الموضوع العاشر

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(3;-1;2)$ ، $B(1;1;-2)$ و $G(4;-2;4)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x-2y+3z+8=0$.

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)؛ ثمّ عيّن إحداثيات L نقطة تقاطع المستقيم (AB) والمستوي (P).
2. أ ـ بيّن أن G تنتمي للمستقيم (AB) وأنها مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.
   ب ـ عيّن طبيعة وعناصر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.
3. أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P)، ثمّ عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).
   ب ـ استنتج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ).
4. أ ـ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH)، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له.
   ب ـ بيّن أنّ المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+10\right)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-i$ ، $z_D=3+i$ و $z_E=2-2i$.

نضع $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$

أ ـ احسب طويلة العدد المركب L وعمدة له، ثمّ فسر النتائج هندسيا.

ب ـ استنتج أنّه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz+1-3i)=-\dfrac{\pi}{4}$.

أ ـ بيّن أنّ B تنتمي إلى (Γ_1)، ثمّ عيّن المجموعة (Γ_1).

ب ـ نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r. عيّن المجموعة (Γ_2).

4) بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z'.

أ ـ اكتب العبارة المركبة للدوران r. ثمّ عيّن سابقة النقطة O بالدوران r.

ب ـ عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz+2+2i|=|z_A|$.

5) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد $\dfrac{z-z_B}{z-z_D}$، ثمّ استنتج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\dfrac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا.

التمرين الثالث:

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^x+x+1$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g على $\mathbb{R}$.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّ $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ ، ثمّ استنتج تغيّرات f على $\mathbb{R}$.
2. بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$ ، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
3. عيّن معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر، ثمّ ادرس الوضع النسبي لـ (d) و (C_f)
4. بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$
5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)، ثمّ ارسم (d) و (Δ) و (C_f).

التمرين الرابع:

I- الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أُرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

جـ) عيّن بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

حل الموضوع العاشر:

التمرين الأوّل:

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-2;2;-4)$

$M(x;y;z)\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث t عدد حقيقي

ومنه $\begin{cases}x-3=-2t\\y+1=2t\\z-2=-4t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+2t;(t\in\mathbb{R})\\z=2-4t\end{cases}$.

تعيين إحداثيات L **نقطة تقاطع المستقيم** (AB) **والمستوي** (P).

نحل الجملة $\begin{cases}x=3-2t\\y=-1+2t\\z=2-4t\\x-2y+3z+8=0\end{cases}$ ومنه $3-2t+2-4t+6-12t+8=0$ ومنه $t=\frac{19}{18}$

وعليه $\begin{cases}x=3-2\left(\frac{19}{18}\right)\\y=-1+2\left(\frac{19}{18}\right)\\z=2-4\left(\frac{19}{18}\right)\end{cases}$ إذن $L\left(\frac{8}{9};\frac{10}{9};-\frac{20}{9}\right)$

2. أ - تبيين أن G **تنتمي للمستقيم** (AB).

$G\in(AB)$ معناه $\begin{cases}4=3-2t\\-2=-1+2t\\4=2-4t\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\t=-\frac{1}{2}\\t=-\frac{1}{2}\end{cases}$ إذن من أجل $t=-\frac{1}{2}$ نجد النقطة G من المستقيم (AB).

تبيين أنّ G **مرجح النقطتين** A **و** B **المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.**

لدينا G تنتمي للمستقيم (AB) من أجل $t=-\frac{1}{2}$ ومنه $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ومنه $2\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}$

تكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ وتكافئ $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ومنه $-3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ إذن G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ -3 و 1 على الترتيب.

ب - تعيين طبيعة وعناصر (E) **مجموعة النقط** M **من الفضاء التي تحقق:** $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

G مرجح الجملة $\{(A;-3),(B;1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا $-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$

ولدينا $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$

$\left\|-3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ معناه $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ أي $MG=\frac{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}{2}$

ولدينا $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$ ومنه $MG=\sqrt{6}$ وبالتالي (E) هي سطح الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

aziz_mus1@hotmail.fr

3 أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P).

