مجلة الدالة الأسية النيبيرية

BAC 2022

ملخص الدروس

تمارين لبكالوريات جزائرية وأجنبية

3

ثانوي جميع العلمية

- علوم تجريبية
- رياضيات
- تقني رياضي

من إعداد الأستاذين:

- وليد لعويجي
- بخدة امين

1.1 الدالة الأسية

الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$
وتحقق : $f' = f$ و $f(0) = 1$ ونكتب $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

2.1 الخواص

$e^0 = 1$ ، $e^1 = e \approx 2,71$ ، $e^x \neq 0$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ، $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ، $e^x > 0$

$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ، $e^{nx} = (e^x)^n$ ، $e^0 = 1$ ، $(e^x)' = e^x$

$e^x = e^y$ يعني $x = y$

$e^x \leq e^y$ يعني $x \leq y$

$e^x \geq e^y$ يعني $x \geq y$

3.1 دراسة تغيرات الدالة الأسية

1 مجموعة التعريف لدينا : $f(x) = e^x$ و هي معرفة على $\mathbb{R}$ إذن $D_f =]-\infty;+\infty[$

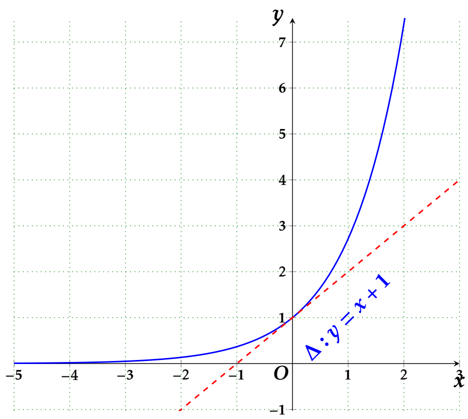
2 النهايات : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

3 إتجاه التغير : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = e^x > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

5 التمثيل البياني



نتائج هامة

1 المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل حامل محورالفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$

2 لدينا $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$ معادلة له

3 من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{0+x} - e^0}{x} = \exp'(0) = 1$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$

نتيجة

الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0 . أي من أجل كل x قريب من 0 لدينا : $e^x \approx x + 1$.

1

بسط العبارات التالية :

$(e^x)^3 \times e^{-5x}$ ، $\dfrac{e^{-2x+3}}{e^{-2x}}$ ، $\dfrac{e^x + e^{-2x}}{e^{-2x}}$ ، $(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})^2$

2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$e^{x+-2} = e$ ، $e^{3x} + 5 = 0$ ، $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ ، $e^{x^2+x} - 1 = 0$

$e^{-2x} - e^{x^2+1} = 0$ ، $\left|e^{\frac{3}{x}-1} - 5\right| = 1$

3 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$e^{2x}>2e^{x}-1$ ، $e^{x+1}\leq e^{-\frac{2}{x}}$ ، $e^{x-x^{2}}\geq 1$ ، $e^{-2x+1}-e^{2x}<0$

4.1 مجموعة تعريف دالة أسية

نضع $f(x)=e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية

مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u إذن $D_f=D_u$

1 عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة

$f(x)=\dfrac{e^{x}+2}{e^{x}-1}$ ، $f(x)=e^{\frac{1}{x}}+5$ ، $f(x)=\sqrt{x}-1+e^{x^{2}}$ ، $f(x)=e^{x^{2}+5x+2}$

$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{2x}-3e^{x}+2}$ ، $f(x)=\sqrt{e^{-2x}-e}$ ، $f(x)=x^{2}+\dfrac{1}{e^{2x+1}}$

$f(x)=e^{e^{e^{x}}}$

5.1 مشتقة دالة أسية

نضع $f(x)=e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I و بالتالي :

$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

1 أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة

$f(x)=4e^{(x-1)\sqrt{x}}$ ، $f(x)=\left(x^{2}+x-1\right)e^{x}$ ، $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ، $f(x)=e^{3x}-x$

$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{2x}-3e^{x}+2}$ ، $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-x}+1}$

6.1 النهايات الشهيرة

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0^{-}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0^{+}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

1 أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^{x}-3}{2e^{x}+1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+3}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-2x}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^{3}-1}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{(x-1)^{2}}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^{2}+x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{6x}-3}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$

دراسة إشارة العبارة $ae^{u(x)}+b$ حيث a و b أعداد حقيقة و u دالة عددية

$a>0$ و $b>0$ ← $ae^{u(x)}+b>0$

$a<0$ و $b<0$ ← $ae^{u(x)}+b<0$

a و b مختلفان في الإشارة

لدراسة إشارة العبارة
$a\,e^{u(x)}+b$ نحل المعادلة
$ae^{u(x)} + b = 0$ و
المتراجحات $a\,e^{u(x)}+b < 0$
و $a\,e^{u(x)}+b > 0$ بإستعمال الخاصيتين :
❶ $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) = v(x)$
❷ $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تكافئ $u(x) < v(x)$

دراسة الدالة $e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال D_u و a ، b و c أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

$(\exp\circ u)(x) = e^{u(x)}$

$D_{\exp\circ u} = D_u$

$(e^{u(x)})' = u'(x)\,e^{u(x)}$

للدالتين $\exp\circ u$ و u نفس إتجاه التغير على D_u

إذا كان:
$\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$
و $\lim\limits_{x\to b} e^x = c$
فإن: $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)} = c$

المحور1 المحور2 المحور3 المحور4 المحور5 المحور6

دراسة إشارة $A(x)=a\,e^{2x}+b\,e^{x}+c$ حيث: a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$

$ae^{2x}+be^{x}+c=0$ تكافئ $\begin{cases} y=e^x \\ ay^2+by+c=0\cdots(1)\end{cases}$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$

$A(x)=a(e^x-y_1)(e^x-y_2)$ ، y_1 و y_2 حلول المعادلة: (1)

- $y_1>0$ ، $y_2>0$

x	$-\infty$	$\ln(y_1)$		$\ln(y_2)$	$+\infty$
$A(x)$	إشارة a	0	إشارة -a	0	إشارة a

- $y_1>0$ ، $y_2<0$

x	$-\infty$	$\ln(y_1)$	$+\infty$
$A(x)$	إشارة -a	0	إشارة a

- $y_1<0$ ، $y_2<0$

إشارة $A(x)$ من نفس إشارة a

$\Delta=0$

$A(x)=a(e^x-y_0)^2$ ، y_0 حل المعادلة: (1)

- $y_0>0$

x	$-\infty$	$\ln(y_0)$	$+\infty$
$A(x)$	إشارة a	0	إشارة a

- $y_0<0$

إشارة $A(x)$ من نفس إشارة a

$\Delta<0$

العبارة $A(x)$ لا تحلل

إشارة $A(x)$ من نفس إشارة a

2 أدرس إشارة العبارات الآتية:

❶ $2e^{x+1}+1$ ❷ $-e^{x^2+2}-3$ ❸ $\frac{1}{2}e^{2x-1}-2$

❹ $e^{2-x}-3$ ❺ $-4e^{x+1}+12$ ❻ $e^{2x}-7e^{x}+12$

❼ $e^{2x}+e^{x}-6$ ❽ $e^{2x}-2e^{x}+3$ ❻ $(2x-1)e^{-x}+4e^{-x}$

7.1 إزالة حالات عدم التعيين

إزالة حالات عدم التعيين في الدالة الأسية

حالة $(0)(\infty)$

لإزالتها ننشر (فك الأقواس) ونستفيد من المبرهنة :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ : & n \text{ زوجي} \\ 0^- : & n \text{ فردي} \end{cases}$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$\lim x \to -\infty (x-1)e^x$

حالة عدم التعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$f(x) = (x-1)e^x$

$= xe^x - e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

حيث أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

حالة $\frac{0}{0}$

نغير شكل الدالة f ونستفيد من المبرهنة :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{3x}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{2x}-1}{x}$

نبعد بين x و 3 ثم نضرب البسط والمقام بالعدد (2)

$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x}$

$\lim x \to 0 f(x) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$

حيث أن :

$\lim x \to 0 \frac{e^x-1}{x} = 1$

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

نفرق الكسر إذا كان المقام حد واحد

نخرج عامل مشترك مناسب من البسط والمقام إذا كان المقام أكثر من حد

ونستفيد من المبرهنات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

مثال توضيحي 1: حساب النهاية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$

حيث أن : $\lim x \to +\infty \frac{e^x}{x} = +\infty$

مثال توضيحي 2: حساب النهاية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x-1}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$ ، نخرج x كعامل مشترك من البسط ، و e^x من المقام ، ومنه :

$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$

$= \frac{x}{e^x}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\left[\frac{1-0}{1-0}\right] = 0$

حيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

حالة $+\infty - \infty$

إخراج عامل مشترك مناسب عادة:

e^x عندما $x \to +\infty$

ويمكن e^{2x} أو e^{3x} أو ...

e^{-x} عندما $x \to -\infty$

ويمكن e^{-2x} أو ...

ونستفيد من المبرهنات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x_t o-\infty} x^n e^x = 0 : n > 0$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} + x$

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty - \infty$.

$f(x) = e^{-x} + x$

$= e^{-x}\left[1 + \frac{x}{e^{-x}}\right]$

(أخرجنا e^{-x} لأن $x \to -\infty$)

$= e^{-x}\left[1 + xe^x\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty[1+0] = +\infty$

حيث أن : $\lim x \to -\infty xe^x = 0$

مثال 1:

حساب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x$
حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty)(0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+1)e^x \\ &= x^2e^x + e^x \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0+0=0$ حيث أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

مثال 2:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x+2}-e}{x^2-1}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل : $(0/0)$

$$f(x) = \frac{e^{x+2}-e}{x^2-1}$$

1 يجب إظهار الواحد لذلك نخرج e كعامل مشترك $f(x) = \dfrac{e(e^{x+1}-1)}{x^2-1}$

2 يجب إظهار $(x+1)$ في المقام أي :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e(e^{x+1}-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{e}{x-1}\left[\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\right] \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{e}{-2}(1) = \frac{e}{-2}$$

حيث أن $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{e^\theta-1}{\theta}=1$ ، $(\theta = x+1, \theta\to0 \Leftrightarrow x\to-1)$

مثال 3:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $(0/0)$.

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}=\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{x}}{\dfrac{e^{5x}-1}{x}}$$
$$=\frac{2\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)}{5\left(\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{2(1)}{5(1)}=\dfrac{2}{5}$ حيث أن $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{e^{\theta}-1}{\theta}=1$

مثال 4:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{4x}}{5x}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $(0/0)$.

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{4x}}{5x}=\frac{e^{x}(1-e^{3x})}{5x}$$
$$=\frac{-e^{x}(e^{3x}-1)}{5x}=\frac{-3e^{x}}{5}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\dfrac{3}{5}(1)=-\dfrac{3}{5}$ حيث أن $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{e^{\theta}-1}{\theta}=1$

مثال 5:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x}+1$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}+1$$
$$=e^{x}(e^{x}-1)+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(+\infty)+1=+\infty$$

مثال 6:

حساب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{5x}-e^{3x}+x^3$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{5x}-e^{3x}+x^3 \\ &= e^{3x}(e^{2x}-1)+x^3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty-1)+\infty = +\infty$$

مثال 7:

حساب النهاية: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ، حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^{-x}}-1\right]}{e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^{-x}}+1\right]} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

8.1 المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ...

كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .
حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
و التي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay$ مع $a \neq 0$

a عدد حقيقي غير معدوم
حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto c\,\mathrm{e}^{x}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' + 2y = 0$
لدينا : $y' + 2y = 0$ معناه $y' = -2y$
ومنه حلول هذه المعادلة هي الدوال : $x \mapsto c\,\mathrm{e}^{-2x}$ حيث c عدد حقيقي ثابت

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$

a عدد حقيقي غير معدوم
حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $c \mapsto c\,\mathrm{e}^{x} - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

مثال

لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y' = -3y + 2$
حلول هذه المعادلة هي الدوال $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{3}$

1 التمرين الأول

1 حل المعادلات التفاضلية الأتية :

❶ $y' = 3y$ ❷ $3y' = 5y$ ❸ $y' + 2y = 0$ ❹ $2y' + 3y = 0$

2 في كل حالة عيّن حل معادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى :

أ) $y' = 2y$ ، الحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$

ب) $y' + 5y = 0$ ، منحنى (C_f) للحل f يمر بالنقطة $A(-2;1)$

ج) $y' + 2y = 0$ ، ميل المماس للمنحنى (C_f) للحل f في النقطة التي فاصلتها -2 يساوي $\frac{1}{2}$

3 حل المعادلات التفاضلية الآتية :

❶ $y' = 2y + 1$ ❷ $2y' = y - 1$ ❸ $y + 3y' = 2$

❹ $2y + 3y' - 1 = 0$

2 التمرين الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل مرة :

1 حلول المعادلة التفاضلية : $y' + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-0,5x} + 8$

2 نعتبر الجملة : $\begin{cases} y' = -7y + 35 \\ y(0) = 9 \end{cases}$ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$

بالشكل $f(x) = \mathrm{e}^{-7x} + 7$ هي حل لهذه الجملة .

