التوزيع السنوي لمادة الرياضيات

1 - الدوال العددية.
2 - الأعداد و الحساب.
3 - الهندسة في الفضاء.
4 - الأعداد المركبة.
5 - المتتاليات العددية.
6 - الحساب التكاملي.
7 - الإحتمالات.

الدوال العددية

الدوال العددية من الألف إلى الياء

1- مفاهيم أولية حول الدوال.
2- عموميات حول الدوال.
3- مركز التناظر و محور التناظر.
4- رسم منحنى انطلاقا من جدول تغيرات دالة
5- الدوال العددية و الأنشطة البيانية
6- إستنتاج رسم منحنى من منحنى آخر
7- حساب النهايات للدوال العددية
8- النهايات و إزالة حالة عدم التعيين.
9- النهايات و المستقيمات المقاربة
10- النهايات بالحصر و المقارنة.
11- الإستمرارية
12- مبرهنة القيم المتوسطة.
13- الإشتقاقية
14- مشتقات الدوال العددية
15- القيم الحدية للدالة
16- نقطة الإنعطاف
17- معادلة المماس
18- التقريب التآلفي
19- طريقة أولر
20- المناقشة البيانية
21- تركيب الدوال.

مفاهيم أولية حول الدوال

1- مفهوم الدالة:

تعريف 1:

D جزء من $\mathbb{R}$ نعرف دالة f على D عندما نرفق بكل عدد حقيقي x من D عددا حقيقيا وحيدا، نرمز إليه بالرمز $f(x)$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

تعابير ومصطلحات:

- نرمز عادة إلى الدوال بالرموز f، g، h ....
- D جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على D:

D هي مجموعة تعريف الدالة. مثل

1) $f(x) = x^3 + x - 1$ $\quad D: \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

2) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad D: x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D: \mathbb{R} - \{2\}$ أو $D:]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

3) $K(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad D: x - 1 \geq 0$

$D: x \geq 1$

$D: [1, +\infty[$

- إذا كان x عنصرا من D نسمي العدد الحقيقي $f(x)$ **صورة** x بالدالة f
- إذا كان العدد الحقيقي y صورة العدد الحقيقي x بالدالة f، نقول إن x **سابقة** للعدد y بالعدد f

$f(x) = x^3 + x - 1$

$$f(0) = 0^3 + 0 - 1$$
$$f(0) = -1$$

سابقة صورة

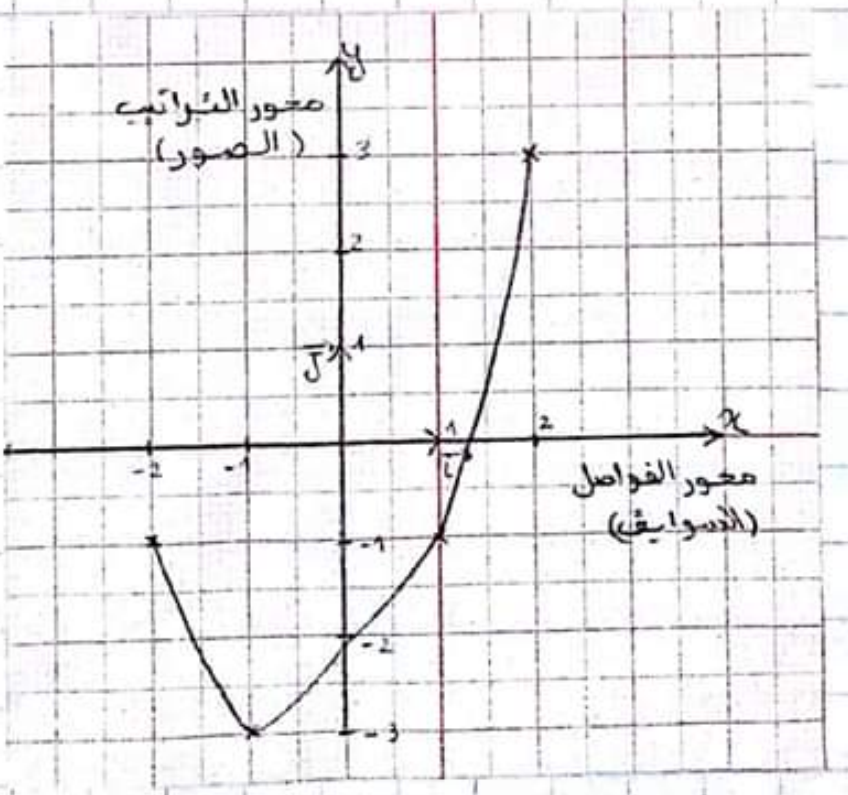
2- التمثيل البياني للدالة :

تعريف 2 :

المستوى منسوب إلى معلم (O, I, J) . f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) للدالة في المعلم (O, I, J) هو مجموعة النقط $M(x, y)$ حيث :

إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بالرمز $(\mathcal{C}_f)$ نقول أن $y = f(x)$ هي معادلة $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم (O, I, J)



3- تغيرات دالة معرفة على مجال:

تعريف 3:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

f **متزايدة تماما** على I يعني:

من أجل كل x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f **متناقصة تماما** على I يعني:

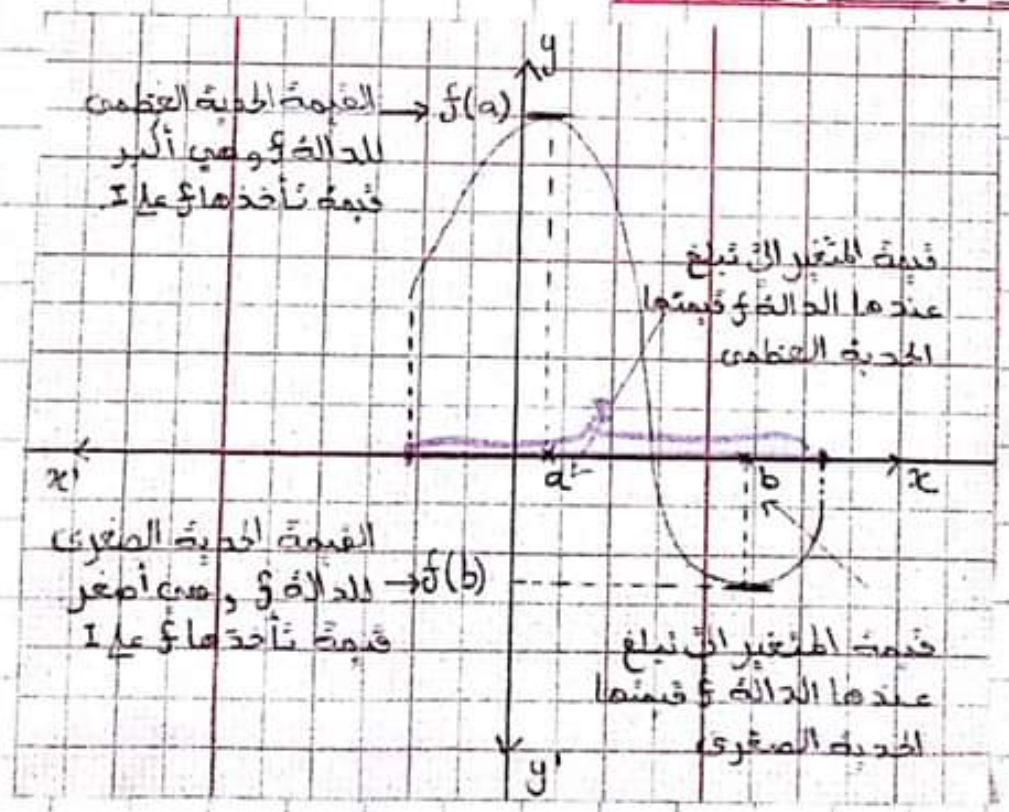
من أجل x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإن

$$f(x_1) > f(x_2)$$

f **ثابتة** على I

من أجل كل x_1 و x_2 من I فإن $f(x_2) = f(x_1)$

4- القيم الحدية للدالة:



تعريف 4:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

القيمة الحدية العظمى للدالة f على I هي أكبر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد a من I.

من أجل كل x من I، $f(x) \leq f(a)$.

القيمة الحدية الصغرى للدالة f على I هي أصغر صورة $f(x)$ تبلغها f من أجل عدد b من I.

من أجل كل x من I $f(x) \geq f(b)$

5- تشفعية دالة:

تعريف 5:

D جزء من $\mathbb{R}$، f دالة معرفة على D

نقول أن f دالة زوجية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى (yy') وكان لكل x من D، $f(-x) = f(x)$

مثل: $f(x) = x^2 - 3$

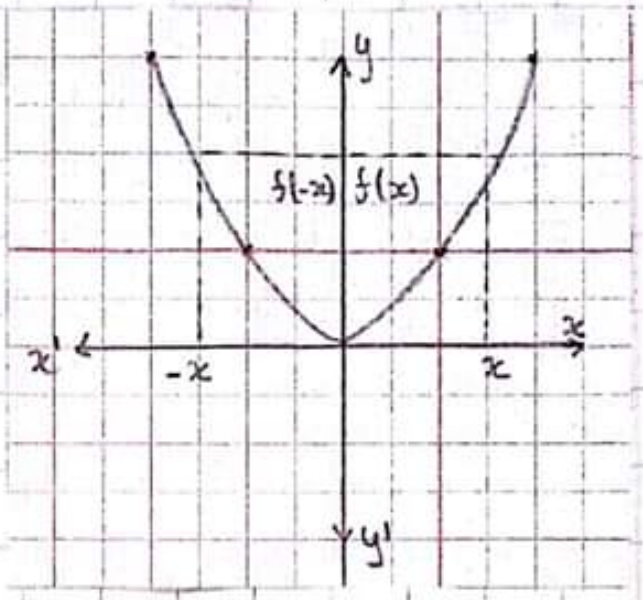
$f(-x) = (-x)^2 - 3$

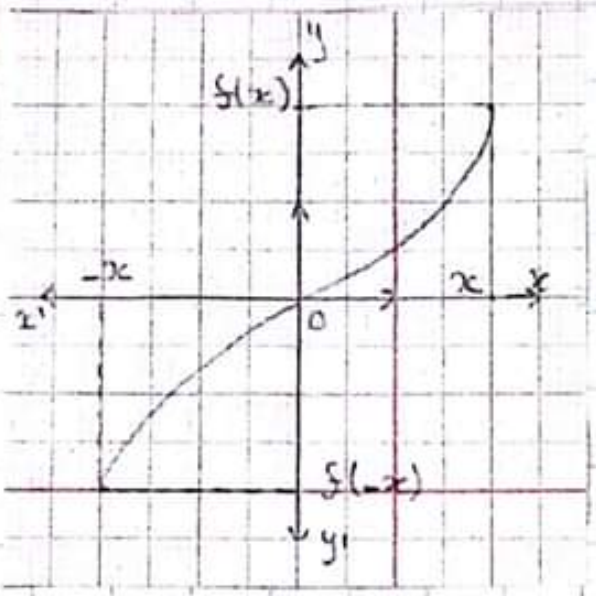
$= x^2 - 3 = f(x)$

نقول أن f دالة فردية إذا كان D متناظرا بالنسبة إلى O وكان لكل x من D، $f(-x) = -f(x)$

مثل $h(x) = \frac{1}{x}$

$h(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -h(x)$





بيان الدالة الزوجية في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب

بيان الدالة الفردية في المستوي المنسوب إلى معلم يكون متناظرا بالنسبة إلى المعلم O.

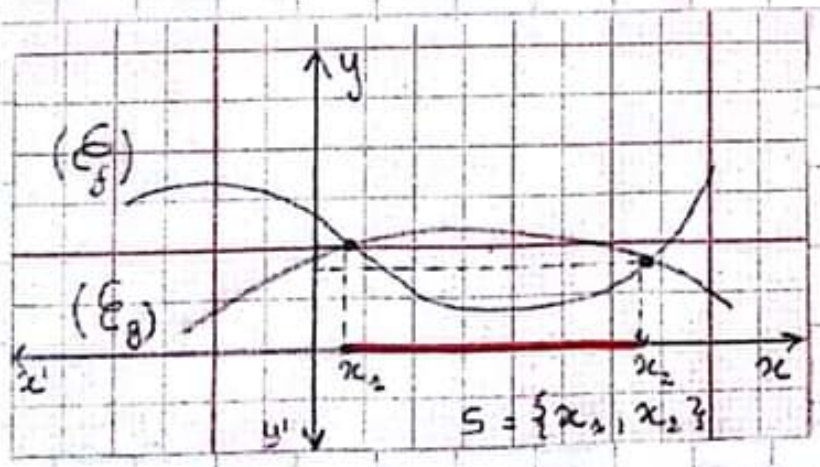
6- حل معادلات ومتراجحات بيانيا:

f و g دالتان معرفتان على مجموعة D، $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ منحنياهما في معلم للمستوي.

حل معادلة $f(x) = g(x)$ بيانيا تعيين فواصل النقط المشتركة للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$

$f(x) = g(x)$

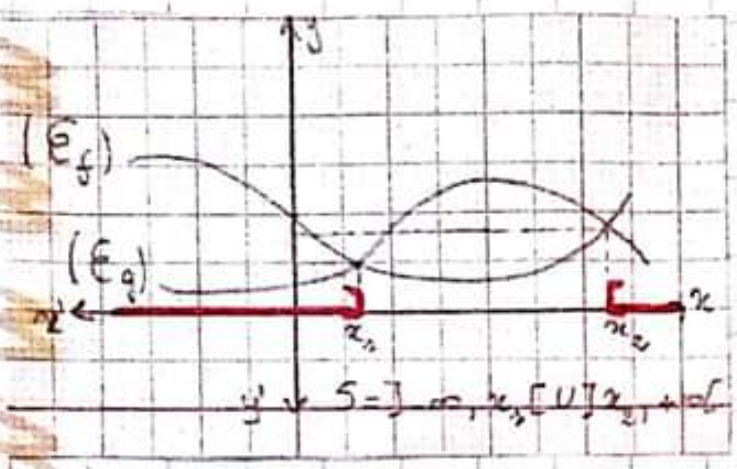
$S = \{x_1, x_2\}$



حل متراجحة

$f(x) > g(x)$

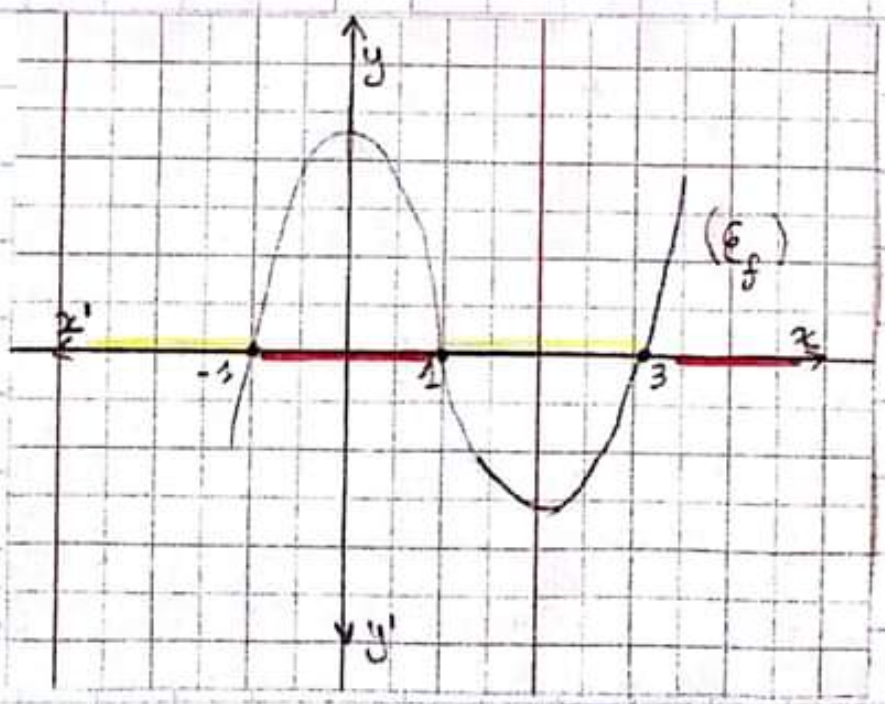
بيانيا يعني: تعيين فواصل نقط المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الواقعة فوق المنحنى $(\mathcal{C}_g)$.



أمثلة:

نعرف الدالة f بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

حل المعادلة $f(x) = 0$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مع محور الفواصل.

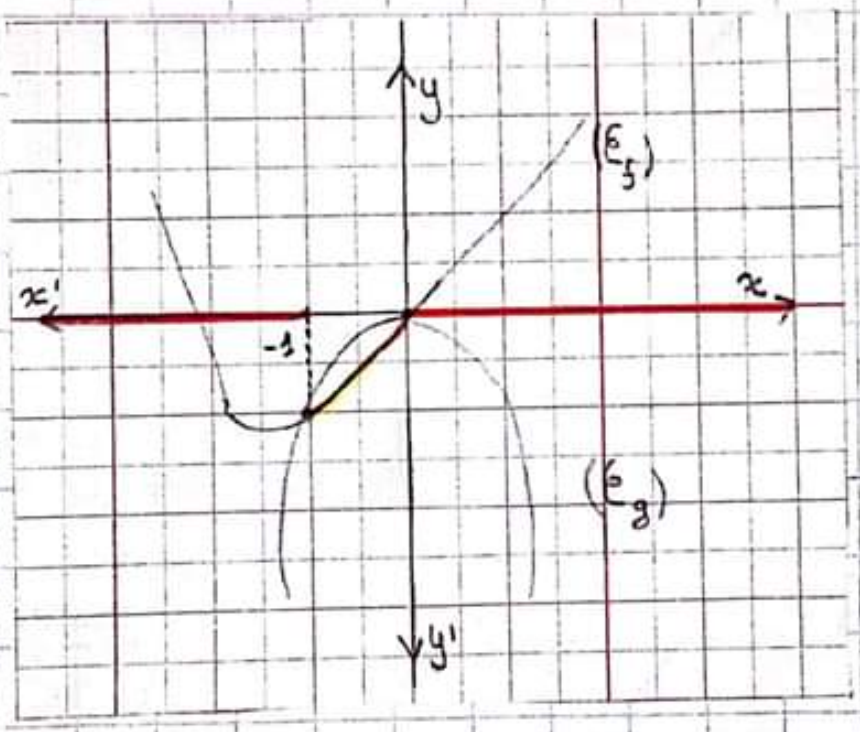


المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقطع ثلاث مرات محور الفواصل.