بما أنّ (Δ) يعامد (P) فإنّ $\vec{n}(1;-2;3)$ يكون شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{GM}=t\vec{n}$ حيث t عدد حقيقي.

ومنه $\begin{cases} x-4=t \\ y+2=-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z-4=3t \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-2t;(t\in\mathbb{R}) \\ z=4+3t \end{cases}$.

تعيين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases} x=4+t \\ y=-2-2t \\ z=4+3t \\ x-2y+3z+8=0 \end{cases}$ ومنه $4+t+4+4t+12+9t+8=0$ ومنه $t=-2$

وعليه $H(2;2;-2)$

ب ـ استنتاج المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ).

بما أن (Δ) يعامد (P) فإن المسقط العمودي لكل نقطة من المستوي (P) على المستقيم (Δ) هي H نقطة تقاطعهما

وبما $L\in(P)$ فإن المسافة بين النقطة L والمستقيم (Δ) هي LH.

$\overrightarrow{LH}\left(\frac{10}{9};\frac{8}{9};\frac{2}{9}\right)$ ومنه $LH=\sqrt{\frac{100}{81}+\frac{64}{81}+\frac{4}{81}}=\frac{\sqrt{168}}{9}$

4. أ ـ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (AGH)

لدينا $\overrightarrow{AG}(1;-1;2)$ ، $\overrightarrow{AH}(-1;3;-4)$ و $\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{-1}$ ومنه النقط A ، G و H تعين مستويا.

$M(x;y;z)\in(AGH)$ معناه $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{AH}$ حيث α و β عددان حقيقيان.

ومنه $\begin{cases} x-3=\alpha-\beta \\ y+1=-\alpha+3\beta;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z-2=2\alpha-4\beta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=3+\alpha-\beta \\ y=-1-\alpha+3\beta;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=2+2\alpha-4\beta \end{cases}$.

استنتاج معادلة ديكارتية له.

$\begin{cases} x=3+\alpha-\beta................(1) \\ y=-1-\alpha+3\beta..........(2) \\ z=2+2\alpha-4\beta..........(3) \end{cases}$ بضرب المعادلة (1) بـ -1 وبجمع (1) و (2) و (3) نجد $-x+y+z+2=0$

وهي معادلة المستوي (AGH).

ب ـ تبيين أنّ المستويين (AGH) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (d) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

لدينا $\vec{n}(1;-2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n}'(-1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (AGH)

و $\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{1}$ إذن الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا ومنه المستويان (AGH) و (P) متقاطعان وفق مستقيم (d).

المستقيم (d) معرّف بالجملة $\begin{cases} x-2y+3z+8=0......(1) \\ -x+y+z+2=0.......(2) \end{cases}$ بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد $-y+4z+10=0$

ومنه $y=4z+10$ بالتعويض في (1) نجد $x-2(4z+10)+3z+8=0$ ومنه $x=5z+12$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

وبوضع $z=t$ نجد $(d):\begin{cases} x=5t+12 \\ y=4t+10 \\ z=t \end{cases}$

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$

$(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$ يكافئ $z^2=-4$ أو $z^2-6z+10=0$

حل المعادلة $z^2=-4$.

$z^2=-4$ تكافئ $z^2=(2i)^2$ ومنه $z=2i$ أو $z=-2i$.

حل المعادلة $z^2-6z+10=0$.

$\Delta'=9-10=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z=3+i$ أو $z=3-i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$ هي: $\{2i;-2i;3+i;3-i\}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A، B، C، D و E التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-i$ ، $z_D=3+i$ و $z_E=2-2i$.

نضع $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$

أ ـ حساب طويلة العدد المركب L وعمدة له.

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}=\frac{3-i-2i}{3+i+2i}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

ومنه $|L|=|-i|=1$ و $\arg(L)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$

تفسير النتائج هندسيا.