3 الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}\sin x$ هي حل للمعادلة التفاضلية : $y'' - 4y' + 5y = 0$

3 التمرين الثالث

نعتبر المعادلة التفاضلية : (E) $y' = -3y + 4\,\mathrm{e}^{-2x}$

1 عيّن العدد الحقيقي λ حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$ حلا للمعادلة (E)

2 بيّن أنّ الدالة f تكون حلا لـ (E) إذا و فقط إذا كانت الدالة $(f - g)$

حلا للمعادلة التفاضلية : (E') $y' = -3y$

3 حل المعادلة (E') ، ثم إستنتج حلول المعادلة (E)

4 التمرين الرابع

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) $y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{x}$ و الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $u(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{x}$

1 عيّن العددين الحقيقيين a و b علما أن الدالة u هي حل للمعادلة (E)

2 حل المعادلة التفاضلية : (E') $y' - 2y = 0$

3 بيّن أنّ الدالة v تكون حلا لـ (E') إذا و فقط إذا كانت الدالة $(u + v)$

حلا للمعادلة (E)

4 إستنتج حلول المعادلة (E)

5 عيّن الحل للمعادلة (E) الذي ينعدم عند 0

5 التمرين الخامس

نعتبر الدالة u المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=\frac{e^x}{x}$ و المعادلة التفاضلية (E) : $y-y'=\frac{e^x}{x^2}$

1 بيّن أن الدالة u هي حل لـ (E)

2 بيّن أن الدالة v المعرفة على $]0;+\infty[$ تكون حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت الدالة $(v-u)$ حلا للمعادلة التفاضلية (E') $y-y'=0$

3 إستنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

6 التمرين السادس

1 حل المعادلة التفاضلية (E) $2y'+3y=0$

2 أ) عيذن كثير حدود من الدرجة الثانية f يحقق المعادلة التفاضلية (E') : $2y'+3y=x^2+1$

ب) بيّن أن g حلا للمعادلة (E') إذا و فقط إذا كان $g-f$ حلا للمعادلة (E)

ج) إستنتج حلول المعادلة التفاضلية (E')

7 التمرين السابع

1 عيّن العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة $f:x\mapsto a\,e^{-x}$ حلا للمعادلة التفاضلية: (E) $y'+3y=2\,e^{-x}$

2 نعرف الدالة h كمايلي : $h(x)=g(x)-a\,e^{-x}$ حيث g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

- أثبت أن الدالة g حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كان h حلا للمعادلة التفاضلية $y'+3y=0$

3 حل المعادلة (E) و إستنتج مجموعة الحلول (E)

8 التمرين الثامن

ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2

1 أ) حل المعادلة التفاضلية الأتية : (E) $\quad y' - \frac{1}{n}y = 0$

ب) عيّن العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $g(x) = ax + b$

حلا للمعادلة التفاضلية : (E') $\quad y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

ج) • بيّن أن الدالة h تكون حلا للمعادلة (E')إذا و فقط إذا كان $(h-g)$ حلا للمعادلة (E)

• إستنتج حلول المعادلة (E')

• عيّن الحل f للمعادلة (E') الذي يحقق $f(0) = 0$

2 f_n دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$

و ليكن $\left(C_{f_n}\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

ب) أثبت أنّ منحنى الدالة f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماما يطلب تعيينها

ج) بيّن أن المنحنى $\left(C_{f_n}\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ_n) . أعط معادلة للمستقيم (Δ_n)

هـ) أنشئ كلا من (Δ_2) و $\left(C_{f_2}\right)$

9 التمرين التاسع

I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث : (E) $\quad y' - y = e^x - x$

1 بيّن أن الدالة u حل للمعادلة (E) حيث u معرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $u(x) = x e^x + x + 1$

2 v دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

بيّن أن الدالة $u+v$ حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت الدالة v

حل للمعادلة التفاضلية (E') حيث : (E') $\quad y' - y = 0$

3 حل المعادلة التفاضلية (E') ، ثم إستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E)

4 عيّن الحل الخاص k للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق $k(0) = 0$

II) g دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ بمايلي: $g(x) = (x-1)e^x + x + 1$

1 أحسب $g'(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$ ، ثم إستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2 أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، بين أن : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كمايلي : $f(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2}$

و ليكن $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 بيّن أن f دالة فردية

2 أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا .

ب. برهن أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المنحنى $\left(C_f\right)$ ؟

3 أ) بيّن أنّ: $f'(x) = \dfrac{-e^x g(x)}{(e^x - 1)^3}$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$

4 أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ على $\mathbb{R}-\{0\}$

المحور1
المحور2
المحور3
المحور4
المحور5
المحور6
المحور 1. ملخص الدرس

1 باك جوان 2008 م2 (5.7 ن)

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$
كمايأتي: $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عداد حقيقيان .
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
وحدة الطول $1cm$

- عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$
كما يأتي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

1. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ وفسر هذه النتيجا بيانيا .
(نذكرأن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

2. أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3. بين أن منحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحدثييها .

4. أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

5. أرسم (C_g)

6. H الدالة العددية المعرف على$]-2;+\infty[$ كما يأتي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان

أ) عين α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\to g(x)-1$

ب) إستنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

II) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$
بإستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين إتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها

2 باك جوان 2010 م1(7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$
نرمز(C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

2 أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3 أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ'). معادلتيهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + 1$.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4 بيّن أن النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5 أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ وَ $-1,4 < \beta < -1,3$.

ب) هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ)؟.

ج) أرسم (Δ) و (Δ'). ثم المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)\mathrm{e}^{-x} = m$

3 باك جوان 2011 م2 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\,x - 1$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أحسب $f'(x)$ ثمّ أدرس إشارتها.

ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

2 أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -\mathrm{e}\,x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب) أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ج) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α.

د) أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3 أ) أحسب بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x = 0$ ؛ $x = \alpha$.

ب) أثبت أنّ: $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)\ ua$ (ua هي وحدة المساحات)

4 باك جوان 2012 م2 (7 ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x) = 1 - x\mathrm{e}^x$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ ، تقبل في حلا وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$

ب) تحقق أنّ $0.5<\alpha<0.6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=-g(x)$ ، استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$

ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 بينّ أنّ $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

4 أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

5 أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2

حيث $-1.6<x_1<-1.5$ و $1.5<x_2<1.6$.

ب) أنشئ (Δ) و (C_f) .

6 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^{x}$

أ) عين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون الدالة h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{x}$

على $\mathbb{R}$

ب) إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

5 باك جوان 2013 م1 (5.6 ن)

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C).

2 أحسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

x	$f(x)$
$0,20$	$0,037$
$0,21$	$0,016$
$0,22$	$-0,005$
$0,23$	$-0,026$
$0,24$	$-0,048$
$0,25$	$-0,070$

3 بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α.
باستعمال جدول القيم جد حصرا للعدد α.

1 أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثمّ أرسم المنحني (C') الممثل للدالة $|f|$.

2 عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II) g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـِ: $g(x) = f(2x-1)$.
(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1 أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
أ) تحقّق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$.
ب) إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.
ج) تحقّق من أنّ : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

6 باك جوان 2015 م2 (7 ن)

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

1 أدرس إتجاه تغير الدالةgعلى $\mathbb{R}$.

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$
ثمّ تحقّق أنّ: $0,36 < \alpha < 0,37$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$.

ب) إستنتج أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$

و متزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2 أحسب نهاية f عند $+\infty$ و عند $-\infty$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

4 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5 أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$، نأخذ $f(\alpha)\approx 0,1$.

أ) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$

: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

ب) إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

7 باك جوان 2016 م2 (7 ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+\left(x^2+x-1\right)e^{-x}$

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 أ) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم

و الأخر α حيث : $-1,52<\alpha<1,51$.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\left(x^2+3x+2\right)e^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (وحدة الطول $1cm$).

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-g(x)$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha)\approx 0.38$)

د) عين دون حساب : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس وظعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

المحور1 المحور2 المحور3 المحور4 المحور5 المحور6

ج) بين أن للمنحنى $\left(C_f\right)$ نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثييهما .

د) أرسم (Δ) و $\left(C_f\right)$ على المجال $]-2,+\infty[$.

هـ) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

حلول المعادلة : $(m-x)\,e^x+\left(x^2+3x+2\right)=0$ على المجال $]-2;+\infty[$.

III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=x+f(x)$
و $H(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$.

1 عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

أ) أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسر النتيجة هندسيا

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda)$.

8 باك جوان(الإستثنائية) 2016 م2 (6 ن)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1 أ) أحسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

ب) بين أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$.

ج) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1;38<\alpha<-1,37$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$
وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد
و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$.

ج) أدرس إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2 أ) بين أن $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ج) أنشئ المنحى $\left(C_f\right)$. (تعطى $f(\alpha)\approx 0,29$)

9 باك جوان 2017 م2 (7 ن)

I) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ و أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ثم أحسب النهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2 أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1 بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $h(x)\geq 0$ ، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T).

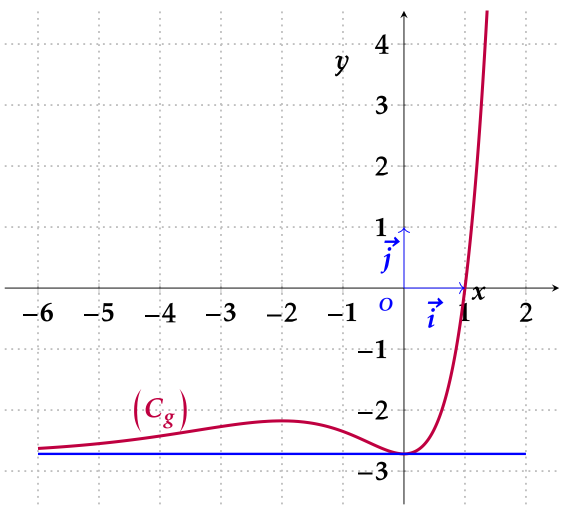
2 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

3 أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$.

4 F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $F(x)=2x+\left(x^2+2x+2\right)e^{1-x}$.
تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

10 باك جوان(الإستثنائية) 2017 م2 (7 ن)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^x-e$
(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (كما هو موضح في الشكل)



1 أحسب $g(1)$

2 بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم إستنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) نعتبرالدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 أحسب النهايات الأتية : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته : $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

3 بين أن: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

4 إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$
و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5 بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) إنطلاقا من منحنى الدالة : $x \mapsto e^x$
ثم أرسم بعناية كلا من المنحنين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق .

6 ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f)
و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.
أحسب العدد الحقيقي l حيث $l = A(0) + A(1) + \cdots + A(2016)$.

11 باك جوان 2018 م1 (6 ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$
أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها
ج) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,38 < \alpha < -0,37$
ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$
II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
ب) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+1))$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

حيث : $(\Delta): y = 2x+1$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

4 أرسم (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$)

5 ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $x = (1-m)\,e^x$

6 أ) بإستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x\,e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x = 1$.

ب) أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ ، $x = 3$ ، $2x+1$

1 باك جوان 2019 م2 (7 ن) الحل موجود في الصفحة 64

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

تؤخذ وحدة الطول $2cm$

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g

المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = e^x - ex$ و $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1 أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة f .

3 أحسب كلاّ من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4 أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

5 أرسم على المجال $[0;2]$ المنحنين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (يعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6 أحسب بالسنتيمتر المرّبع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد

بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

7 h الدالة المعرّفة على المجال $[-2;2]$ كمايلي : $h(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}x^2-\mathrm{e}^{|x|}$
وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق
أ) بيّن أنّ h دالة زوجية .
ب) من أجل $x\in[0;2]$ أحسب $h(x)+f(x)$ ثمّ إستنتج كيفية رسم (Γ) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .

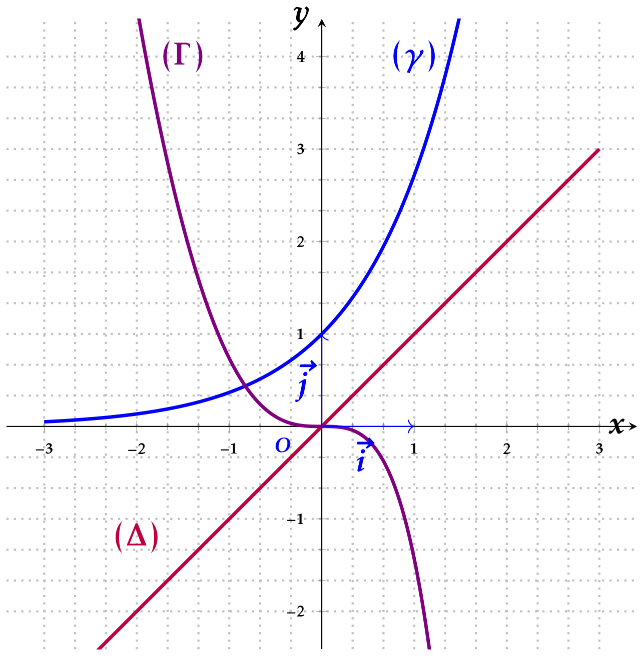
12 باك جوان 2020 م2 (7 ن)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
في الشكل المرفق ، (Γ) المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^2+2x-2x\,\mathrm{e}^x$
(Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\longmapsto \mathrm{e}^x$
بقراءة بيانية:

1 برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $\mathrm{e}^x-x>0$.

2 حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علماأنّ: $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-1+\frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-x}$.
ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.



1 بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ وأحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسر نتيجتي النهايتين هندسيا .

2 أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x)=\frac{2\,\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x-x)^2}$.
ب. إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ. أكتب معادلة لـ (T) المماس المنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0 .

ب. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

ج. إستنتج الوضع النسبي لـ: (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$ ، ماذا تمثل النقطة A بالنسبة إلى (C_f) ؟

4 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$ ، ثم تحقق أنّ : $-0.6<\alpha<-0.5$

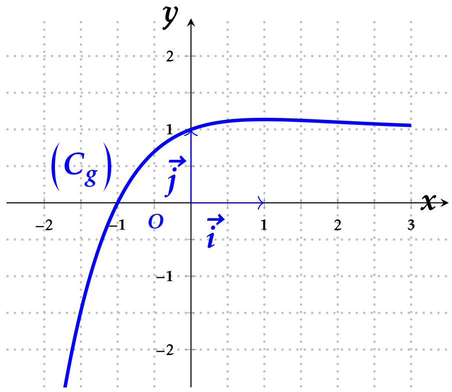
5 أنشئ المماس (T) و المستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f) .

13 باك جوان 2021 م2 (7 ن)

I) الدالة العددية g معرفي على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (الشكل المقابل)

1 أحسب $g(-1)$.

2 بقراءة بيانية، حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.



II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f(x)=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$
ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

ب. إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

ج. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

4 أ. بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاتهما α و β

حيث: $0,3 < \alpha < 0.4$ و $-1.9 < \beta < -1.8$

ب. أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

5 الدالة العددية h معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x) = -|x| + (|x|-1)\,e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ. بين أن الدالة h زوجية .

ب.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2:0]$ ؛ $h(x) = f(x)$

ج. إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه.

1 باك جوان 2008 م2 (7 ن)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 أدرس تغيرات الدالة f .

2 أ) بين أن C_f يقبل نقطة إنعطاف ω وأكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

ب) أثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3 أ) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+3)\right]$.

ب) إستنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما.

4 أ) بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77; -2.76[$.

ب) أحسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم أرسم C_f و مستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = -x + 3 - \dfrac{4}{e^x + 1}$

C_g منحنى دالة g.

1 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(-x)$

ب) إستنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2 أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g).

2 باك جوان 2010 م2 (7 ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = (3-x)e^x - 3$

1 أدرس تغيرات الدالة g.

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والأخر α حيث : $2.82 < \alpha < 2.83$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 بين أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0 = 0$، أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O.

2 أ) بين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن: $f'(x) = \dfrac{x^2 g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

ج) تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha^2 (3 - \alpha)$، ثم عين حصرا له.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

3 أحسب $f(x) + x^3$ و إستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \mapsto -x^3$

بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + x^3\right] = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) و المنحنيين (C) و (C_f).

3 باك جوان 2011 م1 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 أ) أحسب f'، f'' ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $f^n(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ حيث: f'، f''، ...، f^n المشتقات المتتابعة للدالة f.

ب) إستنتج حل المعادلة التفاضلية: $y'' = (3x + 16)e^x$

2 أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكّل جدول تّغيراتها

3 أ) أكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\dfrac{10}{3}$.

ب) بيّن أن ω هي نقطة إنعطاف المنحنى (C_f)

ج) أرسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$.

4 أ) x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، بإستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} t\,e^{t}\,dt$ ، ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ ، $x=\lambda$

ثم جد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$

4 باك جوان 2012 م1 (8 ن)

I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2-x\,e^{x}$.

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ثمّ تحقق أنّ: $0,8<\alpha<0,9$.

3 عيّن، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\frac{2x+2}{e^{x}+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول $2cm$)

1 بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة الهندسية .

2 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى

3 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ)

حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^{x}+2)^{2}}$

ثّم إستنتج إتجاه تغير الدالة f .

ب) بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

6 ناقش ، بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

III) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq \alpha$

2 بإستعمال (Δ) و (C_f) مثّل على محور الفواصل الحدود : U_0 ، U_1 و U_2
ثم خمّن إتجاه تغير (U_n) .

3 برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

5 باك جوان 2013 م2 (8 ن)

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها .

(نأخذ: $g\left(1-\sqrt{2}\right) \approx -0,25$ و $g\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 1,43$)

2 أ) بيّن أنّ المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حليّن في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم و الآخر α ، حيث : $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ ، حسب قيم العدد الحقيقي x .

II) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (وحدة الطول $2cm$)

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج) أدرس وظعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2 أ) بيّن أنّه ، من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. تأخذ : $(f(\alpha) \approx -0,9)$

3 أ) بيّن أنّ المنحى (C_f) يقبل مماسين ، معامل توجيه كل منهما يساوي 1
يطلب تعين معادلة لكل منهما .

ب) مثّل (Δ) و المماسين و المنحنى (C_f) .

ج) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + m\,e^{x} = 0$.

4 الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}$.

أ) بيّن أنّ: H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

ب) أحسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$.

III) (U_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$ (تذكر أنّ العدد α يحقق : $g(\alpha) = 0$)

1 برهن بالتراجع أنّه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$

2 بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة .

3 إستنتج أنّ (U_n) متقاربة ، ثمّ أحسب نهايتها .

6 باك جوان 2014 م1 (6 ن)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^x - 1$

1 أدرس تغيرات الدالة g

2 بيّن أنّ للمعادلة: $g(x) = 0$: حلان α و β

حيث : $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$

3 إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و فسر النتيجتين هندسيا .

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$

و إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بيّن أنّ : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ و إستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4 أحسب $f(1)$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .

5 λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) أحسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث : $a(\lambda) = \int_1^{\lambda} [f(x) - 1]\,dx$

ب) أحسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

7 باك جوان 2015 م1 (7 ن)

f الدالة المرفة بـ: $f(0)=0$ و من أجل كل عدد حقيقي x
من المجال $]-\infty;0[$ ؛ $f(x)=(x-1)\,e^{\frac{1}{x}}$
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 من اليسار.

2 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسر النتيجة هندسيا .

3 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4 أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$.

ب) إستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيّين معادلة له.

5 g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

6 أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ ؛ $f(x)>x$.

ب) إستنتج وظعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أنشئ المنحنى (C_f).

7 (u_n) المتتالية العرّفة بـ: $u_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n<0$.

ب) حدّد إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8 m عدد حقيقي . h_m الدالة ذات المتغيّر الحقيقيي x المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ: $h_m(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}-mx$

أ) أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب) بإستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

8 باك جوان 2016 م2 (7 ن)

I) ϕ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $\phi(x) = \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x+1} - 1$

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة ϕ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة : $\phi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ α يختلف عن 1

ثم تحقّق أنّ: $2,79 < \alpha < 2,80$

3 إستنتج إشارة $\phi(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$f(x) = (2x-1)\,e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2 بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1

ثمّ جد معادلة له .

3 أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f)

4 أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x-1)\phi(x)}{x^2 - x + 1}$

ب) أدرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$

ثمّ إستنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

ج) بإستعمال مكاملة بالتجزئة ، أحسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)dt$

د) أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيّين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذيّن معادلتيهما :

$x = 1$ ، $x = 2$.

(III

1 أحسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$f^n(x) = (-1)^n\left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$$

3 المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n (U_n) كمايلي : $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم K ، المجموع : $u_k + u_{k+1}$.

ب) إستنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

9 باك جوان 2017 م1 (7 ن)

نعتبر الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، إستنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$

ثم إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

2 أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3 h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $h(x) = x^2e^{-x+2}$.

أدرس إتجاه تغيّر الدالة h ثم إستنتج إشارة $h(x)$ ، حدّد عند ئذ و ظعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4 أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

5 نعتبر m وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي x

الموجب : $(E)\cdots f(x) = m(x-2)$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) .

6 g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

إعتمادا على السؤال رقم (1) ، شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

10 باك جوان (الإستثنائية)2017 م2 (7 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حيث : $\left\|\vec{i}\right\| = 1cm$

I) نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 أدرس إتجاه تيغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

3 أثبّت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيّين إحداثييهما ، أحسب $f(-2)$ ، ثم أرسم المنحى (C) .

II) ليكن m وسيط حقيقي ، نعتّبر الدّالة f_m المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f_m(x) = (x^2 + mx + 1) e^{-x}$ وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1 أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها .

2 أدرس إتجاه تغير الدّالة f_m و إستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما .

3 M_n نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث : $x_m = 1 - m$.
أثبت أنّه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن : M_n تنتمي إلى منحن
يطلب تعيين معادلة له .

4 أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث : $m \neq 2$ ، الوظعية النّسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

5 أحسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C) و (C_3) و المستقيمين اللّذين معادلتيهما : $x = 0$ و $x = \alpha$
ثمّ أحسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

11 باك جوان 2018 م2 (7 ن)

I g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = (1 + x + x^2) e^{-\frac{1}{x}} - 1$

1 بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{(x+1)(2x^3+1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$
و إستنتج إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,9 < \alpha < 1$
و إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1}{x} + (1+x) e^{-\frac{1}{x}}$.
و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

المحور1 المحور2 المحور3 المحور4 المحور5 المحور6

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ؛ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

و إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

2 بيّن أنّ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$ (يمكن وضع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثم إستنتج أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3 h الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و أدرس إتجاه تغير الدالة h و إستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب) تحقّق أن ؛ $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم إستنتج الوظعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4 أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha)\approx 1,73$) .

5 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n

حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ) أكتب u_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول u_1 .

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(0)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right)$$

1 باك جوان 2019 م2 (7 ن) الحل موجود في الصفحة 67

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2\,e^{-kx}$

حيث K وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_K في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 بيّن أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما .

2 أحسب نهايتي الدالة f_K عند $-\infty$ و $+\infty$

(ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K) .

3 أ) أحسب $f_k'(x)$ ، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي K إتجاه تغير الدالة f_k .

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل K عدد حقيقي موجب تماما .

4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي K الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

المحور1 المحور2 المحور3 المحور4 المحور5 المحور6

II f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x+1)^2\,\mathrm{e}^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 شكل جدول تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2 أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $\left|\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}\right|=\left|\frac{m+1}{\mathrm{e}^m}\right|$ حلا وحيدا .

3 g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)+(x+1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)+2g(x)-\mathrm{e}^{-2x}=0$

ثم إستنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.

ب) بإستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل

و المستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$

12 باك سبتمبر 2020 م1 (7 ن)

I) الدالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كمايلي: $g(x)=-2\,\mathrm{e}^x$ و $h(x)=x(\mathrm{e}^x+1)$.

حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=(x-3)\,\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أ .بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$

ب. إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2 أحسب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3 بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$

ثم تحقق أنّ: $-1.5<\alpha<-1.4$.

4 (p) هو التمثيل البياني للدالة: $x\to\frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$.

أ.أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا .

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنين (p) و (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

5 ليكن m وسيطا حقيقيا ، ناقش بيانيا و حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $|f(x)| = e^{m}$ في $]-\infty;0]$.

1 باك جوان 2009 م1 (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$.

1. أحسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x
ثم إستنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم إستنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

3. أ) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$.
ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$، إستنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $(-\infty)$.

4. بين أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α بحيث $-1,7<\alpha<-1,6$

5. أرسم (C_f) من أجل $x\in\mathbb{R}$

6. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

7. أ) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)
و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x+2$ و $x=0$ و $x=\alpha$
ب) بين أن $A(\alpha)=ln(-\alpha)$ ثم إستنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$.

2 باك جوان 2010 م1 (7 ن)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3xe^x-3x-4}{3(e^x-1)}$

ليكن (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. عين العددين الحقيقيين a وb بحيث: $f(x)=ax+\dfrac{b}{3(e^x-1)}$
من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$

2 احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجالات تعريفها.

3 بيّن أن f متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4 أ) (D) و(D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$
بين أن (D) و(D') مقاربان لـ $\left(C_f\right)$ ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 وx_1
حيث: $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,66 < x_1 < -1,65$

ج) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(-x) + f(x)$
ثم فسّر النتيجة هندسيا.

د) أرسم (D) و(D') و $\left(C_f\right)$.

ه) m عدد حقيقي، (D_m) المستقيم المعرّف بالمعادلة $y = x + m$
ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

5 نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = [f(x)]^2$
ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x.

3 باك جوان 2011 م2 (5،7 ن)

I) الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^x + 1}$
$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 أدرس تغيرات الدالة f .

2 عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $\left(C_f\right)$.

3 بيّن أن للمنحنى $\left(C_f\right)$ نقطة إنعطاف ω يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة لمماس $\left(C_f\right)$ عندها .

4 لتكن g الدالة العددية المعرّفة على كما يلي : $g(x) = f(x) - x$.
أ) أدرس تغيرات الدالة g .
ب) بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$.

5 أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$.
ب) أرسم المماس و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ و المنحنى $\left(C_f\right)$.

II) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة كما يلي : $u_0 = 1$
و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 باستخدام (C_f) و المستقيم (Δ) مثّل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

2 بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n < \alpha$.

3 بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4 استنتج أن (u_n) متقاربة و بيّن أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

4 باك جوان 2012 م2 (7 ن)

I) g هي الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -4 + (4-2x)e^x$.

1 أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّين أحدهما معدوم و الآخر α
حيث : $1,59 < \alpha < 1,60$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x-2}{e^x - 2x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $2cm$)

1 بيّن أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما
على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$.

أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 2x)}$

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) أحسب $f(1)$ ، ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

2 أ) بينّ أنّ $f(\alpha) = -1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ ، حيث α هو العدد المعرّف
في السؤال 2 من الجزء I) .

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدوّر النتائج إلى 10^{-2})

جـ - أرسم (C_f) .

3 ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول
المعادلة : $2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1)$

4 h هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب) ـ شكّل جدول تغيرات الدالة h .

5 باك جوان 2013 م2 (7،5 ن)

I) الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x$.

1 أدرس تغيرات الدالة g.

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II) f هي الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 أ) بيّن أن f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$

: $f'(x) = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

III) n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، f_n الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$

بـ : $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln x$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 أدرس إتجاه تغير الدالة f_n على المجال $]0;+\infty[$.

2 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3 أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

4 بيّن أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها .

5 أ) بيّن أنه ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3;0,4[$ بحيث : $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن : $f_n(\alpha_1) < 0$

ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6 أ) بالإعتماد على الجزء II ، بيّن أنه ، من أجل كل x من $]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x} \leq e-1$.

ب) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .

6 باك جوان 2014 م2 (6 ن)

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)\,e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3 أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ثم تحقق أن: $1,27 < \alpha < 1,28$

ب) معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

و حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ج) أرسم (T) و (C_f)

4 عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $(x-1)\,e^x - (m-1)\,e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

5 h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|X|+1)\,e^{-|X|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بيّن أن h دالة زوجية

ب) أرسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

6 g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)\,e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان

عيّن a ، b حتى يكون : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = f'(x)$

7 باك جوان 2015 م2 (7 ن)

g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)\,e^x - 2$.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f'(x) = -g(x)$.

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3 أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α وβ

حيث : $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

ب) أنشئ المستقيم(Δ)والمنحنى(C_f)على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

4 أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و$x = \alpha$

ج) جد حصرا للعدد A .

8 باك جوان 2017(الإستثنائية) م2 (7 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = 1 - 2x\,\mathrm{e}^{-x}$

-أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = (x+1)(1+2\,\mathrm{e}^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. حيث $\left\|\vec{j}\right\| = 1cm$

1 أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2 أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x-x] = 1$ ثم إستنتج معادلة لـ (Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f)

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعين معادلة له .

4 بإستعمال المنحنى (C_f) ، عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين .

5 ليكن α عددا حقيقيا موجبا ، نرمز بـ $\mathbb{A}(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب : $y = x + 1$

$x = \alpha$ ، $x = -1$

- أحسب $\mathbb{A}(\alpha)$ بدلالة α ، ثم $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathbb{A}(\alpha)$

9 باك جوان 2018 م1 (7 ن)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $f(x) = \dfrac{x}{x-1}e^{-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا و أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2 بيّن أنّه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f'(x) = \dfrac{(-x^2 + x - 1)e^{-x}}{(x-1)^2}$

و أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

ب) h دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم إستنتج أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $h(x) \geq 0$

4 بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$: $f(x) + x = \dfrac{xh(x)}{x-1}$

ثم إستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T). فسر النتيجة بيانيا

5 أكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O و النقطة $A\left(-2;\dfrac{2}{3}e^2\right)$

ثم أرسم المستقيمين (T) و (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $[-2;1[$

6 أ) بيّن أنه من أجل كل x من $[-1;0]$: $\dfrac{x}{x-1} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

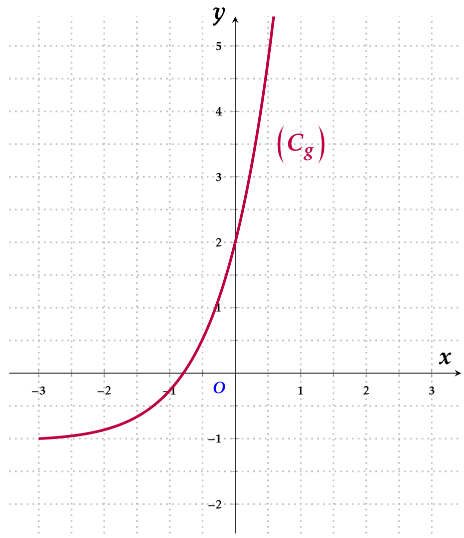
ب) تحقق أنه من أجل كل x من $[-1;0]$: $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

ثم بين أن : $1 - \ln(2) \leq \int_{-1}^{0} f(x)dx < e - 1$

7 m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$ ، $x \in [-2;1[$

1 باك جوان 2019 م2 (7 ن) الحل موجود في الصفحة 65

I) g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = (x+3)e^x - 1$
و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية:

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g(-\frac{1}{2})$.

ب) إستنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقّق أنّ : $-0.8 < \alpha < -0.7$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 بيّن أنّه من كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$
ثم كّل جدول تغيرات الدالة f.

3 أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x)$ ثم إستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

ج) أكتب معادلة لـ: (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ).

4 أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

5 أحسب $f(x)-g(x)$ ثم إستنتج دالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=|x|(e^{|x|-2}-1)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ: $h(x)=f(x-2)+1$.

ج) إشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

10 باك سبتمبر 2020 م2 (7 ن)

الدالة العددية f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول $2cm$)

1 أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$.

ب. أدرس إشارة $f'(x)$ و إستنتج إتجاه تغير الدالة f

2 أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x-\frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3 بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

4 بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها.

5 أرسم (Δ) ، (T) و المنحنى البياني (C_f) .

6 ليكن m وسيطا حقيقيا .عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x)=x+m$ حلين مختلفين .

11 باك جوان 2021 م1 (7 ن)

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$

1 بين أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2 أ. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,71<\alpha<1,72$

ب. إستنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1+\left(-x^2-2x+3\right)e^{1-x}$.
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)e^{1-x}$

ب. إستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[0;\alpha]$

ج. بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

2 بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3 بين ان (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يطلب تعيين فاصلتها (لايطلب كتابة معادلة (T))

4 أ. بين أن (C) يقبل نقطة إنعطاف وحيدة فاصلتها $\left(1+\sqrt{6}\right)$

ب. أرسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ : $f(\alpha)\approx 1,1$ ، $f(\sqrt{5})\approx 1,4$ و $f\left(1+\sqrt{6}\right)\approx 3,1$)

5 الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x)=-x+1+\left(-x^2+2x+3\right)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$ $h(x)=f(-x)$

ب. إشرح كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C) ثم أرسمه .

1 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 70

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على بـ : $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$.

1 (ا) عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة وشكل جدول تغيراتها .

2 أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+3-xe^{2x}$.
نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 عيّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له .

3 أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=g(x)$.

5 إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

6 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

7 بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث $-3.5<\alpha<-3$ و $0.5<\beta<1$.

8 أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

9 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

III) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

1 بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2 أحسب $h'(x)$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة h وشكّل جدول تغيراتها .

2 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 73

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2x+1)e^{x}-1$

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2 أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3 أحسب $g(0)$ وحدد إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $f(x)=x.(1-e^x)^2$. (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2 بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب لـ (C_f).

3 أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

4 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;1]$ لدينا : $f'(x)=(e^x-1).g(x)$.

5 استنتج اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

6 أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثياها.

7 أكتب معادلة (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

8 أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

III) h الدالة المعرفة على $[-1;1]$ بـ : $h(x)=x.\left(1-e^{|x|}\right)^2$.

1 أدرس قابلية اشتقاق الدالة h عند 0 . ماذا تستنتج؟

2 بين أن h دالة فردية. ثم استنتج طريقة لرسم منحناها دون دراسة تغيراتها.

3 أنشئ (C_h) منحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.

3 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 76

I) الشكل المقابل هو (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\left(1+ax^2\right)e^{bx}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (Δ) المماس لـ (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

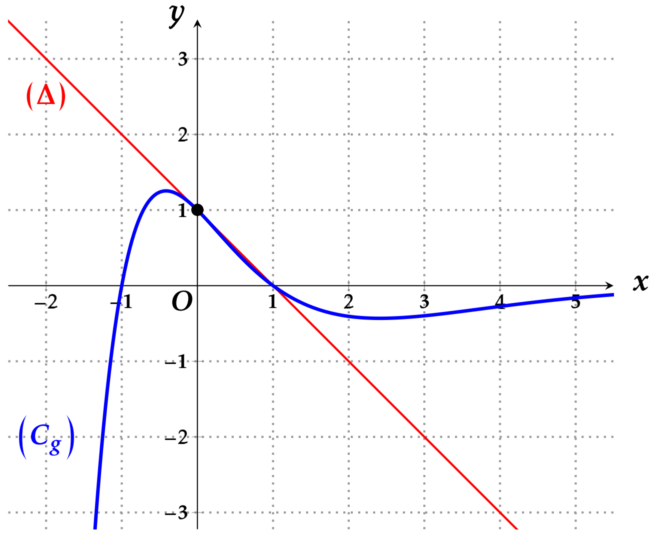
بقراءة بيانية:

1 أحسب $g(-1)$، $g(0)$ و $g'(0)$.

2 أكتب معادلة لـ (Δ).

3 عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

4 بالاستعانة بالمعطيات السابقة تحقق أن: $g(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$.



II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم أثبت أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

2 بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3 عيّن دون حساب $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4 استنتج معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5 بين أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدًا α على $]-\infty;-1]$ ثم تحقق أن $\alpha \in [-2;-1]$.

6 بيّن أن α يحقق العلاقة : $\alpha = -1-\sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$.

7 أنشئ (T) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.

8 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = \ln(m)$.

III) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f\left(x^2\right)-1$.

• بإستعمال مشتقة دالة مركبة ، عين إتجاه تغير الدالة

4 نص التمرين   الحل   موجود في الصفحة 79

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2-2e^{-x}-x$.

1 أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

2 عيّن اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين ان المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدًا α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$.

4 أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{-e^x+1}{x^2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 عيّن نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم عند 0 وفسّر النتيجة بيانيا.

2 بيّن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(-2+\alpha)}$.

5 أحسب $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) (نأخذ: $(f(\alpha)\approx-1.5)$

6 ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^2e^m-m^2e^x=x^2-m^2$.

III) لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\dfrac{|-e^{-x}+1|}{x^2}$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني .

1 بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $h(x)=f(-x)$

2 إستنتج كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئ (C_h)

5 نص التمرين الحل موجود في الصفحة 83

m عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_m(x)=x-1+xe^{mx}$
نرمز بـ (C_{f_m}) للمنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
I) نعتبر الدالة g_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_m(x)=1+(1+mx)e^{mx}$

1 أحسب الدالة المشتقة g'_m للدالة g_m ، ثم أدرس إشارتها

2 شكل جدول تغيرات الدالة الدالة g_m ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g_m(x)>0$

II 1 أ) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيّين إحداثيتها .

ب) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$

ج) بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_{f_m}) بجوار $-\infty$

د) أدرس الوضع النسبي لـ (D) و (C_{f_m})

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f_m، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ) عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_{f_m}) عند النقطة التي ترتيبتها -1

ب) بيّن أنّ النقطة $A_m\left(-\dfrac{2}{m};-\dfrac{2}{m}(1+e^{-2})-1\right)$. نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_m}).

4 بيّن أن المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0<\alpha_m<1$

5 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x)+f_{-m}(-x)=-2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\left(C_{f_m}\right)$ و $\left(C_{f_{-m}}\right)$
حيث $\left(C_{f_{-m}}\right)$ منحنى ممثل للدالة المعرفة بـ: $f_{-m}(-x)$

ب) أنشئ كلا من (Δ)، (D) و $\left(C_{f_1}\right)$. ثم أنشئ $\left(C_{f_{-1}}\right)$ إنطلاقا من $\left(C_{f_1}\right)$ (نقبل أن $\alpha_1\approx 0,4$ ، $f_1(2)\approx$ 16)

III) نعتبر الدالة F المعرفة على R بـ $F(x)=f_1\left(x^2\right)$.

(C_F) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق

1 إستنتج إتجاه تغير الدالة F (دون حساب الدالة المشتقة للدالة F)

2 أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_{f_1}\right)$ و (C_F) من أجل $x\in[0;+\infty[$ ثم أنشئ (C_F) على $\mathbb{R}$

3 ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة: $e^{F(x)}=m$

1

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.
(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثمّ بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2 أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون: $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، و أنّ المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

3 حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاربين .

4 أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

5 أنشئ المنحني (C) و المستقيمات المقاربة .

6 ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$

2

نعتبر الدالتان f_0 وَ f_1 المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ وَ $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$. و ليكن (C_0) وَ (C_1) منحناهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I)

1 أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C_0) .

2 بيّن أنّ النقطة $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

3 أدرس تغيّرات الدالة f_0 .

4 عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C_0) عند النقطة K .

5 أ) بيّن أنّه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة : $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ وَ $g''(x)$ ، ثمّ عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، وذلك حسب قيم x .

ج) إستنتج وضعية المنحني (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .

د) أنشئ المماس (T) وَ المنحني (C_0) .

(II

1 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ وَ $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = \dfrac{1}{2}$

2 شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1 ، ثمّ أنشئ المنحني (C_1) في نفس المعلم السابق

3

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$.

1 أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.

2 أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، وشكّل جدول تغيراتها .

3 أحسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

(II

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$.
(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وَعند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسياً .

2 أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدالة الدالة f وَشكّل جدول تغيّراتها .

3 أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

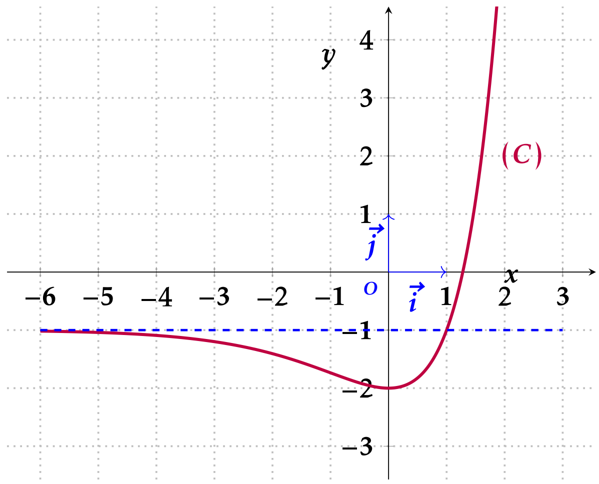
ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

4 انشئ المماس (T)، و المستقيمات المقاربة ، و المنحني (C) .

5 m وسيط حقيقي ، ناقش بيانياً و حسب قيم m حلول المعادلة : $f(x) = mx$.

4

I) في الشكل المقابل : (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x + c$



1 بقراءة بيانية :

أ) عيّن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثمّ استنتج قيمة c .

ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عيّن كلاً من : $g(0)$ و $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a و b .

2 نفرض فيما يلي : $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - 1$.

أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α محصور بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة. على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$
و ليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2 بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3 أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

4 بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثمّ استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$.

5 أنشئ المنحني (C_f) .

6 ناقش بيانياً و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$.

5

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$

كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} & ;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I)

1 برهن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني (C) .

2 أ) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)}{x}$ ، و ذلك من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، و بالنسبة للمنحني (C) ؟ .

3 بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4 أدرس تغيّرات الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

II)

نعتبر g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1 بيّن أنّه في المجال $]0;+\infty[$ المعادلتان : $g(x)=0$ و $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان .

2 برهن أنّ المعادلة $x^3+x^2+2x-1=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $0,39<\alpha<0,40$.

3 نفرض (T_a) هو المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة a حيث : $a>0$.

أ) بيّن أنّ المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقط إذا كان : $f(a)-xf'(a)=0$.

ب) إستنتج أنّ المماس (T_a) المـــار بالمبدأ يمسّ المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

ج) أنشئ المماس (T_a) ، و المنحني (C) .

4 بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

تعطى النتيـــــجة : $f'(\alpha)\approx 2,029$.

6

I)

n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$
بـ : $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.
(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد
و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدته $1cm$.

1 أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f'_n(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2 بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3 أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

I) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة
بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1 أكتب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2 أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3 أ) بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و $0\le x\le 1$
لدينا : $\dfrac{1}{(1+x)^n} \le f_n(x) \le \dfrac{e^{-1}}{(1+x)^n}$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
لدينا : $\dfrac{1}{n-1}\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right] \le I_n \le \dfrac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]$.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4 أ) إعتمادا على السؤال (1/II)
بيّن أنّ : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \dfrac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

7

I) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$
بـ : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

1 أ ( ) احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة g

جـ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\ln 4 \leq \alpha < \ln 6$

د)استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
$u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n})$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < \alpha$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n
$u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ ثم
استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$
بـ : $f(x) = \dfrac{1-e^{x}}{x^2}$
وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ فسر النتيجة بيانيا .

ب) تحقق أن : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{e^{x}g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3 أنشئ (C_f) (نأخذ $\alpha = 1,5$) .

III) F الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $F(0) = -\ln 2$ و من أجل
$x > 0$ ، $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1-e^{t}}{t^2}dt$.

1 باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل $x > 0$ ،
$F(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2x} - \dfrac{e^{x}-1}{x} - \int_x^{2x} \dfrac{e^{t}}{t}dt$.

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$
$e^{x}\ln 2 \leq \int_x^{2x} \dfrac{e^{t}}{t}dt \leq e^{2x}\ln 2$.

3 احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$ ثم استنتج أن الدالة F مستمرة عند القيمة 0 من اليمين .

8 I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (3-2x)e^x + 2$.

1 ادرس تغيرات الدالة g .

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.68 < \alpha < 1.69$.

3 استنتج اشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$
وليكن $(\mathcal{C})$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب الي معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ ،(الوحدة : $2cm$).

1 اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2 بيّن أن $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ، ثم اعط حصر للعدد $f(\alpha)$.

3 ادرس تغيرات الدالة f .

4 اثبت ان المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نرمز له بالرمز . (Δ)

- ادرس الوضعية النسبية للمنحني $(\mathcal{C})$ و المستقيم (Δ) .

5 اكتب معادلة المماس $(\mathcal{D})$ للمنحني $(\mathcal{C})$ في النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

- انشئ المستقيمان $(\mathcal{D})$ و (Δ) والمنحني $(\mathcal{C})$.

6 لتكن h الدالة المعرفة على $f(]-\infty, \alpha])$ بـ : $(hof)(x) = x$

أ) بإستعمال نظرية اتجاه تغيّر دالة مركبة ادرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

بـ) احسب $h'(1)$ العدد المشتق للدالة h في النقطة ذات الفاصلة 1 .

جـ) اكتب معادلة المماس للمنحني $(\mathcal{H})$ الممثل للدالة h في النقطة ذات الفاصلة 1 .

د) انشئ المنحني $(\mathcal{H})$ الممثل للدالة h في المعلم السابق .

7 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $me^x - 4x + m + 2 = 0$

بكالوريا الجزائر 2006 بالتصرف حسب المنهاج الحالي

9

1 g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 10 - 8x + e^{x}$.

أ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 18 - 24\ln 2$.

2 f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{2x}{e^{x}+1}$.

$(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$.

(ا) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{9 + e^{x}g(x)}{4(e^{x}+1)^{2}}$

جـ) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

(ب) أ) أثبت أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين احدهما (Δ) معادلته $y = \frac{1}{4}x$ عند $+\infty$ و الآخر (Δ') معادلته $y = \frac{9}{4}x$ عند $-\infty$.

ب) ادرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة الى (Δ) .

(ج) h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 + e^{x} - xe^{x}$.

أ) ادرس تغيّرات الدالة h ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

ب) بيّن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$ ثم تحقق أن $1.2 < \alpha < 1.3$.

جـ) استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيّم x .

(د) أ) بيّن أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) في النقطة التي فاصلتها α .

ب) بيّن أن : $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ و أن : $f(\alpha) = \frac{9}{4}\alpha - 2$.

جـ) اكتب معادلة للمماس (T) .

(هـ) أ) مثّل (Δ) ، (Δ') ، (T) و $(\mathcal{C})$.

(نأخذ : $f(\alpha) \approx 0.9$ ونقبل أن (Δ') يقع تحت $(\mathcal{C})$ في المجال $]-\infty, 0]$ ويقع فوق $(\mathcal{C})$ في المجال $[0;+\infty[$)

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{4}x + m$

(و) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، نعتبر النقطة K من محور الفواصل فاصلتها x . المستقيم الموازي لمحور التراتيب و الذي يشمل النقطة K يقطع المنحني $(\mathcal{C})$ في المقطة M والمستقيم (Δ) في النقطة N ، نضع : $\varphi(x) = MN$

أ) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\varphi(x) = \frac{2x}{e^{x}+1}$.

ب) عيّن فاصلة النقطة M حتي تكون المسافة MN عظمى .

10

1 g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا وحيدا α

حيث $0,94 < \alpha < 0,941$.

ج) إستنتج حسب قم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

2 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$.

$(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ ،(الوحدة : $2cm$).

(ا) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = e^{-x}g(x)$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f .

(ب) بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(ج) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2x-5$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(د) أنشئ $(\mathcal{C})$.

(هـ) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = |2x-5|(1-e^{-x})$.

- اشرح كيفية لرسم المنحنى الممثّل للدالة h انطلاقا من المنحنى $(\mathcal{C})$

ثم انشئه .

3 من أجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي 3 ، نعتبر النقط A_n ، B_n و C_n ذات الفاصلة n التي تنتمي على الترتيب، إلى محور الفواصل، المستقيم (Δ) ، والمنحنى $(\mathcal{C})$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

أ) بين أنه من أجل كل n حيث $n \geq 3$: $u_n = \dfrac{2n-5-f(n)}{2n-5}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^{-1} ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to 0} u_n$.

11

m عدد حقيقي موجب تماما، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $f_m(x) = x - 1 + x\,e^{mx}$

نرمز بـ $\left(C_{f_m}\right)$ للمنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

I) نعتبر الدالة g_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_m(x) = 1 + (1+mx)\,e^{mx}$

1 أحسب الدالة المشتقة g'_m للدالة g_m ، ثم أدرس إشارتها

2 شكل جدول تغيرات الدالة الدالة g_m ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g_m(x) > 0$

II) **1** أ. بيّن أنّ جميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها .

ب. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$

ج. بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ بجوار $-\infty$

د. أدرس الوضع النسبي لـ (D) و $\left(C_{f_m}\right)$

2 أدرس إتجاه تغير الدالة f_m ،ثم شكل جدول تغيراتها .

3 أ. عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ عند النقطة التي ترتيبتها -1

ب. بيّن أنّ النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m};-\frac{2}{m}(1+e^{-2})-1\right)$. نقطة إنعطاف للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$.

4 بيّن أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

5 أ. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\left(C_{f_m}\right)$ و $\left(C_{f_{-m}}\right)$

حيث $\left(C_{f_{-m}}\right)$ منحنى ممثل للدالة المعرفة بـ: $f_{-m}(-x)$

ب. أنشئ كلا من (Δ)، (D) و $\left(C_{f_1}\right)$. ثم أنشئ $\left(C_{f_{-1}}\right)$ إنطلاقا من $\left(C_{f_1}\right)$ (نقبل أن $\alpha_1 \approx 0,4$ ، $f_1(2) \approx 16$)

III) نعتبر الدالة F المعرفة على R بـ $F(x) = f_1(x^2)$.

(C_F) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق

1 إستنتج إتجاه تغير الدالة F (دون حساب الدالة المشتقة للدالة F)

2 أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_{f_1}\right)$ و (C_F) من أجل $x \in [0;+\infty[$ ثم أنشئ (C_F) على $\mathbb{R}$

3 ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

حلول بعض التمارين

حل التمرين رقم 1 :

1 أ) الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\boxed{g'(x) = e^x - e}$.

$g'(x) = 0$ معناه $x = 1$ ، $g(x) > 0$ معناه $x > 1$ ، $g'(x) < 0$ معناه $x < 1$ ومنه g متزايدة تماما على المجال $]1, +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$.

ب) بما أن g متزايدة تماما على المجال $]1, +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ فإن $g(1)$ قيمة حدية صغرى إذن $g(x) \geq g(1)$ لكن $g(1) = 0$ ومنه $\boxed{g(x) \geq 0}$ من أجل كل عدد حقيقي x.

2 f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = e^x - ex$ أي $f'(x) = g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ومنه $f'(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x فهي متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

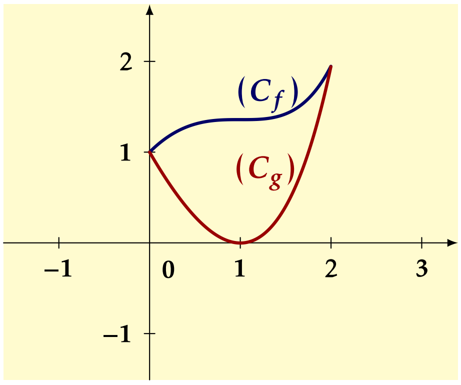
4 لدينا $f(x) - g(x) = e(-\frac{1}{2}x^2 + x)$.

إشارة $f(x) - g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه (C_f) فوق (C_g) في المجال $]0, 2[$ وتحته في المجالين $]-\infty, 0[$ و $]2, +\infty[$ ويتقاطعان في النقطتين $A(0,1)$ و $B(2, e^2 - 2e)$.

5 الرسم :



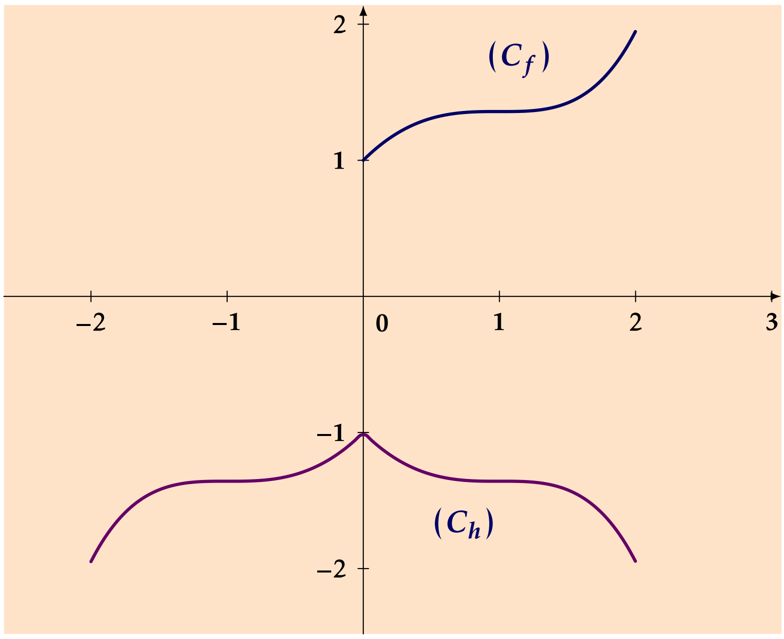
6 مساحة الحيز المحدد بين (C_f) و (C_g) هي $\mathscr{A}=\int_0^2[f(x)-g(x)]dx$ أي $\mathscr{A}=\int_0^2 -\frac{1}{2}\mathrm{e}.x^2+\mathrm{e}.x$

ومنه $\mathscr{A}=\left[-\frac{1}{6}\mathrm{e}.x^3+\frac{1}{2}\mathrm{e}.x^2\right]_0^2$ ومنه $\mathscr{A}=2e-\frac{4}{3}\mathrm{e}$ ua أي $\mathscr{A}=8e-\frac{16}{3}\mathrm{e}$ أي $\mathscr{A}=\frac{8\,\mathrm{e}}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

7 ا) من أجل كل x من المجال $[-2,2]$ لدينا $-x$ عنصر من المجال $[-2,2]$ و $h(-x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}.x^2-\mathrm{e}^{|-x|}$ ، لكن $|-x|=|x|$ ومنه $h(-x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}.x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ أي $h(-x)=h(x)$ مما يدل على أن الدالة h زوجية .

ب) من أجل $x\in[0,2]$ $h(x)+f(x)=0$ أي $h(x)=-f(x)$ على المجال $[0,2]$ ، إذن (Γ) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل عندما يكون $x\in[0,2]$ ، ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب نتحصل على الجزء الباقي من (Γ) على المجال $[-2,0]$.

– الرسم :



حل التمرين رقم 1 :

I) لدينا : $g(x)=(x+1)(x+\mathrm{e})-\mathrm{e}(x\ln x)$ حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}[(x+1)(x+\mathrm{e})-\mathrm{e}(x\ln x)]=\mathrm{e}$

لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}x\ln x=0$.

بما أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\mathrm{e}$ فإن الدالة g موجبة على $]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{\mathrm{e}\ln x}{x+1}$.

1 أ) ✍ حساب النهاية: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\ln(x+1)+\dfrac{\mathrm{e}\ln x}{x+1}\right]=-\infty$

✍ إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}\ln x}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) ✍ إثبات المشتقة: $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{\frac{\mathrm{e}}{x}(x+1)-\mathrm{e}\ln x}{(x+1)^2}$ أي أن $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{\mathrm{e}(x+1)-\mathrm{e}x\ln x}{x(x+1)^2}$

ومنه $\dfrac{x(x+1)+\mathrm{e}(x+1)-\mathrm{e}x\ln x}{x(x+1)^2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{(x+\mathrm{e})(x+1)-\mathrm{e}x\ln x}{x(x+1)^2}=\dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

جـ) إشارة المشتقة موجبة على $]0;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

✍ جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2 ✍ معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 $f(1)=\ln 2$ و $f'(x)=\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$

ومنه $(T): y=\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)x-\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)+\ln 2$.

3 أ) بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α.

ب) لدينا $f(0.7)=-0.04$ و $f(0.8)=0.25$ ومنه $0.7<\alpha<0.8$.

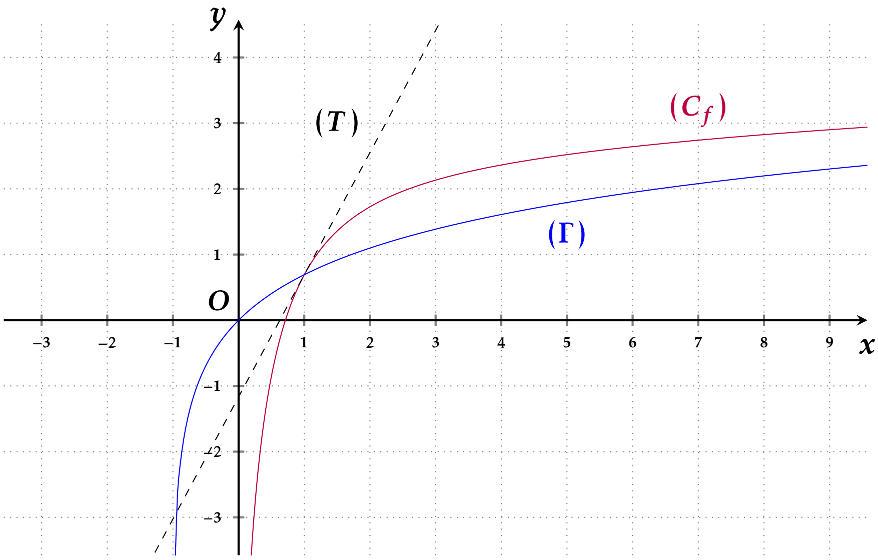
4 أ) ✍ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]$: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}\ln x}{x+1}=0$

التفسير الهندسي للنتيجة هو أن المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب) ✍ دراسة الوضعية بين (C_f) و (Γ): لدينا $f(x)-\ln(x+1)=\dfrac{\mathrm{e}\cdot\ln x}{x+1}$ إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;f(1))$	(C_f) فوق (Δ)	

جـ) رسم المنحنيين (C_f) و (Γ) والمستقيم (T):



5 نلاحظ من البيان أن المستقيم ذو المعادلة $y=\dfrac{1+e}{2}x-m$ يكون قاطع للمنحنى (C_f) في نقطتين متمايزتين لما $-m<-\dfrac{1+e}{2}+\ln 2$ أي $m>\dfrac{1+e}{2}-\ln 2$ ومنه يكون للمعادلة $f(x)=\dfrac{1+e}{2}x-m$ حلين متمايزين.

6 نقبل على المجال $]1;+\infty[$ أن $\ln x<x+1$.

أ) إثبات أن $\ln 2<f(x)<e+\ln(x+1)$: ليكن $x\in]1;+\infty[$

ومنه $\dfrac{\ln x}{x+1}<1$ يعني أن $\dfrac{e\cdot\ln x}{x+1}<e$ ومنه $\ln(x+1)+\dfrac{e\cdot\ln x}{x+1}<e+\ln(x+1)$ أي أن $f(x)<e+\ln(x+1)\cdots(1)$.

الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$f(1)<f(x)$ أي أن $f(1)<f(x)\cdots(2)$

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2<f(x)<e+\ln(x+1)$.

ب) التحقق بالإشتقاق: $[(x+1)\ln(x+1)-x]'=\ln(x+1)+(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)$

ومنه الدالة $x\mapsto[(x+1)\ln(x+1)-x]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$.

جـ) مساحة الحيز هي S :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2<f(x)<e+\ln(x+1)$ ومنه

$$\int_{e-2}^{e^2-1}\ln 2\,dx<\int_{e-2}^{e^2-1}f(x)dx<\int_{e-2}^{e^2-1}[e+\ln(x+1)]dx$$

أي أن $(e^2-e)<S<e(e^2-e)+[(x+1)\ln](x+1)-x]_{e-2}^{e^2-1}$

أي أن $(e^2-e)<S<e^3$.

حل التمرين رقم 1 :

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث K وسيط حقيقي.

1 إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين :

لدينا : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ أي $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}$ و بما أن النقطة ثابتة مهما تغيّر

الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k.

أي : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$ أي : $(x+1)^2 e^{-(k+1)x}-(x+1)^2 e^{-kx}=0$

ومنه : $e^{-kx}(x+1)^2(e^{-x}-1)=0$ وعليه $\begin{cases}(x+1)^2=0\\(e^{-x}-1)=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-1\\e^{-x}=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x=-1\\x=1\end{cases}$

إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما : $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

2 حساب النهايات :

- لما $k>0$ يكون : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-kx}=+\infty$

- لما k معدوم : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

لما $k<0$ يكون : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-kx}=0$ بالتزايد المقارن.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-kx}=+\infty$

3 ا) حساب المشتقة : $f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2 e^{-kx}$ أي أن $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$.

المناقشة :

- لما k معدوم: $f_0'(x)=2(x+1)$ موجبة على المجال $]-1;+\infty[$ ومنه الدالة f_0 متزايدة تماما على هذا المجال ، وسالبة على $]-\infty;-1]$ ومنه الدالة f_0 متناقصة تماما على هذا المجال.

- لما k حقيقي موجب تماما؛ فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ أو $x=\dfrac{-k+2}{k}$ و $\dfrac{-k+2}{k}\geq-1$.

و $f_k'(x)\geq 0$ يكافئ x ينتمي للمجال $\left[-1;\dfrac{-k+2}{k}\right]$ ومنه f_k متزايدة على هذا المجال.

و $f_k'(x)\leq 0$ يكافئ x ينتمي إلى إحدى المجالين $]-\infty;-1]$ أو $\left[\dfrac{-k+2}{k};+\infty\right[$ ومنه f_k متناقصة على هذين المجالين.

- لما k حقيقي سالب تماما؛ فإن $f_k'(x)=0$ يكافئ $x=-1$ أو $x=\dfrac{-k+2}{k}$ و $\dfrac{-k+2}{k}\leq-1$.

و $f_k'(x)\geq 0$ يكافئ x ينتمي إلى إحدى المجالين $\left]-\infty;\dfrac{-k+2}{k}\right]$ أو $[-1;+\infty[$ ومنه f_k متزايدة على هذين المجالين.

و $f_k'(x)\leq 0$ يكافئ x ينتمي إلى المجال $\left[\dfrac{-k+2}{k};-1\right]$ ومنه f_k متناقصة على هذا المجال.

ب) لما k حقيقي موجب تماما: جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		$\frac{-k+2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_k(-1)$	$\nearrow$	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	$\searrow$	0

4 دراسة الوضع النسبي بين (C_k) و (C_{k+1}) :

ندرس إشارة الفرق نجد : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2 e^{-kx}\left[\dfrac{1-e^x}{e^x}\right]$

نلاحظ أن إشارة الفرق من إشارة : $1 - \mathrm{e}^{x}$.

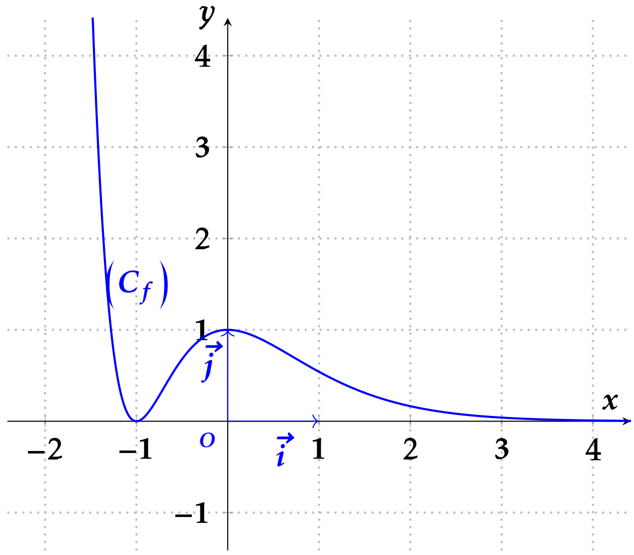
- الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أن المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B (س1).
- الفرق يكون موجب على $]-\infty;0]$ أي أن المنحنى (C_{k+1}) يقع فوق المنحنى (C_k).
- الفرق يكون سالب على $[0;+\infty[$ أي أن المنحنى (C_{k+1}) يقع تحت المنحنى (C_k).

II) لدينا $f(x) = (x+1)^2 \mathrm{e}^{-2x}$.

1 تشكيل جدول تغيرات الدالة f: على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{\mathrm{e}^3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

إنشاء المنحنى (C_f) :



2 أ) بيان أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x) = 1$ تعني $f(x) - 1 = 0$ ، لنضع $h(x) = f(x) - 1$

الدالة h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$ و $h(-1.28) = 0.01$ ، $h(-1.27) = -0.08$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدًا α حيث: $-1.28 <$ $\alpha < -1.27$.

و من جهة أخرى لدينا: $g(0) = f(0) - 1$ أي ؛ $h(0) = 1 - 1 = 0$ أي أن الحل الآخر معدوم.

ب) تعيين قيم m : لدينا: $\left|\frac{m+1}{\mathrm{e}^m}\right| = \left|\frac{x+1}{\mathrm{e}^x}\right|$ أي ؛ $\frac{|m+1|}{\mathrm{e}^m} = \frac{|x+1|}{\mathrm{e}^x}$ أي؛ $|x+1|\mathrm{e}^{-x} = |m+$ $1|\mathrm{e}^{-m}$ أي تصبح ؛ $(m+1)^2 \mathrm{e}^{-2m} = (x+1)^2 \mathrm{e}^{-2x}$ ، إذن $f(x) = f(m)$ حلول هذه الأخيرة

هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$ و عليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلا وحيدا و من خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m \in]-\infty;\alpha[$.

3 ا) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : يكون $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x} = e^{-2x} -2(x+1)e^{-2x} +2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x}$ ومنه $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$.

- يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ لدينا: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$

وعليه $g(x) = -\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أن الدالة الأصلية هي: $G(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوي :

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} + \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$

ومنه
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$$

ومنه $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^2 = \frac{-5+e^2}{4}$ إذن المساحة هي $\frac{-5+e^2}{4}$ u.a .

حل التمرين رقم 1 :

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

1) أ- تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -\left[-1 + e^{2x} + 2xe^{2x}\right] = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - e^{2x} - 2xe^{2x}\right] = 1$$

ب- تعيين اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$g'(x) = -2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = -4e^{2x}[1+x]$$

- دراسة إشارة $g'(x)$: $g'(x) = 0$ معناه $-4e^{2x}[1+x] = 0$ حيث $-4e^{2x} < 0$ إذن $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	1 ↗	$f(-1)$	↘ 0 ($+$ / $-$)	↘ $-\infty$

1 حساب $g(0)$: $g(0)=1-1=0$.
ومنه إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

1 حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[1+\overset{0}{\frac{3}{x}}-e^{2x}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2 نبيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :
$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+3)=\lim_{x\to-\infty} -xe^{2x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

3 دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) : $(e^{2x}>0)$
$f(x)-y=-xe^{2x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;f(0))$	(C_f) تحت (Δ)

4 نبين أن $f'(x)=g(x)$:
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :
$f'(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}=g(x)$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(0)=3$	↘ $-\infty$

5 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند $x_0 = -1/2$:

$y = f'(-1/2)(x+1/2) + f(1/2) = x + 3 + 0.5e^{-1}$

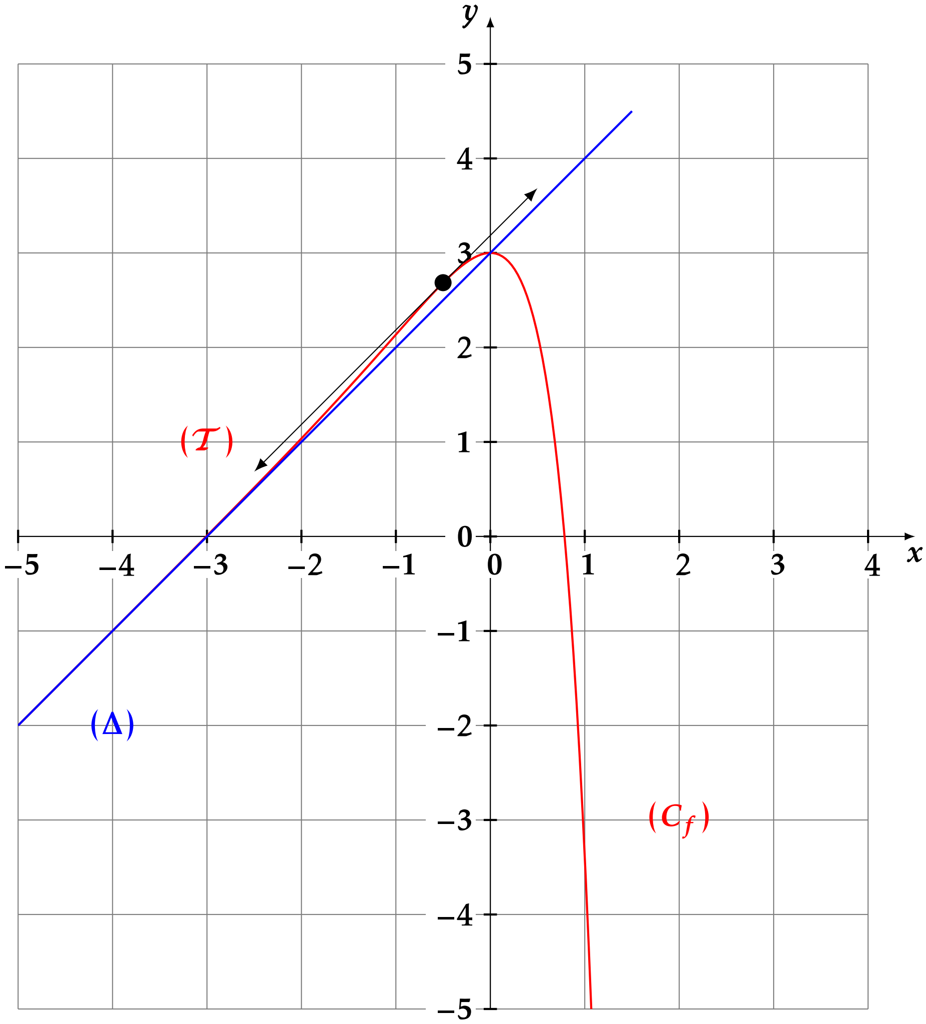
6 نبيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β :

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجالين : $[-3.5;3]$ و $[0.5;1]$.

و $f(-3.5) \times f(3) < 0$ ، $f(0.5) \times f(1) < 0$.

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3$ و $0.5 < \beta < 1$.

7 رسم (Δ) ، (T) و (C_f) :



8 المناقشة البيانية : لدينا $f(x) = x + m$ إذن هي مناقشة مائلة ومنه :

- $m \in]3.18;+\infty[$ لا توجد حلول.
- $m = 3.18$ يوجد حل مضاعف.
- $m = 3$ يوجد حل وحيد معدوم .
- $m \in]3;3.18[$ يوجد حلان سالبين.
- $m < 3$ يوجد حل وحيد موجب

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :
$h(x) = (1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}) \times \frac{1}{x}$.

1 نبيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$h(x) = \frac{1 + 3x - e^{2/x}}{x} = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}$$

ومنه $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

2 حساب $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- دراسة إشارة $h'(x)$:

- لدينا من أجل $x > 0$ ، $\frac{1}{x} > 0$ ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ (من جدول إشارة الدالة g) ومنه $h'(x) > 0$.
ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
- لدينا من أجل $x < 0$ ، $\frac{1}{x} < 0$ ومنه $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ (من جدول إشارة الدالة g) ومنه $h'(x) < 0$.
ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	||	$+$	
$h(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

حل التمرين رقم 2 :

I) لدينا: $g(x) = e^{-x} + x - 1$ ، $D_g = \mathbb{R}$.

1 حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $D_g = \mathbb{R}$: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{g'(x) = -e^{-x} + 1}$

- تعيين اتجاه تغير الدالة g :
$g'(x) = 0$ يكافئ $-e^{-x} + 1 = 0$ ومنه $e^{-x} = 1$ أي $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

المحور1
المحور2
المحور3
المحور4
المحور5
المحور6
المحور 6. حلول بعض التمارين

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

2 تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geqslant 0$

من أجل $x\in]-\infty;0]$: $g(x)\geqslant g(0)$ لأن g متناقصة على $]-\infty;0]$ و منه $g(x)\geqslant 0\cdots(1)$

من أجل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)\geqslant g(0)$ لأن g متزايدة على $[0;+\infty[$ و منه $g(x)\geqslant 0\cdots(2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x)\geqslant 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

أو : $g(0)$ قيمة حدية محلية صغرى ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq g(0)=0$.

- استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geqslant 1$

لدينا: $g(x)\geqslant 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1\geqslant 0$ و منه $e^{-x}+x\geqslant 1$.

(II

1 تبيان أنّ مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $e^{-x}+x\geqslant 1$ أي أنه $e^{-x}+x\neq 0$،

إذن $\boxed{D_f=]-\infty;+\infty[}$

2 التحقق من أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$

لدينا: $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{1}{\dfrac{e^{-x}}{x}+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$

3 حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{xe^x}=-\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}=0^-$ أي $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{xe^x}=1$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}=1$ أي $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$

- التفسير البياني: عند $-\infty$: (C_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y=0$
عند $+\infty$: (C_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y=1$.

4 f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{1(e^{-x}+x)-(-e^{-x}+1)(x)}{(e^{-x}+x)^2}=\frac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$$

إذن $\boxed{f'(x)=\dfrac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}}$

5 دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا : $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}(x+1)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x} > 0$ و المقام موجب تماما ، اذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

6 معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O:

لدينا $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، إذن معادلة المماس

هي $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $\boxed{y = x}$

7 التحقق من أن $x - f(x) = \dfrac{g(x)}{g(x)+1}$

$$x - f(x) = x - \frac{x}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1}$$

أي $\boxed{x - f(x) = \dfrac{g(x)}{g(x)+1}}$

- إشارة $x - f(x)$:

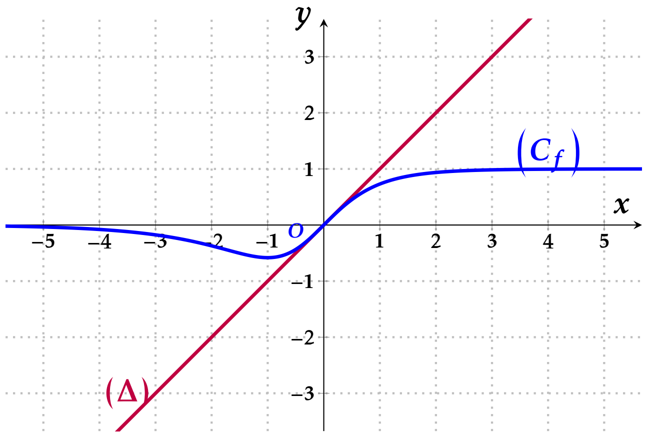
لدينا $g(x) \geqslant 0$ و منه $g(x)+1 \geqslant 1$ و منه $g(x)+1 > 0$ ، إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة x.

إذا كان $x < 0$ فإن $x - f(x) < 0$ ، $x > 0$ فإن $x - f(x) > 0$ و إذا كان $x = 0$ فإن $x - f(x) = 0$.

8 الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; f(0))$	(C_f) تحت (Δ)	

9 رسم (C_f) و (Δ)



10 المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{x e^x}{x e^x+1}-1=m$:

لدينا $\frac{x e^x}{x e^x+1}-1=m$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x}\frac{x}{x+e^{-x}}=m+1$

يكافئ $\frac{x}{x+e^{-x}}=m+1$ أي $\boxed{f(x)=m+1}$. حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m+1$، نميز الحالات التالية:

- إذا كان $m \geqslant 0$ المعادلة ليس لديها حلول
- إذا كان $-1<m<0$ للمعادلة حل وحيد موجب
- إذا كان $m=-1$ للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0=0$.
- إذا كان $\frac{1}{1-e}-1<m<-1$ للمعادلة حلين سالبين متمايزين.
- إذا كان $m=\frac{1}{1-e}-1$ للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1=-1$
- إذا كان $m<\frac{1}{1-e}-1$ المعادلة ليس لديها حلول

حل التمرين رقم 3 :

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(1+ax^2\right)e^{bx}$

بقراءة بيانية:

1 حساب $g(-1)=0$ ، $g(0)=1$ و $g'(0)=\frac{1-0}{0-1}=-1$.

2 كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0: $\boxed{(\Delta): y=-x+1}$.

3 إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4 بالاستعانة بالمعطيات السابقة نتحقق أن: $g(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$.

لدينا : $g(x)=\left(1+ax^2\right)e^{bx}$

ومنه $g(-1)=(1+a)e^{-b}=0$ مع $e^{-b}\neq 0$ أي $1+a=0$ ومنه $\boxed{a=-1}$.

ومن جهة أخرى $g'(x)=\left(abx^2+2ax+b\right)e^{bx}$

وبالتالي $g'(0)=b\cdot e^0=-1$ ومنه $\boxed{b=-1}$.

إذن $\boxed{g(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}}$.

II f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-x}=+\infty$.

إثبات أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2e^{-x}}_{0}+\underbrace{2xe^{-x}}_{0}+\underbrace{e^{-x}}_{0}=0\end{aligned}$$

التفسير البياني:

$y=0$ (حامل محور الفواصل) مستقيم مقارب لـ $\left(C_f\right)$ عند $(+\infty)$.

2 نبيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=g(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}\\&=(x+1)e^{-x}[2-(x+1)]\\&=(x+1)(1-x)e^{-x}=\left(1-x^2\right)e^{-x}=g(x)\end{aligned}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;1]$ ومتناقصة تماما على المجالين: $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

3 تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)=g(0)=1$

التفسير الهندسي:

الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 0 وتقبل مماسا معامل توجيهه 1.

4 استنتاج معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0: من السؤال السابق لدينا :

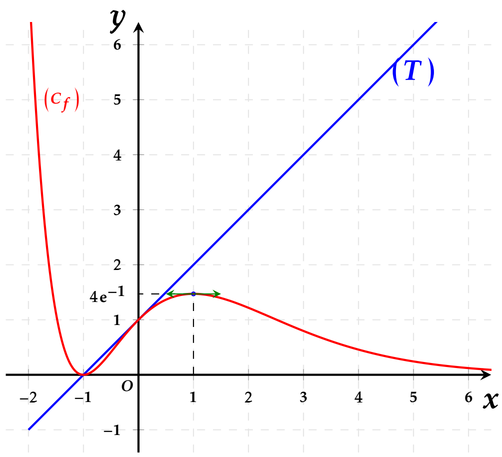
$\boxed{(T):y=x+1}$.

5 نبيّن أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدًا α : لما $x \leq -1$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ولدينا : $f(]-\infty;-1])=[0;+\infty[$ حيث $2\in[0;+\infty[$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدًا α على $]-\infty;-1]$.

6 التحقق أن $\alpha\in[-2;-1]$:
لدينا : $f(-2)=7.39$ و $f(-1)=0$. بما أنّ $0\leq 2\leq 7.39$ فإن $\boxed{-2\leq\alpha\leq -1}$.

7 نبيّن أن α يحقق العلاقة : $\alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{\alpha}{2}}$
لدينا: $f(\alpha)=2$ يكافئ $(\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2$ ومنه $(\alpha+1)^2=2e^{\alpha}$ وبالتالي: $|\alpha+1|=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}}$ بما أن $\alpha\in[-2;-1]$ فإن: $|\alpha+1|=-(\alpha+1)$ أي : $-(\alpha+1)=\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}}$ ومنه : $\boxed{\alpha=-1-\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}}}$.

8 إنشاء (T) و (C_f) على المجال $[-2;+\infty[$.



9 نناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=\ln(m)$: نضع $M=\ln(m)$ أي $f(x)=M$ المناقشة أفقية موازية لمحور الفواصل.

- لما $M<0$ يكافئ $m<1$ لاتوجد حلول.
- لما $M=0$ يكافئ $m=1$ يوجد حل وحيد سالب تماما.
- لما $0<M<1$ يكافئ $1<m<e^1$ يوجد حلان سالبان تماما وحل وحيد موجب تماما.
- لما $M=f(0)=1$ يكافئ $m=e^1$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة وحل آخر معدوم.
- لما $1<M<f(1)$ يكافئ $e^1<m<e^{f(1)}$ يوجد حلان موجبان تماما وحل وحيد سالب تماما.
- لما $M=f(1)$ يكافئ $m=e^{f(1)}$ يوجد حلان مختلفان في الإشارة.
- لما $f(-2)\geq M>f(1)$ يكافئ $e^{f(-2)}\geq m>e^{f(1)}$ يوجد حل وحيد سالب تماما.

III h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=f\left(x^2\right)-1$.
بإستعمال مشتقة دالة مركبة ، نعين إتجاه تغير الدالة h ثم نشكل جدول تغيراتها.
الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $h'(x)=2x\cdot f'\left(x^2\right)$.
$h'(x)=0$ يكافئ $2x\cdot f'\left(x^2\right)=0$ ومنه : $2x=0$ أو $f'\left(x^2\right)=0$ يعني أن $x=0$ أو $x^2=1$ أو $x^2=-1$ (مرفوض) . ومنه $h'(x)=0$ لمّا: $x=0$ أو $x=1$ أو $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;1]$ ومتناقصة تماما على المجالين $[-1;0]$ و $[1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$h(-1)$	$\searrow$	$h(0)$	$\nearrow$	$h(1)$	$\searrow$	-1

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(x^2\right)-1=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(x^2\right)-1=-1$$

حل التمرين رقم 4 :

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=2-2\mathrm{e}^{-x}-x$

1 حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-2\mathrm{e}^{-x}-x=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2-2\mathrm{e}^{-x}-x=\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{2}{x}+2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}-1\right)=-\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$

2 دراسة إتجاه تغير دالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=2\mathrm{e}^{-x}-1$

$g'(x)=0$ تكافئ $2\mathrm{e}^{-x}-1=0$ تكافئ $\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{2}$ تكافئ $-x=-\ln 2$

أي $x=\ln 2$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$g'(x)>0$ تكافئ $2\mathrm{e}^{-x}-1>0$ تكافئ $\mathrm{e}^{-x}>\frac{1}{2}$ تكافئ $-x>-\ln 2$

أي $x<\ln 2$

إذن $g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in]-\infty;\ln 2]$ و $g'(x)\leq 0$

من أجل $x\in[\ln 2;+\infty[$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\ln 2]$ و متناقصة تماما

على المجال $[\ln 2;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		α		$+\infty$
$g'(x)$				$+$	0			$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3 إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ؛ $1.59<\alpha<1.6$

لدينا الدالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1.59,1.6]$ (رتيبة)

ولدينا $g(1.59)\times g(1.6)=0.0021\times(-0.0037)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و شرط الرتابة المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث ؛ $1.59<\alpha<1.6$

4 إستنتاج إشارة $g(x)$

لدينا ؛ $g(0)=2-2\,\mathrm{e}^{0}-0=0$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^x+1}{x^2}$

1 حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم عند 0

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\right)=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

المستقيم ذي المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\mathrm{e}^x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}=+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{-1}{x}=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{-1}{x}=-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{-\mathrm{e}^x+1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{-1}{x}=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{-1}{x}=+\infty$

المستقيم ذي المعادلة $x=0$ مقارب لـ: (C_f)

2 إثبات من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$

الدالة f قابلة لإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة $f'(x)$ حيث :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^x(x^2)-2x(-e^x+1)}{x^4} = \frac{-x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4} \\ &= \frac{-xe^x+2e^x-2}{x^3} = \frac{e^x(-x+2-2e^x)}{x^3} = \frac{e^x g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

3 دراسة إتجاه تغير الدالة f

بما أن $e^x>0$ فإن: إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\dfrac{g(x)}{x^3}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

4 التحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(-2+\alpha)}$.

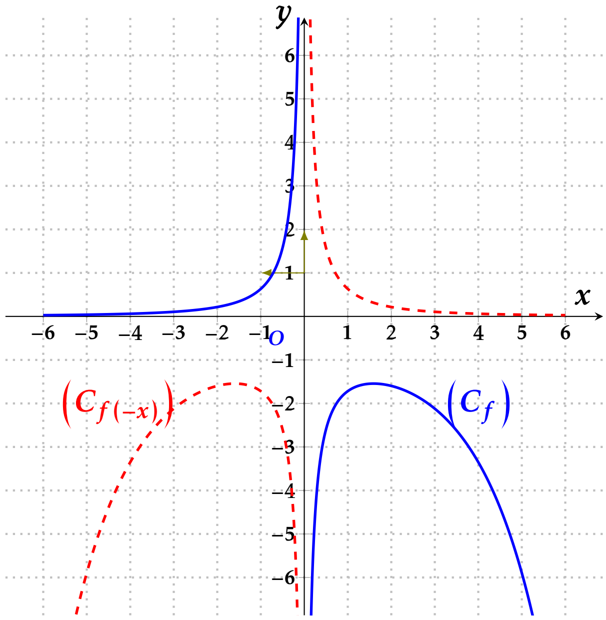
لدنيا : $g(\alpha)=0$ يعني $2-2e^{-\alpha}-\alpha=0$ يكافئ $-2e^{-\alpha}=-2+\alpha$

ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{-2}{-2+\alpha}$

إذن

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{-e^{\alpha}+1}{\alpha^2} = \frac{-(\frac{-2}{-2+\alpha})+1}{\alpha^2} = \frac{(\frac{2-2+\alpha}{-2+\alpha})}{\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2(-2+\alpha)} = \frac{1}{\alpha(-2+\alpha)} \end{aligned}$$

5 إنشاء (C_f) $\qquad f(5)=-5,9$



6 المناقشة البيانية حسب الوسيط الحقيقي m للمعادلة

$$(E)\cdots x^2 e^m - m^2 e^x = x^2 - m^2$$

$x^2 e^m - m^2 e^x = x^2 - m^2$ تكافئ $-m^2 e^x + m^2 = -x^2 e^m + x^2$

تكافئ $m^2(-e^x+1) = x^2(e^m+1)$ تكافئ $\dfrac{-e^x+1}{x^2} = \dfrac{-e^m+1}{m^2}$

أي $f(x) = f(m)$ ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$.

عدد وإشارة الحلول	m	$f(m)$
حل وحيد سالب تماما	$m \in]-\infty;0[$	$f(m) \in]0;+\infty[$
حلين متمايزين موجبين	$m \in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$	$f(m) \in]-\infty;f(\alpha)[$
حل موجب تماما	$m = \alpha$	$f(m) = f(\alpha)$

III) لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \dfrac{|-e^{-x}+1|}{x^2}$

1 تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ؛ $h(x) = f(-x)$

لدينا من أجل $x \in]-\infty;0[$ فإن: $f(x) > 0$

من أجل $x \in]0;+\infty[$ فإن ؛ $(-x) \in]-\infty;0[$ ومنه $f(-x) > 0$

إذن ؛ من أجل من $x \in]0;+\infty[$

$h(x) = |f(-x)| = f(-x)$

من أجل $x \in]-\infty;0[$ فإن $h(x) = |f(-x)| = -f(-x)$

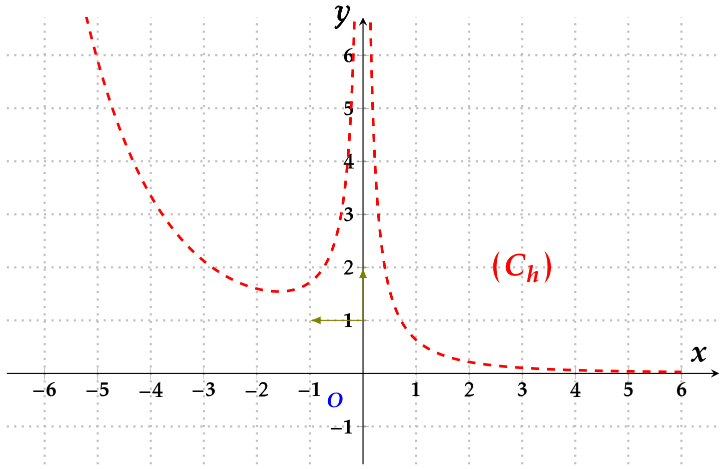
المحور1
المحور2
المحور3
المحور4
المحور5
المحور6
المحور 6. حلول بعض التمارين

2 إنشاء (C_h) :

لدينا : $h(x)=\frac{|-e^{-x}+1|}{x^2}=\left|\frac{-e^{-x}+1}{(-x)^2}\right|=|f(-x)|$

ومنه لإنشاء (C_h) نناظر (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لنتحصل على $f(-x)$ ثم ننشئ منحنى دالة القيمة المطلقة لـ $f(-x)$ أي (C_h).

$$f(x) \longrightarrow f(-x) \longrightarrow |f(-x)|$$



حل التمرين رقم 5 :

(I

1 الدالة g_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g'_m حيث

$$g'_m(x)=me^{mx}+me^{mx}(1+mx)=me^{mx}(2+mx)$$

إشارة $g'_m(x)$ من نفس إشارة $(2+mx)$ لأن $me^{mx}>0$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{m}$		$+\infty$
$g'_m(x)$		$-$	0	$+$	

2 حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} mxe^{mx}=\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{mx}=0$

جدول تغيرات الدالة g_m

x	$-\infty$		$-\frac{2}{m}$		$+\infty$
$g'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$g_m(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

الإستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x أن $g_m(x)>0$

لدينا $1-e^{-2}>0$ قيمة حدية صغرى للدالة g_m أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g_m(x)>1-e^{-2}>0$

(II

1 إثبات أنّ جميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ تمر بنقطة ثابتة I

من أجل كل $m, m' \in \mathbb{R}$ بحيث $m \neq m'$ لدينا: $\left(C_{f_m}\right) \cap \left(C_{f'_m}\right) = I$ حيث I نقطة ثابتة مستقلة عن m

إذن لإيجاد إحداثيات النقطة $I\,(x_0; y_0)$ نحل المعادلة $f_m(x_0) - f'_m(x_0) = 0$

أي $x_0 - 1 + x_0 e^{mx_0} - (x_0 - 1 + x_0 e^{m' x_0}) = 0$ ومنه $x_0 e^{mx_0} - x_0 e^{m' x_0} = 0$ أي $x_0 (e^{mx_0} - e^{m' x_0}) = 0$

يعني $x_0 = 0$ أو $e^{mx_0} - e^{m' x_0} = 0$ يعني $mx_0 - m' x_0 = 0$ أي $x_0 (m - m') = 0$ و هذا يعني أن $x_0 = 0$ لأن $m \neq m'$

و $y_0 = f_m(x_0) = f_m(0) = -1$ ومنه $I(0, -1)$

حساب النهايات

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 + x e^{mx}) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1 + x e^{mx}) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{mx} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{m} \times m x e^{mx} = \dfrac{1}{m} \times 0 = 0$

إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{mx} = 0$ ومنه المستقيم ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي لـ (D) و $\left(C_{f_m}\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_m(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	$\left(C_{f_m}\right)$ تحت (D)	$\left(C_{f_m}\right)$ يقطع (D) في النقطة $(0; f_m(-1))$	$\left(C_{f_m}\right)$ فوق (D)

2 دراسة إتجاه تغير الدالة f_m

الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f'_m حيث:

$f'_m(x) = 1 + m x e^{mx} + e^{mx} = 1 + (1 + mx) e^{mx} = g_m(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g_m(x) > 0$ ومنه الدالة f_m متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f_m

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -1 $\nearrow$	$+\infty$

3 تعيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ عند النقطة التي ترتيبتها -1

$f_m(x) = -1$ تكافئ $x - 1 + x e^{mx} = -1$ تكافئ $x(1 + e^{mx}) = 0$ تكافئ $x = 0$

$y = f'_m(0)(x - 0) + f(0) = 2x - 1$

تبيان أنّ النقطة $A_m\left(-\dfrac{2}{m}; -\dfrac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$. نقطة إنعطاف للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$.

لدينا $f''_m(x) = g'_m(x)$ تنعدم من أجل $x = -\frac{2}{m}$ و تغير إشارتها من السالب إلى الموجب و منه النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; f_m\left(-\frac{2}{m}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $\left(C_f\right)$ أي $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}\left(1+e^{-2}\right)-1\right)$

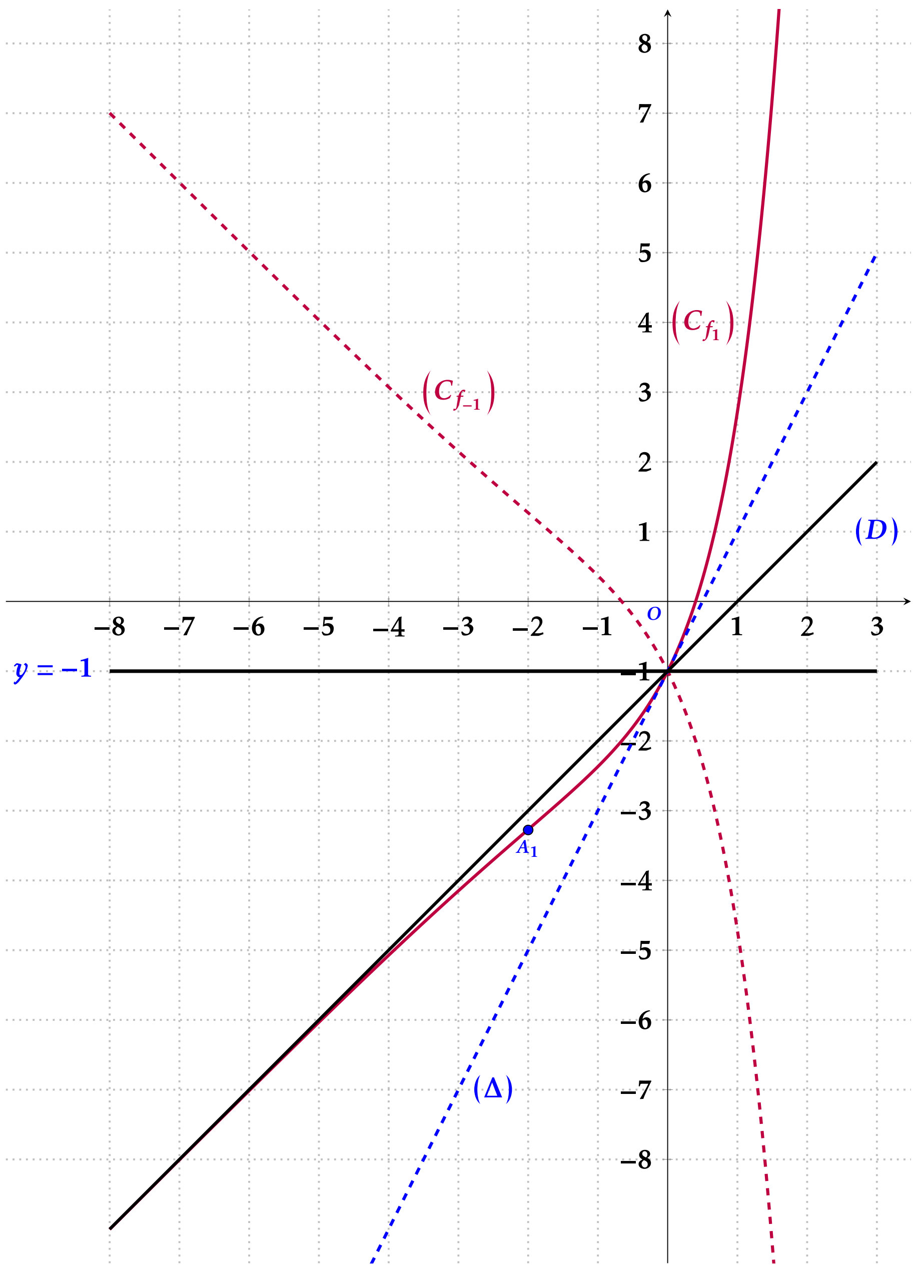
4 إثبات أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

لدينا f_m مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة و رتيبية تماما على المجال $[0;1]$
و لدينا $f_m(0) \times f_m(1) = (-1) \times e^m < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و شرط الرتابة نستنتج أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $0 < \alpha_n < 1$

5 إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$

$f_m(x) + f_{-m}(-x) = x - 1 + xe^{mx} + \left(-x - 1 - xe^{-m(-x)}\right) = -2$ ، إذن نستنتج أن المنحنيين $\left(C_{f_m}\right)$ و $\left(C_{f_{-m}}\right)$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = -1$

إنشاء كلا من (Δ)، (D)، $\left(C_{f_1}\right)$ و أنشئ $\left(C_{f_{-1}}\right)$: النقطة $A_1\left(-2; -3 - 2e^{-2}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى $\left(C_{f_1}\right)$



III) **1** إستنتاج إتجاه تغير الدالة F

الدالة F هي مركب الدالتين $x \mapsto f_1(x)$ و $x \mapsto x^2$ و لدينا الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه إتجاه تغير الدالة F هو من نفس إتجاه تغير الدالة $x \mapsto x^2$ ، إذن الدالة F متناقصة تماما من أجل $x \in]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما من أجل $x \in [0;+\infty[$

❷ أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_{f_1}\right)$ و (C_F) من أجل $x \in [0;+\infty[$

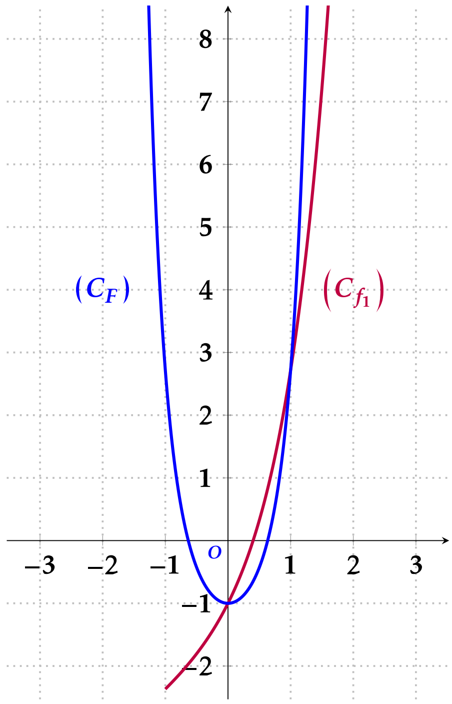
لدينا من أجل $x = 0$ أو $x = 1$ فإن $x^2 = x$ و منه $f_1(x^2) = f_1(x)$ إذن $\left(C_{f_1}\right)$ يقطع (C_F) في النقطتين $A(0,-1)$ و $B(1,1)$

لدينا من أجل $x \in]0;1[$ ؛ $x^2 < x$ ومنه $f_1(x^2) < f_1(x)$ ومنه (C_F) يقع تحت المنحنى $\left(C_{f_1}\right)$ من أجل $x \in]0;1[$

لدينا من أجل $x \in]1;+\infty[$ ؛ $x < x^2$ ومنه $f_1(x) < f_1(x^2)$ ومنه (C_F) يقع فوق المنحنى $\left(C_{f_1}\right)$ من أجل $x \in]1;+\infty[$

❸ إنشاء (C_F)

لدينا الدالة F دالة زوجية و منه منحناها البياني متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب



مناقشة حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

$e^{F(x)} = m$ تكافئ $F(x) = \ln(m)$ إذن حلول المعادلة $F(x) = \ln(m)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحى (C_F)

مع عائلة المستقيمات $D_m : y = \ln(m)$

من أجل $\ln(m) \in]-\infty;-1[$ أي $m \in]0;e^{-1}[$ لا يوجد حل

من أجل $\ln(m) = -1$ أي $m = e^{-1}$ يوجد حل $x_0 = 0$

من أجل $\ln(m) \in]-1;+\infty[$ أي $m \in]e^{-1};+\infty[$ يوجد حلين متمايزين مختلفين في الإشارة