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل هذه النقط $S=\{-1,1,3\}$

f و g دالتان معرفتان بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ $(\mathcal{C}_g)$.

حل المتراجحة $f(x) \geqslant g(x)$ بيانيا يؤول إلى تعيين فواصل نقط المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الواقعة فوق منحنى $(\mathcal{C}_g)$ و فواصل النقط المشتركة.



$S =]-\infty, 1] \cup [0, +\infty[$

حل المتراجحة $[-1, 0]$ $f(x) \leqslant g(x)$

7- الدالة التآلفية:

تعريف:

تسمى دالة تآلفية كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مفروضان.

أمثلة :

الدالة $f: x \mapsto 2x - 3$ هي دالة تآلفية حيث $a = 2$ هو المعامل الذي يضرب فيه x و $b = -3$ هو صورة 0 بالدالة f بمعنى $f(0) = -3$

في حالة $b = 0$ ، الدالة $x \mapsto ax$ هي دالة خطية ذات معامل التناسب a

$g: x \mapsto \frac{1}{2}x$ دالة خطية حيث $a = \frac{1}{2}$

في حالة $a = 0$ ، $x \mapsto b$ هي دالة ثابتة.

الخاصية المميزة للدوال التآلفية :

مبرهنة 1 :

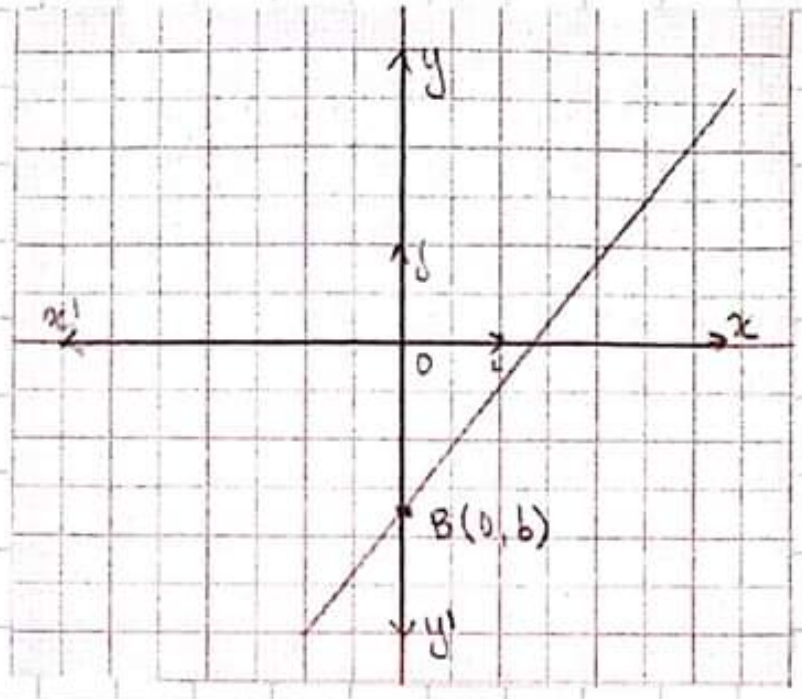
تكون الدالة f تآلفية إذا و فقط إذا كان، من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x و x' : النسبة $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ ثابتة (بمعنى أن تزايد الصورة متناسب مع تزايد المتغير).

التمثيل البياني :

التمثيل البياني لدالة تآلفية في معلم هو المستقيم (D) الذي معامل توجيهه a و يشمل النقطة $B(0, b)$.

b هي الترتيب إلى المبدأ.

$y = ax + b$ هي المعادلة المبسطة للمستقيم (D)



إتجاه تغير دالة تآلفية:

مبرهنة 2:

f دالة تآلفية معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=ax+b$.

1- إذا كان $a<0$ فإن f متناقصة تماما.

2- إذا كان $a>0$ فإن f متزايدة تماما.

مثل: دالة متناقصة $g(x)=-2x+3$

2- التمثيل البياني وإشارة دالة:

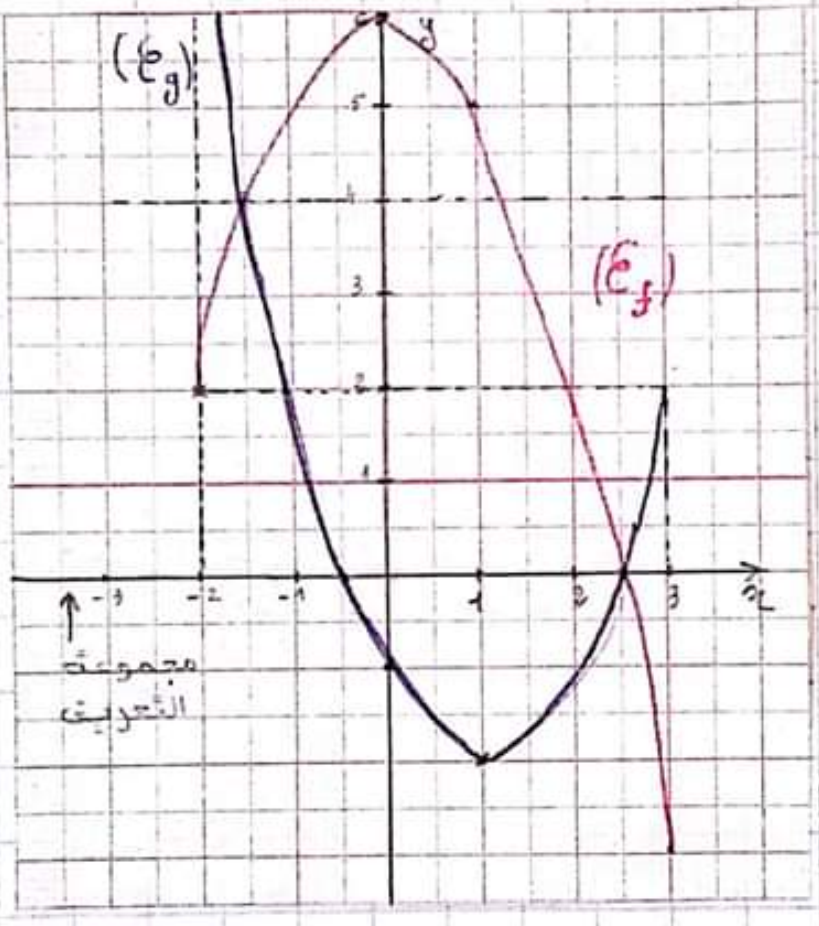
خواص:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تكون دالة f موجبة تماما على I إذا وفقط إذا كان تمثيلها البياني على I يقع فوق محور الفواصل.

عموميات حول الدوال

(C_f) و (C_g) تمثيلان بيانيين لدالتين f و g معرفتين على مجال D كما في الشكل



نقرأ بيانيا عين:

① D مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g.

1- تعيين D_f:

$D_f = [-2, 3]$

2- تعيين D_g:

$D_g = [-2, 3]$

② عين $f(-2)$ ، $g(-2)$ ، $f(0)$ ، $g(0)$ ، $f(3)$ ، $g(3)$.

1- $f(-2) = 2$

2- $g(-2) = 7$

3- $f(0) = 6$

4- $g(0) = -1$

5- $f(3) = -3$

6- $g(3) = 2$

③ عين سوابق العدد 2 بالدالة f

نعين سوابق العدد 2 بالدالة f: نقوم برسم خط أفقي يمر بالترتيبة 2 (معادلته $y=2$).

$x = -2$ $\qquad$ $x = 2$

④ عين سوابق العدد 4 بالدالة g

$x = -1,5$

⑤ شكل جدول تغيرات الدالة f

x	-2		0		3
$f(x)$	2	↗	6	↘	-3

⑥ شكل جدول تغيرات الدالة g

x	-2		1		3
$g(x)$	7	↘	-2	↗	2

⑦ عين حلول المعادلتين

1- $f(x)=0$

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع محور الفواصل. $S=\{2,5\}$

2- $f(x)=g(x)$

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي فواصل تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع $(\mathcal{C}_g)$ $S'=\{-1,5\ ,\ 2,5\}$

⑧ عين حلول المتراجحة

$f(x) \leq g(x)$

هي فواصل نقط المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ التي تقع فوق $(\mathcal{C}_f)$

$S''=[-2\ ,\ -1,5] \cup [-2,5\ ,\ 3]$

⑨ عين القيمة الحدية العظمى للدالة f

القيمة الحدية العظمى للدالة f هي : 6 عند الفاصلة 0.

⑩ عين القيمة الحدية الصغرى للدالة g

القيمة الحدية العظمى للدالة g هي 2- عند الفاصلة 1.

مركز التناظر ومحور التناظر

1- محور التناظر:

مبرهنة:

المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يكافئ:

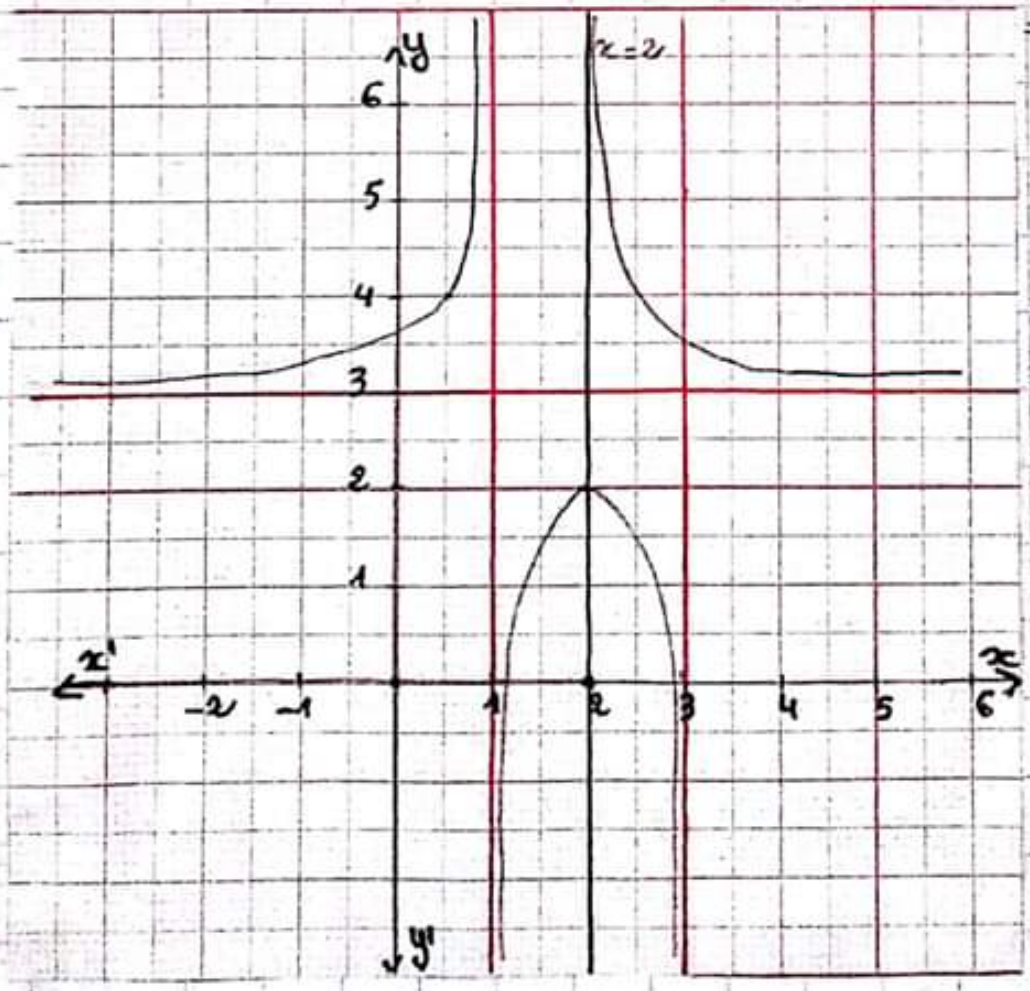
لكل x من D_f ، $2\alpha-x$ من D_f و $f(2\alpha-x)=f(x)$

حالة خاصة:

$\alpha=0$

العلاقة تصبح $f(-x)=f(x)$ أي أن الدالة زوجية وهذا يكافئ $(\mathcal{C}_f)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

مثال:



f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $D_f = \mathbb{R} - \{1,3\}$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ولتكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

* أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = 2$ محور تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

حل المثال:

البرهان أن (Δ) محور تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$

لدينا لكل x من D_f ، $2\alpha - x$ من D_f و

$$f(2\alpha - x) = f(x)$$

أي

$$f(4 - x) = f(x)$$

$$f(4-x) = \frac{3(4-x)^2 - 12(4-x) + 10}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 3}$$

$$f(4-x) = \frac{48 + 3x^2 - 24x - 48 + 12x + 10}{16 + x^2 - 8x - 16 + 4x + 3}$$

$$f(4-x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = f(x)$$

أي أن $x = 2$ محور تناظر لمنحنى الدالة f أي لـ $(\mathcal{C}_f)$

2- مركز التناظر:

مبرهنة:

$\omega(\alpha, \beta)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يكافئ:

لكل x من D_f ، $2\alpha - x$ من D_f

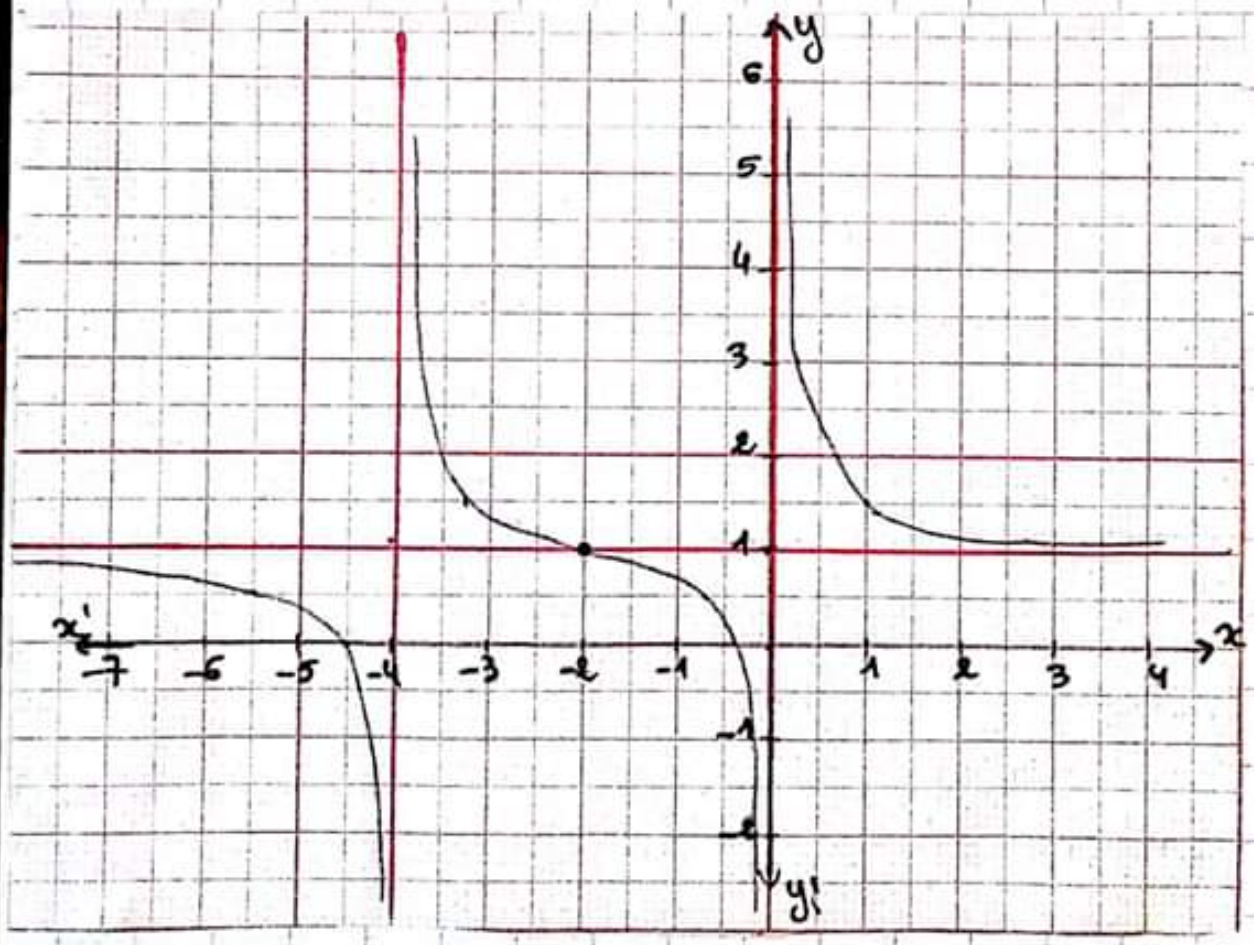
و $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

حالة خاصة:

$\alpha = \beta = 0$

العلاقة تصبح $f(-x) + f(x) = 0$ أي أن الدالة f فردية وهذا يكافئ $(\mathcal{C}_f)$ متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم $O(0,0)$

مثال:



f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 0\}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x}$$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

• أثبت أن النقطة $\omega(-2,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

حل المثال:

البرهان أن $\omega(-2,1)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$

$$f(-4-x)+f(x)=2$$

$$\frac{(-4-x)^2+5(-4-x)+2}{(-4-x)+4(-4-x)}+\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}$$

$$(-4-x)^2=(-(4+x))^2=(4+x)^2$$

$$\frac{16+x^2+8x-20-5x+2}{16+x^2+8x-16-4x}+\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}$$

$$\frac{x^2+3x-2}{x^2+4x}+\frac{x^2+5x+2}{x^2+4}$$

$$\frac{x^2+3x-2+x^2+5x+2}{x^2+4}=\frac{2(x^2+4x)}{x^2+4x}=2$$

ومنه: $\omega(-2,1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

ملاحظة:

لو اعطانا $f(-4-x)+f(x)=2$

وسأل ماذا تستنتج، نحل بالمطابقة:

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

$2\alpha=-4$; $2\beta=2$

$\alpha=-2$; $\beta=1$

$\omega(-2,1)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$

رسم منحنى انطلاقا من جدول تغيرات دالة.

