x-1$ .

$f'(x) = 0$  تعني  $e^x-1=0$  ويكافئ  $e^x=1$  أي  $x=0$

$f'(x) > 0$  تعني  $e^x-1 > 0$  ويكافئ  $e^x > 1$  أي  $x > 0$

$f'(x) < 0$  تعني  $e^x-1 < 0$  ويكافئ  $e^x < 1$  أي  $x < 0$

إذن الدالة  $f$  متناقصة تماماً على المجال  $]-\infty; 0]$  ومتزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

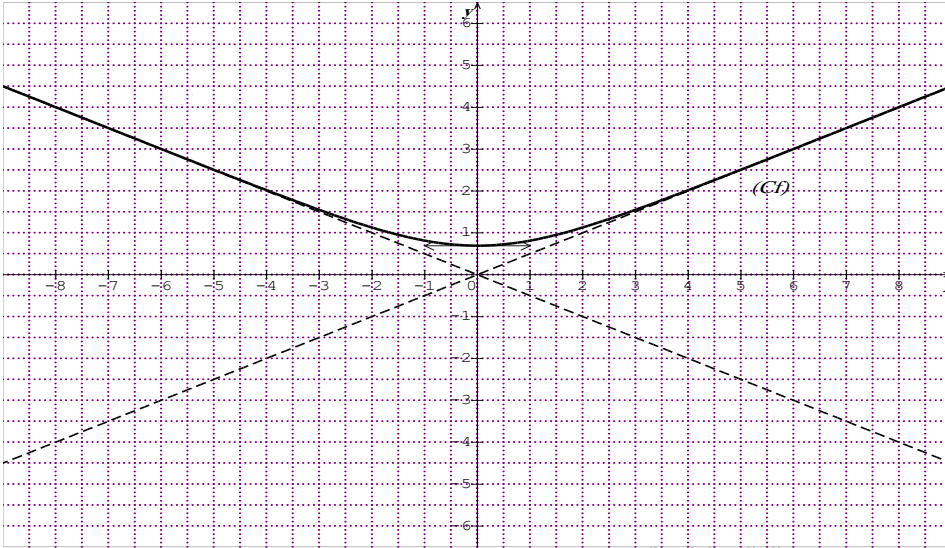
5. إثبات أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمين مقاربين مائلين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  يطلب تعيين معادلتيهما.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$  إذن للمنحنى  $(C_f)$  مستقيم مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = \frac{1}{2}x$  بجوار  $+\infty$ .

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$  إذن للمنحنى  $(C_f)$  مستقيم مقارب مائل  $(\Delta')$  معادلته

$y = -\frac{1}{2}x$  بجوار  $-\infty$ .

6. رسم  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  و  $(C_f)$ .



7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$ .

أ - التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$ ،  $g(x) = f(\ln x)$ .

لدينا  $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(e^{\ln x} + 1) = f(\ln x)$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$ .

نلاحظ أن الدالة  $g$  هي مركب الدالة  $\ln$  متبوعة بالدالة  $f$  ( $g = f \circ \ln$ )

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية  $\ln$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty[$  وتأخذ قيمها في المجال  $[0; +\infty[$  والدالة  $f$

متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماماً على المجال

$[1; +\infty[$  أي الدالة  $g$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty[$ .

ب - جدول تغيرات الدالة  $g$ .

$x$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$\nearrow +\infty$