التمرين الأوّل:

I/ 1. ادرس، حسب قيّم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.

2. استنتج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1}+2011^n+2009^{2n}+1$ مضاعف للعدد 10.

4. جد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1}+3n\equiv 0[10]$.

II/ 1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'=(\ln 3)y$

2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0)=1$ ؛ بيّن أنّ $f(x)=3^x$.

3. ادرس تغيّرات الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

4. ماهو رقم آحاد العدد $f(1432)+f(2011)$

5. نعتبر المجموع S_n؛ حيث $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$

ـ احسب S_n، ثمّ جد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

التمرين الثاني:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين:

$A(12;7;-13)$ و $B(3;1;2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$(P_1):3x+2y-5z-1=0$ و $(P_2):x+y-2z=0$

1. بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2. أثبت أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1).

3. ليكن (Q) المستوي المعيّن بالنقطة $C(6;5;-6)$ و الشعاعين $\vec{u}(2;2;2)$ و $\vec{v}(-2;3;0)$.

أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (Q).

ب ـ بيّن أنّ المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.

جـ ـ تحقق أن $3x+2y-5z-58=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

د ـ تحقق أنّ النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q) واستنتج أنّ (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

أ ـ بيّن أنّ (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

ب ـ استنتج أنّ المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

نعتبر المثلث القائم و المتساوي الساقين ABC حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B

1. عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر S.

2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S.

أ ـ باستعمال العلاقة $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega D}$، بيّن أنّ: $DC^2=\Omega D^2$.

ب ـ استنتج طبيعة المثلث ΩDC.

3. نضع $T=S\circ S$.

أ ـ ما طبيعة التحويل T ؟ عيّن عناصره المميزة.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب - عيّن صورة النقطة D بالتحويل T.

4. بيّن أنّ الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

التمرين الرابع:

I- الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{x}$.

1- ادرس تغيّرات الدالة g.

2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^{x}\geq 0$.

II- الدّالة f معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1- أ **-** بيّن أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- أ **-** تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1+(x-1)e^{x}}{x^{2}}$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n\geq 1$؛ f_n الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x)=\dfrac{e^{x}-1}{x}+n\ln x$.

و (C_n) منحاها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

2- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها .

5- أ **-** بيّن انّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب - بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6- أ **-** بالاعتماد على الجزء **II -**؛ بيّن أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\dfrac{e^{x}-1}{x}\leq e-1$.

ب - استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ - جد نهاية المتتالية (α_n).

التمرين الأوّل:

I/ 1. دراسة، حسب قيّم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10.

لدينا $3^0 \equiv 1[10]$، $3^1 \equiv 3[10]$، $3^2 \equiv 9[10]$ أي $3^2 \equiv -1[10]$ ومنه $3^4 \equiv 1[10]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $3^{4k} \equiv 1[10]$، $3^{4k+1} \equiv 3[10]$، $3^{4k+2} \equiv 9[10]$، $3^{4k+3} \equiv 7[10]$.

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة 3^n على 10.	1	3	9	7

2. استنتاج باقي قسمة العدد 3^{2015} على 10.

لدينا $2015 = 4\times 503 + 3$ إذن $3^{2015} \equiv 7[10]$

3. تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

لدينا $7 \equiv -3[10]$ ومنه $7^{4n+1} \equiv (-3)^{4n+1}[10]$ أي $7^{4n+1} \equiv -3^{4n+1}[10]$ وعليه $7^{4n+1} \equiv -3[10]$

ولدينا $2011 \equiv 1[10]$ ومنه $2011^n \equiv 1^n[10]$ أي $2011^n \equiv 1[10]$

ولدينا $2009 \equiv -1[10]$ ومنه $2009^{2n} \equiv (-1)^{2n}[10]$ أي $2009^{2n} \equiv 1[10]$

إذن $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv -3+1+1+1[10]$ أي $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1 \equiv 0[10]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n العدد $7^{4n+1} + 2011^n + 2009^{2n} + 1$ مضاعف للعدد 10.

4. ايجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$.

$13^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ معناه $3^{4n+1} + 3n \equiv 0[10]$ ومنه $3 + 3n \equiv 0[10]$ أي $3(1+n) \equiv 0[10]$

لدينا العددان 3 و 10 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $1 + n \equiv 0[10]$ يكافئ $n \equiv -1[10]$

أي $n \equiv 9[10]$ وعليه $n = 10k + 9$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

II/ 1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = (\ln 3)y$ ....(1)

المعادلة (1) من الشكل $y' = ay$ حلولها هي دوال من الشكل $x \mapsto ce^{ax}$

ومنه $y = ce^{x\ln 3}$ أي $y = c\times 3^x$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة والذي يحقق $f(0) = 1$ ؛

تبيين أنّ $f(x) = 3^x$.

