الموضوع الثاني

التمرين الأوّل: 5 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطيان حقيقيان.

1. أ **-** بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب - تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ **-** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثمّ بيّن أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان .

ب - بيّن أنّ تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

جـ - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي (P)، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ **-** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

ب - بيّن أنّ المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H، ثمّ عيّن إحداثيات H .

جـ - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z+7=0$.

1) بيّن أنّ العدد -1 حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1=-1$ ، $z_2=2+\sqrt{3}i$ ، $z_3=2-\sqrt{3}i$ و $z_4=3$.

ـ اكتب العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACG .

3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12.........(1)$.

أ ـ أثبت أنّ G هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

ب ـ بيّن أنّ المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4........(2)$.

جـ ـ تأكد أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

د ـ بيّن أنّه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ ، ثمّ استنتج طبيعة (γ) وارسمها.

aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

I - الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^2-1\right)e^{-x}$.

1. **أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (**نأخذ:** $g\left(1-\sqrt{2}\right)\simeq -0,25$ و $g\left(1+\sqrt{2}\right)\simeq 1,43$)

2. **أ -** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II - الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. **أ -** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. **أ -** بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$. (يرمز f' إلى الدّالة المشتقة للدالة f).

ب - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f على $\mathbb{R}$. (**نأخذ:** $f(\alpha)\approx-0,9$)

3. **أ -** بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

جـ - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x: $(x+1)^2+me^x=0$.

التمرين الرابع:

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العدديـــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب - احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ - بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

ب - شكل جدول تغيّرات الدّالة f.

3. أ - بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.
5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).

حل الموضوع الثاني

التمرين الأوّل:

1. أ ـ إثبات أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ و $\frac{-2}{2} \neq \frac{-7}{2}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

ب ـ التحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثمّ كتابة معادلة ديكارتية له.

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3(2)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3(-2)-2(-7)-8=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC)

(ABC) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x;y;z-1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $3x-2y+z-1=0$ وهي معادلة للمستوي (ABC).

2. أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثمّ تبيين أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

لدينا $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta ....(1) \\ y=1-2\alpha ....(2) \\ z=4+\alpha+\beta ....(3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد $x+y=2+\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=\alpha+\beta$

ولدينا من (3) $z-4=\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=z-4$ وعليه $x+y-z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

تبيين أنّ المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$\vec{n}(3;-2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\vec{n}'(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

$\vec{n}.\vec{n}'=3(1)-2(1)-1=0$ وهذا يعني $\vec{n}$ يعامد $\vec{n}'$ ومنه (ABC) و (P) متعامدان.

ب ـ تبيين أنّ تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \, ; t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة (ABC) و (P) نجد:

$3(-2+t)-2(-7+4t)+(-7+5t)-1=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (ABC).

و $(-2+t)+(-7+4t)-(-7+5t)+2=0$ ومنه (Δ) محتوى في المستوي (P).

وعليه تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ).

جـ ـ المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

$$d_1=\frac{|3(-3)-2(4)+4-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

المسافة بين النقطة D والمستوي (P).

$d_2=\frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

استنتاج المسافة d_3 بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المستويان (ABC) و (P) متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورث $d_3{}^2=d_1{}^2+d_2{}^2$

ومنه $d_3=\sqrt{d_1{}^2+d_2{}^2}$ وعليه $d_3=\sqrt{\frac{43}{3}}$.

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

(ABC) و (P) يتقاطعان في المستقيم (Δ) وبما أن (Q) يعامد (ABC) و (P) فإنه يعامد المستقيم (Δ) أي أنّ $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي للمستوي (Q).

معادلة المستوي (Q) من الشكل $x+4y+5z+d=0$ وبما أنّ D تنتمي للمستوي (Q) فإنّ $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d=-33$ وعليه $(Q):x+4y+5z-33=0$.

ب ـ تبيين أنّ المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H.

بما أنّ $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(Q)\cap(\Delta)$.

بما أنّ (Δ) يعامد (Q) فإنّ (Δ) و (Q) يتقاطعان في نقطة H.

تعيين H نقطة تقاطع (Δ) و (Q).

إحداثيات H هي حل للجملة
$$\begin{cases} x=-2+t \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ y=-7+4t \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ z=-7+5t \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\ x+4y+5z-33=0 \ldots..(4)\end{cases}$$

ومنه $-2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0$ وعليه $t=\frac{7}{3}$ إذن $H\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};\frac{14}{3}\right)$.

جـ ـ حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المسقط العمودي لكل نقطة من (Q) على (Δ) هي النقطة H لأنّ (Δ) عمودي على (Q).

وبما أنّ D نقطة من (Q) فإنّ H هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ).

بالتالي $d(D;(\Delta))=DH$.

لدينا $\overrightarrow{DH}\left(\frac{10}{3};-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$ ومنه $DH=\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{129}{9}}=\sqrt{\frac{43}{3}}$.

