في هذا الدرس :

1 – مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن (طالع محتوى الصفحتين 242 و 243 من الكتاب المدرسي ... هذا يكفيك وزيادة)
2 – شرح حركة كوكب أو قمر اصطناعي .

ملخّص الدرس

1 - المعلم والمرجع : حجرة المخبر مرجع ندرس بالنسبة له حركة سقوط كرية ، هذا لا يكفي لتحديد عناصر الحركة ، لهذا نزوّد المرجع بمعلم (O, x, y, z) ، ثم نختار لحظة نعتبرها مبدأ للزمن .

المرجع السطحي أرضي : نقطة من سطح الأرض (المخبر مثلا) : ننسب إليه الحركات بجوار سطح الأرض .

المرجع المركزي أرضي : مركز الأرض مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة .

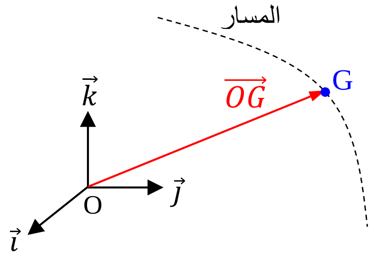
المرجع المركزي شمسي : مركز الشمس مزود بمعلم محاوره متجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة .

نقول عن مرجع أنه غاليلي (عطالي) إذا كان ثابتا بالنسبة لحركة أو يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لمرجع ثابت .

2 - عناصر الحركة :

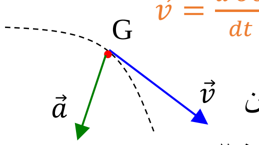
2 – 1 - شعاع الموضع : هو الشعاع $\overrightarrow{OG}$ الذي يجمع بين مبدأ الإحداثيات وموضع مركز عطالة الجسم في اللحظة t .

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$



2 – 2 - شعاع السرعة : هو مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن : $\vec{v} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}$

يمسّ المسار في نقطة وجود المتحرك .



2 – 3 - شعاع التسارع : هو مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن

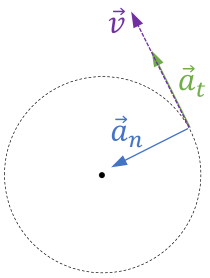
$\vec{a} = \dfrac{d\,\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$ ، وهو المشتق الثاني لشعاع الموضع بالنسبة للزمن .

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad \vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

3 - التسارعان المماسي والناظمي :

في حركة منحنية : التسارع المماسي هو $a_t = \dfrac{dv}{dt}$

التسارع الناظمي (المركزي) $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ ، حيث R : نصف قطر المسار



الحركة الدائرية المنتظمة
$a_t = 0$
$a = a_n$
$\vec{a}_n \perp \vec{v}$

4 - طبيعة الحركة :

$\vec{a} \times \vec{v} > 0$: الحركة متسارعة

$\vec{a} \times \vec{v} < 0$: الحركة متباطئة

$\vec{a} \times \vec{v} = 0$: الحركة مستقيمة منتظمة إذا كان $\vec{a} = 0$ ، ودائرية منتظمة إذا كان $\vec{a} \perp \vec{v}$

5 - قوانين نيوتن : (نقتصر على الملخص فقط)

5 – 1 - القانون الأول : في معلم غاليلي إذا كان شعاع سرعة مركز عطالة جملة ثابتا ، فإن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجملة تكون معدومة .

والعكس كذلك صحيح . $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = cst$

5 – 2 - القانون الثاني :

في معلم غاليلي يكون مجموع القوى الخارجية المؤثّرة على جملة كتلتها m متناسبا في كل لحظة مع تسارع الجملة ، أي : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

5 – 3 - القانون الثالث :

إذا أثرت جملة A بفعل ميكانيكي على جملة B مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة B تؤثر في نفس الوقت على الجملة A بفعل مُنَمذج بقوة $\vec{F}_{B/A}$ ، بحيث يكون هذان الفعلان متعاكسين ومرتبطين بالعلاقة : $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

6 - حركة الكواكب والأقمار الصناعية

- يدور كوكب في مسار دائري (فرضا) حول الشمس بسرعة $v = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}$

G : ثابت الجذب العام ، M_S كتلة الشمس ، r البعد بين مركزي الشمس والكوكب .

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ S.I$

- يدور قمر صناعي في مسار دائري (فرضا) حول الأرض بسرعة $v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$

M_T كتلة الأرض ، r البعد بين مركز الأرض والقمر الصناعي .

الدور (زمن دورة واحدة) : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}$ ، M : كتلة الشمس أو الأرض ، أو كتلة كوكب آخر بالنسبة لدوران أحد أقماره .

7 - قوانين كبلر

7 – 1 - القانون الأول : في المرجع الشمسي مركزي تتحرك الكواكب في مدارات إهليلجية حول الكوكب الجاذب بحيث يكون مركز هذا الأخير في أحد محرقيها .

في المرجع الأرضي مركزي تدور الأقمار الصناعية في مدارات إهليلجية أحد محرقيها مركز الأرض .

7 – 2 - القانون الثاني : (قانون المساحات) : يمسح المستقيم الواصل بين مركز الكوكب السيّار ومركز الكوكب الجاذب مساحات متساوية في مُدَد زمنية متساوية .

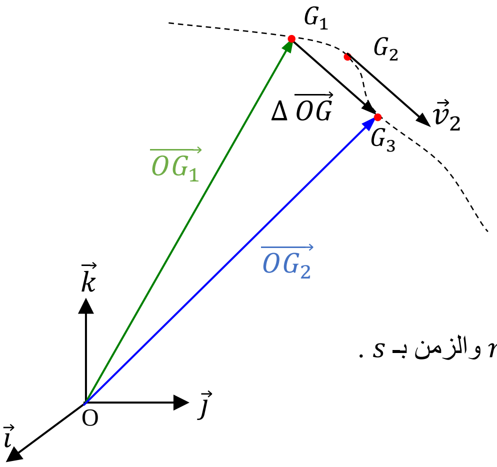
7 – 3 - القانون الثالث : في مرجع شمسي مركزي ، تكون النسبة بين مربعات أدوار الكواكب ومكعبات أنصاف المحاور الكبيرة لمداراتها ، دائما ثابتة .

لا تتعلّق هذه النسبة إلا بالكوكب أو النجم الجاذب . $\frac{T^2}{a^3} = k$ ، وإذا اعتبرنا المسار دائريا سواء بالنسبة لدوران الكواكب حول الشمس أو الأقمار حول الكواكب : $\frac{T^2}{r^3} = k$

الدرس

I - الحركات

1 - شعاع السرعة اللحظية :



شعاع السرعة في اللحظة t_2 هو $\vec{v_2} = \frac{\overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_1}}{t_3 - t_1}$ ، حيث $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

شعاع السرعة يكون موازيا لشعاع الانتقال $\Delta\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_1}$

يكون تحديد $\vec{v}_2$ بأكثر دقّة كلما اقتربت t_3 من t_1 ، وبالتالي :

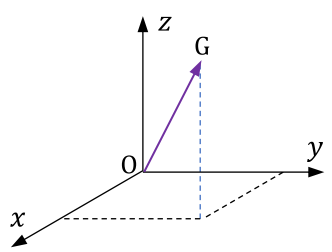
شعاع السرعة اللحظية هو المشتق بالنسبة للزمن لشعاع الموضع $\overrightarrow{OG}$: $\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}}$

مثال : يتحرك جسم نعتبره نقطة مادية ، تُعطى إحداثيات المتحرك في المعلم $(\overrightarrow{Ox}\,,\overrightarrow{Oy}\,,\overrightarrow{Oz})$ في كل لحظة كما يلي : $x = 3t - 1$ ، $y = 2t^2 - 1$ ، $z = t^2 + 2t$ ، المسافات بـ m والزمن بـ s .

1 – اكتب عبارة شعاع الموضع ، ثم عيّن وضعية المتحرك عند اللحظة $t = 2\ s$.

2 – اكتب عبارة شعاع السرعة اللحظيّة ، ثم احسب طويلة السرعة عند اللحظة $t = 1\ s$.

الحل :



1 - شعاع الموضع هو : $\overrightarrow{OG} = (3\,t - 1)\,\vec{i} + (2\,t^2 - 1)\,\vec{j} + (t^2 + 2t)\,\vec{k}$

في اللحظة $t = 2\ s$ يكون $\overrightarrow{OG} = 5\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$ ، حيث يشغل المتحرك النقطة $G(5\,,7\,,8)\ cm$

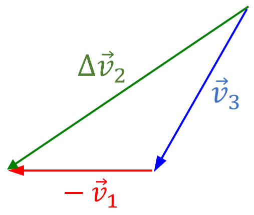
2 – شعاع السرعة : $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ ، أي $\vec{v} = 3\vec{i} + 4t\,\vec{j} + (2t + 2)\vec{k}$

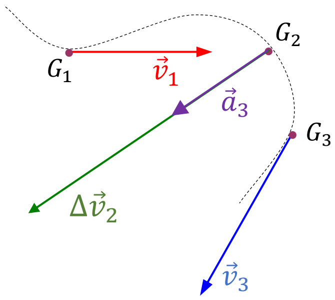
عند اللحظة $t = 1\ s$ يكون $\vec{v} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$

طويلة السرعة عند $t = 1\ s$: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = 6{,}4\ m/s$

2 ـ شعـاع التسارع اللحظي :

يُعبّر شعاع التسارع عن تغيّر شعاع السرعة خلال الزمن . شعاع التسارع محمول على شعاع التغير في السرعة $\Delta\vec{v}$.





شعاع التسارع في اللحظة t_2 هو : $\vec{a} = \frac{\vec{v}_3-\vec{v}_1}{t_3-t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

كلما اقترب t_3 من t_1 يكون تحديد شعاع التسارع دقيقا أكثر .

عندما ينتهي t_3 نحو t_1 يصبح $\vec{a}$ مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3 ـ التسارع المماسي والتسارع الناظمي (المركزي) :

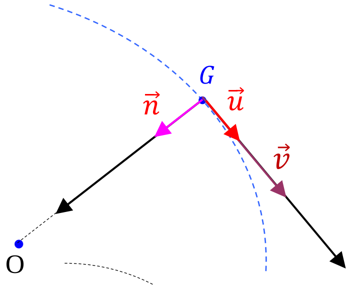
نعتبر متحركا G على مسار منحني ، ننسب حركته إلى معلم $(G\,,\vec{u}\,,\vec{n})$ محوراه متعامدان ، أحدهما يمس المسار في كل لحظة والآخر متجه نحو مركز المسار (O) .

شعاع السرعة يكون دائما محمولا على المماس ، ومنه نكتب :

$\vec{v} = v\,\vec{u}$ ، وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\times\vec{u} + v\times\frac{d\vec{u}}{dt}$

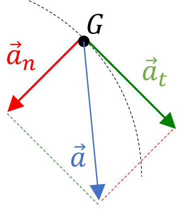
(للتذكير : شعاع الوحدة $\vec{u}$ متغير ، منحاه يتغير أثناء الحركة)

ومنه التسارع $\vec{a}$ عبارة عن تسارعين :



التسارع المماسي : محمول على المماس : $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}$ طويلته $a_t = \frac{dv}{dt}$

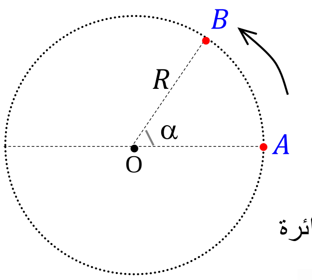
التسارع الناظمي : متجه نحو المركز (فيسمى المركزي) $\vec{a}_n = v\frac{d\vec{u}}{dt}$ ، طويلته ثُقبل



في هذا المستوى بدون برهان $a_n = \frac{v^2}{R}$. حيث R هو نصف قطر المسار .

التحليل البعدي لعبارة التسارع : $[a] = \frac{L\,T^{-1}}{T} = L\,T^{-2}$ ، ووحدة التسارع هي m/s^2 .

♦ الحركة الدائرية المنتظمة



المسار دائري ، تسارعها المماسي معدوم لأنه مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، ونعلم أن طويلة السرعة ثابتة .

تسارع هذه الحركة هو التسارع الناظمي فقط $a_n = \frac{v^2}{R}$.

عندما يتحرك جسم على محيط دائرة ، مثلا من A إلى B ، تكون المسافة المقطوعة هي القوس $\widehat{AB}$ ، وبما أن طويلة السرعة ثابتة ، إذن المدّة المستغرقة هي $t = \frac{\widehat{AB}}{v}$

دور الحركة : هو الزمن اللازم لدورة تـامة ، نرمز له بـ T ، حيث لما يكون $t = T$ يكون القوس هو محيط الدائرة

وبالتالي $T = \frac{2\pi R}{v}$

♦ تطبيق قوانين نيوتن على حركة الكواكب والأقمار

نسمي جرْما سماويّا كل جسم موجود في الفضاء الخارجي .

الكوكب هو كل جرم سماوي يدور حول نجم (دوران زحل حول الشمس مثلا) .

القمر هو كل جرم سماوي يدور حول كوكب (زحل له أقمار تدور حوله ، والأرض لها قمر طبيعي يدور حولها ، وأقمار اصطناعية كذلك) .

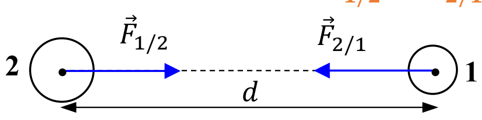
ننسب حركة الأقمار الصناعية إلى المرجع الجيو مركزي(مركزي أرضي) ، وننسب حركة الكواكب للمرجع الهيليومركزي (شمسي مركزي) .

ننسب مثلا حركة القمر $Phobos$ لمرجع مركزي مرّيخي ، لأن القمر فوبوس يدور حول المريخ .

1 – قانون الجذب العام :

يتجاذب جسمان كتلتاهما m_1 و m_2 البعد بين مركزي عطالتهما d بقوة شدّتها $F_{1/2} = F_{2/1} = G\,\frac{m_1\,.\,m_2}{d^2}$

حيث G هو ثابت الجذب العام ، أو نسميه الثابت الكوني وقيمته $G = 6{,}67\ \times 10^{-11}\ S.I$.



2 – القوة التي يخضع لها القمر الصناعي :

يُحمل القمر الصناعي بواسطة مركبة فضائية إلى ارتفاع محدّد عن سطح الأرض ، ثم تُعطى له سرعة شعاعها عمودي على المحور الواصل بين مركز عطالته ومركز الأرض ، فيبقى في سقوط دائم .

القوة المؤثّرة على القمر الصناعي هي قوة جذب الأرض له $F_{T/s} = m_s\,g = G\,\frac{m_s\,M_T}{(R_T+h)^2}$

m_s : كتلة القمر الصناعي ، M_T : كتلة الأرض ، R_T : نصف قطر الأرض ، h : البعد بين القمر الصناعي وسطح الأرض .

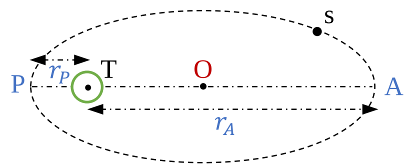
كتلة الأرض : $M_T \approx 6\times10^{24}kg$ ، ونصف قطرها $R_T \approx 6400\ km$ ، g : التسارع الأرضي على الارتفاع h .

نعتبر مركز عطالة الأرض هو مركزها الهندسي ، ونقول : كتلة الأرض موزّعة تناظريّا على حجمها .

3 – مدار القمر الصناعي :

مدارات الأقمار الصناعية يمكن أن تكون دائرية أو إهليلجية ، ولها اتجاهات مختلفة ، وتكون على ارتفاعات منخفضة (حوالي $250\ km$) أو ارتفاعات عالية (تفوق $30000\ km$) ، وهذا يتعلّق بالهدف الذي أطلقَ من أجله القمر الصناعي .

مستوى مدار القمر الصناعي يجب أن يشمل مركز الأرض .



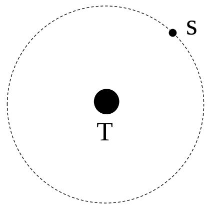
المدار إهليلجي :

في مثل هذه المدارات يمرّ القمر الصناعي بأقرب نقطة لمركز الأرض (P) ، تسمّى الحضيض وبأبعد نقطة عن مركز الأرض (A) ، وتسمّى الأوج .

القمر الصناعي $Heos\ 1$ الذي وُضع على مداره سنة 1968 كان بعده عن سطح الأرض في P $h_P = 418\ km$ وفي النقطة A $h_A = 223440\ km$.

في الشكل الاهليلجي نسمي المسافة $PA = 2a$ المحور الأعظم للإهليلج ، حيث $OP = OA = a$.

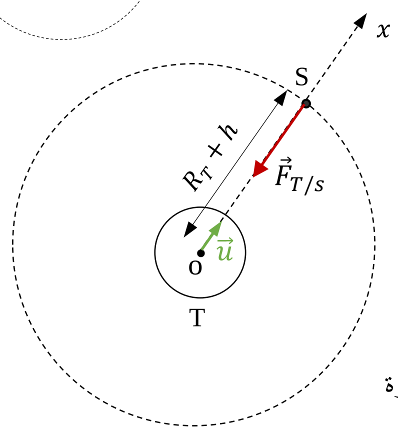
البعد بين مركز الأرض والحضيض هو r_P ، والبعد بين مركز الأرض والأوج هي r_A ، حيث $\boldsymbol{r_A + r_P = 2a}$



المدار دائري :

في المدار الدائري يبقى القمر الصناعي أثناء دورانه على بعد ثابت عن مركز الأرض ، وهذا البعد هو $r = R_T + h$

4 – دراسة حركة القمر الصناعي على مدار دائري :



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في مرجع جيومركزي ، نعتبره غاليليا بما فيه الكفاية ، أي نعتبر أن أثناء الدراسة يقطع مركز الأرض حول الشمس قوسا يمكن اعتباره خطا مستقيما ، فتكون حركة مركز الأرض مستقيمة منتظمة .

نهمل كل التأثيرات على حركة القمر الصناعي ، ما عدا تأثير الأرض .

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_s \vec{a}$$

في المحور الموجه $\overrightarrow{Ox}$ المزوّد بشعاع الوحدة $\vec{u}$ تُكتب عبارة القوّة $\vec{F}_{T/s}$ بالشكل :

$$\vec{F}_{T/s} = -G\ \frac{m_s\, M_T}{(R_T+h)^2}\ \vec{u}$$

وبالتالي $-G\ \frac{m_s\, M_T}{(R_T+h)^2}\ \vec{u} = m_s \vec{a}$ ، $\vec{a} = -G\ \frac{M_T}{(R_T+h)^2}\ \vec{u}$

نلاحظ حسب هذه العبارة الأخيرة أن شعاع التسارع متجه نحو مركز الأرض ، لأنه معاكس مباشرة لشعاع الوحدة $\vec{u}$ ، وبالتالي هو تسارع ناظمي ، إذن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

تسارع القمر الصناعي هو التسارع الناظمي ، حيث $\boldsymbol{a_n = G\ \frac{M_T}{(R_T+h)^2} = g}$ ، حيث g هو التسارع الأرضي على الارتفاع h .

5 - سرعة القمر الصناعي :

سرعة القمر الصناعي ثابتة الطويلة $v^2 = a_n \times (R_T + h) = G\ \frac{M_T}{(R_T+h)^2}(R_T + h) = G\ \frac{M_T}{(R_T+h)}$ ، $\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{(R_T+h)}}}$

التحليل البعدي للثابت الكوني G :

لدينا $F = G\ \frac{m_s\, M_T}{(R_T+h)^2}$ ، ومنه $G = \frac{F\times(R_T+h)^2}{m_s\, M_T}$ ، وبالتالي $[G] = \frac{M\, L\, T^{-2}\, L^2}{M^2} = L^3\, M^{-1}\, T^{-2}$

اختصارا نقول $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ S.I$ ؛ حيث $S.I$ معناه : في جملة الوحدات الدولية .

6 - دور القمر الصناعي : هو الزمن اللازم لكي يقوم القمر الصناعي بدورة كاملة .

في دورة كاملة يقطع القمر الصناعي المسافة $d = 2\pi(R_T + h)$ (محيط الدائرة التي يرسمها القمر الصناعي) .

بما أن حركة القمر الصناعي منتظمة ، فإن المدّة المستغرقة خلال دورة واحدة (الدور) هي $\boldsymbol{T = \frac{2\pi\, (R_T+h)}{v}}$

وبتعويض عبارة السرعة : $T = \frac{2\pi\, (R_T+h)}{\sqrt{\frac{G\, M_T}{(R_T+h)}}}$ ، $T^2 = \frac{4\pi^2\, (R_T+h)^2}{\frac{G\, M_T}{(R_T+h)}}$ ، ومنه $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{G\, M_T}}}$

إذا كان المسار اهليلجيا لا تكون الحركة منتظمة ، ويعطى الدّور بدون برهان $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\, M_T}}}$ ، حيث a : نصف المحور الأكبر .

ملاحظة : يمكن حساب سرعة القمر الصناعي في الأوج بالعلاقة $v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_A}}$ ، وفي الحضيض بالعلاقة $v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_P}}$

إذا كان $r_A \approx r_P \approx a$ (انظر للتمرين **17** – صفحة 284) .

القمر الصناعي المستقر أرضيا :

القمر الصناعي المستقر أرضيا (الجيومستقرّ) هو القمر الصناعي الذي يدور في مدار مستواه يشمل خط الاستواء ، ودوره يساوي الدور اليومي للأرض $(24\ h)$ ، ويدور في جهة دوران الأرض . يظهر هذا القمر الصناعي ثابتا في مرجع سطحي أرضي .

ارتفاع هذا القمر الصناعي عن سطح الأرض هو h ، حيث $(R_T+h)^3=\frac{T^2\times G\,M_T}{4\pi^2}$ ، $R_T+h=\sqrt[3]{\frac{T^2\times G\,M_T}{4\pi^2}}$

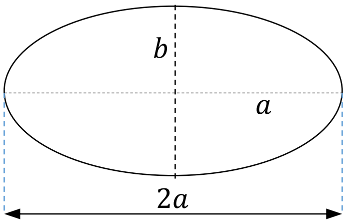
$$h=\sqrt[3]{\frac{T^2\times G\,M_T}{4\pi^2}}-R_T=\sqrt[3]{\frac{(8644)^2\times 4\times 10^{14}}{4\times(3{,}14)^2}}-64\times 10^5=3{,}59\times 10^7 m\approx 36000\ km$$

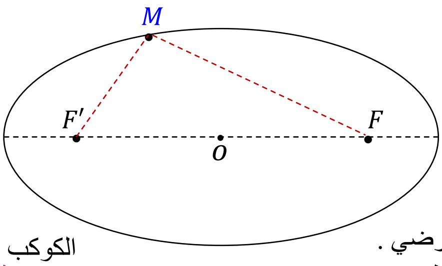
سرعة القمر الصناعي المستقر أرضيا $v=\frac{2\pi\,(R_T+h)}{T}=\frac{6{,}28\times 42400\times 10^3}{24\times 3600}=3081 m/s$ ، $v\approx 3{,}1\ km/s$

7 - قوانين كبلر :

7 – 1 - القطع الناقص : هو شكل هندسي تحقق نقطه M العلاقة : $MF+MF'=2a$ (سميناه سابقا : الشكل الاهليلجي)

F و F' هما محرقا القطع الناقص و a هو نصف محوره الأكبر، b : هو نصف المحور الأصغر (لا حاجة لنا به هنا) .

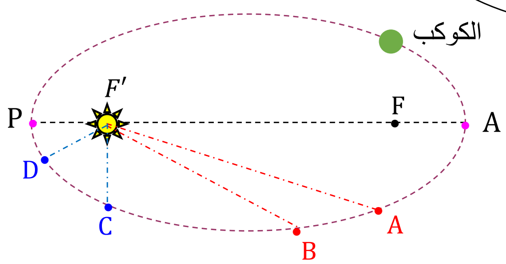




7 – 2 - القانون الأول :

تدور الكواكب حول الشمس في مدارات إهليلجية ، بحيث يكون أحد محرقيها هو مركز الشمس ، وذلك في المرجع الشمسي مركزي ، ونفس الشيء، بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض بحيث يكون مركز الأرض هو أحد محرقي مساراتها الإهليلجية ، وذلك في المرجع المركزي أرضي .

ملاحظة : نعتبر أحيانا هذه المسارات دائرية من أجل التبسيط .



7 – 3 - القانون الثاني (قانون المساحات)

المساحات التي يمسحها المستقيم الواصل بين مركز الكوكب ومركز الشمس تكون متساوية في مُدد زمنية متساوية . أي أن سرعة الكوكب تزداد عندما يقترب من الشمس وتتناقص عندما يبتعد عنها .

المساحتان $F'AB$ و $F'CD$ متساويتان إذا كانت المدة التي يستغرقها الكوكب من A إلى B تساوي المدة التي يستغرقها من C إلى D .

سرعة الكوكب تكون عظمى بجوار النقطة P (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأقرب) ، وتكون سرعته صغرى بجوار النقطة A (تسمى هذه النقطة نقطة الرأس الأبعد) .

7 – 4 - القانون الثالث

في مرجع شمسي مركزي تكون النسبة بين مربع أدوار الكوكب ومكعّب أنصاف المحاور الكبرى للمسارات دائما ثابتة .

أي أن بالنسبة للكواكب P_1 ، P_2 ، P_3 أدوارها حول الشمس T_1 ، T_2 ، T_3 يكون : $\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}=\frac{T_3^2}{a_2^3}=K$ **(1)**

دور الكوكب هو T ، حيث $T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,M_S}}$. M_S كتلة الشمس ، $M_S=2\times 10^{30} kg$

ونفس الشيء بالنسبة للأقمار الصناعية حول الأرض في المعلم المركزي أرضي .

إذا اعتبرنا مدار الكوكب حول الشمس دائريا يكون الدور $T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_S}}$ ، حيث r : البعد بين مركزي الكوكب والشمس .

وتكون سرعة الكوكب $v=\sqrt{\frac{G\,M_S}{r}}$.

من العلاقة (1) نستنتج :

$K=\frac{4\,\pi^2}{GM_S}$ بالنسبة للكواكب

$K=\frac{4\,\pi^2}{GM_T}$ بالنسبة للأقمار الصناعية والقمر الطبيعي للأرض

$K=\frac{4\,\pi^2}{GM_P}$ بالنسبة للأقمار التي تدور حول كوكب كتلته M_P

كل ما ذكرناه سابقا يُطبّق كذلك على حركة الأقمار حول الكواكب ، وعلى سبيل المثال قمرا المرّيخ *Phobos* و *Déimos* .

ملاحظة :

في حالة كوكب يدور حول الشمس في مسار دائري (نعتبره دائريا) ، فإن دراسة حركته هي نفس الدراسة التي قمنا بها سابقا لحركة قمر صناعي حول الأرض ، أي نبيّن أن تسارع الكوكب متجه نحو مركز الشمس ، وذلك لنثبت أن حركة الكوكب منتظمة .