$f(x) = c\times 3^x$ مع $f(0) = 1$

$f(0) = 1$ معناه $c\times 3^0 = 1$ ومنه $c = 1$ وعليه $f(x) = 3^x$.

3. دراسة تغيّرات الدالة f.

لدينا $f(x) = 3^x = e^{x\ln 3}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{x\ln 3} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln 3} = \lim_{t\to +\infty} e^t = +\infty$$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = (\ln 3)e^{x\ln 3}$

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

4. رقم آحاد العدد $f(1432)+f(2011)$

$f(1432)+f(2011)=3^{1432}+3^{2011}$

لدينا $1432=3\times358$ إذن $3^{1432}\equiv1[10]$ و $2011=3\times502+3$ إذن $3^{2011}\equiv7[10]$

وعليه $3^{1432}+3^{2011}\equiv1+7[10]$ أي $f(1432)+f(2011)\equiv8[10]$

وبالتالي رقم آحاد العدد $f(1432)+f(2011)$ هو 8. ✍ رقم آحاد عدد طبيعي هو باقي قسمته على 10.

5. نعتبر المجموع S_n؛ حيث $S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)$

ـ حساب S_n.

$S_n=f(0)+f(1)+...+f(n)=3^0+3^1+...+3^n$

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول 1.

$$S_n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

إيجاد مجموعة الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $2S_n$ يقبل القسمة على 10.

$2S_n\equiv0[10]$ تعني $3^{n+1}-1\equiv0[10]$ وتكافئ $3^{n+1}\equiv1[10]$ ومنه $n+1=4k$ أي $n=4k-1$

حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

<u>التمرين الثاني:</u>

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين:

$A(12;7;-13)$ و $B(3;1;2)$ والمستويان (P_1) و (P_2) اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$(P_1):3x+2y-5z-1=0$ و $(P_2):x+y-2z=0$

1. تبيين أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(3;2;-5)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_1) و $\vec{n}'(1;1;-2)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P_2) و $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{1}$

إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإن إحداثياتها تحقق الجملة $\begin{cases}3x+2y-5z-1=0\\x+y-2z=0\end{cases}$

وبوضع $z=t$ نحصل على $\begin{cases}3x+2y-5t-1=0\\x+y-2t=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}3x+2y-5t-1=0\\-2x-2y+4t=0\end{cases}$

وبجمع المعادلتين نجد $x-t-1=0$ ومنه $x=t+1$ وبالتعويض نجد $3(t+1)+2y-5t-1=0$ ومنه $2y-2t+2=0$ أي $y=t-1$ وعليه $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-1;(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

2. إثبات أنّ النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1).

لدينا $x_B+y_B-2z_B=3+1-2\times2+0$ ومنه $B\in(P_1)$

ولدينا $\overrightarrow{AB}(-9;-6;15)$ ومنه $\overrightarrow{AB}=-3\vec{n}$ أي الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1).

3. ليكن (Q) المستوي المعيّن بالنقطة $C(6;5;-6)$ والشعاعين $\vec{u}(2;2;2)$ و $\vec{v}(-2;3;0)$.

أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (Q).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(Q)$ إذا وفقط إذا وُجد عددان حقيقيان α و β بحيث $\overrightarrow{CM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

ومنه $\begin{cases} x-6=2\alpha-2\beta \\ y-5=2\alpha+3\beta \\ z+6=2\alpha \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=2\alpha-2\beta+6 \\ y=2\alpha+3\beta+5 \\ z=2\alpha-6 \end{cases}$ حيث α و β وسيطان حقيقيان.

ب ـ تبيين أنّ المستويين (P_1) و (Q) متوازيان.

(P_1) و (Q) متوازيان معناه $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي لـ (Q) أي $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$

لدينا $\vec{n}.\vec{u}=3\times2+2\times2-5\times2=0$ و $\vec{n}.\vec{v}=3\times-2+2\times3-5\times0=0$ وهذا يعني $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$

ومنه المستويان (P_1) و (Q) متوازيان.

جـ ـ التحقق أن $3x+2y-5z-58=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

بما أن $3(2\alpha-2\beta+6)+2(2\alpha+3\beta+5)-5(2\alpha-6)-58=0$ فإن $3x+2y-5z-58=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q).