$|L|=1$ معناه $\dfrac{AC}{BD}=1$ ومعناه $AC=BD$

$\arg(L)=-\dfrac{\pi}{2}$ معناه $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\pi}{2}$.

ب ـ استنتاج أنّه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$\begin{cases} z_A=az_B+b.....(1) \\ z_C=az_D+b.....(2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد $z_C-z_A=a(z_D-z_B)$ ومنه $a=\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=-i$

بما أنّه يوجد عدد مركب وحيد a غير معدوم و $|a|=|-i|=1$ فإنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C زاويته $\arg(a)=-\dfrac{\pi}{2}$.

3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz+1-3i)=-\dfrac{\pi}{4}$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

أ ـ إثبات أنّ B تنتمي إلى (Γ_1).

B تنتمي إلى (Γ_1) اذا كان $\arg(iz_B+1-3i)=-\frac{\pi}{4}$.

لدينا $iz_B+1-3i=i(-2i)+1-3i=3-3i=3(1-i)$ ومنه $\arg(iz_B+1-3i)=\arg(3(1-i))=-\frac{\pi}{4}$

وهذا يعني أنّ B تنتمي إلى (Γ_1).

تعيين المجموعة (Γ_1).

$\arg(iz+1-3i)=-\frac{\pi}{4}$ معناه $\arg(i(z-i-3))=-\frac{\pi}{4}$ ومعناه $\arg(i)+\arg(z-i-3)=-\frac{\pi}{4}$

وتكافئ $\frac{\pi}{2}+\arg(z-(i+3))=-\frac{\pi}{4}$ و تكافئ $\arg(z-(i+3))=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$ أي $\arg(z-z_D)=-\frac{3\pi}{4}$

بالتالي (Γ_1) هي نصف مستقيم مبدؤه D وبما أنّ B تنتمي لـ (Γ_1) فإن (Γ_1) هي نصف المستقيم $[DB)$ باستثناء النقطة D.

ب ـ نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r .

تعيين المجموعة (Γ_2).

بما أنّ $\begin{cases} r(B)=A \\ r(D)=C \end{cases}$ فإنّ (Γ_2) صورة (Γ_1) هو نصف المستقيم $[CA)$ باستثناء النقطة C.

أ ـ كتابة العبارة المركبة للدوران r .

العبارة المركبة للدوران r من الشكل $z'=-iz+b$ و بما أنّ $r(B)=A$ فإنّ $z_A=-iz_B+b$

ومنه $b=z_A+iz_B$ أي $b=2+2i$ وعليه العبارة المركبة للدوران r هي $z'=-iz+2+2i$

تعيين سابقة O بالدوران r .

$z_O=-iz+2+2i$ تكافئ $-iz+2+2i=0$ ومنه $z=\frac{2+2i}{i}=2-2i=z_E$

إذن سابقة O بالدوران r هي E أي $r(E)=O$.

ب ـ تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz+2+2i|=|z_A|$.

$|-iz+2+2i|=|z_A|$ تكافئ $|z'|=2$ تكافئ $OM'=2$ ، حيث z' لاحقة النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r

ولدينا $r(E)=O$ إذن $OM'=EM$ ومنه $EM=2$ بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|-iz+2+2i|=|z_A|$ هي الدائرة ذات المركز E ونصف القطر 2 .

5) التفسيرا هندسيا لعمدة العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$.

$$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right)$$

استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا.

يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا إذا كان $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\pi$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\pi$ تكافئ $\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right)=\pi$ ومنه مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[DB]$ باستثناء النقطتين D و B .

التمرين الثالث:

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^x+x+1$

1. **دراسة تغيّرات الدّالة g على $\mathbb{R}$.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x+1=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+x+1=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x)=e^x+1$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$ وعليه الدّالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. **تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,3<\alpha<-1,2$.**

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالتالي على المجال $[-1,3;-1,2]$ ولدينا $g(-1,3)\approx-0,02$ ، $g(-1,2)\approx 0.10$ أي $g(-1,3)\times g(-1,2)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1,3;-1,2[$ بحيث $g(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنّ α وحيد.