مثال :

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

(C_f) منحناها البياني ، و معرفة بجدول تغيراتها المبين أدناه:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

المطلوب :

أ- برهن أن (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ب- أرسم (C_f) في معلم متعامد و متجانس.

حل المثال :

أ- البرهان أن (Δ) م.م. مائل بجوار $-\infty$ و $+\infty$:

حتى يكون (Δ) م.م.مائل يجب أن :

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - y] = 0$$

1] $\lim_{x\to-\infty} [x + 1 + \frac{1}{x+1} - (x+1)]$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right)$ $\quad$ $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

2] $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

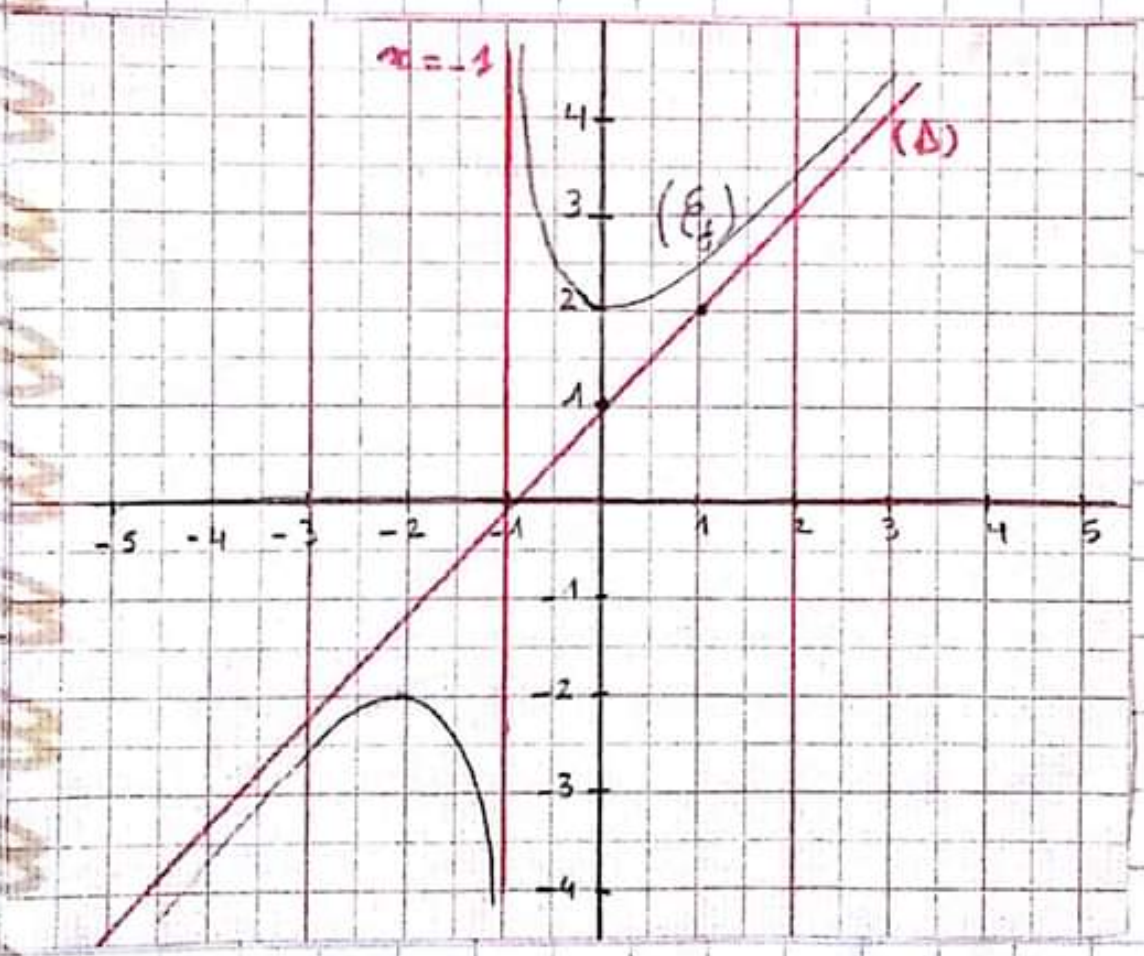
ومنه فإن (Δ) م.م. مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- الرسم البياني:

$y = x + 1$

جدول مساعد:

x	0	1
y	1	2



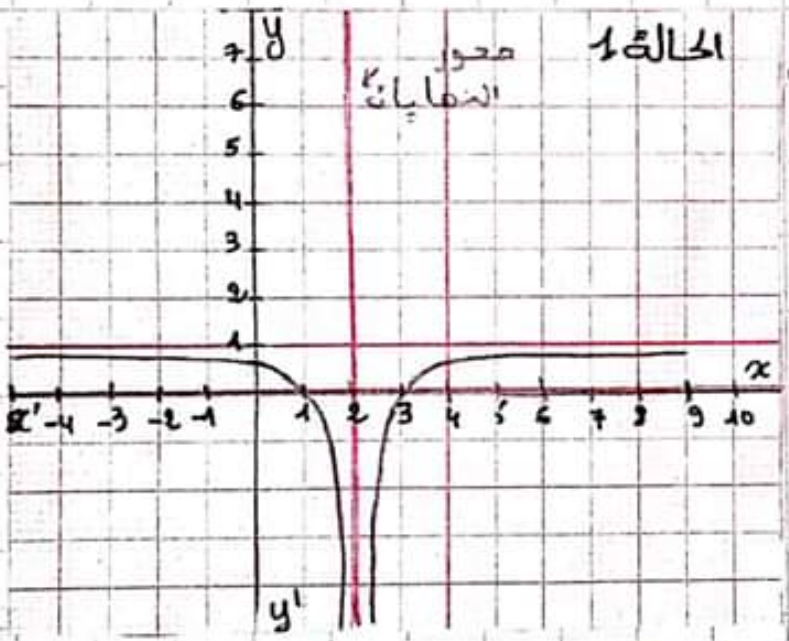
الدوال العددية والأسئلة البيانية

تمرين:

في كل حالة من الحالات التالية عين D_f مجموعة التعريف و النهايات في أطراف المجموعة D_f وحدد إشارة $f(x)$ ثم أكتب جدول تغيرات الدالة f.

حل التمرين:

الحالة 1:



1- مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

2- النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

ملاحظة:

إذا وجدنا في حساب النهايات عند ∞ عدد ثابت فإن $y=1$ م.م. أفقي.

$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

ملاحظة:

إذا وجدنا في حساب النهايات عند عدد ما ∞ فإن $x=2$ م.م. عمودي.

3- حدد إشارة $f(x)$ على D_f:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

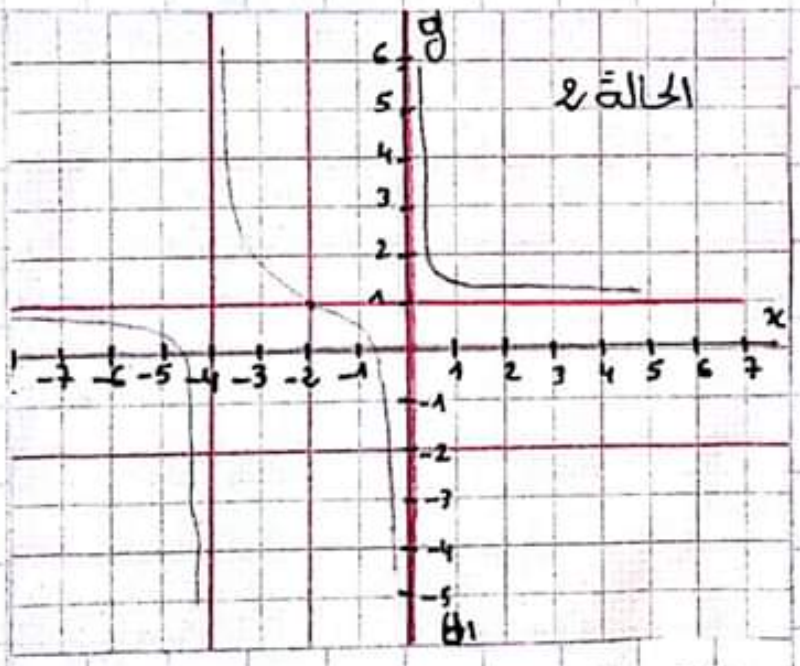
موجبة أو سالبة

4- جدول تغيرات الدالة f على D_f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	1

متزايدة أو متناقصة

الحالة 2:



1- مجموعة التعريف:

$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 0\} =]-\infty, -4[\cup]-4, 0[\cup]0, +\infty[$

2- النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

نستنتج أن $y = 1$ م.م. أفقي.

$\lim_{x \to -4^{>}} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -4^{<}} f(x) = -\infty$

نستنتج أن $x = 0$ م.م. عمودي.

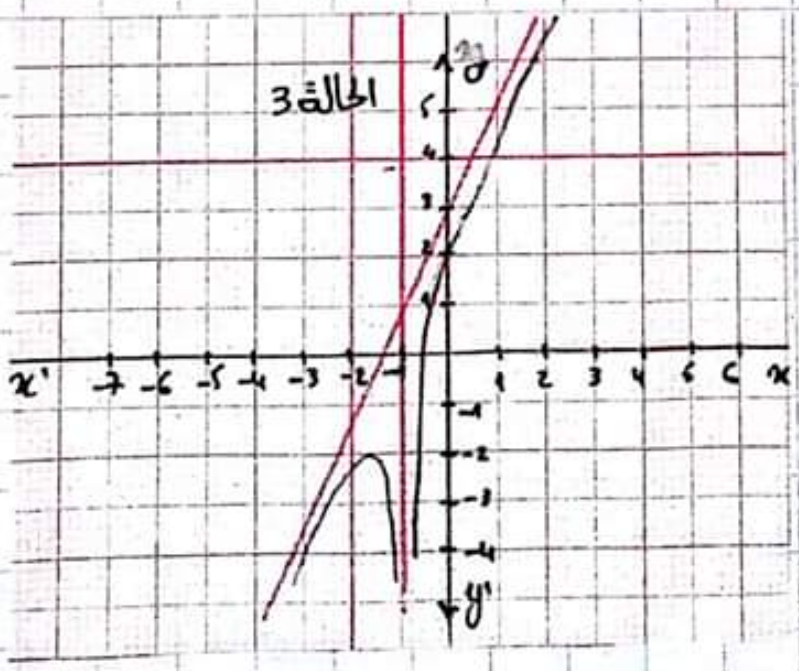
3- جدول إشارة $f(x)$ على D_f :

x	$-\infty$		$-4,5$		-4		$-0,5$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

4- جدول تغيرات الدالة f على D_f :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	1

الحالة 3:



1- مجموعة التعريف:

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

2- النهايات

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

م.م. مائل $y = ax + b$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - y] = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = -\infty$

$x = -1$ م.م عمودي

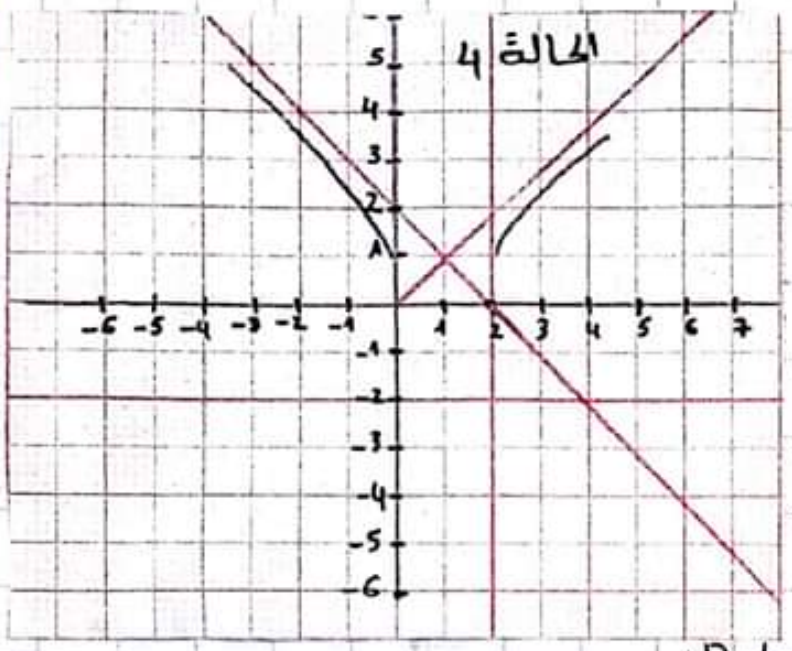
3- جدول إشارة $f(x)$ على D_f

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

4- جدول تغيرات الدالة f على D_f

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

الحالة 4: (دوال جذرية)



1- مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

2- النهايات:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

3- جدول إشارة $f(x)$ على D_f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$				$+$	

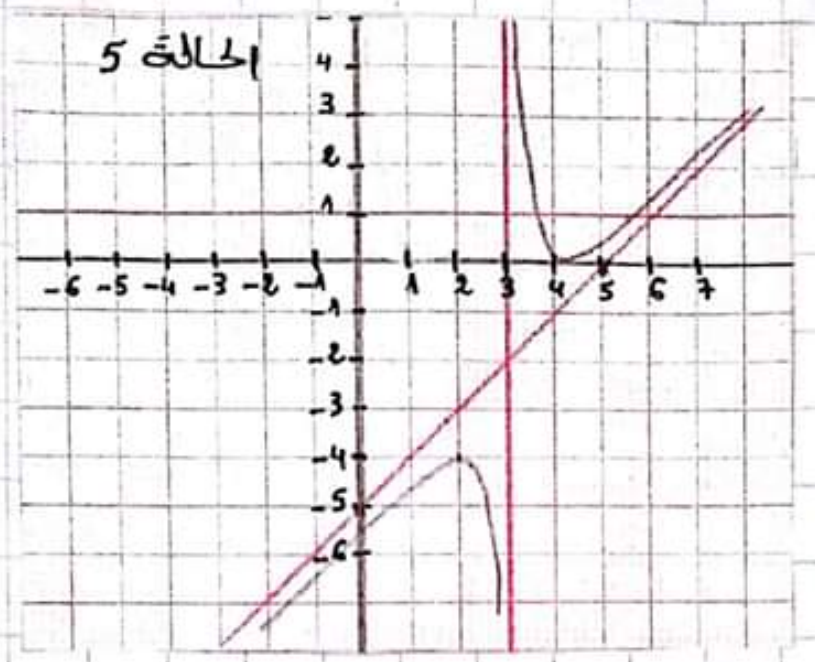
4- جدول تغيرات الدالة f على D_f:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1		1	$\nearrow$	$+\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

لأنها تقبل نصف مماس عمودي عند كل من $x=0$ و $x=2$.

الحالة 5:



1- مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[= \mathbb{R} - \{-3\}$

2- النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(Δ) م.م. مائل $\Delta : y = ax + b$

$A(5, 0)$ $B(0, -5)$

$A \in (\Delta)$

$0 = a(5) + b \Rightarrow 5a + b = 0 \Rightarrow b = -5a$ --(1)

$B \in (\Delta)$

$-5 = a(0) + b \Rightarrow b = -5$

بالتعويض في (1) نجد:

$-5 = -5a \Rightarrow a = 1$

إذن $(\Delta): y = x - 5$

$\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

3- جدول إشارة $f(x)$ على D_f

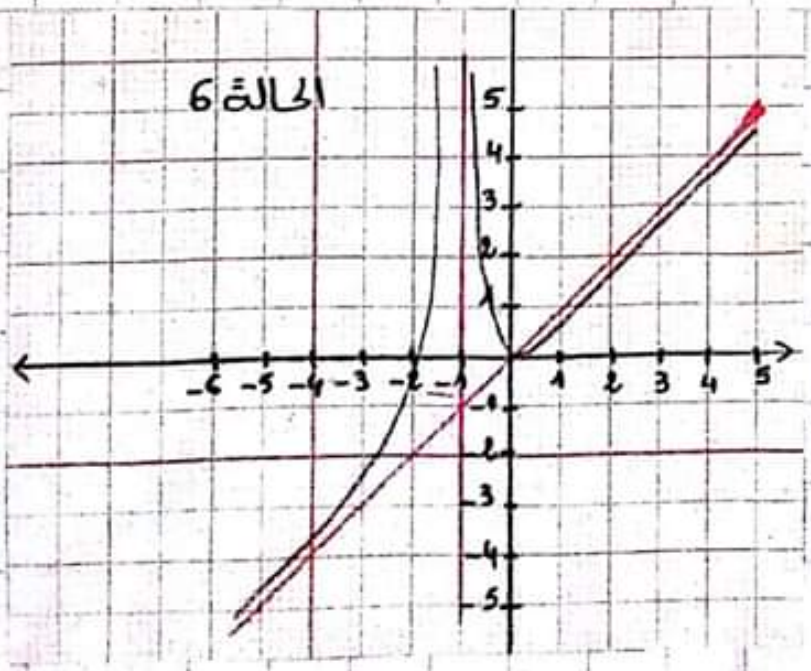
x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

4- جدول تغيرات الدالة f على D_f:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ملاحظة: المشتقة تنعدم عند كل قيمة حدية (كبرى وصغرى)

الحالة 6:



1- مجموعة التعريف:

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$= \mathbb{R} - \{-1\}$

2- النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

نستنتج أن هناك م.م. مائل $(\Delta): y = ax + b$

$y = x$

$\lim_{x \to -1^{>}} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^{<}} f(x) = +\infty$

$x = -1$ م.م. عمودي

3- جدول إشارة $f(x)$ على D_f

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

4- جدول تغيرات الدالة f على D_f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إستنتاج رسم منحنى من منحنى آخر

تمرين:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ولتكن الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ عبارتها $f(x)=\sqrt{x}$ ولتكن الدالة ω المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث $\omega(x)=x^2-1$

ولتكن الدالة T المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $T(x)=x^3-3x^2$