د ـ التحقق أنّ النقطة I منتصف $[AB]$ تنتمي إلى (Q)

لدينا $I\left(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2}\right)$ و $3x_I+2y_I-5z_I-58=\frac{45}{2}+8+\frac{55}{2}-58=0$ ومنه $I\in(Q)$.

استنتاج أنّ (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

لدينا $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا و $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (Q) إذن $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي لـ (Q) و بما أنّ $I\in(Q)$ فإن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

أ ـ تبيين أنّ (S) هي سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تعني $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=0$ وتكافئ $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=0$

وتكافئ $MI^2-IA^2=0$ أي $MI=IA$ إذن (S) هي سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$$IA=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{81+36+225}}{2}=\frac{\sqrt{342}}{2}=\frac{3\sqrt{38}}{2}$$

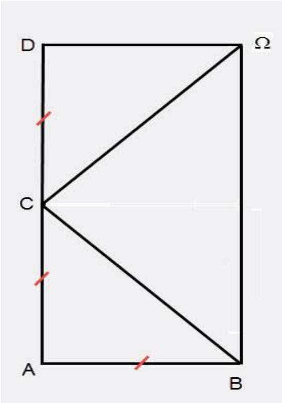
ب ـ استنتاج أنّ المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$d(I;(Q))=0$ لأن $I\in(Q)$ ومنه (Q) يقطع (S) وفق دائرة كبيرة في الكرة (S) أي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=\frac{3\sqrt{38}}{2}$.

التمرين الثالث:

نعتبر المثلث القائم والمتساوي الساقين ABC حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$.

لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى C، و S التشابه المباشر الذي يحول D إلى C و C إلى B



1. تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S.

لدينا $S(D)=C$ و $S(C)=B$

إذن نسبة التشابه هي $k=\frac{BC}{CD}$ وزاويته هي $\theta=(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BC})$

لدينا حسب نظرية فيثاغورس $BC^2=AB^2+AC^2$ لكن $AB=AC=CD$

إذن $BC^2=CD^2+CD^2=2CD^2$ ومنه $\frac{BC^2}{CD^2}=2$ أي $\frac{BC}{CD}=\sqrt{2}$

وعليه نسبة التشابه S هي $k=\sqrt{2}$ ولدينا $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{4}$ وعليه

زاوية التشابه المباشر S هي $\frac{\pi}{4}$.

2. نسمي Ω مركز التشابه المباشر S.

أ ـ باستعمال العلاقة $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega D}$، تبيين أنّ: $DC^2=\Omega D^2$.

$$\overrightarrow{DC}^2=(\overrightarrow{\Omega C}-\overrightarrow{\Omega D})^2=\Omega C^2+\Omega D^2-2\overrightarrow{\Omega C}.\overrightarrow{\Omega D}=\Omega C^2+\Omega D^2-2(\Omega C\times\Omega D.\cos(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}))$$

لدينا $S(D)=C$ معناه $\Omega C=\sqrt{2}\Omega D$ و $(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C})=\frac{\pi}{4}$

إذن $DC^2=2\Omega D^2+\Omega D^2-2\left(\sqrt{2}\Omega D\times\Omega D\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\Omega D^2-2\Omega D^2=\Omega D^2$

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث ΩDC.

لدينا $DC^2=\Omega D^2$ معناه $DC=\Omega D$ ومنه المثلث ΩDC متساوي الساقين رأسه الأساسي D.

زيادة على هذا لدينا $(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C})=\frac{\pi}{4}$ إذن $(\overrightarrow{C\Omega};\overrightarrow{CD})=\frac{\pi}{4}$ وعليه $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{D\Omega})=\frac{\pi}{2}$

أي المثلث ΩDC قائم في D ومتساوي الساقين.

3. نضع $T=S\circ S$.

أ ـ طبيعة التحويل T و تعيين عناصره المميزة.

التحويل T هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}^2$ أي نسبته 2 وزاويته $2\times\frac{\pi}{4}$ أي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه Ω.

aziz_mus1@hotmail.fr

ب - تعيين صورة النقطة D بالتحويل T.

لدينا $S(C)=B$ و $S(D)=C$ ومنه $S(S(D))=B$ أي $S\circ S(D)=B$ إذن $T(D)=B$

4. تبيين أنّ الرباعي $AD\Omega B$ مستطيل.

لدينا $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$ ؛ $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{D\Omega})=(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{D\Omega})=\frac{\pi}{2}$

ولدينا $T(D)=B$ معناه $(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega B})=\frac{\pi}{2}$

بما أن الرباعي $AD\Omega B$ فيه ثلاث زوايا قائمة فهو مستطيل.

__التمرين الرابع:__

I- الدّالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x$.

1- دراسة تغيّرات الدالة g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=e^x+e^x(x-1)=xe^x$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي ، $e^x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$.

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، $g'(x)<0$

من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و $g'(0)=0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2- تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x: $1+(x-1)e^x\geq 0$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq -1$ معناه $(x-1)e^x\geq -1$ أي $(x-1)e^x+1\geq 0$

II- الدّالة f معرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{e^x-1}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

1- أ - تبيين أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

لدينا الدالة $x\mapsto e^x-1$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ والدالة $x\mapsto x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وهي لاتنعدم على هذا المجال إذن حاصل قسمتهما يكون دالة مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ أي الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$.

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.

وبالتالي الدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب ـ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

2- أ ـ التحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ليكن $x \in]0;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

لدينا من أجل كل $x \in]0;+\infty[$، $(x-1)e^x + 1 > 0$ و $x^2 > 0$ إذن من أجل كل $x \in]0;+\infty[$:

$f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$؛ f_n الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x$.

و (C_n) منحاها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

الدالة f_n هي مجموع دالتين متزايدتين تماما على المجال $]0;+\infty[$ (الدالة f والدالة $x \mapsto n\ln x$)

إذن الدالة f_n متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x)$ **و** $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} n\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} n\ln x = +\infty$

3- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) **و** (C_{n+1}).

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x - \left[\frac{e^x - 1}{x} + n\ln x\right] = n\ln x + \ln x - \ln x = \ln x$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ تعني $\ln x=0$ أي $x=1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)>0$ تعني $\ln x>0$ أي $x>1$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ تعني $\ln x<0$ أي $0<x<1$

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	$-$	0	$+$
الوضعية النسبية	(C_{n+1}) تحت (C_n)		(C_{n+1}) فوق (C_n)

(C_{n+1}) و (C_n) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $(1;e-1)$.

4- تبيين أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $f_n(1)=e-1$ وعليه $B(1;e-1)$.

5- أ - تبيين أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

الدالة f_1 مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,3;0,4]$ و $f_1(0.3)\approx-0.03$ ، $f_1(0.4)\approx 0.31$ أي $f_1(0.3)\times f_1(0.4)<0$ إذن حسب مبرهنة القيّم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من المجال $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$.

ب - تبيين أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1)<0$.

$$f_n(\alpha_1)-f_1(\alpha_1)=\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1-\left[\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+\ln\alpha_1\right]=n\ln\alpha_1-\ln\alpha_1=(n-1)\ln\alpha_1$$

لكن $f_1(\alpha_1)=0$ ومنه $f_n(\alpha_1)=(n-1)\ln\alpha_1$

لدينا من أجل كل $n>1$ ، $n-1>0$ وبما أنّ $0<\alpha_1<1$ فإنّ $\ln\alpha_1<0$ إذن $(n-1)\ln\alpha_1<0$

أي $f_n(\alpha_1)<0$. (يمكن استعمال عدة طرق).

تبيين أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وبالخصوص على $[\alpha_1;1]$ و $f_n(1)=e-1$

ولدينا $f_n(\alpha_1)<0$ إذن $f_n(1)\times f_n(\alpha_1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$.

6- أ - تبيين أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ إذن من أجل كل $x\in]0;1]$ لدينا $f(x)\leq f(1)$

ومنه $f(x)\leq e-1$ أي $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب - استنتاج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $\ln(\alpha_n)\geq\frac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

لدينا $\alpha_n\in]0;1]$ ومنه $\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}\leq e-1$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $f_n(\alpha_n)=0$ معناه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}+n\ln\alpha_1=0$ ومنه $\frac{e^{\alpha_1}-1}{\alpha_1}=-n\ln\alpha_1$

إذن $-n\ln\alpha_1\le e-1$ وتكافئ $\ln\alpha_1\ge\frac{1-e}{n}$ وبالتالي $\alpha_n\ge e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ - إيجاد نهاية المتتالية (α_n)**.**

لدينا $e^{\frac{1-e}{n}}\le\alpha_n\le 1$ ولدينا $\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1-e}{n}}=1$ إذن حسب النهايات بالمقارنة نستنتج $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=1$.