3. **استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.**

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$ ؛ و $g(\alpha)=0$.

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$.

1. **تبيين أنّ** $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x+1\right)-e^x\left(xe^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x-xe^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x+x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

aziz_mus1@hotmail.fr

$$=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

استنتاج تغيّرات f على $\mathbb{R}$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

في المجال $]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)<0$ أي $f'(x)<0$ إذن الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)>0$ أي $f'(x)>0$ إذن الدّالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=0$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x(1+e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^{-x}}=+\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$.**

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $e^\alpha+\alpha+1=0$ أي $e^\alpha=-(\alpha+1)$

إذن $f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-(\alpha+1)+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-(\alpha+1)+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}=\alpha+1$

طريقة ثانية:

لدينا $f(\alpha)-(\alpha+1)=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}-(\alpha+1)=\frac{\alpha e^\alpha-\alpha e^\alpha-e^\alpha-\alpha-1}{e^\alpha+1}=\frac{-(e^\alpha+\alpha+1)}{e^\alpha+1}=\frac{-g(\alpha)}{e^\alpha+1}$

لكن $g(\alpha)=0$ ومنه $f(\alpha)-(\alpha+1)=0$ أي $f(\alpha)=(\alpha+1)$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$.

$-1{,}3<\alpha<-1{,}2$ معناه $-0{,}3<\alpha+1<-0{,}2$ أي $-0{,}3<f(\alpha)<-0{,}2$.

3. **تعيين معادلة المماس (d) لـ(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.**

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ولدينا $f'(0)=\frac{1}{2}$ و $f(0)=0$ ومنه $(d): y=\frac{1}{2}x$

دراسة الوضع النسبي لـ(d) و (C_f)

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{xe^x}{e^x+1}-\frac{x}{2}=\frac{2xe^x-xe^x-x}{2(e^x+1)}=\frac{xe^x-x}{2(e^x+1)}=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $2\left(e^x+1\right)>0$ ومنه إشارة $f(x)-\frac{1}{2}x$ هي نفس إشارة $x\left(e^x-1\right)$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
x	$-$ 0	$+$
e^x-1	$-$ 0	$+$
$f(x)-\frac{1}{2}x$	$+$	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	(C_f) فوق (d)
	يمس	

4. **تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ(C_f) في جوار** $+\infty$

لدينا $f(x)-x=\frac{xe^x}{e^x+1}-x=\frac{xe^x-xe^x-x}{e^x+1}=\frac{-x}{e^x+1}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ(C_f) في جوار $+\infty$.

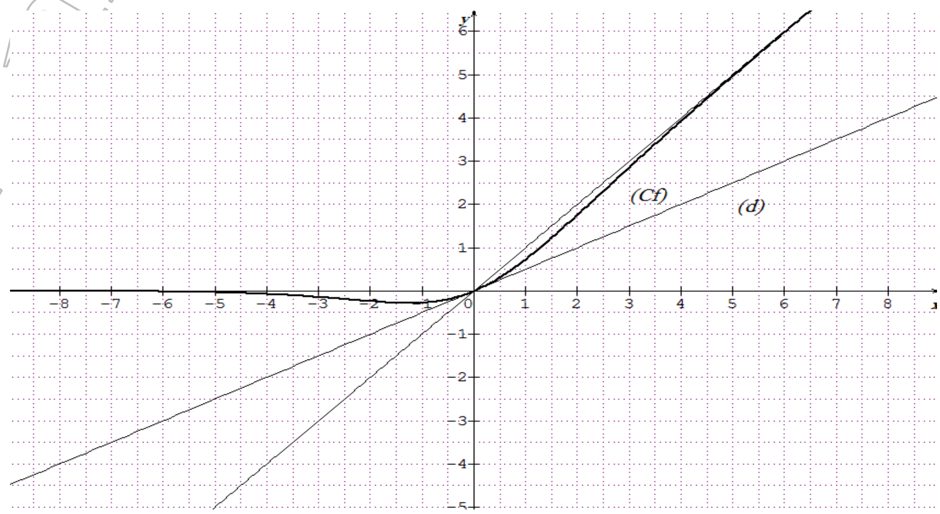
5. **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).**