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z+7=0$.

1) إثبات أنّ العدد -1 حلا لهذه المعادلة.

$(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=-1-3-1+7=0$ ومنه العدد -1 حل لهذه المعادلة.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

إيجاد الحلين الآخرين.

بما أنّ -1 حل للمعادلة فإنّ $z^3-3z^2+3z+7=(z+1)(z^2+az+b)$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$(z+1)(z^2+az+b)=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b$ بالمطابقة نجد $a+1=-3$ و $a+b=3$ و $b=7$

أي $a=-4$ و $b=7$ ومنه $z^3-3z^2+3z+7=(z+1)(z^2-4z+7)$.

$z^3-3z^2+3z+7=0$ معناه $(z+1)(z^2-4z+7)$ أي $z=-1$ أو $z^2-4z+7=0.....(1)$

نحل المعادلة (1).

$\Delta=16-28=-12=(2\sqrt{3}i)^2$ للمعادلة حلان هما $z=2+\sqrt{3}i$ أو $z=2-\sqrt{3}i$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها

على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1=-1$ ، $z_2=2+\sqrt{3}i$ ، $z_3=2-\sqrt{3}i$ و $z_4=3$.

ـ كتابة العدد $\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}=\frac{-1-2+\sqrt{3}i}{3-2+\sqrt{3}i}=\frac{-3+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{(-3+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i$$

ومنه $\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

استنتاج طبيعة المثلث ACG.

لدينا $\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})=\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ACG قائم في C.

3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.........(1)$.

أ ـ إثبات أنّ G هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

$\frac{-z_1+2z_2+2z_3}{3}=\frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3}=3=z_4$ ومنه G هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

ب ـ إثبات أنّ المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4........(2)$.

G مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$ إذن من أجل نقطة M من المستوي يكون لدينا

$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-1+2+2)\overrightarrow{MG}$ أي $-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

المساواة (1) تكافئ $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ومنه $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$ أي $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$.

جـ ـ التأكد أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ).

A تنتمي إلى المجموعة (γ) إذا كان $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$.

لدينا $A(-1;0)$ ، $C(2;-\sqrt{3})$ ، $G(3;0)$ ، $\overrightarrow{GA}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{CG}(1;\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4(1)+0(\sqrt{3})=-4$ وهذا يعني أنّ A تنتمي إلى المجموعة (γ).

د ـ تبيين أنّه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$.

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ معناه $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{CG}=-4$ ومعناه $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$

ولدينا $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$ ومنه $-4+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$.

استنتاج طبيعة (γ).

$\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12$ تكافئ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ وتكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$

بالتالي (γ) هي المستقيم المار من A و $\overrightarrow{CG}$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثالث:

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\left(x^2-1\right)e^{-x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\left(x^2-1\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2e^{-x}-e^{-x}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ (التزايد المقارن) و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\left(x^2-1\right)$

$$=e^{-x}\left[2x-\left(x^2-1\right)\right]$$

$$=e^{-x}\left(-x^2+2x+1\right)$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $\left(-x^2+2x+1\right)$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة g متناقصة تماما على المجالين $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$ و $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$

جدول تغيّرات الدالة g .

x	$-\infty$		α		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g\left(1-\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	1

2. أ ـ تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1-\sqrt{2}]$ و تأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2});+\infty[$ ولدينا $g(1-\sqrt{2})\simeq -0,25$ إذن $0\in[g(1-\sqrt{2});+\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1-\sqrt{2}]$

ولدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2});g(1+\sqrt{2})]$ و $0\in[g(1-\sqrt{2});g(1+\sqrt{2})]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$ ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1+\sqrt{2};+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;g(1+\sqrt{2})]$ و $0\notin]1;g(1+\sqrt{2})]$ إذن على المجال $[1+\sqrt{2};+\infty[$، $g(x)\neq 0$

خلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

التحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$

بما أنّ $g(0)=1+(0-1)e^0=0$ فإنّ $\beta=0$ ولدينا $g(-0.7)\simeq -0.02$ و $g(-0.8)\simeq 0.19$ أي $g(-0.7)\times g(-0.8)<0$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$.

ب ـ استنتاج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II ـ الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

ب ـ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$f(x)-x=x-(x+1)^2e^{-x}-x=-(x+1)^2e^{-x}=-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(\frac{x^2}{e^x}+2\frac{x}{e^x}+e^{-x}\right)=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ليكن x عددا حقيقيا؛ $f(x)-x=-(x+1)^2e^{-x}$

لدينا $e^{-x}>0$ و $(x+1)^2\geq 0$ إذن $f(x)-x\leq 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$.

$$f'(x)=1-\left[2(x+1)e^{-x}-e^{-x}(x+1)^2\right]=1-\left[e^{-x}(1-x^2)\right]=1+e^{-x}(x^2-1)=g(x)$$

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة f .