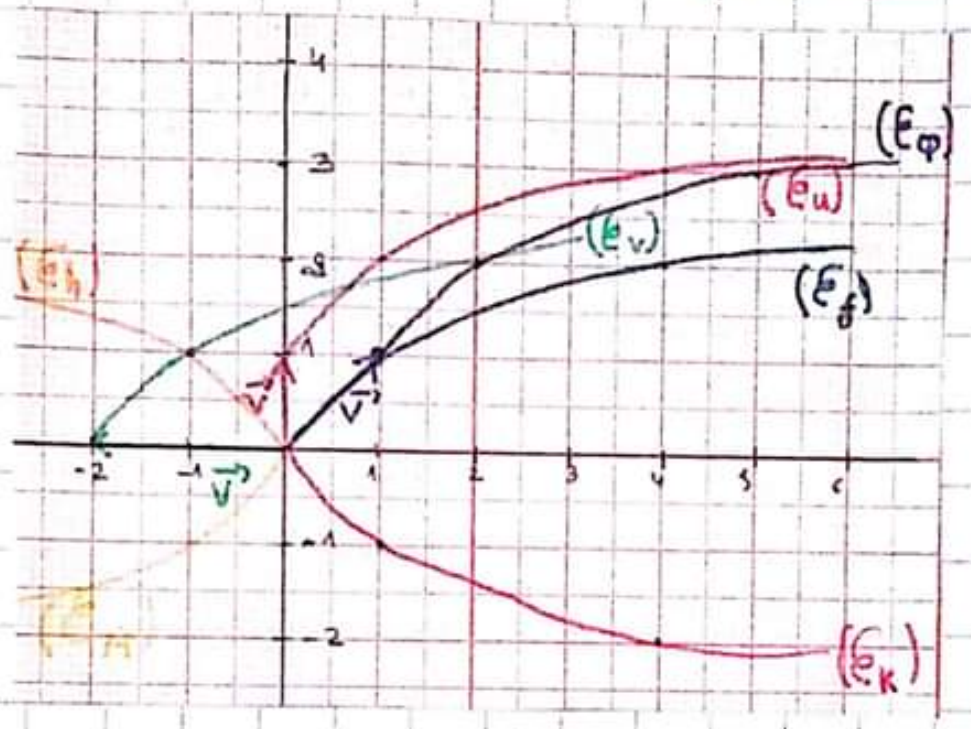
* إنطلاقا من المنحنى البياني للدالة f : إستنتج رسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$\varphi(x)=1+\sqrt{(x-1)}$	$v(x)=\sqrt{(x+2)}$	$u(x)=1+\sqrt{x}$
$M(x)=-\sqrt{(-x)}$	$K(x)=-\sqrt{x}$	$h(x)=\sqrt{(-x)}$

* إنطلاقا من منحنى الدالة ω : أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها. $L(x)=|\omega(x)|$
* إنطلاقا من منحنى الدالة T ، أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$g(x)=T(\|x\|)$	$L(x)=\|T(x)\|$
$\mu(x)=T(-\|x\|)$	$N(x)=\|T(\|x\|)\|$

حل التمرين:



1- من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

الحالة 01: $u(x) = f(x) + 1$

$u(x) = f(x) + 1 \quad / \quad u(x) = f(x+a) + b$

نستنتج $(\mathcal{C}_u)$ من $(\mathcal{C}_f)$ بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$

أي $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

الحالة 02: $v(x) = \sqrt{(x+2)}$

نستنتج $(\mathcal{C}_v)$ بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

الحالة 03: $\varphi(x) = 1 + \sqrt{(x-1)}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

الحالة 04: $h(x) = \sqrt{(-x)}$

$h(x) = f(-x)$

(C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

الحالة 05: $K(x) = -\sqrt{(x)}$

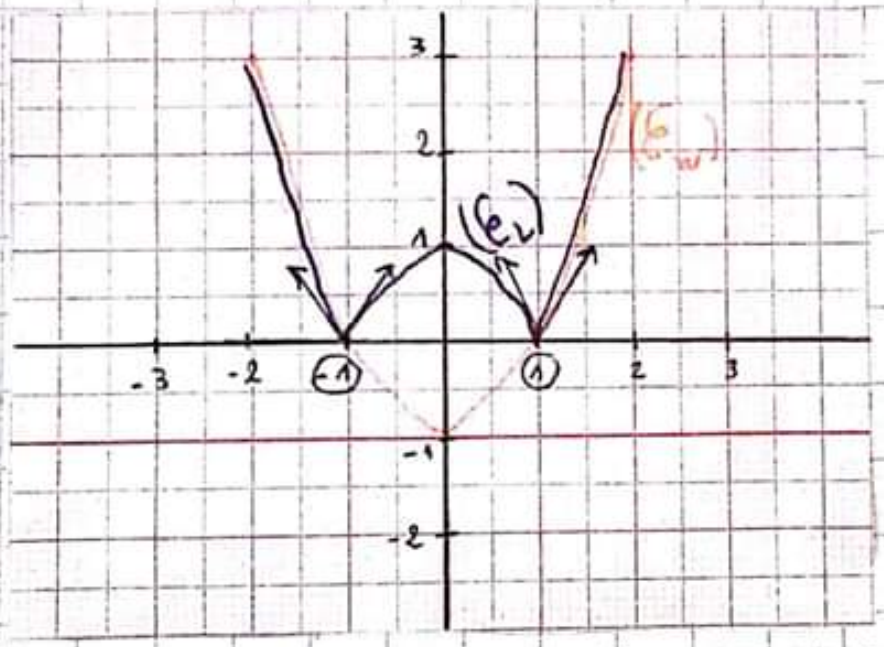
(C_K) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 06: $M(x) = -\sqrt{(-x)}$

(C_M) هو نظير (C_f) بالنسبة لمبدأ المعلم.

4- من المنحنى (C_w):

الحالة: $L(x) = |w(x)|$



1- على المجالات التي تكون فيها $w(x) \geq 0$ أي يكون (C_w) على محور الفواصل أو فوقه.

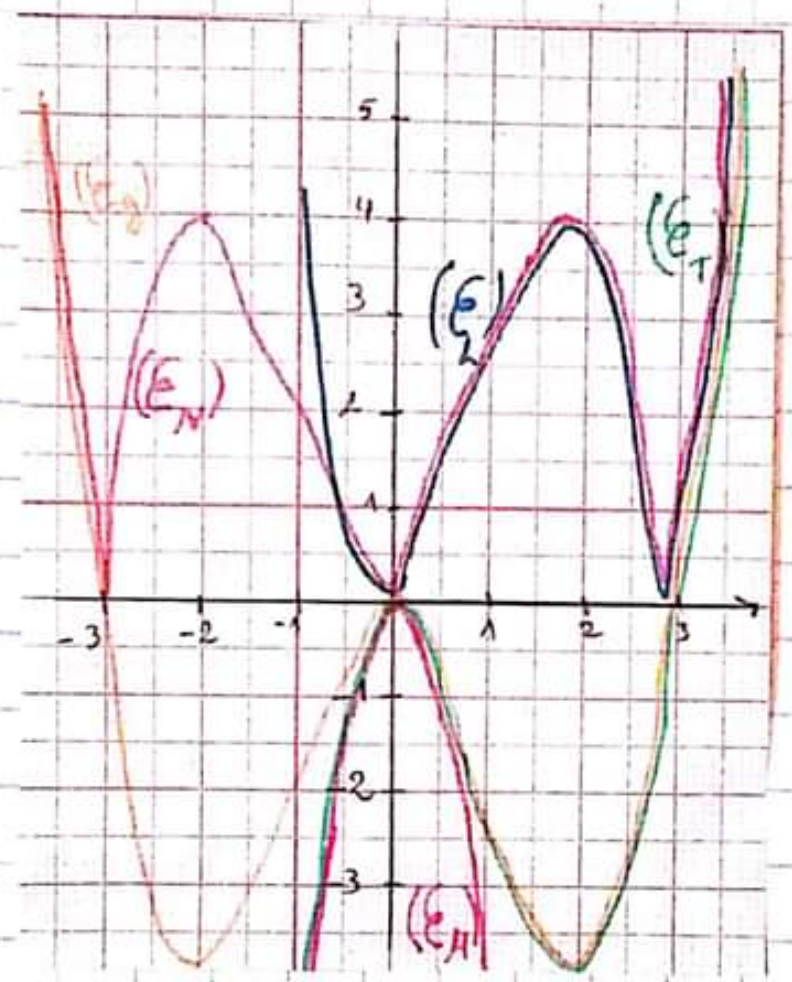
نحصل على $L(x) = w(x)$ ومنه (C_L) ينطبق على C_w.

2- على المجالات التي يكون فيها $w(x) < 0$ أي يكون (C_w) تحت محور الفواصل $L(x) = |w(x)|$

3- الدالة $L(x)$ لا تقبل الاشتقاق عند $x = -1$ و $x = 1$

لأن الدالة تقبل نصف مماس.

3- من المنحنى $(\mathcal{E}_T)$:



الحالة 01: $g(x)=T(|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يطلب منا أولا أن نثبت أن g زوجية.

الإجابة:

1- إذا كان $x>0$ و $x\in D_T$ (الجزء الموجب من D_T) نحصل على $g(x)=T(x)$ ومنه (C_g) ينطبق على (C_T)

2- نكمل الجزء المتبقي من (C_g) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن g زوجية.

الحالة 02: $M(x)=T(-|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يطلب منا أولا أن نثبت أن M زوجية

الإجابة:

1- إذا كان $x\leq 0$ و $x\in D_T$ (الجزء السالب من D_T)

نحصل على $M(x)=T(x)$ ومنه (C_M) ينطبق على (C_T)

2- تكمل الجزء المتبقي من C_M بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن M زوجية.

الحالة 03: $L(x)=|T(x)|$

1- على المجالات التي تكون فيها $T(x)\geq 0$ أي يكون فيها (C_T) على محور الفواصل أو فوقه.

نحصل على $L(x)=T(x)$

2- على المجالات التي تكون فيها $T(x)<0$ يكون (C_L) متناظر لـ (C_T) بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 04: $N(x)=|T(|x|)|$

1- (C_N) يقع فوق محور الفواصل لأن $|T(x)|$ الدالة N قيمها كلها موجبة لأن $N(x)\geq 0$

أي منحناها البياني (C_N) يقع فوق محور الفواصل

إلى الجزء السالب يناظر بالنسبة إلى (XX')

2- الدالة N زوجية $T(|x|)$

أي يكفي رسم الجزء من $[0,+\infty[$ و الجزء الآخر

يناظر بالنسبة لمحور التراتيب (yy').

ملاحظة:

$f(x) = T(|x|)$

يكفي رسم جزء $[0,+\infty[$ والجزء الآخر يناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

$f(x) = T(-|x|)$

يكفي رسم جزء $]-\infty,0]$ والجزء الآخر يناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

حساب النهايات للدوال العددية.

تمرين :

في كل حالة احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها وعين المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f

1- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$ والمعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$

2- $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ والمعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

3- $f(x) = \dfrac{-4x + 5}{x^2 - x}$ والمعرفة على $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

4- $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{(x+1)^2}$ والمعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$

حل التمرين:

الحالة 01 : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, +\infty[$

① $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

دالة ناطقة (أكبر حد على أكبر حد).

② $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل (أفقي).

$y = 1$

النهايات الشهيرة :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{1}{x-a} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{>} a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n - a} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

حيث u دالة تآلفية.

③

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim (x^2 - 2x - 15) \cdot \frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

تحليل المقام هو (الحل الأول - x)(الحل الثاني - x)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^2 - 2x - 15}{x-3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{(-1)^2 - 2(1) - 15}{(-1-3)} = \frac{12}{4} = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} (3 \times -\infty) = -\infty$$

④

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x-3} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(-1)^2 - 2(1) - 15}{-4} = 3 \end{cases}$$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (3)(+\infty) = +\infty$$

مستقيم مقارب موازي لمحور التراتيب (عمودي)

$x = -1$

⑤ $$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x+1} \cdot \frac{1}{x-3}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{1}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{(3)^2 - 2(3) - 15}{3+1} = -3 \end{cases}$$

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} (-\infty).(-3) = +\infty$$

⑥ $$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x+1} \cdot \frac{1}{x-3}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{(3)^2 - 2(3) - 15}{3+1} = -3 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{1}{x-3} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} (+\infty)(-3) = -\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x = 3$

الحالة 02: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ ①

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ②

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x-1)(x+1)}$ ③

$(x^2) - (1)^2$ هي فرق مربعين.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+1}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{1}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{(-1)^3 + 2(-1)^2}{-1-1} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} (-\infty)\left(\dfrac{-1}{2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+1}$ ④

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \dfrac{1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \dfrac{(-1)^3+2(-1)^2}{-1-1} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} (+\infty)\left(\frac{-1}{2}\right) = -\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x=-1$

⑤

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \dfrac{(1)^3+2(1)^2}{1+1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (-\infty)\left(\frac{3}{2}\right) = -\infty$$

⑥

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{(1)^3+2(1)^2}{1+1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (+\infty)\left(\frac{3}{2}\right) = +\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x = 1$

الحالة 03: $f(x) = \frac{-4x+5}{x^2-x}$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{x} = 0$ ①

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{x} = 0$ ②

مستقيم مقارب أفقي $y = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \frac{-4x+5}{x(x-1)} = \frac{-4x+5}{x-1} \cdot \frac{1}{x-0}$ ③

$$\begin{cases} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x-0} = -\infty \\ \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-4x+5}{x-1} = \frac{-4(0)+5}{0-1} = -5 \end{cases}$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} (-\infty)(-5) = +\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \frac{-4x+5}{x-1} \cdot \frac{1}{x-0}$ ④

$$\begin{cases} \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x-0} = +\infty \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-4x+5}{x-1} = -5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} (+\infty)(-5) = -\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x = 0$

⑤

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{-4x+5}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \to 1} \frac{-4x+5}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} (-\infty)(1) = -\infty$$

⑥

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{-4x+5}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \to 1} \frac{-4x+5}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} (+\infty)(1) = +\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x = 1$

الحالة 04 : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x+1)^2}$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$ ①

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$ ②

مستقيم مقارب أفقي $y = 1$

③

$$\lim_{x \overset{<}{>} -1} x^2 - 4x + 5 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \overset{<}{>} -1} x^2 - 4x + 5 = 10 \\ \lim_{x \overset{<}{>} -1} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{<}{>} -1} (10) \cdot (+\infty) = +\infty$$

مستقيم مقارب عمودي $x = -1$

ملاحظة:

$$f(x) = \frac{|x| + 1}{x - 1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} : x \geq 0, x \neq 1 \\ \frac{-x+1}{x-1} \quad x \leq 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \leq 0 \end{cases}$$

النهايات وإزالة حالات عدم التعيين

1. بالإختزال
2. بإستعمال التحليل
3. بإستعمال المرافق
4. بإستعمال العدد المشتق.

حالات عدم التعيين:

1_ $+\infty-\infty$, $-\infty+\infty$

2_ $0(\pm\infty)$

3_ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

4_ $\frac{0}{0}$

ولكن $\frac{5}{0^{\pm}}=\pm\infty$ وليست ح.ع.ت ....

1_ بالإختزال:

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

1_ $\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)$ و $\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)$. هل يمكن إستنتاج نهاية الدالة f عند -2؟

2_ قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2

3_ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2,1\}$، $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$

4_ إستنتج نهاية الدالة f عند -2.

حل التمرين :

① حساب النهايات

$$\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 + x + 2) = 0$$

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + x - 2) = 0$$

هل يمكن إستنتاج ؟

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

② لدينا (-2) جذر (عند التعويض نجد (0)) للعبارة x^2+x-2

لدينا (-2) جذر للعبارة x^3+2x^2+x+2.

نستعمل القسمة الإقليدية :

(-2) جذر إذن $x-(-2)$ يعني $x+2$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+x+2 & x+2 \\ \hline -\ x^3+2x^2 & x^2+1 \\ \hline 0+0+x+2 & \\ -\ x+2 & \\ \hline 0+0 & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-2 & x+2 \\ \hline -\ x^2+2x & x-1 \\ \hline 0-x-2 & \\ -\ -x-2 & \\ \hline 0\quad 0 & \\ 0 & \end{array}$$

$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

③ البرهان أن $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

④ إستنتاج نهاية الدالة عند (-2)

$\lim_{x \to -2} f(x)$

لدينا $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{-5}{3}$$

ملاحظة:

لما نجد نهاية هي $\frac{0}{0}$ وتكون العبارة $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ تحل بالإختزال.

إذا وجدت دالة اخرى مثل $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ فلا تحل بالإختزال بل بطريقة اخرى وهي العدد المشتق

2- بالتحليل:

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x) = 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

1. هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة؟ لماذا؟
2. بين أنه من أجل كل x من $]1,+\infty[$ $f(x) = x\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$
3. إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

حل التمرين:

① هل يمكن تعيين النهاية؟

معرفة إن كان علينا حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ مباشرة.

$$f(x) = \underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{2x}} + 1 - \sqrt{\underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{x^2}} + \underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{x}} - 2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty . -\infty$$ ح.ع.ت

إذن لا يمكننا حسابها مباشرة.

② البرهان أن $f(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right)$

$$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$$
$$= x\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$
$$= x\left(2 + \frac{1}{x}\right) - |x|\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}$$

ملحوظة:

نخرج x^2 بالقيمة المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x : x \geq 0 & [0, +\infty[\\ -x : x \leq 0 &]-\infty, 0] \end{cases}$$

وبما أن المجال $]1, +\infty[$ فهي موجبة أن x إذن:

$$f(x) = x\left(2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)$$

وهو المطلوب

③ إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = x\left(2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{0}}\right)$$

$$(+\infty)(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ملاحظة:

نستعمل هذه الحالة عندما:

$$f(x) = \alpha x + \beta \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

$$|\alpha| \neq \sqrt{|a|}$$

عندها نستعمل التحليل

اما إذا كان مثلا: $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}$

$$|1x| = \sqrt{|1x^2|}$$

فنحل بطريقة أخرى "المرافق"

3 - بالمرافق:

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2, +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x}$

1. تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل x من $[2, +\infty[$،

$$f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

3. إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

حل التمرين:

① التحقق أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم التعيين:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x^2-2x} = -\sqrt{+\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} +\infty - \infty$$ ح.ع.ت

② البرهان أن:

$$f(x) = \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)}$$

لدينا المتطابقة الشهيرة: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}\right)} = \frac{(x^2+1)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(\frac{1}{x}+2\right)}{x\left[\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]} = \frac{\frac{1}{x}+2}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

وهو المطلوب

③ إستنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{x}}} + 2}{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}} + \left(1+\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{2}{x}}}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

التفسير البياني: $y = 1$

مستقيم مقارب أفقي.

ملحوظة:

لما نجد $\lim_{x\to\pm\infty} (\alpha x + \beta \mp \sqrt{ax^2+bx+c})$

تحل بالمرافق إذا كان: $|\alpha| = \sqrt{|a|}$

4- العدد المشتق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$

1. هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة؟ لماذا؟

2. باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x \mapsto \cos x$

عين نهاية الدالة f عند 0.

حل التمرين:

① معرفة إن كان علي حساب $\lim_{x\to 0} f(x)$ مباشرة.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

② تعيين النهاية f عند 0:

قانون العدد المشتق:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0)$$

مع h قابلة للإشتقاق عند 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

أي:

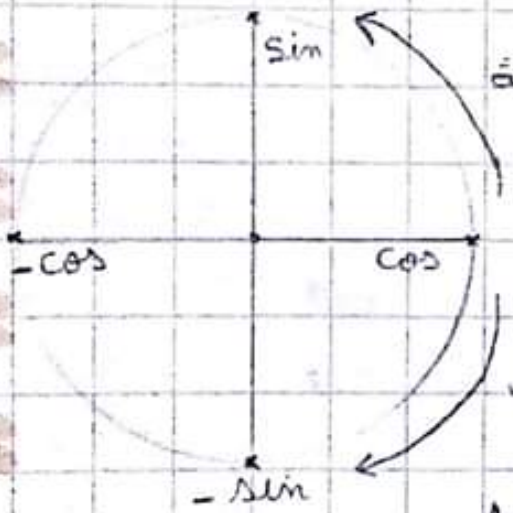
$h(x) = \cos x$

$h(0) = \cos(0) = 1$

$h(x)$ (الدالة الغريبة)

والدالة h : $x \mapsto \cos x$ تقبل الإشتقاق عند (0)

لأن $\cos(0) = 1$



الدوال الأصلية

$$\begin{cases} h'(x) = -\sin(x) \\ h'(0) = -\sin(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

الإشتقاق

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

مثال توضيحي:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$h(x) = \sqrt{x+3}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$h'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{4}$$

ملحوظة:

نستعمل هذه الحالة عندما: يكون النهاية $\frac{0}{0}$

و تكون الدالة على شكل ليست كثير حدود / كثير حدود.

النهايات والمستقيمات المقاربة

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

1. احسب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى -2.
2. عين الأعداد a, b, c حيث من اجل كل عدد حقيقي من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
3. جد معادلة لمستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.
4. تحقق أن (Δ) مقارب للمنحني (C) بجوار $-\infty$.
5. حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

حل التمرين:

1) حساب نهاية الدالة f عند:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \to -2} 2x^2 + 3x + 1 \cdot \frac{1}{x+2} = 3 \cdot -\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2} 2x^2 + 3x + 1 \cdot \frac{1}{x+2} = 3 \cdot +\infty = +\infty$$

م . م . عمودي $x = -2$

ملاحظة:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

فهناك إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته

$y = ax + b$ نتأكد منه بـ $\lim_{x \to \infty} [f(x) - y] = 0$

② تعيين إيجاد a ، b ، c:

أ- بواسطة القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 3x + 1 & x + 2 \\ \hline -\ 2x^2 + 4x & 2x - 1 \\ \hline 0 \quad -x + 1 & \\ -\ -x - 2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$(2x - 1)(x + 2) + 3$$

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \frac{(2x - 1)(x + 2) + 3}{(x + 2)} = \frac{(2x - 1)(x + 2)}{(x + 2)} + \frac{3}{(x + 2)}$$

$$= 2x - 1 + \frac{3}{x + 2}$$

وبالمطابقة نجد

$a = 2$; $b = -1$; $c = 3$

فتصبح

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x + 2}$$

ب- طريقة المطابقة:

المراحل:

1- توحيد المقامات.

2- نشر وترتيب القوى

3- المطابقة

توحيد المقامات والنشر وترتيب القوى

$$ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{ax(x+2)+b(x+2)+c}{x+2}$$

$$=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}=\frac{2x^2+3x+1}{x+2}$$

$a=2$; $2a+b=3 \Rightarrow b=-1$; $2b+c=1 \Rightarrow c=3$

إذن

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{x+2}$$

③ إيجاد معادلة المستقيم المائل (Δ) بجوار $+\infty$:

قاعدة:

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{x+2}$$

$$h(x)=\frac{3}{x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{+\infty}=0$$

إذن $(\Delta): y=2x-1$ م.م مائل بجوار $+\infty$

1- توحيد المقامات.

2- نشر وترتيب القوى

3- المطابقة

توحيد المقامات والنشر وترتيب القوى

$$ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{ax(x+2)+b(x+2)+c}{x+2}$$

$$=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}=\frac{2x^2+3x+1}{x+2}$$

$a=2$; $2a+b=3 \Rightarrow b=-1$; $2b+c=1 \Rightarrow c=3$

إذن

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{x+2}$$

③ إيجاد معادلة المستقيم المائل (Δ) بجوار $+\infty$:

قاعدة:

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{x+2}$$

$$h(x)=\frac{3}{x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{+\infty}=0$$

إذن $(\Delta): y=2x-1$ م.م مائل بجوار $+\infty$

④ حتى يكون (Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$ م.م. مائل يجب أن:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$$

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} 2x-1+\frac{3}{x+2}-[2x-1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+2}=\frac{3}{-\infty}=0$$

إذن $(\Delta): y=2x-1$ م.م. مائل بجوار $-\infty$

⑤ تحديد وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

لتحديد وضعية منحنى بالنسبة إلى مستقيم ندرس إشارة الفرق بـ $[f(x)-y]$ على D_f

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)-y=2x-1+\frac{3}{x+2}-(2x+1)$

$$=\frac{3}{x+2}$$

إشارة كسر من إشارة البسط في المقام.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
3	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$
$\frac{3}{x+2}$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C) يقع أسفل (Δ)	‖	(C) يقع فوق (Δ)

↑ إذا كان هنا معرفة "نقول نقطع" ولكن في هذه الحالة نقول غير معرفة فقط

حساب نهايات الدالة الجذرية بالقيمة المطلقة

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{|9x^2-1|}$ و

تمثيلها البياني (C_f)

1. حدد نهايات عند $-\infty$ و $+\infty$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$
3. إستنتج أن (C_f) له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما.

حل التمرين:

ها ملاحظة: (نكتب بدون القيمة المطلقة للتسهيل)

إذا كانت $f(x)=x+\sqrt{9x^2-1}$ دون رمز القيمة المطلقة، فتتغير مجموعة التعريف

$D_f : 9x^2-1\geq 0$ لأن $|\ |\geq 0$

$9x^2-1\geq 0 \iff 9x^2\geq 1 \iff x^2\geq \frac{1}{9}$

$\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

	$-\infty$		$-1/3$		$1/3$		$+\infty$
$9x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f=]-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},+\infty[$

القيمة المطلقة تتيح لنا كتابتين

$f(x)=x+\sqrt{9x^2-1}$: $x\in]-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[1/3,+\infty[$

$f(x)=x+\sqrt{1-9x^2}$: $x\in[-1/3,1/3]$

① $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{9x^2 - 1}\right) =$ ح.ع.ت

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2\left(9 - \frac{1}{x^2}\right)}\right] = \left[x + |x|\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

$$|x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \leq 0 \rightarrow]-\infty, 0] \end{cases}$$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x - x\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right] = x\left[1 - \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-\infty)(-2) = +\infty$$

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x + |x|\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right] = \left[x + x\sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\left[1 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} (+\infty)(4) = +\infty$$

② حساب النهايات:

عند $(+\infty)$:

$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 1} - 3x\right)$ ح.ع.ت $\sqrt{9} = |3| = -3$

إذن نحل بالمرافق.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2 - 1} - 3x\right)\left(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2 - 1} + 3x\right)} = \frac{\left(\sqrt{9x^2 - 1}\right)^2 - (3x)^2}{\sqrt{9x^2 - 1} + 3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{9x^2-1}+3x} = \frac{-1}{x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)} = \frac{-1}{x\cdot 6} = 0$$

عند $(-\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-1}+3x\right)$$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2-1}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2-1}-3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2-1}-3x\right.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)} = \frac{-1}{x\cdot 6} = 0$$

③ إستنتاج أن لـ $\mathcal{C}_f$ مستقيما ن مقاربان مائلان

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y]=0 \;,\; \lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)]=0$$

1. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=0$ وبما أن $y=4x$

أي $(\Delta): y=4x$ م.م. مائل بجوار $+\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=0$ وبما أن $y=-2x$

$(\Delta'): y=-2x$ م.م. مائل بجوار $-\infty$.

حساب نهايات الدالة الجذرية

تمرين :

أحسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

أ. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ عند $+\infty$

ب. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$

ج. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند 1.

د. $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند 1

حل التمرين :

أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty - \infty$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2-(x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{+\infty \cdot 2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y=0$ م.م. أفقي بجوار $+\infty$.

ب. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}$$

∞ نهايات شهيرة

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 \quad \frac{\sqrt{x}}{x}} = 1$$

∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$y=1$ م.م. أفقي بجوار $+\infty$

ج.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

نستعمل العدد المشتق :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0)$$

مشتقة $\sqrt{x+3}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

وبما أن الدالة $h(x)$ قابلة للإشتقاق عند 1 .

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{4}$$

مشتق ما بداخل الجذر على 2 ضرب الجذر

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

أو نستعمل المرافق :

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{4}$$

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ث

تستعمل المرافق:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(3+\sqrt{5x+4})(x+3-4)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(-5x+5)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4}} = \frac{-5.(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-5(\sqrt{4}+2)}{3+\sqrt{9}} = \frac{-10}{3}$$

تستعمل طريقة المشتق:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{-(\sqrt{5x+4}-3)}{x-1}}{\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}}$$

1. $$\frac{-(\sqrt{5x+4}-3}{x-1} = -h'(x) = -h'(1) = \frac{-5}{6}$$

$$-h(x) = -(\sqrt{5x+4})$$

$$-h'(1) = \frac{-5}{2\sqrt{5x+4}} = \frac{-5}{6}$$

2. $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = g'(1)$

$g(x) = \sqrt{x+3}$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-5/6}{1/4} = \dfrac{-10}{3}$.

حساب نهايات الدوال المثلثية

تمرين:

أحسب في كل حالة النهايات التالية

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(6x)}{x}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

حل التمرين:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(6x)}{x} = \frac{6 \sin(6x)}{6x} = 6$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} \sin(2x)}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x} \sin(2x)}{2x} = 2\sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = 0$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

دساتير التحويل :

1) $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$

$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) \quad | \quad a = x/2$

2) $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin^2(x) = (\sin x)^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leftarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} 2 \cdot \cos x \cdot \frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} 2\cos x \cdot \frac{x \cdot 1/2}{2 \cdot \sin(x/2) \cdot 1/2}$$

$$\lim_{x \to 0} 2\cos x \cdot \frac{x/2}{\sin(x/2)}$$

$$\lim_{x \to} \frac{x/2}{\sin(x/2)} = \frac{1}{\frac{\sin(x/2)}{x/2}} = \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} 2 \cdot \cos(0) \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$ .4

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/4 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1/4 \cdot x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2 \cdot 1/4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\frac{x^2}{2^2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

حساب النهايات باستعمال الحصر

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل x لدينا

$$1 \leq f(x) \leq 2$$

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة

$$g(x) = \frac{3f(x)+5}{x^3}$$

1. أعط حصرا للعبارة $g(x)$
2. استنتج $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

حل التمرين:

1. حصر $g(x)$

لدينا $1 \leq f(x) \leq 2$

$$3 \leq 3f(x) \leq 6$$

$$8 \leq 3f(x)+5 \leq 11$$

$$D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

أ- إذا كان $x \in]0, +\infty[$: $x > 0$ ، $x^3 > 0$

$$\frac{8}{x^3} \leq \frac{3f(x)+5}{x^3} \leq \frac{11}{x^3}$$

لأن x^3 فلا تتغير إتجاه المتراجحة

$$\frac{8}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{11}{x^3}$$

ب- إذا كان $x \in]-\infty, 0[$: $x < 0$

$$\frac{1}{x^3} < 0 \quad , \quad x^3 < 0$$

$$\frac{11}{x^3} \leqslant \frac{3f(x)+5}{x^3} \leqslant \frac{8}{x^3}$$

$$\frac{11}{x^3} \leqslant g(x) \leqslant \frac{8}{x^3}$$

2. إستنتاج $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

$$\frac{11}{x^3} \leqslant g(x) \leqslant \frac{8}{x^3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{11}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^3} = 0$$

حسب مبرهنة الحصر

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

إستنتاج $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

$$\frac{8}{x^3} \leqslant g(x) \leqslant \frac{11}{x^3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{11}{x^3} = 0$$

حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

مثال:

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$$

أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

حل المثال:

$$-1 < \sin(2x) \leq 1 \quad \text{.....} \quad ①$$

$$-1 \leq \sin(g(x)) \leq 1$$

$\sqrt{x} > 0$, $x > 0$ أي $x \in [0, +\infty[$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$$

بضرب ① في $\frac{1}{\sqrt{x}}$ نجد :

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$

حسب مبرهنة الحصر فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

حساب نهايات الدوال بالقيمة المطلقة

تمرين:

احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف في كل حالة.

1. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{|x-1|}$

3. $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

حل التمرين:

1. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$: $|x-1|$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 : x>1 \\ 1-x : x<1 \end{cases}$$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & : x \in]1,+\infty[\\ \dfrac{-(x-1)}{x^2-1} & : x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\end{cases}$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = 0$$

$y=0$ م.م أفقي.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1-x}{x^2-1} = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{-1}{\underbrace{x+1}_{-\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{-1}{\underbrace{x+1}_{+\infty}} = -\infty$$

$x=-1$ م.م عمودي.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

.2

$D_f : |x-1| \neq 0$

$x-1 \neq 0$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & : x > 1 \\ -(x-1) & : x < 1 \end{cases}$$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x-1} & : x\in\,]1,+\infty[\\[2ex] -\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}\right) & : x\in\,]-\infty,1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{-(x^2+3)}{x+1}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}-(x^2+3)\cdot\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{=-\infty}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}(-4\cdot-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}(4\cdot+\infty)=+\infty$$

$x=1$ م.م. عمودي.

.3

$$f(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$		$\frac{x-1}{x+1}$	‖	$-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	0	$\frac{x-1}{x+1}$	

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$

$y = 1$ م.م. أفقي.

$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+1} = x - 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{-\infty}$

$\lim_{x \to -1} -2 \cdot -\infty = +\infty$

$\lim_{x \to -1} -\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \to -1} -(x-1) \cdot \frac{1}{x+1} = +\infty$

$x = -1$ م.م. عمودي.

دراسة قابلية الاشتقاق دالة عند عدد حقيقي

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{3x+2}{|x-1|+3}$

1. أكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.
2. أ- ادرس قابلية اشتقاق f على يمين العدد 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_1).

   ب- ادرس قابلية اشتقاق f على يسار العدد 1، ثم اكتب معادلة نصف المماس (T_2).

حل التمرين:

1. كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة:

$$f(x)=\frac{3x+2}{|x-1|+3}\qquad \begin{cases}\dfrac{3x+2}{x+2} & x\geq 1\\[2ex] \dfrac{3x+2}{-x+4} & x<1\end{cases}$$

$$|x-1|\begin{cases}x-1 : x\geq 1 & : x\in[1,+\infty[\\ -x+1 : x\leq 1 & : x\in]-\infty,1[\end{cases}$$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	0	$x-1$

2. أ. دراسة قابلية الإشتقاق على يمين العدد 1

. لمعرفة قابلية الإشتقاق على الدالة f على يمين العدد 1

نحسب: $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 = f'(x_0)$

إذا وجدت أن تساوي l_1 فإن الدالة تقبل الإشتقاق على يمين 1.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\frac{3x+2}{x+2} - \frac{5}{3}}{x-1}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\frac{9x+6-5x-10}{3(x+2)}}{x-1} = \frac{4x-4}{(x-1)3(x+2)}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{4(x-1)}{(x-1)3(x+2)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{4}{3(x+2)} = \frac{4}{9}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{4}{9} \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 1.

أي $f'(1) = \frac{4}{9}$

معادلة نصف المماس (T_1) : $x \geq 1$

$$y = f'(x)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$y = \left(\frac{4}{9}(x-1) + \frac{5}{3}\right)$$

ب- دراسة قابلية الإشتقاق f على يسار العدد 1

لمعرفة قابلية الإشتقاق f على يسار 1

نحسب $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

إذا وجدت ايضا $l_2 \in \mathbb{R}$ فإن

f تكون قابلة للاشتقاق على يسار العدد 1

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\frac{3x+2}{-x+4} - \frac{5}{3}}{x-1} = \frac{3(3x+2) - 5(-x+4)}{3(-x+4)}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{9x+6+5x-20}{3(-x+4)} \cdot \frac{1}{(x-1)} = \frac{14x-14}{3(-x+4)(x-1)}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{14(x-1)}{3(-x+4)(x-1)} = \frac{14}{3(-x+4)} = \frac{14}{9} \in \mathbb{R}$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار العدد 1.

أي $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{14}{9} = f'(1)$

معادلة نصف المماس T_2 $x < 1$

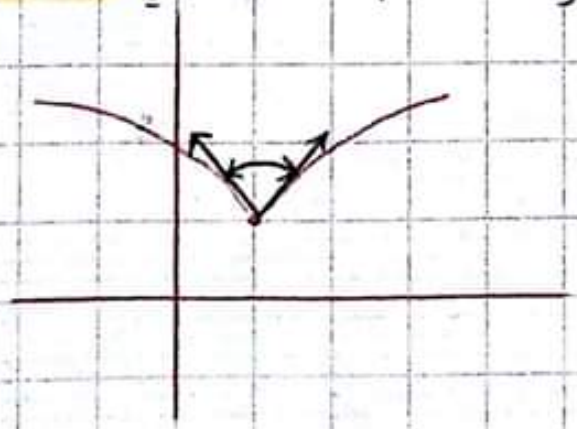
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = \frac{14}{9}(x-1) + \frac{5}{3}$$

* وبما أن $\frac{11}{9} \neq \frac{14}{9}$ أن $l_1 \neq l_2$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

ومنحناها البياني يقبل نصفي مماس معامل توجيه الأول $\frac{14}{9}$ والأخر $\frac{4}{9}$ والنقطة $A(1, f(1))$ هي نقطة زاوية.

توضيح:



الإشتقاقية

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=4x-6$ وليكن h عدد حقيقي غير معدوم.

1. عين نسبة تزايد الدالة بين العددين -1 و $-1+h$
2. استنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق من أجل -1، وعين $f'(-1)$
3. هل الدالة f تقبل الاشتقاق من اجل 0.

حل التمرين:

1. تعيين نسبة تزايد الدالة f بين العددين -1 و $-1+h$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{4h-10(-1)}{h}=\frac{4h}{h}=4$$

$f(-1)=-10$

$f(-1+h)=4(-1+h)-6=-4+4h-6=4h-10$

إذن نسبة التزايد بين -1 و $-1+h$ للدالة f هي 4.

2. استنتاج أن الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل $x_0=-1$

حتى تقبل f للإشتقاق عند $x_0=-1$

وجدنا $l=4=f'(-1)$

3 هل الدالة f تقبل الإشتقاق من $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{4h - 6 + 6}{h} = \frac{4h}{h} = 4 \in \mathbb{R}$$

ومنه f تقبل الإشتقاق عند $x_0 = 0$ وعددها المشتق

$f'(0) = 4$

قانون العدد المشتق:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad | \quad h \neq 0$$

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $[2, +\infty[$ ب

$f(x) = \sqrt{x-2}$

برهن أن الدالة f تقبل الإشتقاق من اجل 7، وعين العدد $f'(7)$

حل التمرين:

البرهان أن الدالة f تقبل الإشتقاق من اجل $x_0 = 7$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = \frac{\sqrt{7+h-2} - \sqrt{5}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h} = \frac{0}{0} \text{ ع.ت.ت}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+5}-\sqrt{5})(\sqrt{h+5}+\sqrt{5})}{h(\sqrt{h+5}+\sqrt{5})}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{h+5})^2-(\sqrt{5})^2}{h(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}} = \frac{h+5-5}{h(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{h+5}+\sqrt{5}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$$ ومنه

ومنه الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0=7$ و
عددها المشتق $f'(7)=\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $[-3,+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\sqrt{3+x}$$

1. بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم h حيث $h>-4$ لدينا

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$$

2. بين أن $$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

3. إستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند القيمة 1، و عين $f'(1)$.

. احسب معادلة المماس T عند الفاصلة 1.

حل التمرين:

1. البرهان أن: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{3+1+h}-\sqrt{3+1}}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}$$

و منه: $\frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$

2. البرهان أن: $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h}}$

لدينا $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+4}-2}{h}$ (من الجواب السابق)

$$= \frac{(\sqrt{h+4}-2)(\sqrt{h+4}+2)}{h(\sqrt{h+4}+2)} = \frac{(h+4)-2^2}{h(\sqrt{h+4}+2}$$

$$= \frac{h+4-4}{h(\sqrt{h+4}+2)} = \frac{h}{h(\sqrt{h+4}+2}$$

و منه $= \frac{1}{\sqrt{h+4}+2}$

3. أ- إستنتاج الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0=1$.

حتى يقبل f الإشتقاق عند $x=1$ يجب أن:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x = 1$ و

عددها المشتق $f'(1) = \frac{1}{4}$.

5- معادلة المماس T عند $x = 1$

$$y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 1) + 2$$

$$y = \frac{x - 1}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{x - 1 + 8}{4} = \frac{x + 7}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

إذن $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ هي معادلة المماس T.

مشتقات الدوال العددية

تمرين:

باستعمال النظريات على المشتقات، أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$

2. $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 5$

3. $f : x \mapsto \frac{3x^2 + 12x + 1}{6}$

4. $f : x \mapsto \sqrt{3x^4} - \sqrt{2x^3} - \sqrt{6x^2} + 3x - 5.$

حل التمرين:

$[x^n]' = n x^{n-1}$ $\quad$ $(\lambda f)' = \lambda f'$

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 3(2)x^1 - 4$

$f'(x) = 6x - 4$

2. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 5$

$f'(x) = \frac{2}{2}x - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$

3. $f(x) = \frac{3x^2 + 12x + 1}{6}$

$f'(x) = \frac{1}{6}(6x + 12) = x + \frac{12}{6} = x + 2$

4. $f(x) = \sqrt{3}x^4 - \sqrt{2}x^3 - \sqrt{6}x^2 + 3x - 5$

$f'(x) = 4\sqrt{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود

تمرين:

باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f : x \longmapsto \frac{-2}{x}$

2. $f : x \longmapsto \frac{-x+1}{x+2}$

3. $f : x \longmapsto 2x + 1 - \frac{x+1}{x-3}$

4. $f : x \longmapsto \frac{2x^2+3x-1}{x^2-3}$

حل التمرين:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

1. $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(x) = \frac{-2}{x}$

$f'(x) = \frac{0(x) - 1(-2)}{x^2} = \frac{2}{x^2}$

2. $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f(x) = \frac{-x+1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+2)-1(-x+1)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

3. $f(x) = 2x + 1 - \frac{x+1}{x-3}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$f'(x) = 2 + 0 - \frac{1(x-3) - 1(x+1)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{4}{(x-3)^2}$$

4. $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{(x^2-3)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(x^2-2)-(2x+3x-1)}{(x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2-10x-9}{(x^2-3)^2}$$

تمرين:

باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f : x \longmapsto (3x-2)^2$
2. $f : x \longmapsto 3\sqrt{x} - 2$
3. $f : x \longmapsto \sqrt{x-3}$
4. $f : x \longmapsto \sqrt{2-3x}$
5. $f : x \longmapsto (2x-3)\sqrt{x}$

$f : x \longmapsto (x^2+2x-3)\sqrt{-x+3}$ .6

حل التمرين:

$f(x) = (3x-2)^2$ .1

$f(x) = 9x^2 - 12 + 4$

$f'(x) = 18x - 12$

$f(x) = 3\sqrt{x} - 2$ .2

$$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$D_f = [0, +\infty[\; : \; x \geq 0$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$f'(x) = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$f(x) = \sqrt{x-3}$ $D_f = [3, +\infty[$ .3

f دالة قابلة للإشتقاق على $[3, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$f(x) = \sqrt{2-3x}$ .4

$2 - 3x \geq 0 \iff x \leq \frac{2}{3}$

$D_f =]-\infty, \frac{2}{3}]$

f قابلة للإشتقاق على مجال $]-\infty, \frac{2}{3}[$

$f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$

$f(x) = (x^2+2x-3)\sqrt{-x+3}$ .5

$(u.v)' = u'v + v'u$

$-x+3 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$ $\qquad D_f =]-\infty, 3]$

$f'(x) = ((2x+2)\sqrt{-x+3}) + \left(\frac{-1}{2\sqrt{-x+3}}\right)(x^2+2x-3)$

$f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$ $\qquad D_f = [0, +\infty[$ .6

$f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-3) = 2\sqrt{x} + \frac{2x-3}{2\sqrt{x}}$

تمرين:

باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f: x \longmapsto \cos(3x+2)$
2. $f: x \longmapsto \sin(3x-2)$
3. $f: x \longmapsto \sin x . \cos x$
4. $f: x \longmapsto \sin(x-2\pi) . \cos(x+\pi)$
5. $f: x \longmapsto \cos^2 3x$

حل التمرين:

$[(v \circ u)(x)]' = u'(x) . v'[u(x)]$

$[\cos(x)]' = -\sin(x)$

$[\sin(x)]' = \cos(x)$

$f(x) = \cos(3x+2)$ .1

$f'(x) = -3\sin(3x-2)$

$f(x) = \sin(3x - 2)$ .2

$f'(x) = 3\cos(3x - 2)$

$f(x) = \sin x \cdot \cos x$ .3

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + (-\sin x)(\sin x)$

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$f(x) = \sin(x - 2\pi) \cdot \cos(x + \pi)$ .4

$f'(x) = 1 \cdot \cos(x - 2\pi) \cdot \cos(x + \pi) +$

$1(-\sin(x + \pi) \cdot \sin(x - 2\pi)$

$f(x) = \cos^2 3x$ .5

$[[f(x)]^n]' = n f'(x) f^{n-1}(x)$

$f(x) = [\cos(3x)]^2$

$f'(x) = 2 \cdot [-3\sin(3x)][\cos(3x)]$

$f'(x) = -6\sin(3x) \cdot \cos 3x$

القيم الحدية المحلية للدالة

تمرين:

f_m دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بالعبارة:

$f_m = \dfrac{x^2+mx}{x^2-1}$ مع m وسيط حقيقي.

1. أحسب $f'_m(x)$.
2. أ) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m تقبل قيمة حدية محلية وحيدة؟

ب) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m لا تقبل قيم حدية محلية؟

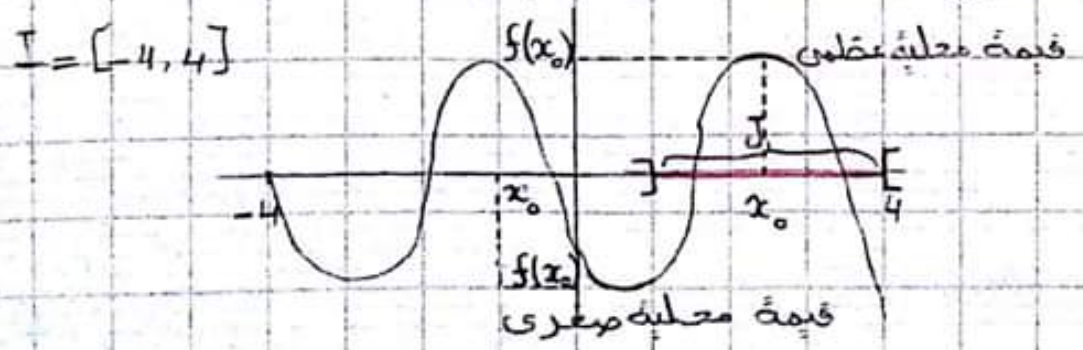
ج) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m تقبل قيمتين حديتين محليتين احداهما صغرى والأخرى عظمى؟

حل التمرين:

تعاريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

• القول $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J يحتوي في I و يشمل x_0 بحيث من اجل كل x من J، $f(x) \leq f(x_0)$



• القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من اجل كل x من J ، $f(x) \geq f(x_0)$

• القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى

• المشتقة تنعدم $f(x)=0$ عند x_0 .

1. حساب $f'_m(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ودالتها المشتقة:

$$f'_m(x) = \frac{(2x+m)(x^2-1) - 2x(x^2+mx)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'_m(x) = \frac{\cancel{2x^3} - 2x + mx^2 - m - \cancel{2x^3} - 2mx^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'_m(x) = \frac{-mx^2 - 2x - m}{(x^2-1)^2}$$

إشارة $f'_m(x)$ من إشارة البسط

$-mx^2 - 2x - m$

2. أ- تعيين قيمة m حتى f_m تقبل قيمة حدية محلية وحيدة:

حتى تكون لـ f_m قيمة حدية محلية وحيدة يجب أن $f'_m(x)$ تنعدم وتغير من اشارتها عند قيمة وحيدة.

$(-mx^2 - 2x - m)$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن الدالة متزايدة أو متناقصة تماما.

إذا كان $\Delta < 0$ لا تقبل قيم حدية

إذا كان $\Delta > 0$ تقبل قيمتين حديتين.

• إذا كان $m = 0$

$$f_0'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

إشارة $f_0'(x)$ من إشارة $-2x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

القيمة المحلية الوحيدة لـ f_m هي $f(0)$ عند $x=0$

ب- إذا كان $m \neq 0$

أي إشارة $f_m'(x)$ من إشارة كثير الحدود.

$$\Delta_m = b^2 - 4ac$$

$$\Delta_m = 4 - 4(-m)(-m)$$

$$\Delta_m = 4 - 4m^2$$

$$\Delta_m = 4(1 - m^2)$$

إذا كان $\Delta_m = 0 : 4(1-m^2) = 0$

$4 \neq 0$ $\quad 1 - m^2 = 0$ $\quad \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

$m^2 = 1$

m	$+\infty$		-1		0		1		$-\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

• لا تكون لـ f_m قيم حدية إذا كانت $f'_m(x) \geq 0$ أو $f'_m(x) \leq 0$ و لا تغير إشارتها، أي لا تنعدم أصلا.

• $(-mx^2-2x-m) \leq 0$ إذا كان $\Delta < 0$ (متناقصة) أو

• $(-mx^2-2x-x) \geq 0$ إذا كان $\Delta < 0$ (متزايدة).

أي $m \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

و تكون لـ f_m قيمتين حديتين محليتين إحداهما عظمى و الأخرى إذا كان $\Delta > 0$.

أي $f'_m(x)$ تنعدم و تغير إشارتها مرتين إما إحداهما موجبة و الأخرى سالبة أو العكس

$m \in]-1, 0[\cup]0, 1[$

مثال:

x		-4		5	
	$-$	0	$+$	0	$-$
	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

خلاصة:

$m = 0$

$f'_0(x)$ عبارة من الدرجة 1 $(-2x)$

$m \neq 0$

$\Delta = 4 - 4m^2$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\Delta_m < 0$ $\qquad$ $m \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty$

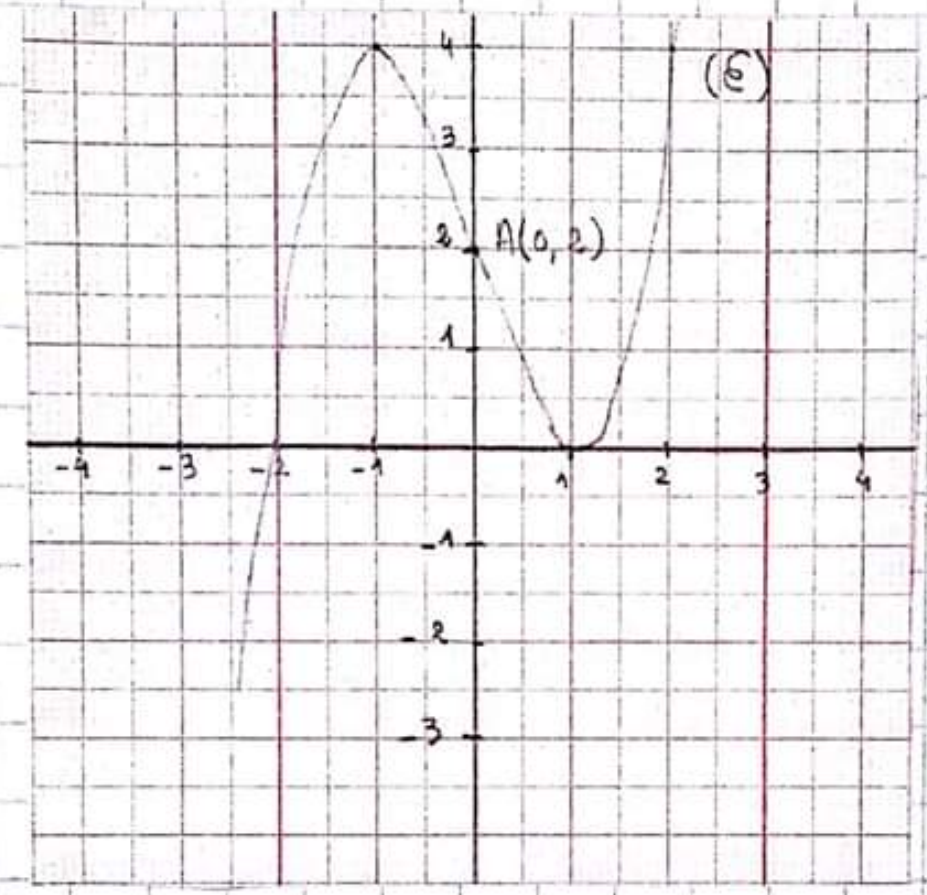
$f'_m(x) \geq 0$

$f'_m(x) \leq 0$

$\Delta_m > 0$

$f_m(x)$ تنعدم و تغير اشارتها مرتين.

نقطة الإنعطاف



الحالة 1:

يقبل المنحنى (C) نقطة إنعطاف $A(x_0, f(x_0))$ إذا وفقط

① المشتقة الثانية $f''(x)$

② تنعدم عند x_0

③ و تغير إشارتها.

مثال:

①

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f''(x) = 6x$$

② $f''(x) = 0 \qquad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

③

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	

ومنه (C) يقبل نقطة إنعطاف $A(0, f(0))$

$A(0, 2)$

الحالة 2:

① المشتقة الأولى $f'(x)$

② تنعدم.

③ ولا تغير إشارتها.

مثال:

① $f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$

② $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3x^2$		$+$	0	$+$	

ومنه (C) يقبل نقطة إنعطاف $B(0, 1)$

مثال 2:

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

$f''(x) = 6x - 8$

$6x - 8 = 0 \iff x = \frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$4/3$		$+\infty$
$6x-8$		$-$	0	$+$	

و منه (C) يقبل نقطة إنعطاف $A\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

معادلة المماس والحالات الست للأسئلة

المماس:

هناك ست صيغ - تقريبا - لطرح سؤال المماس، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي مفتاح الإجابة على أي منها كما نرى.

1- الصيغة الأولى (العادية):

أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

الإجابة:

نكتب الدستور $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطاة.

2- الصيغة الثانية:

أكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الترتيب y_0.

الإجابة:

نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.

3- الصيغة الثالثة:

بيّن أنه يوجد مماس أو أكثر - للمنحنى C_f ميله (أو معامل توجيهه) يساوي (أو يوازي) a

الاجابة:

نحل المعادلة $f'(x_0) = a$، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدل على عدد المماسات

4- الصيغة الرابعة:

بين انه يوجد مماس - أو أكثر - للمنحنى C_f يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$

الإجابة:

نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ (عدنا إلى الحالة الثانية)

5- الصيغة الخامسة:

بين أنه يوجد مماس - أو أكثر - للمنحنى C_f يعامد المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$

الإجابة:

نحل المعادلة $a.f'(x_0)=-1$

6- الصيغة السادسة:

بين أنه يوجد مماس - أو أكثر - للمنحنى C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α, β).

الإجابة:

نحل المعادلة $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$

عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.

المناقشة البيانية : الأفقية المائلة الدورانية

تمرين :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$: (Δ)

مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+1$ و منحناها البياني

الممثل في الشكل المقابل في معلم متعامد و متجانس .

المطلوب :

ناقش بيانيا عدد و اشارة حلول المعادلة في كل حالة حسب

قيم الوسيط m :

① $f(x)=m$; $f(x)=-m$; $f(x)=m+1$ مناقشة

$f(x)=m-1$; $f(x)=|m|$; $f(x)=m^2$ اشارة

$1+\frac{1}{x+1}=m$ مناقشة مائلة

② $f(x)=m(x+1)$: مع $(\Delta_m) : y=m(x+1)$

أ- بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة وحيدة

مهما كان $m\in\mathbb{R}$ يطلب تعيين إحداثياتها .

ب- ثم ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة

$f(x)=m(x+1)$ مناقشة دورانية

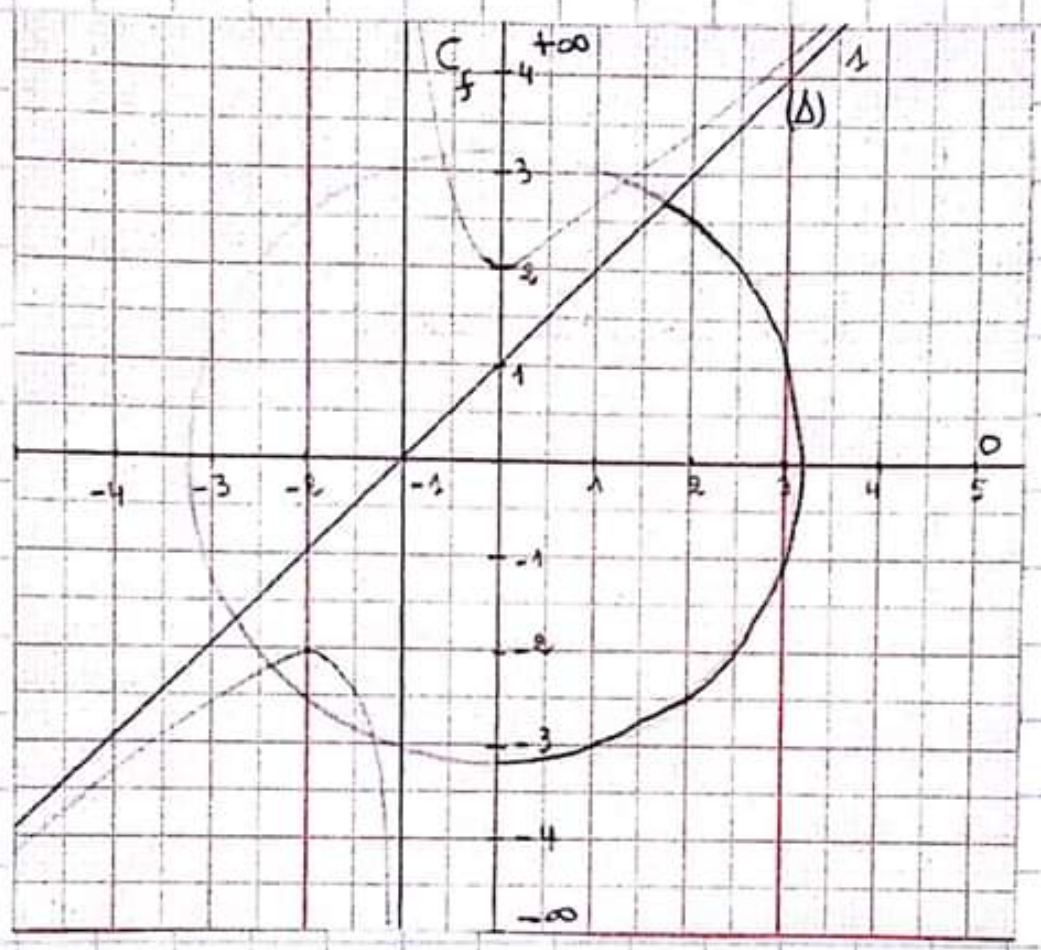
حل التمرين :

الحالة الأولى :

حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع

المستقيم ذو المعادلة $y=m$

(المستقيم موازي لمحور الفواصل من دم و يرتفع ...)



- $m \in]-\infty, -2[$ m وسيط (مختلف)

للمعادلة حلان سالبان ومتمايزان

- $m = -2$

$x = -2$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

- $m \in]-2, 2[$

لا يوجد حلول للمعادلة

- $m = 2$

$x = 0$ للمعادلة حلا مضاعفا

- $m \in]2, +\infty[$

للمعادلة حلان متمايزان إحداهما موجب و الآخر سالب.

2) حلول المعادلة $f(x)=-m$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y=-m$

(المستقيم موازي لمحور الفواصل من هـ و يرتفع ...)

$m=-y$

- $y \in]-\infty, -2[$ $\quad m \in]2, +\infty[$

$(-\infty)\times(-)$ $\quad (-2)\times(-)$

للمعادلة حلان سالبان

- $y=-2$; $m=2$

للمعادلة حل مضاعفا $x=-2$

- $y=]-2, 2[$ $\quad m \in]-2, 2[$

$(-2)(-)$ $\quad (2)(-)$

لا يوجد حلول للمعادلة

- $y=2$ $\quad m=-2$

للمعادلة حل مضاعفا $x=0$.

- $y \in]2, +\infty[$ $\quad m \in]-\infty, -2[$

للمعادلة حلان إحداهما سالب والآخر موجب

3) حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y=m+1$

$m=y-1$

• $y \in]-\infty, -2[$ $\quad m \in]-\infty, -3[$

$(-\infty - 1)$ $\quad (-2 - 1)$

للمعادلة حلان سالبان

• $y = -2$ $\quad m = -3$

للمعادلة حل مضاعف $x = -2$

• $y \in]-2, 2[$ $\quad m \in]-3, 1[$

لا يوجد حلول للمعادلة.

• $y = 2$ $\quad m = 1$

للمعادلة حل مضاعف $x = 0$

• $y \in]2, +\infty[$ $\quad m \in]1, +\infty[$

للمعادلة حلان إحداهما سالب والآخر موجب

4) حلول المعادلة $f(x) = m - 1$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m - 1$

$m = y + 1$

• $y \in]-\infty, -2[$ $\quad m \in]-\infty, -1[$

للمعادلة حلان سالبان

• $y \in -2$ $\quad m = -1$

للمعادلة حل مضاعف $x = -2$

• $y \in]-2, 2[$ $\quad m \in]-1, 3[$

لا يوجد حلول للمعادلة

• $y = 2$ $\quad m = 3$

للمعادلة حل مضاعف $x = 0$

• $y \in]2, +\infty[$ $\qquad$ $m \in]3, +\infty[$

للمعادلة حلان احداهما موجب والأخر سالب.

5 حلول المعادلة $f(x)=|m|$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|$

$y \geq 0 \qquad |m| \geq 0$

• $2 > y \geq 0 \qquad 2 > |m| \geq 0$

$2 > |m|$

$m \in]-2, 2[$

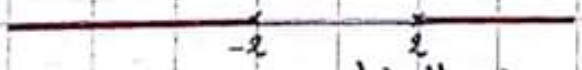
لا يوجد حلول

• $y = 2 \qquad : \qquad |m| = 2$

$m = -2$ أو $m = 2$

للمعادلة حل مضاعفا

• $y > 2 \qquad m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$



$|m| > 2$

للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة.

6 حلول المعادلة $f(x)=m^2$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم ذو المعادلة $y=m^2$

$m^2 \geq 0 \qquad y \geq 0$

• $2 > y \geq 0 \qquad 2 > m^2 \geq 0$

$\sqrt{2} > |m|$

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

$m \in]\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

لا يوجد حلول للمعادلة

- $y = 2 = m^2 \iff \sqrt{y} = \sqrt{2} = |m|$

$|m| = \sqrt{2}$

$m = \sqrt{2}$ أو $m = -\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

للمعادلة حلا مضاعفا.

- $y > 2$ $\quad m^2 > 2$

$|m| > \sqrt{2}$

$m \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة.

$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

3 شيء فيه $f(x) = m$: $1 + \frac{1}{x+1} = m$

لدينا $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$

$x + 1 + \frac{1}{x+1} = m + x$

$f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x+m$

$y=x+1$

$(\Delta_m) // (\Delta)$

$y=ax+b$

$y=x+m$

$m \in]-\infty, 1[$

للمعادلة حل سالب

$m=1$

لا يوجد حلول للمعادلة.

$m \in]1, 2[$

للمعادلة حلا موجبا

$m=2$

للمعادلة حلا موجبا

$m \in]2, +\infty[$

للمعادلة حلا سالبا.

1- لتكن $A(x_0, y_0)$ نقطة ثابتة مهما $m \in \mathbb{R}$

$A \in (\Delta_m)$ $\qquad y_0 = m(x_0+1)$

$m(x_0+1) - y_0 = 0$

$x_0 + 1 = 0$: $x_0 = -1$

$-y_0 \overset{?}{=} 0$: $y_0 = 0$

$A(-1, 0)$ ومنه جميع المستقيمات (Δ_m) نقطة وحيدة $A(-1,0)$.

ب- المناقشة البيانية دورانية

حلول المعادلة $f(x)=m(x+1)$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) : $y=m(x+1)$

$y=ax+b$

$m \in]-\infty, 1]$

لا يوجد حلول

معامل التوجيه

$m \in]1, +\infty[$

للمعادلة حلان متمايزان.

الإستمرارية :

1- تعريف الاستمرارية :

• f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f .

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$

• (f مستمرة عند a) يعني $(\lim_{x \to a} f(x) = f(a))$

التفسير البياني :

مستمرة : عند الرسم لا نرفع القلم

غير مستمرة : عند الرسم نرفع القلم.

ملاحظة :

القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

نتائج :

• الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

مثل: $ax+b$ ، $\sqrt{x}$ ، x^2 ، $\frac{1}{x}$

• الدوال كثيرات الحدود ، $\sin$ ، $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

• الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود مثل $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة :

• الدالة $x \mapsto 2x^2-3x+4$ مستمرة على $\mathbb{R}$

• الدالة $x \mapsto \frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على المجالات $]-\infty,-1[$ ، $]-1,1[$ ، $]1,+\infty[$

تطبيق :

ادرس استمرارية الدالة f عند a في كل حالة :

1- $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $a = 0$

2- $f(x) = x^2$ عند $a = 2$

3- $f(x) = \sqrt{x}$ عند $a = 0$

4- $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \in [-1, 2[\\ x - 1 & : x \in [2, 5[\end{cases}$ عند $a = 2$

حل التطبيق :

1. تكون f مستمرة عند a إذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$f(x) = \frac{1}{x}$ الدالة f غير معرفة عند "0" لأن

$D_f : x \neq 0 : D_f = \mathbb{R}^*$

ومنه الدالة f غير مستمرة عند $a = 0$

2. $f(x) = x^2$

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \quad , \quad f(2) = 4$

ومنه الدالة مستمرة عند $a = 2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = [0, +\infty[$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$

$f(0) = \sqrt{0} = 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$

الدالة f مستمرة عند 0 من اليمين

4. حساب $f(2)$ بالمعادلة $f(x)=x-1$ لأن $\in[2,5[$

$f(2)=1$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x-1) = 1$$

الدالة f مستمرة عند 2 من اليمين

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

وجدنا أن

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

الدالة f مستمرة عند 2 من اليمين

و غير مستمرة عند 2 من اليسار

و منه الدالة f غير مستمرة عند $a=2$

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$: $f(x)=(x^2+x+1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين:

البرهان أن f مستمرة على $\mathbb{R}$

الدالة f عبارة عن دالتين $x \mapsto \cos x$

$x \mapsto x^2+x+1$

وكلاهما مستمر على $\mathbb{R}$

أي جداءهما يعطي دالة مستمرة

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & ; x > 2 \end{cases}$$

1. ادرس استمرارية الدالة f عند 2.

2. هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$؟ لماذا؟

حل التمرين:

$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad : \quad x \in]-\infty, 2]$

$f(x) = x^2 + x - 5 \quad : \quad x \in]2, +\infty[$

1. دراسة الاستمرارية عند 2

$f(2) = 1$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = 1$

الدالة f مستمرة عند 2 من اليسار

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 1 = f(2)$

الدالة f مستمرة عند 2 من اليمين

أي الدالة f مستمرة عند $a = 2$

2. الدالة f مستمرة على $]-\infty, 2]$

و مستمرة كذلك $]2, +\infty[$

$]-\infty, 2] \cup]2, +\infty[= \mathbb{R}$

أي الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين:

أدرس إستمرارية f حيث $f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2+1}$

حل التمرين:

الدالة $x \mapsto \cos(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن $x^2+1 \neq 0$

فإن حاصل دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين:

f دالة عددية معرفة كما يلي:

$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x \neq 1$ و $f(1)=3$

1. ادرس استمرارية f عند 1.
2. هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$؟

حل التمرين:

1. دراسة استمرارية f عند 1

لدينا $f(1)=3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = x^2+x+1 = 3$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline -\ x^3-x^2 & x^2+x+1 \\ \hline 0+x^2-1 & \\ -\ x^2-x & \\ \hline x-1 & \\ -\ x-1 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$$

ومنه الدالة f مستمرة عند 1.

2. معرفة استمرارية f على $\mathbb{R}$:

بما أن الدالة $x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1}$ دالة ناطقة فهي

مستمرة على $]1,+\infty[$ $]-\infty,1[$

وكذلك مستمرة عند 0

$]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\cup\{1\}=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند 0.

حل التمرين:

- دراسة إستمرارية الدالة f عند 0

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=f(0)=0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \text{ح.ع.ت}$$

إزالة ح.ع.ت

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=h'(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(0)$$

$h(x)=\sqrt{x^2+1}$; $h'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$h(0)=1$

وبما أن الدالة h قابلة للإشتقاق عند 0

$h'(0) = \frac{0}{1} = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

(لما نستعمل العدد المشتق لا داعي لكتابة يقيم أكبر أو أصغر).

• ومنه الدالة f مستمرة عند 0.

• الدالة $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$

وكذلك الدالة f مستمرة عند 0 ومنه f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = \alpha . x^2 - 3\alpha^2 \quad ; x > 0$

$f(x) = 2x - 3$

عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون الدالة f مستمرة عند 0.

حل التمرين:

تعيين α حتى تكون f مستمرة عند 0.

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)$

$f(0) = -3$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \alpha (0)^2 - 3\alpha^2 = -3\alpha^2$

$-3\alpha^2 = -3$

$$\alpha^2 = 1 \qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{1} = 1 \\ \alpha = -\sqrt{1} = -1 \end{cases}$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن تكون

$\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 3 + \sqrt{x^2+9}}{x} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

حل التمرين:

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$.

$x \mapsto x - 3 + \sqrt{x^2+9}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

و $x \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$

فإن حاصلهما مستمر على $\mathbb{R}^*$

و حتى تكون مستمرة عند 0 يجب أن

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - 3 + \sqrt{x^2+9}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x^2+9} - 3}{x} = h'(0)$$

لأن الدالة h قابلة للاشتقاق عند 0 : $h(x) = x + \sqrt{x^2+9}$

$$h'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(0) = 1 + \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha$$

$$\alpha = 1$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب $\alpha = 1$.

حتى تكون f مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب أن $\alpha = 1$.

تمرين :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = x^2 + 2x - a \quad : x > 2$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} \quad : x \leq 2$$

حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان.

عين علاقة بين a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2

حل التمرين :

تعيين علاقة بين a و b حتى تكون f مستمرة عند (2)

يجب أن

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$f(2) = \frac{8 - a + b}{2} = \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{8 - a + b}{2}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 8 - a$$

حتى تكون f مستمرة عند 2 يجب أن

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 8 - a$$

$$\frac{8-a+b}{2} = \frac{8-a}{1}$$

$$8-a+b = 16-2a$$

$$-a+2a+b = 16-8$$

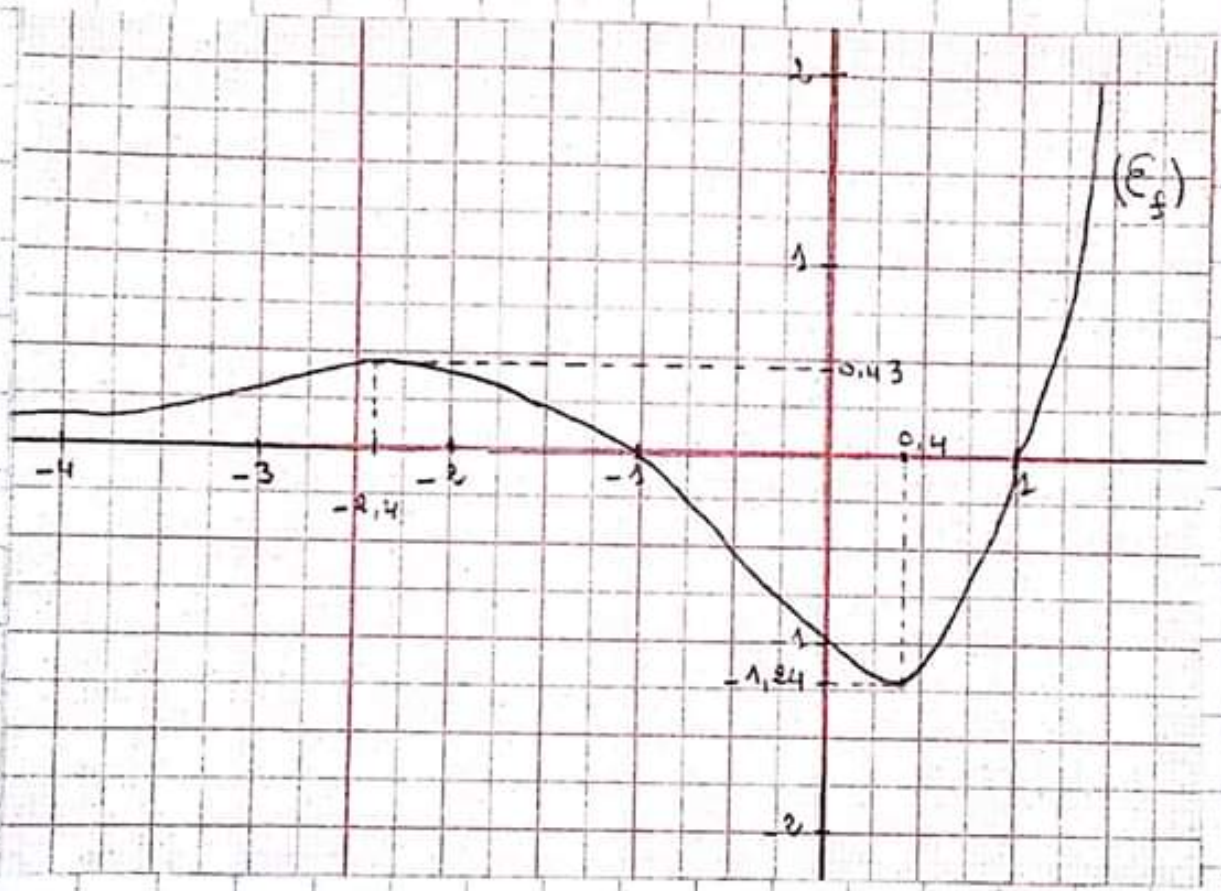
$$a+b = 8$$

حتى تكون f مستمرة يجب أن تكون $a+b=8$

تركيب الدوال.

تمرين:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ و تمثيلها (C_f) الممثل في الشكل:



1. انطلاقا من الشكل: عين إشارة $f(x)$.
2. لتكن الدالة g المعرفة في كل حالة بمجموعة تعريفها D_g وعبارة مشتقتها.

أ- $g'(x) = f(-x)$ ، $D_g = \mathbb{R}$

ب- $g'(x) = f(x^2)$ $D_g = \mathbb{R}$

ج- $g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad D_g = \mathbb{R}^*$

د- $g'(x) = f(\sqrt{x})$ $\quad D_g = [0, +\infty[$

هـ- $g'(x) = f(\ln x)$ $\quad D_g =]0, +\infty[$

و- $g'(x) = f(e^x)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

ز- $g'(x) = f(2x+1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

ح- $g'(x) = f(-2x+1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

ط- $g'(x) = f(x^2-1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

* عين إشارة $g'(x)$ ثم اعط تغيرات الدالة g في كل حالة

حل التمرين:

1- إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2-

أ-

$g'(x) = f(-x)$

$g' = f \circ u$

$u(x) = -x$

لتعيين إشارة $g'(x)$ علينا معرفة إشارة $f(-x)$

نكافئ الجدول التالي

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

لدينا $f(x)=0$

$f(-1)=0$

$f(1)=0$

$f(-x)=0$

$f(1)=0$

$f(-1)=0$

$-x=-1 \Rightarrow x=1$

$-x=1 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

ومتناقصة على $]-1,1[$.

ب- $D_g=\mathbb{R}$, $g'(x)=f(x^2)$

$g'=f\circ u$

جدول تغيرات $u(x)$

$u(x)=x^2$

$u'(x)=2x$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	1	0	1 ↗	$+\infty$

مستحيل $x^2=-1$

$x^2=1 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

$f(x^2)=0$ $\quad f(x)=0$

$f(-1)=0$

$f(1)=0$ لدينا من: للدالة $f(x)$ هي +

الدالة g متزايدة تماما $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$
ومتناقصة تماما $]-1,1[$.

ج- $g'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad D_g = \mathbb{R}^*$

$g = f \circ u$

$u(x) = \frac{1}{x}$

$D_{g'} = \{x \mid x \in D_u \text{ و } \frac{1}{x} \in D_f\}$

$= \{x \mid x \in \mathbb{R}^* \text{ و } \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1 \searrow 0$		

$\frac{1}{x} = \frac{-1}{1} \Rightarrow x = -1$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = x = 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

$f(1) = 0$ انعدام $g'(x)$

$f(-1) = 0$

$\frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$

$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$
ومتزايدة تماما $]-1,0[\cup]0,1[$

$D_g = [0, +\infty[$ $\quad g'(x) = f(\sqrt{x})$ ـ ج

$g' = f \circ u$

$u(x) = \sqrt{u}$

وهي متناقصة لأن -1 مرفوض.

$\sqrt{x} = 1 \quad x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	1	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

$f(-1) = 0$

$f(1) = 0$

$f(\sqrt{x}) = 0$ بالمطابقة نجد

$\sqrt{x} = 1$

$x = 1$

الدالة g متناقصة على $[0, 1]$

ومتزايدة $[1, +\infty[$

$D_g =]0, +\infty[$ $\quad g'(x) = f(\ln x)$ ـ هـ

x	0	e^{-1}	e^{1}	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	-1	1	$+\infty$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

$]0, +\infty[$

$\ln x = -1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1}$

$\ln x = 1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{1} \Rightarrow x = e^{1}$

	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على $]0, e^{-1}] \cup [e, +\infty[$

ومتناقصة تماما على $[e^{-1}, e]$

و- $g'(x) = f(e^x)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

موضحة أكثر

$g' = f \circ u$

$u(x) = e^x$

	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

حل المعادلة

$e^x = -1$ مستحيل

$e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0$

$x = 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

$f(1) = 0 \mid f(-1) = 0$ ✗

$f(e^x) = 0$

$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة تماما $]-\infty, 0]$

و متزايدة تماما $[0, +\infty[$

ن- $g'(x) = f(2x+1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$g' = f \circ u$

$u(x) = 2x + 1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$2x+1$	$-\infty$	↗	-1	↗	1	↗	$+\infty$

$2x+1=-1 \Rightarrow x=-1$

$2x+1=1 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$

ومتناقصة تماما على $[-1,0]$

ز- $g(x)=f(-2x+1)$

$D_g=\mathbb{R}$

$g=f\circ u$

$u(x)=-2x+1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-2x+1$	$+\infty$	↘	1	↘	-1	↘	$-\infty$

$-2x+1=1 \Rightarrow x=0$

$-2x+1=-1 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على $[0,1]$

ومتزايدة $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$

ش- $g(x)=f(x^2-1)$, $D_g=\mathbb{R}$

$g'=f\circ u$

$u(x) = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

$x^2 - 1 = 1 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-1	$+\infty$	↘	1	↘	-1	↗	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$
و متناقصة على $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

التقريب التآلفي:

التقريب التآلفي:

خاصية:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من اجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I.

لدينا $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(x)$ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\simeq f(x)+hf'(x)$

يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f

ملحوظة:

$$f(x+h)\simeq f(x)+hf'(x)$$

هي نفسها معادلة مستقيم مماس

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2$

1- عين التقريب التآلفي لعبارة $f(2+h)$ من اجل h قريب من 0.

2- احسب بهذا التقريب قيمة مقربة لـ $(2,029)^2$

حل التمرين:

1- تعيين التقريب التآلفي للعبارة $f(2+h)$

نطبق القانون: $f(2+h)\simeq f(2)+hf'(2)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

هي $f'(x) = 2x$

$f(2+h) \simeq f(2) + hf'(2)$ مع h يقترب إلى 0.

$f(2+h) \simeq 4 + h \times 4$

$f(2+h) \simeq 4 + 4h$

2- حساب قيمة مقربة لـ $(2,029)^2$

$(2,029)^2 = f(2.029) = f(2+0,029)$

$f(2+h) \simeq 4 + 4h$

$f(2,029) \simeq 4 + 4(0,029)$

$\simeq 4,116$

تمرين:

1- برر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية

أ- $(3+h)^4 \simeq 81 + 108h$

ب- $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$

ج- $\frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$

د- $\sin h \simeq h$

2- إستنتج قيمة مقربة لكل الأعداد: $(3,012)^4$، $\sqrt{3,948}$، $\frac{1}{1,977}$

حل التمرين:

1- تبرير التقريب التآلفي:

أ- الدالة $f: x \mapsto x^4$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = 4x^3$

ومن اجل h يقترب من "0" يكون

$$f(3+h) \simeq f(3) + h f'(3)$$

$$f(3+h) \simeq 81 + h \times 108 \simeq 81 + 108h$$

ب- الدالة g $\quad g : x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق $[0, +\infty[$

من اجل h يقترب من "0": $\quad g(1+h) \simeq g(1) + h g'(1)$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(1+h) \simeq 1 + \frac{1}{2} h \simeq 1 + \frac{h}{2}$$

ج- الدالة K $\quad K : x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

من اجل h يقترب من 0 $\quad K(1+h) \simeq K(1) + h K'(1)$

$$K'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$K(1+h) \simeq 1 - h$$

د- الدالة R $\quad R : x \mapsto \sin(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$R'(x) = \cos(x)$$

من اجل h يقترب من 0 $\quad R(h+0) \simeq R(0) + h R'(0)$

$$R(h) \simeq 0 + 1.h \simeq h$$

$$R(h) \simeq h$$

2- إستنتاج قيمة مقربة لكل من

أ- $(3,012)^4$

بإستعمال نتيجة السؤال 1 فرع أ.

$$(3,012)^4 \simeq (3 + 0,012)^4$$

$$\simeq 81 + 108 \times 0,012 \simeq 82,296$$

ب- $\sqrt{3,948}$

باستعمال نتيجة السؤال 1 فرع ب

$$\sqrt{3,948} \simeq \sqrt{3 + \underbrace{0,948}_{h}} \simeq 1 + \frac{0,948}{2} \simeq 1,4740$$

ج- $\frac{1}{1,977}$

باستعمال نتيجة السؤال 1 فرع ج

$$\frac{1}{1,977} \simeq \frac{1}{1+0,977} \simeq 1 - 0,977 \simeq 0,023$$

طريقة اولر والتقريب التآلفي

طريقة أولر:

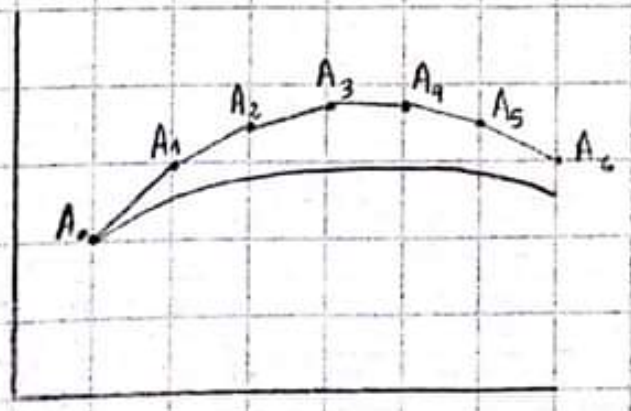
- تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0 = f(x_0)$. ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من اجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$
- إنطلاقا من النقطة $A_0(x_0, y_0)$ حيث $f'(x_0) \neq 0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1, y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و المار من A_0 وبالتالي:

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0) \text{ وبما أن } y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$$

- من اجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1, y_1)$ قريبة من (C_f) منحنى f.
- بنفس الطريقة يمكن إنشاء إنطلاقا من A_1 النقطة

$$A_2(x_1+h\ ,\ f(x_1)+hf'(x_1))$$

وهكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. بربط النقط $A_0, A_1, A_2 \ldots$ نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. ونحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى "0"



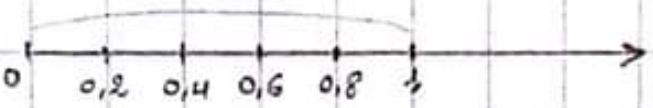
تمرين:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$ ، بحيث $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

باستعمال طريقة أولر وبخطوة قدرها $0,2$.

انشئ تمثيلا بيانيا تقريبيا لـ (C) منحنى الدالة f على المجال $[0,1]$

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h f'(x_0)$$



$$f(0+0,2) \simeq f(0) + h f'(0)$$

$f(0)=1$

$$f(0,2) \simeq f(0) + 0,2\, f'(0) \simeq 1 + 0,2(1) \simeq 1,20$$

$$f(0,2+0,2) \simeq f(0,2) + h f'(0,2)$$

$$f(0,4) \simeq 1,2 + 0,2\sqrt{1-(0,2)^2} \simeq 1,40$$

$$f(0,4+0,2) \simeq f(0,4) + h f'(0,4)$$

$$f(0,6) \simeq 1,40 + (0,2 \times 0,91) \simeq 1,568$$

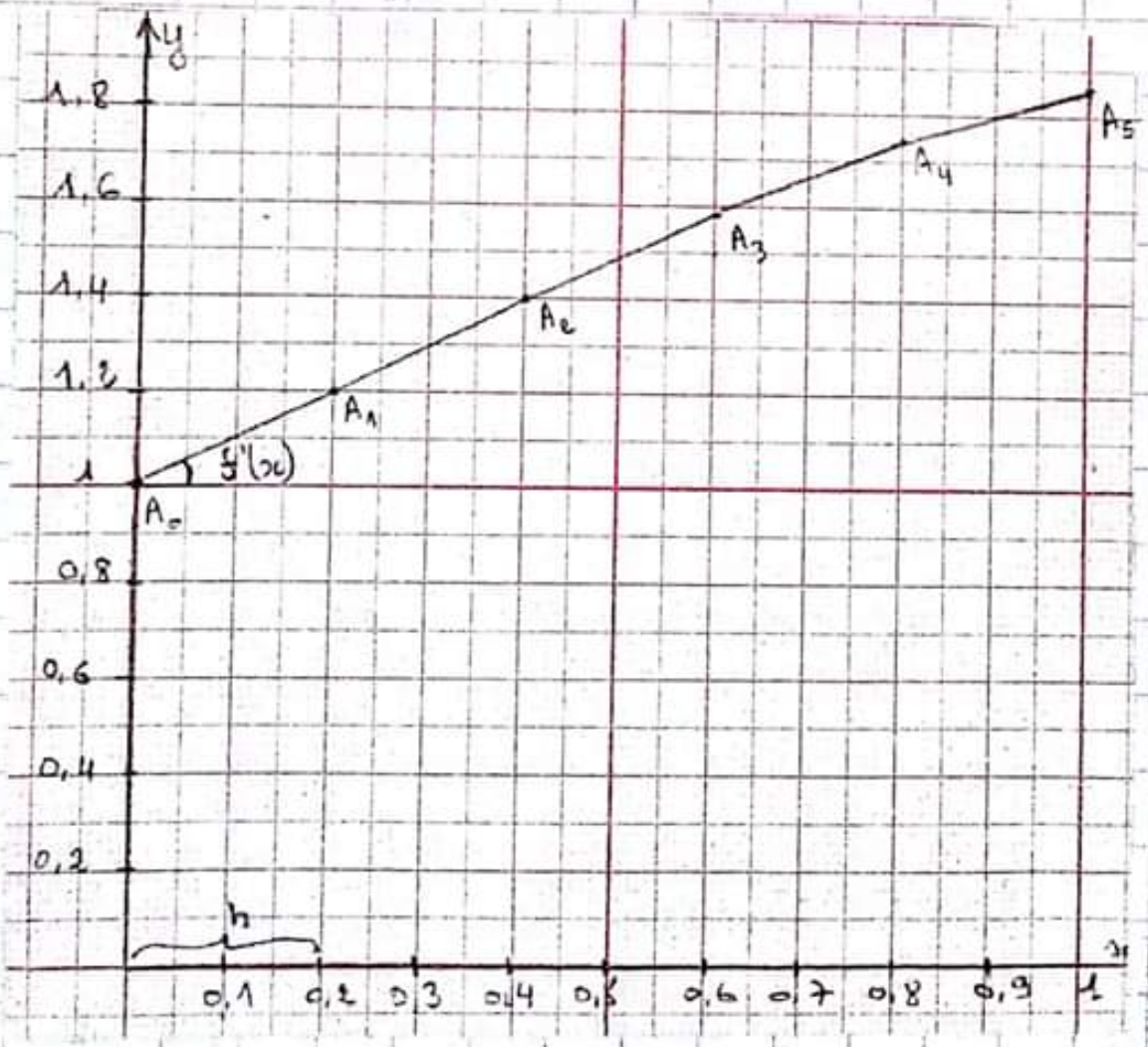
$$f(0,6+0,2) \simeq f(0,6) + h f'(0,6)$$

$$f(0,8) \simeq 1,568 + (0,2 \times 0,8) \simeq 1,728$$

$$f(0,8+0,2) \simeq f(0,8) + h f'(0,8)$$

$$f(1) \simeq 1,728 + (0,2 \times 0,6) \simeq 1,848$$

	x	$f(x)$
A_0	0	1
A_1	0,2	1,2
A_2	0,4	1,4
A_3	0,6	1,58
A_4	0,8	1,74
A_5	1	1,86



مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1,3]$ بـ $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1- أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول التغيرات الدالة f.

2- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2]$

3- باستعمال حاسبة، أوجد حصرا للعدد α سعته 10^{-2}.

حل التمرين:

1- حساب $f'(x)$:

الدالة f تقبل الاشتقاق على $[1,3]$ لأنها دالة كثير حدود فإن $f'(x)=3x^2-10x+3$

إشارة $f'(x)$

$$f'(x)=3x^2-10x+3$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=100-36=64$$

$$\sqrt{\Delta}=8$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+8}{6}=3$$

x	$-\infty$		$1/3$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	1		3
$f'(x)$		$-$	

الدالة f متناقصة تماما على $[1,3]$

جدول التغيرات:

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	⋮		
$f(x)$	3	↘ 0	⋮	↘ -2	-5

2- البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α: $\alpha \in [1,2]$

بما أن الدالة معرفة ومستمرة ومعرفة ومتناقصة

تماما على $[1,2]$ و $f(1)=3$ و $f(2)=18-20=-2$

وبما أن $0 \in [-2,3]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا حيث $1 \leq \alpha \leq 2$ تقاطع C_f مع $(x'x)$

3- إيجاد الحصر

المسح $1 \leq \alpha \leq 2$ $10^{-2}=0,01$

بما أن $10^{-2}=0,01$ إذن نتبع طريقة المسح المجال $[1,2]$

بخطوة $0,01$: مرحلة أولى

$f(1)=3$

$f(1,1)=2,581$

$f(1,2)=2,128$

$f(1,3) = 1,647$

$f(1,4) = 1,144$

$f(1,5) = 0,625$ $\qquad 1,6 < \alpha < 1,7$

$\alpha \left(\begin{array}{l} f(1,6) = 0,096 \\ f(1,7) = -0,437 \end{array} \right.$

مرحلة ثانية

نلاحظ أن العدد 0 محصور بين $f(1,7)$ و $f(1,6)$

مسح المجال $[1,6;1,7]$

$f(1,6) = 0,096$

$f(1,61) = 0,042781$

$f(1,62) = -0,0176$

إذن $1,61 < \alpha < 1,62$

نهاية الدوال العددية