إشارة $f(x)-x$ هي نفس إشارة $-x$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f(x)-x$	$+$ 0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في O.

رسم (d) و (Δ) و (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الرابع:

I- g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) دراسة تغيّرات الدالة g.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} g(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2+2x+4-2\ln(x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} 2\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x^2+2x+4=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2x+2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x^2+4x}{x+1}=\frac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$، $x+1>0$ و $x+2>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x.

إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدّالة g.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2) استنتاج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)>0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $g(x)\geq 4$ وبالتالي $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

2) أ) تبيين أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$، حيث f' هي مشتقة الدالة f.

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و $(x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في ℝ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ وبما أنّ $f(0)\times f(0,5)<0$ فإنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

$f(x)-x=-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$

$f(x)-x=0$ معناه $2\ln(x+1)-1=0$ وتكافئ $\ln(x+1)=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x>0$ معناه $2\ln(x+1)-1>0$ وتكافئ $\ln(x+1)>\frac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}-1$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

x	-1 $\sqrt{e}-1$ $+\infty$	
$f(x)-x$	$-$	0 $+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياها $\left(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1\right)$.

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

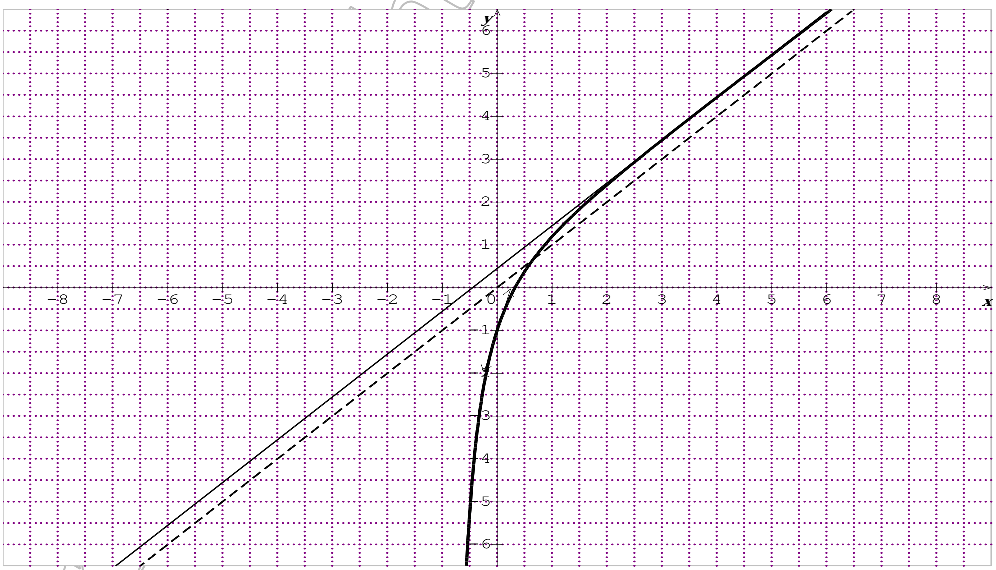
أ) حساب x_0.

المستقيم (T) ميلة يساوي 1 ومنه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $x_0{}^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0{}^2+2x_0+1$ وتكافئ

$\ln(x_0+1)=\dfrac{3}{2}$ أي $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).



جـ) تعيين بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلّين متمايزين من أجل قيّم m من المجال $\left]0;\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

aziz_mus1@hotmail.fr