الدوال الأسية

الدالة الأسية من الألف إلى الياء

1- تعريف الدالة الأسية.
2- تبسيط عبارات أسية.
3- معادلات أسية.
4- المتراجحات الأسية.
5- نهاية الدالة الأسية و تفسيرها الهندسي.
6- مشتقة الدالة الأسية و تغيراتها.
7- الدالة الأسية و مبرهنة القيم المتوسطة.
8- التخلص من أسية ألفا.
9- الدالة الأسية و مركز التناظر.
10- إستنتاج إشارة عبارة دالة أسية
11- إستنتاج منحنيات إنطلاقا من منحنى الدالة الأسية.
12- منحنيات الدالة الأسية
13- المعادلات التفاضلية
14- الأسئلة البيانية و الدالة الأسية.
15- الدالة الأسية و المناقشة البيانية.

تعريف الدالة الأسية

العدد e والترميز e^x:

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = \exp(1)$ تعطينا بالحاسبة $e \simeq 2,718281828$

قواعد الحساب: خواص

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad$ $\exp'(x) = e^x$ $\quad$ $e^0 = 1$

$e^{nx} = (e^x)^n$ $\quad$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\quad$ $e^{x+y} = e^x . e^y$

الاشتقاق:

$$(e^f)' = f' e^f$$

$$e^{f(x)} > 0$$

الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما.

النهايات:

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \,/\, x \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\quad$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

تبسيط عبارات اسية.

تمرين:

1- بسط العبارات التالية

1- $(e^x)^3 \times e^{-5x}$ ، 2- $\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}}$ 3- $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$

حل التمرين:

1- $(e^x)^3 . e^{-5x} = e^{3x} . e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x} = \frac{1}{e^{2x}}$

2- $\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} = e^{2x+3} . e^{2x} = e^{4x+3} = e^{4x} . e^3$

3- $\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}} = (e^x+e^{-x}) . e^{-2x} = e^{x-2x} + e^{-x-2x}$

$= e^{-x} + e^{-3x} = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{3x}}$

تمرين:

بين من اجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

1- $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2- $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$

3- $(e^x+e^{-x})^2 = \frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$

4- $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{(e^{2x}-1)^2}{e^{2x}+1}$

حل التمرين:

1-

$$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

2-

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^{x}} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{x}-1}{e^{2x}}$$

3-

$$(e^{x}+e^{-x})^2 = \left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)^2}{e^{2x}}$$

4-

$$\frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}} = \frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}} = \frac{e^{2x}-1}{\cancel{e^{x}}} \cdot \frac{\cancel{e^{x}}}{e^{2x}+1}$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

معادلات أسية.

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

1- $e^{-x^2} = \frac{1}{e^x}$ 2- $e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}}$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1- $e^{x^2} = e^{-3(x+1)}$ ، 2- $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$

3- $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$

حل التمرين:

1-

$e^{-x^2} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

$e^{-x^2} = e^{-1} \iff -x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{-1}$

$x^2 = 1 \begin{cases} x = \sqrt{1} = 1 \\ x = -\sqrt{1} = -1 \end{cases}$

$S = \{-1, 1\}$

2- $e^{x+3} = e^{\frac{4}{3}} \iff x+3 = \frac{4}{x} \Rightarrow x(x+3) = 4$

$D = \mathbb{R}^*$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \iff \Delta = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -4$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1$

$S' = \{-4, 1\}$

1- $e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \iff x^2 = -3(x+1)$

$x^2 + 3x + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 4(1)(3) = -3 < 0$

ليست للمعادلة حلا.

-2

$$e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x} \qquad \mathbb{R}-\{0, 6\}$$

$$(x+4)x = 6x$$

$$x^2+5x-6=0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(1)(-6)$$

$$\Delta = 25+24 = 49 > 0$$

للمعادلة حلين:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{49}-5}{2(1)} = -6$$

$$x_2 = \frac{+\sqrt{49}-5}{2(1)} = +1$$

$$S'' = \{-6, +1\}$$

ملاحظة: لو ظهر "6" لرفضناه لانه غير مقبول $D = \mathbb{R}-\{0, 6\}$.

-3

$$e^{2x} \cdot e^{1} - e^{3x} = 0$$

$$e^{2x} \cdot e^{1} - e^{2x} \cdot e^{x} = 0$$

$$e^{2x}[e^{1} - e^{x}] = 0$$

$$e^{2x} > 0$$

$$e^{1} - e^{x} = 0 \Leftrightarrow e^{1} = e^{x}$$

$$x = 1$$

$$S''' = \{1\}$$

المتراجحات الأسية

تمرين :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1- $e^{3x} \leq 1$ 2- $e^{x} > e^{2}$ 3- $e^{x} < e^{-2x}$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1- $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$ 2- $e^{x+1} > e^{-\frac{2}{x}}$

3- $e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x}$ 4- $e^{x-x^2} \geq 1$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التاليتين :

1- $(e^x - 1)(e^x - e^2) = 0$

2- $(e^x - 1)(e^x - e^2) > 0$

حل التمرين :

1- $e^{3x} \leq e^{0}$ $3x \leq 0$ $\left(\frac{1}{3}\right)3x \leq 0\left(\frac{1}{3}\right)$

$x \leq 0$

$-\infty \quad 0]$

$S =]-\infty, 0]$

2- $e^{x} > e^{2} \Rightarrow x > 2$

$S =]2, +\infty[$

3- $e^{x} < e^{-2x} \Rightarrow x < -2x$

$3x < 0 \Rightarrow x < 0$

$S =]-\infty, 0[$

1- $e^{2x^2} \leq e^{5x+3}$

$2x^2 \leq 5x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 0$

$$\Delta = 25 - 4(2)(-3) = 49$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-5x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$$

-2

$$e^{x+1} > e^{\frac{-2}{x}}$$

$$D = \mathbb{R}^*$$

$$x+1 > \frac{-2}{x}$$

$$\frac{x^2+x}{x} > \frac{-2}{x}$$

$$\frac{x^2+x+2}{x} > 0$$

$$x^2+x+2>0$$

$$\Delta = 1-4(1)(2) = -7 < 0$$

العبارة x^2+x+2 ليس لها جذرا و إشارتها من إشارة a و $a=1>0$

$x \neq 0$

	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2+x+2			$+$		
x		$-$		$+$	
$\frac{x^2+x+2}{x}$		$-$	‖	$+$	

$S =]0, +\infty[$

$e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x}$ **-3**

$e^{x^2} > e^{12} e^{-x} \Rightarrow e^{x^2} - e^{12} \cdot e^{-x} > 0$

$e^{x^2} - e^{12} \cdot \frac{1}{e^x} > 0 \Rightarrow \frac{e^x \cdot e^{x^2} - e^{12} \cdot 1}{e^x} > 0$

$\Rightarrow \frac{e^{x^2+x} - e^{12}}{e^x} > 0$

$e^x > 0$

$e^{x^2+x} - e^{12} > 0 \Rightarrow e^{x^2+x} > e^{12}$

$x^2 + x > 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 > 0$

$\Delta = 1 - 4(-12)$

$\Delta = 1 + 48 = 49$

$x_1 = -4$

$x_2 = 3$

	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$e^{x^2+x} - e^{12}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x			$+$				

$S =]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[$

$e^{x-x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-x^2} \geq e^0$ **-4**

$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0$

$x = 0$ $\quad 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = [0, 1]$

$\underbrace{(e^x - 1)}_{a}\underbrace{(e^x - e^2)}_{b} = 0$ -1

$a = 0$ ou $b = 0$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$

$e^x - e^2 = 0 \Rightarrow e^x = e^2 \Rightarrow x = 2$

$S = \{0, 2\}$

-2

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e^2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x-1)(e^x-e^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(e^x - 1)(e^x - e^2) > 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

نهاية الدالة الأسية وتفسيرها الهندسي

تمرين:

عين نهاية الدالة f

1- $f(x)=\frac{e^x-1}{2e^x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- $f(x)=\frac{e^x-1}{2x}$ ، عند "0".

3- $f(x)=\frac{1}{x}(e^{3x}-1)$ عند 0 وعند $+\infty$.

4- $f(x)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ، عند $-\infty$ وعند $+\infty$ (يمكنك وضع $X=\frac{1}{x}$)

5- $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ / $D_f=\mathbb{R}^*$ ، ادرس النهايات عند حدود D_f.

6- $f(x)=\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$ / $D_f=\mathbb{R}$

7- $f(x)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}$ / $D_f=\mathbb{R}^*$. أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$

8- $f(x)=xe^x$ / $D_f=\mathbb{R}$

9- $f(x)=(2x-3)e^x$ / $D_f=\mathbb{R}$

10- $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ / $D_f=\mathbb{R}$

11- $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ / $D_f=\mathbb{R}^*$

12- $D_f = \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 1}$

13- $D_f = \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

حل التمرين :

نهايات متعبرة :

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^x = +\infty$

نعوض و نحسب النهاية ، و إذا حصلنا على شكل غير محدد نحاول تحويل تعبير الدالة إلى أحد الأشكال التالية

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(*) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\overset{0}{e^x} + 1) = 1$

التفسير البياني : $y = 1$ م.م أفقي بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\overset{+\infty}{e^x} + 1) = +\infty$

(*) $e^{-(-\infty)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} - x - 2) = +\infty$

نضع $t = -x$

إذا كان $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} (\underset{+\infty}{e^t} + \underset{+\infty}{t} - 2) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-x-2)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}-x-2\right)=-\infty$$

ملاحظة:

إذا كان $\lim_{x\to\infty}(ax+b+h(x))=\infty$

$\lim_{x\to\infty}h(x)=0$

$y=ax+b$ م.م.مائل

$$\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{-x-2}_{y=-x-2}+\underbrace{e^{-x}}_{h(x)})=-\infty$$

$y=-x-2$ م.م.مائل بجوار $+\infty$

(1)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}=-1$$

$y=-1$ م.م.أفقي بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}=\text{ت.ع.ت}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^{x}}}{2+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{1}{2}$$

$y=\frac{1}{2}$ م.م.أفقي بجوار $+\infty$.

(2)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x}-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

التفسير البياني: Δ نقطة فقط $(0,\frac{1}{2})$

(3)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}(e^{3x}-1)\right)$$

$$\lim_{x\to0}=\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\overset{h(x)}{e^{3x}}-\overset{h(0)}{e^{0}}}{x-0}$$

$$(e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$3e^{3(0)} = 3e^{0} = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{3x}}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$$

نضع $t = 3x$ و منه $x = \frac{t}{3}$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t}}{t/3} = \lim_{t \to +\infty} e^{t} \cdot \frac{3}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3e^{t}}{t} = +\infty$$

(4

$$\lim_{x \to -\infty} \overset{-\infty}{x} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \text{ح.ع.ت}$$

$$x = \frac{1}{t} \Leftarrow t = \frac{1}{x}$$

$$x \to -\infty$$

$$t = \frac{1}{-\infty} = 0 \qquad t \to 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(e^{t} - 1 \right) = \frac{e^{t}-1}{t} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \text{ح.ع.ت}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(e^{t} - 1 \right) = 1$$

$y = 1$ م.م.أفقي

(5

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

بوضع $t = \frac{1}{x}$

$$x \to -\infty \,,\, t \to 0$$

$$\lim_{t \to 0} e^{t} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$t = \frac{1}{x_{0^-}}$ $\quad x \overset{<}{\to} 0 \quad t \to -\infty$

$$\lim_{t \to -\infty} e^{t} = 0$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$$

$x = 0$ م.م. عمودي بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{t \to 0} e^{t} = e^{0} = 1$$

$y = 1$ م.م. افقي

(6)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^{4x} - 3}{e^{4x} + 1} \right) = -3$$

$y = -3$ م.م. افقي.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{4x}}}{\cancel{e^{4x}}} \cdot \frac{1 - \frac{3}{e^{4x}}}{1 + \frac{1}{e^{4x}}} = 1$$

$y = 1$ م.م. افقي.

(7)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \frac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{e^{x}}}{1 - \frac{1}{e^{x}}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\overset{0}{x} - \frac{\overset{1}{e^x} + 1}{e^x - 1} \right) = +\infty$$

نضع $t = e^x$

$x \overset{<}{\to} 0 \Rightarrow t \overset{<}{\to} 1$

$$\lim_{t \overset{<}{\to} 1} \left(-\frac{t+1}{t-1} \right) = \lim_{t \overset{<}{\to} 1} -\left(t\left(\frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{t-1} \right) = +\infty$$

$-1(-\infty - \infty) = +\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(x - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 1} -\left(+ t\left(\frac{1}{t-1}\right) + \frac{1}{t-1} \right) = -\infty$$

$-1(+\infty + +\infty)$

$x = 0$ م.م عمودي.

(8)

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

$y = 0$ م.م أفقي

$$\lim_{x \to +\infty} x e^x = +\infty$$

(9)

$$\lim_{x \to -\infty} (2x - 3) e^x = \lim_{x \to -\infty} 2x \overset{0}{e^x} - 3 \overset{0}{e^x} = 0$$

$y = 0$ م.م. أفقي.

$$\lim_{x \to +\infty} (2 \overset{+\infty}{x} - 3) \overset{+\infty}{e^x} = +\infty$$

(10)

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + x + 1) e^x = \text{ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underset{0}{x^2 e^x} + \underset{0}{x e^x} + \underset{0}{e^x} = 0$$

$y=0$ م.م.أفقي.

$$\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{(x^2)} \cdot \overset{+\infty}{e^x} = +\infty$$

(11)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\underset{0}{\frac{e^x}{x}} - \underset{0}{\frac{1}{x}}\right) = 0$$

$y=0$ م.م.أفقي

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\underset{+\infty}{\frac{e^x}{x}} - \underset{0}{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

(12)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x-2}{e^x+1} = -2$$

$y=-2$ م.م.أفقي

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \cdot \frac{3-\overset{0}{\frac{2}{e^x}}}{1+\underset{0}{\frac{1}{e^x}}} = 3$$

$y=3$ م.م.أفقي.

(13)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{0}{e^x}}{\underset{0}{e^x} - \underset{-\infty}{x}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$y=0$ م.م.أفقي.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \cdot \frac{1}{1-\underset{0}{\frac{x}{e^x}}} = 1$$

$y=1$ م.م.أفقي

(*)

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

$x \to -\infty$ نضع $t=-x$

$t \to +\infty$ $x=-t$

$$= \lim_{t \to +\infty} (-t)^2 e^{t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \underset{\underset{+\infty}{\parallel}}{t^2} e^{t} \times +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $t = -x$

$t \to -\infty$

$$\lim_{t \to -\infty} (-t)^2 e^{t} = 0$$

دراسة الدالة الأسية ونهايتها.

تمارين:

1- $f(x) = x e^{x}$

2- $f(x) = (2x-3)\, e^{x}$

3- $f(x) = (x^2+x+1)\, e^{x}$

4- $f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{x}$

5- $f(x) = \dfrac{3e^{x}-2}{e^{x}+1}$

6- $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}-x}$

7- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

8- $f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$

9- $f(x) = \dfrac{e^{x}-1}{2x}$

10- $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e^{3x}-1\right)$

11- $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

12- $f(x) = \dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$

13- $f(x) = x - \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

14- $f(x) = (e^{x}-1)(e^{x}+2)$

15- $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

16- $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

17- $f(x) = (-x-1)\, e^{-x}$

حل التمرين:

1- $f'(x) = (1)(e^x) + (e^x)(x)$

$f'(x) = e^x(1+x)$

$f'(x) = 0$ التغيرات

$e^x > 0 \quad ; \quad x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة $]-\infty, -1]$ ومتزايدة على $[-1, +\infty[$

2- $f'(x) = 2e^x + e^x(2x-3)$

$= (2 + 2x - 3)e^x = (2x-1).\ e^x$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x-1$

لأن $e^x > 0$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على $]-\infty, \frac{1}{2}]$ و متزايدة على $[\frac{1}{2}, +\infty[$

-3

$$f'(x) = (2x+1)e^x + e^x(x^2+x+1)$$
$$= e^x(2x+1+x^2+x+1)$$
$$= e^x(x^2+3x+2)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+3x+2 لأن $e^x > 0$

$$\Delta = 9-4(1)(2) = 1$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$

$$x_2 = -1$$

	∞		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة على مجال $]-\infty,-2] \cup [-1,+\infty[$

و متناقصة على المجال $]-2,-1[$

-4

$$f'(x) = \frac{e^x(x) - (1)(e^x-1)}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{\overbrace{(x-1)e^x+1}^{g(x)}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

ندرس $g(x)$

$$g(x) = (x-1)e^x + 1$$

$$g'(x) = 1(e^x) + e^x(x-1)$$

$$g'(x) = e^x(\cancel{1} + x - \cancel{1}) = xe^x$$

$$g'(x) = 0$$

$$x = 0$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(x) \geq 0$ من جدول التغيرات.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \underset{x \neq 0}{\geq 0} > 0$$

و $D_f = \mathbb{R}^*$

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x-2)}{(e^x+1)^2}$$ 5

$$= \frac{\cancel{3e^{2x}} + 3e^x - \cancel{3e^{2x}} + 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{(e^x+1)^2}$$

و منه الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x)}{(e^x - x)^2}$$ -6

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} - e^x}{(e^x - x)^2} = \frac{(-x+1)e^x}{(e^x - x)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-x+1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على $]-\infty, 1]$ و متناقصة على $[1, +\infty[$.

-7 $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{\text{سالبة}} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\text{موجبة}}$$

ومنه f متناقصة على $\mathbb{R}^*$

-8

$$f'(x) = \frac{e^x(2e^x + 1) - 2e^x(e^x - 1)}{(2e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2e^{2x}} + e^x - \cancel{2e^{2x}} + 2e^x}{(2e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

-9 $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(2x) - 2(e^x - 1)}{(2x)^2} = \frac{2xe^x - 2e^x + 2}{4x^2}$$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1}{2x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

دراسة التغيرات للدالة $g(x)$ $g(x) = (x-1)e^{x}+1$
مثل المرة السابقة.

10-

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(e^{3x}-1\right)$$

$$f(x) = \frac{e^{3x}-1}{x} \qquad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \frac{(3e^{3x})(x)-(1)(e^{3x}-1)}{x^2} = \frac{3xe^{3x}-e^{3x}+1}{x^2}$$

$$= \frac{(3x-1)e^{3x}+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ندرس تغيرات الدالة $g(x)$ بنفس الطريقة السابقة.

11-

$$f'(x) = \frac{4e^{4x}(e^{4x}+1)-4e^{4x}(e^{4x}-3)}{(e^{4x}+1)^2}$$

$$= \frac{4e^{8x}+4e^{4x}-4e^{8x}+12e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} = \frac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

13-

$$f(x) = x - \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} \qquad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^{x}(e^{x}-1)-e^{x}(e^{x}+1)}{(e^{x}-1)^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^{2x}-e^{x}-e^{2x}-e^{x}}{(e^{x}-1)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x-1)^2} > 0$$

الدالة متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}^*$.

-14

$$f'(x) = e^x(e^x+2) + e^x(e^x-1)$$
$$= e^{2x} + 2e^x + e^{2x} - e^x$$
$$= 2e^{2x} + e^x > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

-15

$$f'(x) = \frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

سالبة

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} > 0$$

$$f'(x) < 0$$

ومنه f متناقصة على $\mathbb{R} - \{1\}$.

-16

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{2x}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{-2}{x^3} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} > 0$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{-2 + x^3 + x^2 + x}{x^3} = \frac{x^3 + x^2 + x - 2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = (-1)e^{-x} - e^{-x}(-x-1)$$
$$= (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$$

إشارة من إشارة x:

	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة متناقصة على المجال $]-\infty, 0]$ و متزايدة على المجال $[0, +\infty[$

الدالة الأسية ومبرهنة القيم المتوسطة

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{-x} - x - 2$

1. ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f.
3. بين أن المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,45 < \alpha < -0,44$
5. استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

حل التمرين:

1- دراسة النهاية

$$\lim_{x \to -\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{-\infty} - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} - x - 2) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{0} - \underbrace{x}_{+\infty} - 2\right) = -\infty$$

2- نشكل جدول التغيرات:

$f'(x) = -e^{-x} - 1$

$= e^{-x} > 0 \qquad -e^{-x} < 0 \qquad -1 - e^{-x} < -1$

إذن $-1 - e^{-x} < 0$

الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

	$-\infty$	$-0,45$	$-0,44$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$f(-0,45)$	$f(-0,44)$	$-\infty$

3- البرهان ان المنحنى يقبل م.م. مائل:

إذا كان $\lim_{x\to\infty}(ax+b+h(x))=\infty$

و $\lim_{x\to\infty} h(x)=0$

فإن $y=ax+b$

م.م. مائل

$h(x)=e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=e^{-(-\infty)}=+\infty$ ✗

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=e^{-(+\infty)}=0$ ✓

ومنه $y=-x-2$ م.م. مائل بجوار $+\infty$.

4- برهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

$-0,45<\alpha<-0,44$

بما أن الدالة مستمرة و متناقصة على $]-0,45;-0,44[$

وبما أن $f(-0,45)>0$ و $f(-0,44)<0$

أي $0\in[f(-0,45);f(-0,44)]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,45<\alpha<-0,44$

$f(x)=0$ التفسير البياني هو فاصلة تقاطع (C)

مع محور الفواصل (x).

5. استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f(x) = 0$

جدول إشارة $f(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

التعلم من أسية آلها

تمرين:

1- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

ب- بين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$

ج- أعط حصر لـ $f(\alpha)$

2- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=x+2-e^x$$

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث أن

$$1,14<\alpha<1,15$$

حل التمرين:

- البرهان:

لدينا: $g(x)=x+2-e^x$

$$g(\alpha)=\alpha+2-e^\alpha=0$$

$$e^\alpha=\alpha+2$$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1} \Rightarrow f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{\alpha e^\alpha+1}$$

$$\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}$$

$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}$$

$$\Delta = 4-4(1)(1) = 0$$

للمعادلة حل مضاعف: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$

$$(\alpha+1)(\alpha+1) = \alpha^2+2\alpha+1$$

$$(\alpha-(-1)) = \alpha+1$$

$$\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}$$

ج- حصر $f(\alpha)$:

$$1,14 < \alpha < 1,15$$

$$1+1,14 < \alpha+1 < 1,15+1$$

$$2,14 < \alpha+1 < 2,15$$

$$\frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2,14}$$

$$0,465 < f(\alpha) < 0,467$$

الدالة الأسية ومركز التناظر

تمرين:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ فسر النتائج هندسيا

2- بين أن النقطة $A(0,\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C)

حل التمرين:

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

$y=0$ م.م. أفقي.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\quad\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

$y=1$ م.م. أفقي.

2- $\omega(a,b)$ $\quad f(2a-x)+f(x)=2b$

$$f(2\times0-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}$$

$$f(-x)+f(x)=1$$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

$$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{\frac{1}{e^{x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}} + \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{x}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}+1} + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{1}{e^{x}+1} + \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$\frac{1+e^{x}}{e^{x}+1} = 1$$ وهو المطلوب

إذن $A(0, \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى (C)

استنتاج إشارة عبارة دالة أسية

تمرين:

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي

$u(x) = e^x - 3x + 4 - e$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة u

ب- بين انه، من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$

حل التمرين:

أ- دراسة:

$u'(x) = e^x - 3$

$u'(x) = 0$ أي $e^x - 3 = 0$

$\ln e^x = \ln$

$x \ln e^1 = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3$

	0		$\ln 3$		$+\infty$
$e^x - 3$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة u متناقصة على $]0, \ln 3]$ و متزايدة على $[\ln 3, +\infty[$

ب-

	0		$\ln 3$		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$u(x)$	‖	↘	1	↗	

$f(\ln 3) \simeq 1$

من جدول التغيرات نلاحظ أن $u(x) \geq 1 > 0$

$u(x) > 0 \Leftarrow e^x - 3x + 4 - e > 0$

$e^x - e > 3x - 4$

استنتاج خاصيات من منحنى الدالة الأسية

تمرين:

1- أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنى (C) الممثل للدالة $f: x \mapsto e^x$

2- إستنتج رسم المنحنيات الدوال التالية:

أ- $f_1: x \mapsto e^x + 1$ ب- $f_2: x \mapsto -e^x$

ج- $f_3: x \mapsto e^x - 2$ د- $f_4: x \mapsto |e^x - 2|$

هـ- $f_5: x \mapsto e^{x-1}$ و- $f_6: x \mapsto e^{x-1} - 2$

حل التمرين:

أ-

$$f_1(x) = e^x + 1$$
$$= f(x) + 1$$

(C_1) يرسم بانسحاب (C) الذي شعاعه $\vec{v}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ب-

$$f_2(x) = -e^x = -f(x)$$

(C_2) متناظر بالنسبة إلى محور الفواصل بالنسبة لـ (C).

ج-

$$f_3(x) = e^x - 2 = f(x) - 2$$

(C_3) يرسم بانسحاب (C) شعاعه $\vec{v}_2\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

د-

$$f_4(x) = |f(x) - 2| \geq 0$$

يرسم (C_4) إنطلاقا من C_3 لكن كله يقع فوق محور الفواصل

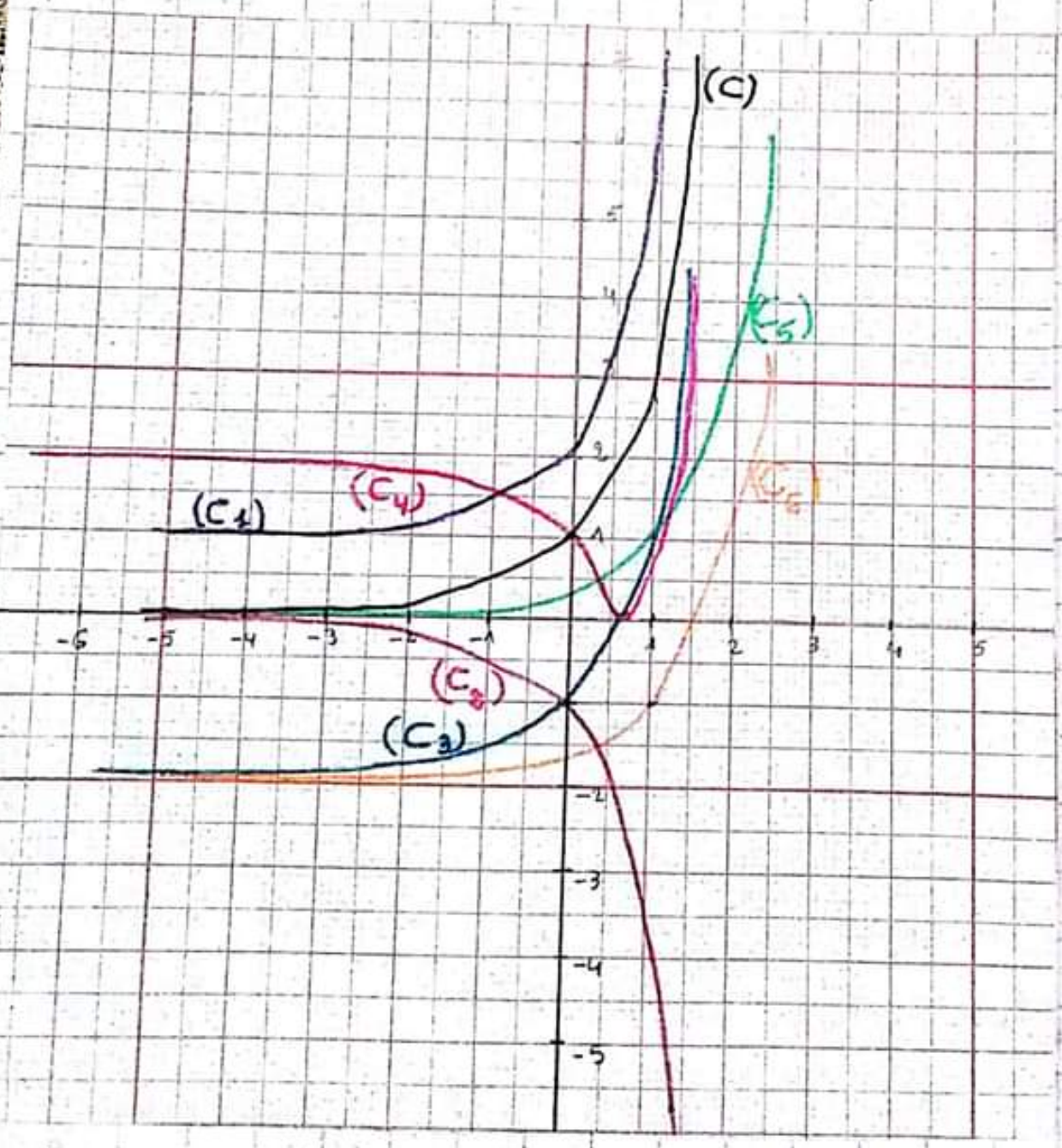
هـ- $f_5(x) = e^{x-1}$

$= f(x-1)$

يرسم (C_5) بإنسحاب لـ (C) الذي شعاعه $\vec{v}_5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

و- $f_6(x) = f(x-1) - 2$

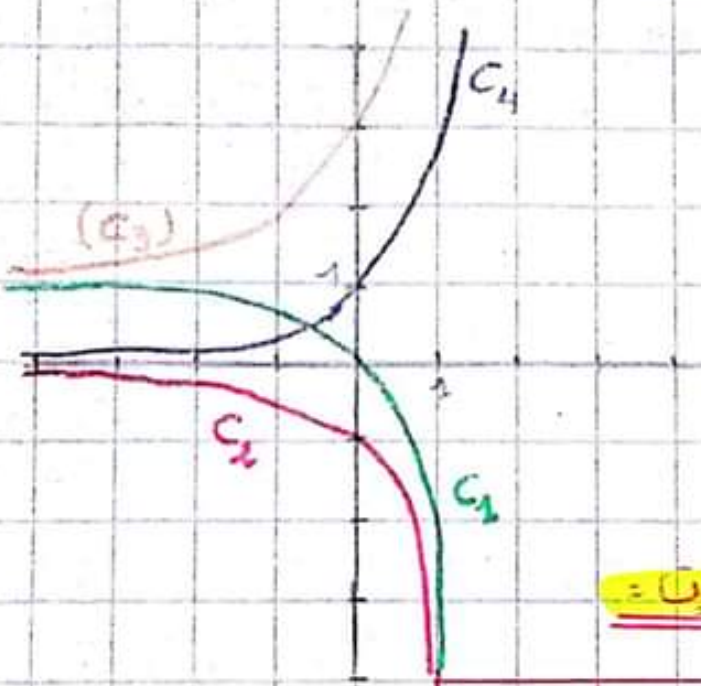
يرسم (C_6) بإنسحاب لـ (C) الذي شعاعه $\vec{v}_6\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$



منحنيات الدالة الأسية

تمرين:

إليك التمثيل البياني لأربعة منحنيات في معلم متعامد ومتجانس:



حل التمرين:

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f'(x) = e^x > 0$

$f(0) = e^0 = 1$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	1	$+\infty$

$(y\ y') : (0, 1)$

1- المنحنى C_f هو C_4 ← $f(x)\ e^x$

2- $g(x) = -e^x = -f(x)$

(C_g) متناظر بالنسبة لمحور الفواصل لـ (C_f)

المنحنى C_g هو C_2

$h(x) = 1 - e^{x} \Rightarrow h(x) = 1 - f(x)$ -3

$1 + g(x)$

$\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(C_h) هو C_1

-4 $K(x) = 1 + 2e^{x}$ ضربت القيم في 2 ثم اضيف

$= 1 + 2f(x)$ الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(C_K) هو C_3

المعادلات التفاضلية

تمرين:

1- حل المعادلات التفاضلية التالية:

1- $y' = 3y$ 2- $y' + 2y = 0$

3- $2y' + 5y = 0$ 4- $\frac{1}{2}y' = 4y$

2- أ- حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 0$

ب- عين الحل الخاص f الذي يحقق $f(\ln 4) = 1$

3- f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = 3e^{-2x}$ -4

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة.

حل تمرين:

المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay$ حلها:

$f(x) = Ce^{ax}$ / حيث: C ثابت حقيقي

1- $y' = 3y$

حلول المعادلة من الشكل: $f(x) = Ce^{3x}$

2- $y' = -2y$

حلول المعادلة هي: $f(x) = Ce^{-2x}$

3- $2y' = -5y \Rightarrow y' = \frac{-5}{2}y$

حلول المعادلة $f(x) = Ce^{-\frac{5}{2}x}$

4- $y' = \frac{4}{1/2}y \Rightarrow y' = 8y$

$f(x) = Ce^{8x}$

2- مبرهنة:

a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم
الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي الدوال
$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث C عدد طبيعي ثابت كيفي.

1- $2y' = \frac{-1}{2} y$

حلول المعادلة $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$

2- الحل الخاص (إيجاد الثابت c)

$$f(\ln 4) = Ce^{-\frac{1}{2}(\ln 4)} = 1$$
$$Ce^{(\ln 4)^{-1/2}} = 1$$
$$Ce^{\ln(4)^{-1/2}} = 1$$
$$C(4)^{-1/2} = 1$$
$$C\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = 1$$
$$C\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad C = \frac{1}{1/2}$$
$$C = 2$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$$

3-

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$
$$f(x) = 3e^{-2x} - \left(\frac{-8}{-2}\right)$$

بالمطابقة $C = 3$; $a = -2$; $b = -8$

$$y' = -2y - 8$$

التحقيق:

$$f(x) = 3e^{-2x} - 4$$
$$f'(x) = -6e^{-2x}$$

$$-6e^{-2x} \overset{?}{=} -2\left(3e^{-2x}-4\right)-8$$
$$= -6e^{-2x} \cancel{+8} \cancel{-8}$$
$$-6e^{-2x} = -6e^{-2x}$$

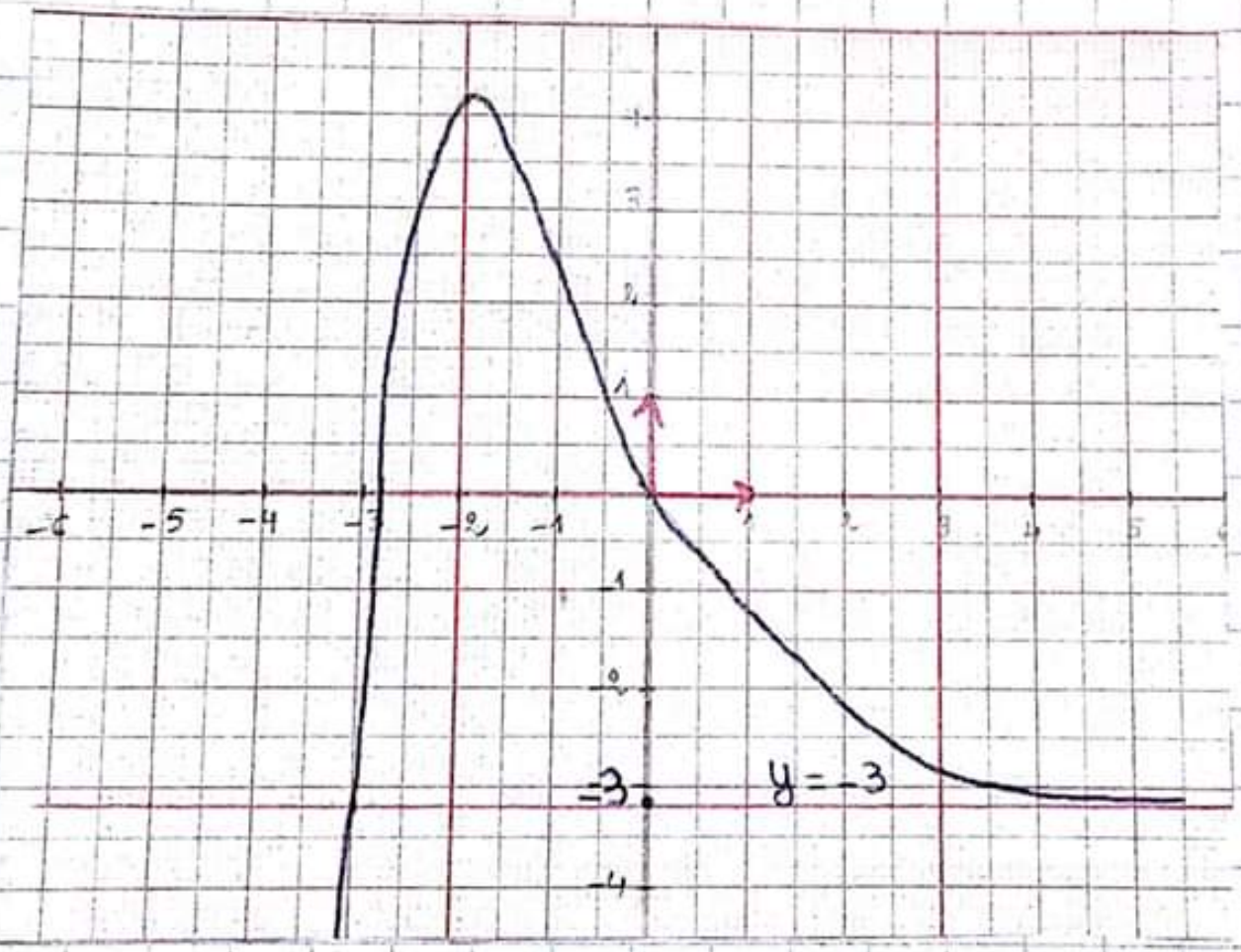
العبارة $f(x)=3e^{-2x}-4$ حل للمعادلة $y' = -2y-8$

الدوال الأسية والدالة الأسية

تمرين:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+a)e^{-x}+b$

a و b عددان حقيقيان وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ الممثل في الشكل المقابل.



بقراءة بيانية:

1) أوجد العددان a و b.

2) شكل جدول تغيرات الدالة f

3- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لمستقيمه المقارب الأفقي.

حل التمرين:

1- إيجاد a و b

①

$O(0,0)$

$$f(x) = (0+a)e^{-0} + b = 0$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

②

$f'(-2) = 0$

$$f'(x) = (1)(e^{-x}) + (-e^{-x})(x+a)$$

$$= e^{-x}(1 - (x+a))$$

$$= e^{-x}(1 - x - a)$$

موجبة

$$f'(-2) = (1 - x - a)e^{-x} = (1 + 2 - a)e^{2} = 0$$

$$1 + 2 - a = 0 \Rightarrow 3 = a$$

ووجدنا سابقا $a = -b \Rightarrow b = -a$

$b = -3$

إذن $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$

2-

		-2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-2) = 4,38$	↘ -3

3- دراسة وضعية C_f بالنسبة إلى (Δ)

$$f(x) - y = (x+3)e^{-x} - 3 + 3$$
$$= (x+3)e^{-x} = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

الدالة الأسية والمتتالية اللوغاريتمية

تمرين:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

نرمز ب (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب:

$y=x$ و $y=x+1$

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m-1)e^{-x}=m$

حل التمرين:

$(m-1)e^{-x}=m$

$f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

شرط فيه $f(x)=m$

$$\frac{m-1}{e^x}=\frac{m}{1} \Leftrightarrow m-1=me^x$$

$$\Leftrightarrow -1=me^x-m$$

$$-1=m(e^x-1)$$

$$x-\frac{+1}{e^x-1}=m+x$$

$$f(x)=m+x$$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع C_f مع المستقيم $y=x+m$

لهم نفس معامل التوجيه $(\Delta_m)//(\Delta)//(\Delta')$

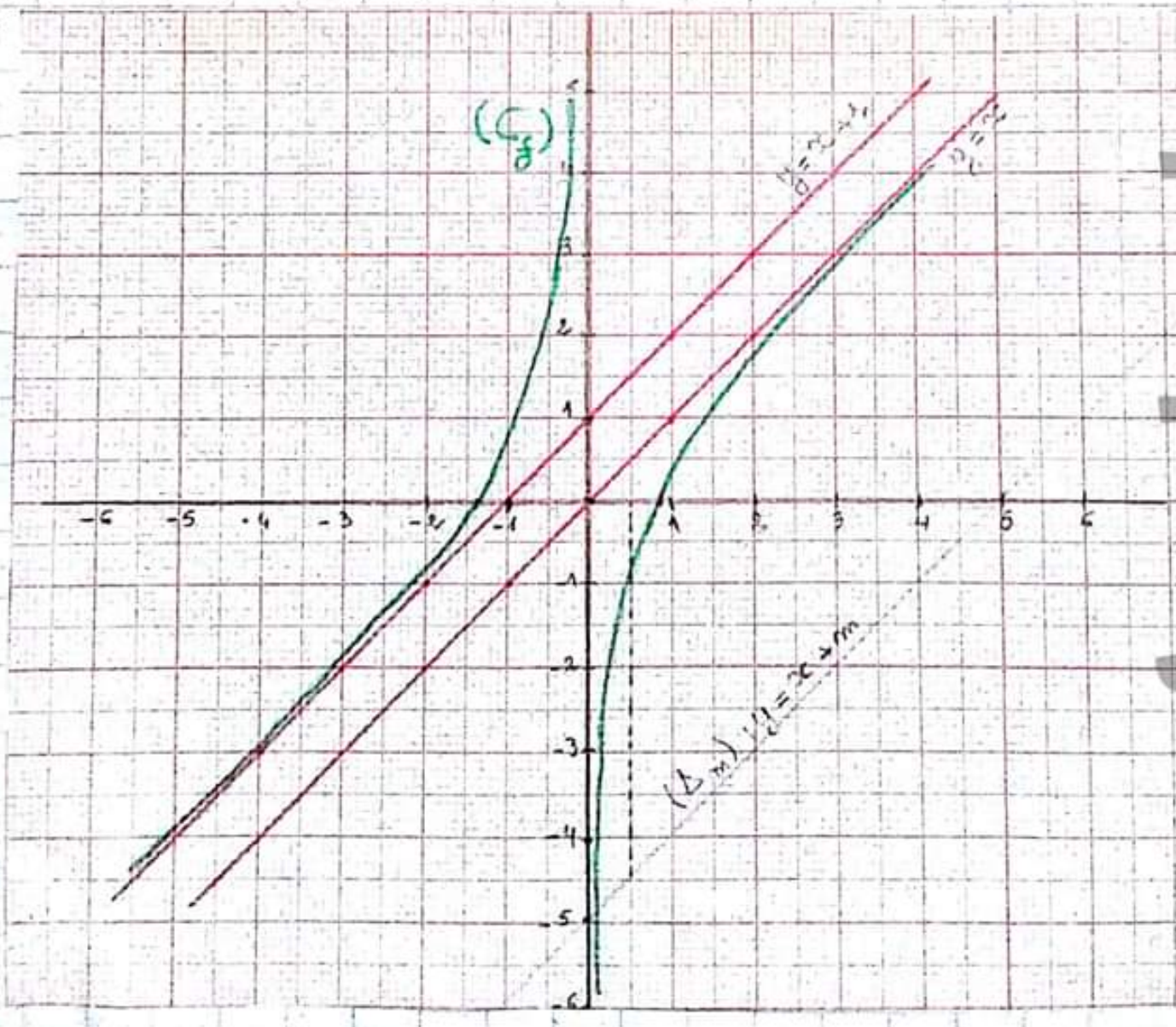
$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = x + m \end{array}\right\} \quad m = b$$

b هو ترتيبة تقاطع المستقيم مع محور التراتيب، m يمثل تقاط تقاطع (Δ_m) مع (yy')

$m \in]-\infty, 0[$ للمعادلة حلا موجبا

$m \in]0, 1[$ ليس للمعادلة حلول

$m \in]1, +\infty[$ للمعادلة حلا سالبا.



تمرين :

f هي دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$

مستقيمين متقاربين معادلتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$

ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $2x-2=(e^x-2x)(m+1)$

حل التمرين :

$$\frac{2x-2}{e^x-2x}=m+1$$

$$f(x)=m+1 \Rightarrow y=m+1$$

$y=b$ المناقشة أفقية

حلول المعادلة $f(x)=m+1$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=m+1$

$m=-2-1$ جاسوس $m\in]-\infty,-3[$

لا يوجد للمعادلة حلول.

$m=-3$

للمعادلة حلا مضاعفا (في كل قيمة حدية)

$m\in]-3,-2[$

للمعادلة حلان مختلفان في الاشارة

$m = -2$ للمعادلة حل موجب

$m \in]-2, -1[$ للمعادلة حلا موجبا

$m = -1$ للمعادلة حل واحد $x = 1$

$m \in]-1, f(\alpha) - 1[$

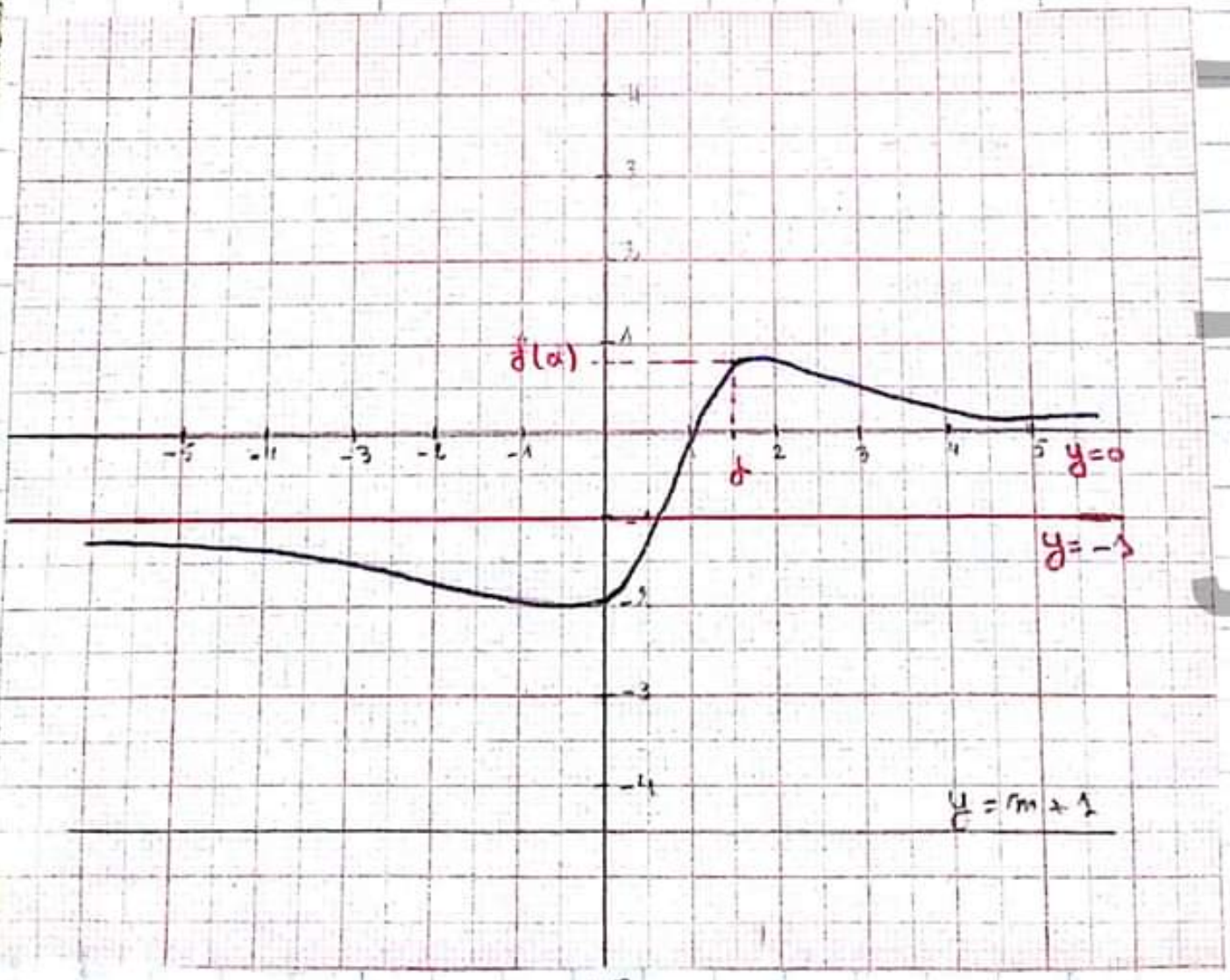
للمعادلة حلان موجبان ومتمايزان.

$m = f(\alpha) - 1$

للمعادلة حلا موجبا مضاعفا $x = \alpha$

$m \in]f(\alpha) - 1, +\infty[$

لا يوجد حلول للمعادلة.



تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x + 1 + e^{-2x}$ و (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2- اثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيد معامل توجيهه يساوي -3، اكتب معادلته.

3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

حل التمرين:

1- برهان مستقيم م. مائل:

$$f(x) = -x + 1 + e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} (ax + b + h(x)) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 0 \end{array}\right\}$$ شرطين

م. م. مائل $y = ax + b$

إذا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$

م. م. مائل $y = -x + 1$

بجوار $+\infty$.

2- معامل التوجيه = مشتقة

$$f'(x) = -3$$

$$f'(x) = -1 - 2e^{-2x} = -3$$

$-2e^{-2x} = -2$

$e^{-2x} = 1 = e^{0}$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

ومنه (C_f) يقبل مماس (d) عند الفاصلة $x_0 = 0$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = -3(x - 0) + f(0)$

$y = -3x + 2$ معادلة المماس

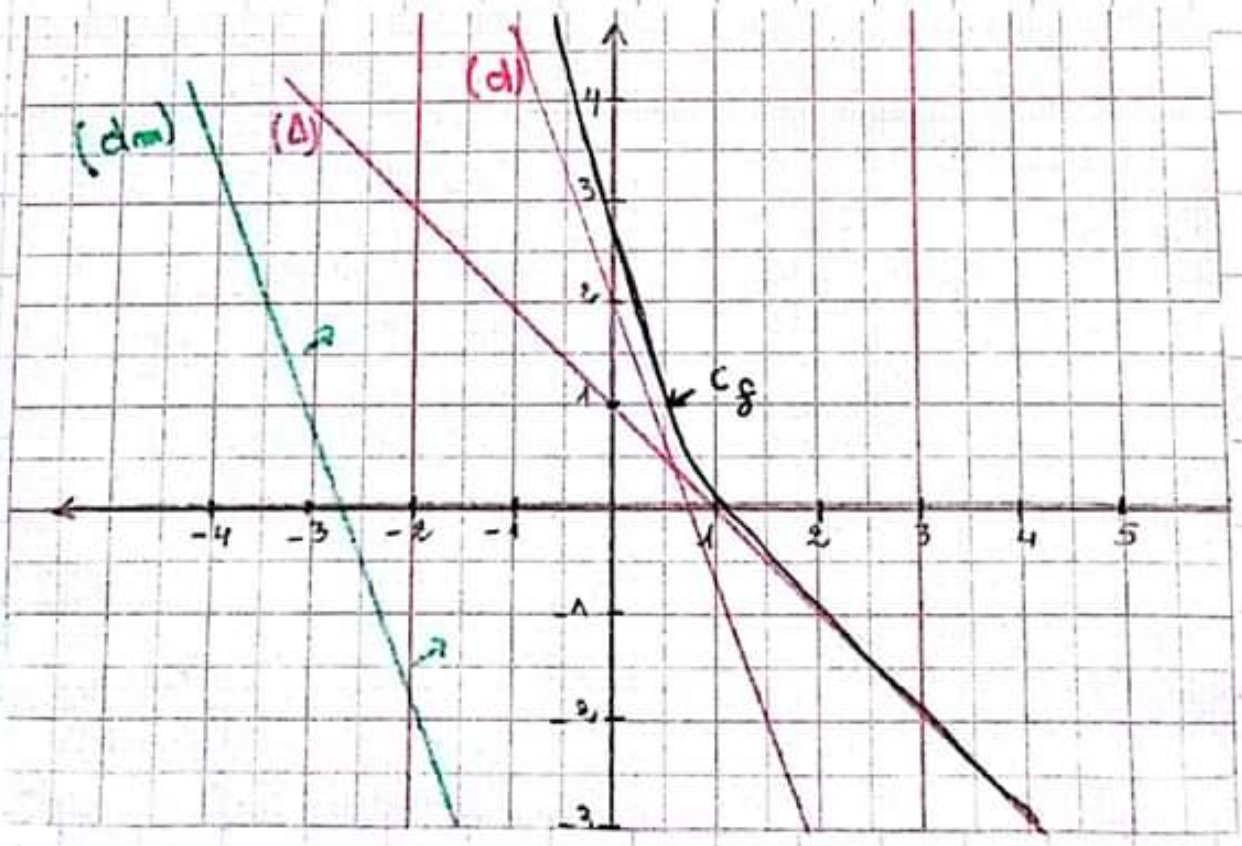
3- ناقش بيانيا

$(d)\ y = -3x + 2$ $\qquad (d_m)\ f(x) = -3x + m$

$(d) // (d_m)$ متوازيان

حلول المعادلة $f(x) = -3 + m$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع (d_m)

حيث m يمثل ترتيب تقاطع (d_m) مع (yy')



$m \in]-\infty, 2[$

لا يوجد حلول المعادلة

$m = 2$

للمعادلة حل وحيدا

$m \in]2, +\infty[$

للمعادلة حلان مختلفان ومتمايزان في الإشارة

نهاية الدوال الأسية.