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-1	↗	$+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $1+(x_0{}^2-1)e^{-x_0}=1$ ويكافئ $(x_0{}^2-1)e^{-x_0}=0$ لدينا $e^{-x_0}\neq 0$ ومنه $x_0{}^2-1=0$ أي $x_0=1$ أو $x_0=-1$ إذن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين $M(1;f(1))$ و $M'(-1;f(-1))$.

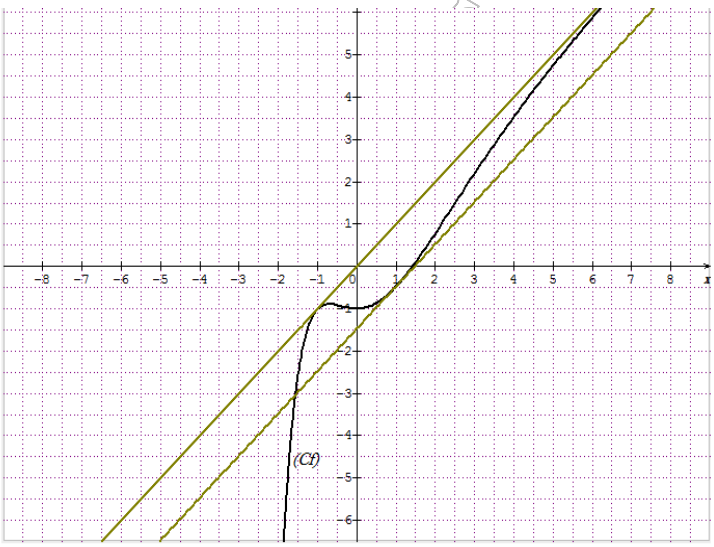
كتابة معادلة المماسين

المماس عند النقطة $M(1;f(1))$ معادلته $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=x-1+(1-4e^{-1})$ أي $y=x-4e^{-1}$

المماس عند النقطة $M'(-1;f(-1))$ معادلته $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه $y=x+1-1$ أي $y=x$

ب ـ تمثيل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

جـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2+me^x=0$.



$(x+1)^2+me^x=0$ تكافئ

$me^x=-(x+1)^2$

وتكافئ $m=-(x+1)^2e^{-x}$ و تكافئ

$x+m=x-(x+1)^2e^{-x}$ أي

$f(x)=x+m$

إذا كان $m\in\left]-\infty;-4e^{-1}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m=-4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف

إذا كان $m\in\left]-4e^{-1};0\right[$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا

إذا كان $m\in\left]0;+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا

التمرين الرابع:

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) الدّالة العدديــــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

ب - حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

2. أ - تبيين أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\left[\dfrac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\dfrac{-g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$.

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

ب - جدول تغيّرات الدّالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

لدينا $f(x) - (x-1) = \frac{-\ln x}{x}$ ومنه إشارة $f(x) - (x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

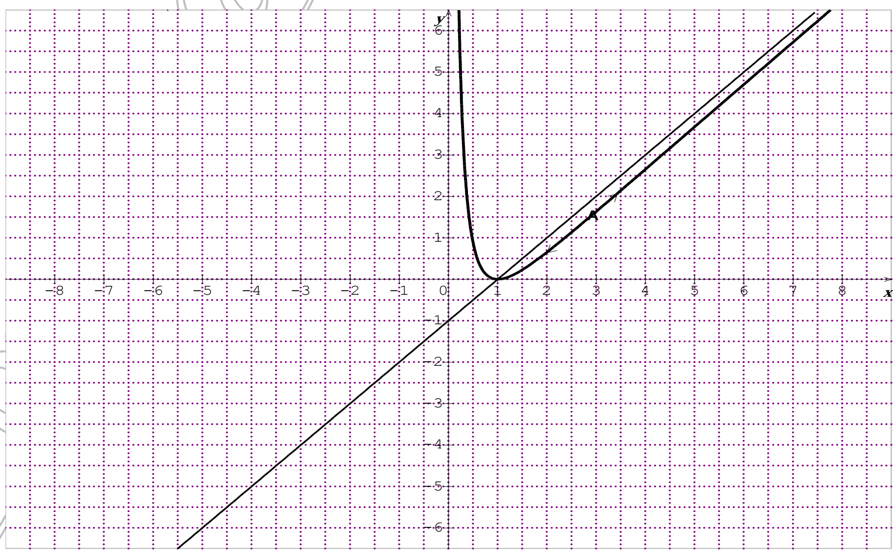
x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) تحت (D)	

4. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

$f'(x_0) = 1$ تعني $\frac{-g(x)}{x^2} = 1$ ويكافئ $x^2 - 1 + \ln x = x^2$ ويكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$

ولدينا $f(e) = e - 1 - \frac{1}{e}$ و $y = e - 1 - \frac{1}{e}$ إذن المستقيم (Δ) يمسّ المنحنى (C_f) في النقطة $A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$

5. رسم (Δ)، (D) و (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك