الدوال اللوغارتمية

الدوال اللوغارتمية من الألف إلى الياء

1- تعريف الدالة اللوغارتمية.
2- مجموعة تعريف الدالة اللوغارتمية.
3- حل معادلات لوغارتمية.
4- متراجحات لوغارتمية.
5- إشارات عبارات لوغارتمية.
6- معادلات لوغارتمية من الدرجة الثانية.
7- نهاية الدالة اللوغارتمية وتفسيرها البياني.
8- مشتقة دالة لوغارتمية.
9- دراسة تغيرات الدالة اللوغارتمية.
10- إستنتاج رسم منحنيات من منحنى الدالة اللوغارتمية.
11- الدالة اللوغارتمية والمستقيم المقارب.
12- التخلص من لوغاريتم ألفا
13- الدالة اللوغارتمية ومبرهنة القيم المتوسطة.
14- الدالة اللوغارتمية ومركز التناظر
15- إيجاد الثوابت في الدالة اللوغارتمية.
16- الدالة اللوغارتمية والمماسات.
17- جملة معادلة لوغارتمية
18- الدالة اللوغارتمية والمناقشة البيانية.

www.facebook.com/bac35

تعريف الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

1- اللوغاريتم النيبيري لعدد:

مبرهنة وتعريف:

من اجل كل عدد حقيقي a من $]0,+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b=a$.

يسمى هذا العدد "اللوغاريتم النيبيري للعدد a" ونرمز اليه بالرمز "$\ln a$".

مثال: العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b=2$ هو $\ln 2$

2- تعريف الدالة "ln":

تعريف:

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز اليها بالرمز "ln" والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$

نتائج:

1- من اجل كل x من $]0,+\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x=e^y$ يعني $y=\ln x$

2- من اجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $e^{\ln x}=x$

3- من اجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x)=x$

4- بما أن $e^0=1$ فإن $\ln 1=0$ وبما أن $e^1=e$ فإن $\ln e=1$

ملاحظة:

نعبر عن النتيجة 4 بالقول أن الدالة ln هي الدالة العكسية لـ exp

www.facebook.com/bac35

الخواص الجبرية:

الخاصية الأساسية:

خاصية:

من اجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0,+\infty[$ ،

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

مثل:

$$\ln(-2\times-3) = \ln|-2| + \ln|-3| = \ln(2) + \ln(3)$$

نتيجة 1:

من اجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0,+\infty[$.

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln a^{-1} = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

نتيجة 2:

من اجل كل عدد حقيقي a من $]0,+\infty[$ و من اجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n) = n\ln a$

مثل: $x \in \mathbb{R}^*$

$$\ln x^2 = 2\ln|x|$$

لأن $x^2 > 0$

النهايات:

1- خواص:

نهاية الدالة ln عند $+\infty$ هي $+\infty$ و عند 0 هي $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

www.facebook.com/bac35

$$\lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

دالة اللوغاريتم العشري:

تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز Log والمعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

www.facebook.com/bac35

مجموعة تعريف الدالة اللوغاريتمية

تمرين :

- $f(x) = 2x^2 - \ln(x)$
- $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$
- $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
- $f(x) = x(2 - \ln x^2)$
- $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$
- $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$
- $f(x) = x + \ln x$
- $f(x) = -x + \ln 2 + \ln x$
- $f(x) = x \ln x$
- $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
- $f(x) = \ln(-2x - 1)$
- $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$
- $f(x) = \frac{2x - 1 + \ln x}{x}$
- $f(x) = x \ln|x| - 2x + 3$

حل التمرين :

- $f(x) = x + \ln x$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$f(x) = x + \ln(-x)$

$$D_f =]-\infty, 0[$$

- $f(x) = 2x^2 - \ln x$

$$D_f =]0, +\infty[$$

- $f(x) = -x + \ln + \ln x$

$$D_f =]0, +\infty[$$

- $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ $\quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$D_f =]0, +\infty[$$

www.facebook.com/bac35

$f(x) = x \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$f(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 2$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$D_f =]0, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{\ln x \neq 0}$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} e^{\ln x} \neq e^0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$-\infty \quad]0 \quad]1 \quad [1 \quad +\infty$

$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$;

$D_f =]0, +\infty[$

$f(x) = \ln(-2x - 1)$ $\quad -2x - 1 > 0$

$-2x > 1$

$D_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[$ $\quad x < -\frac{1}{2}$

أو بجدول الإشارة.

$f(x) = x(2 - \ln x^2)$

$\Delta : x^2 > 0$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1 - x))^2$ $\quad \begin{cases} 1 - x > 0 \\ x < 1 \end{cases}$

$D_f =]-\infty, 1[$

www.facebook.com/bac35

$f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

للمعادلة حلين $\Delta = 49 > 0$

$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$; $x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$

	$-\infty$		-2		$3/2$		$+\infty$
$2x^2+x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 3/2[\cup]3/2, +\infty[$

$f(x) = \frac{2x - 1 + \ln x}{x}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (تقاطع)

$D_f =]0, +\infty[$

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases}$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$			
$x-1$			$-$		0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

www.facebook.com/bac35

$f(x) = x \ln|x| - 2x + 3 \qquad |x| > 0$

$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f(x) = \ln|x - 1|$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{x+1}{\ln x - 1} \qquad \begin{cases} \ln(x) - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\ln(x) \neq 1 \Rightarrow x \neq e$

$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

www.facebook.com/bac35

حل معادلات لوغاريتمية

تمرين 1:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ- $\ln x = 2$ ب- $\ln x = -3$

ج- $7\ln x = 2$ د- $\ln x + \ln 3 = 0$

تمرين 2:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ- $2\ln(x-3) = \ln 4$

ب- $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$

حل التمرين 1:

أ- $\ln x = 2 \Rightarrow e^{\ln x} = e^2 \Rightarrow S = \{e^2\}$

ب- $\ln x = -3 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-3} \Rightarrow S = \{e^{-3}\}$

ج- $7\ln x = 2 \Rightarrow \ln x = \frac{2}{7} \Rightarrow S = \{e^{2/7}\}$

د- $\ln x + \ln 3 = 0 \Rightarrow \ln x = -\ln 3$

$$\ln x = \ln 3^{-1}$$

$$\ln x = \ln \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \in]0, +\infty[$$

$$S = \{1/3\}$$

حل التمرين 2:

أ- $D_f =]3, +\infty[$

$$2\ln(x-3) = \ln 4$$

$$2\ln(x-3) = \ln 2^2$$

$$2\ln(x-3) = 2\ln 2$$

www.facebook.com/bac35

$\ln(x-3) = \ln 2 \Rightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5 \in D$

$S = \{5\}$

$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$ | $D_f =]1, +\infty[$ ـ ب

$\ln(x(x-1)) = \ln(6)$

$\ln(x^2 - x) = \ln 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$x_1 = -2$ مرفوض

$x_2 = 3$ مقبول

$S = \{3\}$

www.facebook.com/bac35

متراجحات لوغاريتمية

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

أ- $\ln(x-1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x+4)$

ب- $\ln(x^2-2x) > \ln(4x-5)$

ج- $\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2-2x+2)$

حل التمرين:

أ- الشرط الأول في حل معادلة او متراجحة هو تعيين مجموعة التعريف.

$$\begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x+4>0 \Rightarrow x>-4 \end{cases}$$

$D:]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x-1}{3}\right) > \ln\left(\frac{2}{x+4}\right)$$

$$\frac{x-1}{3} > \frac{2}{x+4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} - \frac{2}{x+4} > 0$$

$$\frac{x^2+3x-10}{3x+12} > 0$$

$x^2+3x-10$: $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$3x+12 = 0 \quad x = -4$

www.facebook.com/bac35

x	$-\infty$		-5		-4		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$3x+12$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S =]2, +\infty[$

ب- $\ln(x^2-2x) > \ln(4x-5)$

تعيين D_f

$x^2-2x>0 \Rightarrow x(x-2)>0$

$$\begin{cases} x>0 \\ x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \end{cases}$$

$4x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{4}$

		0		$5/4$		2	
$x(x-2)$	$+$	0	$-$			0	$+$
$4x-5$		$-$		0		$+$	

$D =]2, +\infty[$

$\ln(x^2-2x) > \ln(4x-5)$

$x^2-2x > 4x-5$

$x^2-6x+5>0$

$\Delta = 16$

$x_1 = 1$ مرفوض $\qquad x_2 = 5$ مقبول

www.facebook.com/bac35

$]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[\cap]2, +\infty[$

$S =]5, +\infty[$

$\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$ -2

www.facebook.com/bac35

إشارة عبارة لوغاريتمية

تمارين:

ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0,+\infty[$

1- $\ln x - \ln 3$

2- $\ln x(\ln x - 1)$

3- $(\ln x + 1)(\ln x - 1)$

4- $2x\ln(1-x)$

5- $-x^2\ln(x+1)$

حل التمرين:

دراسة إشارة بعض العبارات:

في كل ما يلي، نرمز a, b, c, α, β إلى أعداد حقيقية

1/ دراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ حيث $a.\alpha \neq 0$

لدراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ على مجموعة تعريفها نبحث عن القيمة التي تعدمها ولتكن x_0 ثم نحدد إشارتها.

x	x_0	
$a.\ln(\alpha x+\beta)+b$	عكس إشارة $a.\alpha$	نفس إشارة $a.\alpha$

1- $\ln x - \ln 3$ يعيين D

$D =]0,+\infty[$ $\quad x>0$

$\ln x - \ln 3 = 0 \Rightarrow \ln x = \ln 3$

$x = 3$

www.facebook.com/bac35

	0		3		$+\infty$
$\ln x - \ln 3$		$-$	0	$+$	

2- $(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0$

$a \times b = 0$ $\qquad D =]0, +\infty[$

$\ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}$

$\ln x - 1 = 0 \iff x = e$

	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln x+1)(\ln x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$

3- $2x \ln(1-x)$ $\qquad \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$

$D =]-\infty, 1[$

	$-\infty$		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	
$2x\ln(1-x)$		$-$	0	$-$	

www.facebook.com/bac35

$\ln x(\ln x - 1)$ -4

$D =]0, +\infty[$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e^1$

x	0		1		e		$-\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$			
$\ln x - 1$			$-$		0	$+$	
$\ln x(\ln x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$-x^2 \ln(x+1)$ -5

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$D =]-1, +\infty[$

$$\begin{cases} -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \ln(x+1) = 0 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

	-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$	0	$-$	
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$-x^2\ln(x+1)$		$+$		$-$	

www.facebook.com/bac35

معادلات لوغاريتمية من الدرجة الثانية

تمرين:

نعتبر كثير الحدود $P(x) = 4x^2 - 4x - 3$

1- عين جذور $P(x)$.

2- استنتج حل المعادلتين التاليتين:

أ- $4(\ln x)^2 - 4\ln x - 3 = 0$

حل التمرين:

1- $4x^2 - 4x - 3$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 64$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

2- إستنتاج حل للمعادلة:

نضع $t = \ln x$ نجد / $x \in]0, +\infty[$

$$4t^2 - 4t - 3 = 0$$

لما $t = -\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} = \ln x \Rightarrow e^{-1/2} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

لما $t = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2} = \ln x \Rightarrow x = e^{3/2} \Rightarrow x = e^1 \cdot \sqrt{e}$$

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{e}}, e\sqrt{e}\right\}$$

www.facebook.com/bac35

نهاية الدالة اللوغاريتمية وتفسيرها البياني

تمرين:

1. $D =]0, +\infty[$

$$g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$$

$$\lim_{x \to 0} (x^2 - 1 + 2\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1 + 2\ln x) = +\infty$$

2. $D =]0, +\infty[$

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \text{ح.ع.ت}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2}\right) = \text{ح.ع.ت}$$

نضع $X = \ln \Leftarrow e^X = x$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(X - \underbrace{\frac{X}{e^{2X}}}_{0}\right) = +\infty$$

3. $D =]-2, +\infty[$

$$h(x) = x + 3 - (x+2)\ln(x+2)$$

$$\lim_{x \to -2} (x + 3 - (x+2)\ln(x+2))$$

$$t = x + 2 \Rightarrow x = t - 2$$

$$x \to -2 \qquad t \to 0$$

$$\lim_{t \to 0} (\underbrace{t}_{0} + 1 - \underbrace{t\ln t}_{0}) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\underbrace{x}_{+\infty} + 3 - (\underbrace{x}_{+\infty} + 2)\ln(\underbrace{x}_{+\infty} + 2)) = \text{ح.ع.ت}$$

www.facebook.com/bac35

$$h(x) = x + 2 + 1 - (x+2)\ln(x+2)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+2)\left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \ln(x+2)$$

نضع $t = x + 2$

$$\lim_{t \to +\infty} \underset{+\infty}{t}\left(1 + \underset{0}{\frac{1}{t}}\right) - \underset{-\infty}{\ln t} = -\infty$$

4. $D =]-2, +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+3}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{\ln(x+2)}{x+2+1}$$

نضع $t = x + 2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\overset{-\infty}{\ln t}}{\underset{1}{t+1}} = -\infty$$

$x = -2$ م . م . عمودي .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+3}$$

نضع $t = x + 2$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t+1}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = \frac{\overset{0}{\ln t}}{t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = 0$$

$y = 0$ م . م . أفقي .

5. $D =]0, +\infty[$

$$f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \to 0} (x-1)^2 + \underset{+\infty}{(\ln x)^2} = +\infty$$

www.facebook.com/bac35

$x=0$ م.م.ع.

$$\lim_{x\to+\infty} (\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{x}}-1)^2+(\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{\ln x}})^2=+\infty$$

$$f(x)=x\ln(x+1)-x \qquad D=]-1,+\infty[\quad .6$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{x}}\ \underset{-\infty}{\underset{\shortparallel}{\ln(x+1)}}-\underset{1}{\underset{\shortparallel}{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} \ln(x+1)=\lim_{t\to0}\overset{-\infty}{\overset{\shortparallel}{\ln(t)}}=-\infty$$

$x=-1$ م.م.ع.

$$=\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{x}}\left[\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{\ln(x+1)}}-1\right]=+\infty$$

$$x+1=t$$

$$\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$$

$D=\mathbb{R}^*$ .7

$$f(x)=x-3\frac{\ln|x|}{x^2}$$

$$f(x)=x-3\frac{\ln(x)}{x^2} \qquad |x|=\begin{cases}x & x\geq0\\ -x & x\leq0\end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[x-3\frac{\ln(-x)}{x^2}\right]=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{t}}-3\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{\ln(t)}}\cdot\overset{+\infty}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{t^2}}}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\underset{0}{\underset{\shortparallel}{x}}-3\underset{-\infty}{\underset{\Downarrow}{\ln(x)}}\cdot\underset{+\infty}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{x^2}}}\right]=+\infty$$

$x=0$ م.م. عمودي.

www.facebook.com/bac35

8. $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x \qquad]0, +\infty[$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[x^2 + 3 - 2\ln x\right] = +\infty$$

م.م عمودي $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0} - \underbrace{\frac{2\ln x}{x^2}}_{0}\right) = +\infty$$

9. $D =]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \overset{\parallel}{1} + \underbrace{\ln(1)}_{0} \overset{\parallel}{=} 1$$

$$\lim_{x \to 1} \overset{\parallel 0}{\frac{x-1}{x+1}} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ln(x-1) - \ln(\overset{\overset{\ln 2}{\parallel}}{x+1})$$

نضع $t = x - 1$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \ln(t) = -\infty$$

م.م عمودي $x = 1$

10. $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

$$f(x) = 1 - 2\frac{\ln|x|}{x}$$

$$f(x) \begin{cases} 1 - 2\dfrac{\ln x}{x} & 0 < x \\ 1 - 2\dfrac{\ln -x}{x} & 0 > x \end{cases}$$

www.facebook.com/bac35

$$\lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\,\frac{\ln(-x)}{x}\right] \qquad t = -x$$

$$x = -t$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 1 + 2\,\frac{\overset{\to 0}{\ln(t)}}{t} = 1$$

م.م. أفقي $y = 1$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left[1 - 2\,\frac{\ln(-x)}{x}\right] \qquad \begin{cases} t = -x \\ x = -t \end{cases} \quad \begin{cases} x \overset{<}{\to} 0 \\ t \overset{>}{\to} 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1 + \frac{2\,\ln t}{t} = 1 + \frac{2}{t}.\ln(t) = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1 - \frac{2\,\ln x}{x} = 1 - \overset{-\infty}{\overset{\shortparallel}{\frac{2}{x}}}.\overset{-\infty}{\ln(x)} = +\infty$$

$x = 0$ م.م. عمودي.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{2\,\ln x}{x}\right] = 1$$

م.م. أفقي $y = 1$.

11. $D =]-1, +\infty[$ $\qquad f(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left[x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]$$

$$t = x + 1$$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} t - 1 - \overset{-\infty}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{t}}} + 2\,\overset{-\infty}{\overset{\shortparallel}{\frac{\ln(t)}{t}}} = -\infty \qquad x \overset{>}{\to} -1$$

$$t \overset{>}{\to} 0$$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{t} = +\infty$$

$x = -1$ م.م. عمودي.

www.facebook.com/bac35

$$\lim_{x \to +\infty} x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$$

$t = x+1$

$$\lim_{x \to +\infty} t - 1 - \frac{1}{t} + \frac{2\ln t}{t} = +\infty$$

$x \to +\infty$

$t \to +\infty$

12. عند $+\infty$

$$f(x) = x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = \text{ح.ع.ت}$$

نضع $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

$$\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\ln(t+1) = \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

13. عند $+\infty$ و $-\infty$

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x}}\ln(1+e^{x})$$

نضع $t = e^{x}$

$x \to -\infty$

$t \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}}\ln(1+e^{x})$$

نضع $t = e^{x}$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\ln(1+t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} =$$

www.facebook.com/bac35

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln[t\,[1+\frac{1}{t}]]}{t} = \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{0} + \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t} = 0$$

$y=0$ م.م.أفقي

14. $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ ، $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$

$$\lim_{x\to-1} \frac{\ln(x+1)}{x^2} \qquad \begin{cases} x \overset{>}{\to} -1 \\ t \overset{>}{\to} 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = x+1 \\ x = t-1 \end{cases}$$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} = \frac{1}{4}(-\infty) = -\infty$$

$x=-1$ م.م.عمودي

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left[\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{-x}}_{0^{-}\,-\infty} \right] = -\infty$$

$x=0$ م.م.عمودي.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{+x}}_{0^{+}\,+\infty} \right] = +\infty$$

$x=0$ م.م.عمودي.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[x\,(1+1/x)]}{x^2} = \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{1+1/x}{x^2}}_{0} = 0$$

$y=0$ م.م.أفقي

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \left[\underbrace{\ln(x)}_{+\infty} + \frac{x^2-1}{2} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{x^2-1}{2x}}_{+\infty} \right] = +\infty$$

15. $]-1,+\infty[$ ، $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نضع: $t = x+1$

$t \overset{>}{\to} 0 \; ; \; x \overset{>}{\to} -1$

www.facebook.com/bac35

$$\lim_{t \to 0} t - 1 - \frac{\ln(t)}{t} = t - 1 - \underbrace{\frac{1}{t}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\ln t}_{-\infty} = +\infty$$

$x = -1$ م . م . عمودي .

$$\lim_{x \to +\infty} x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نضع $\begin{cases} t = x + 1 \\ x = t - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to +\infty \end{cases}$

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t - 1 - \underbrace{\frac{\ln(t)}{t}}_{0} \right] = +\infty$$

15- $h(x) = 1 - \ln(1 - e^{-x})$ على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} 1 - \ln(1 - e^{-x})$$

$\begin{cases} x \to -\infty \\ t \to +\infty \end{cases}$ نضع $t = -x \Leftarrow x = -t$

$$\lim_{t \to +\infty} 1 - \ln(1 - \underbrace{e^{t}}_{+\infty}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \ln\left(1 - \underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{0}\right) = 1$$

$y = 1$ م . م . أفقي .

www.facebook.com/bac35

مشتقة دالة لوغاريتمية

قانون عام:

مشتقة الدالة $f: x \mapsto \ln(u(x))$ هي الدالة $f': x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

$$f'(x) \ \frac{2x}{x^2+1}$$

تمرين:

تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال D ثم أحسب دالتها المشتقة

1) $f(x) = (\ln x)^2 + \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

2) $f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$ $\quad D =]0, +\infty[$

3) $f(x) = x \ln|x| - 2x + 3$ $\quad D =]-\infty, 0[$

4) $f(x) = -\frac{x}{2} + x \ln x$ $\quad D =]0, +\infty[$

5) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$ $\quad D =]e, +\infty[$

حل التمرين:

1. $f'(x) = (\ln x)^2 + \ln x$

2. $f'(x) = 2\frac{1}{x}(\ln x)^1 + \frac{1}{x}(x^2) - \frac{2x}{2} = 2x\ln x$

3. $f'(x) = \left[1 \ln|x| + \frac{1}{|x|} \times x - 2\right]$

$= \ln|x| + 1 - 2$

$f'(x) = \ln|x| - 1 = 0$ $\quad \begin{cases} x = e & x \geq 0 \\ x = -e & x \leq 0 \end{cases}$

$|x| = e$

www.facebook.com/bac35

$$f'(x) = -\frac{x}{2} + x \ln x$$ .4

$$= \frac{-2}{4} + \ln x + \frac{1}{x} \times x$$

$$= +\frac{1}{2} + \ln x = 0$$

إشارة المشتقة

$$e^{\ln x} = e^{-1/2} \quad | \quad e^{\ln a} = a$$

$$x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\ln x - 1}$$ .5

$$f'(x) = \frac{1(\ln(x) - 1) - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x - 1)^2}$$

تمرين:

1) $f(x) = \ln(-2x - 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$

3) $f(x) = x(2 - \ln x^2)$

4) $f(x) = \ln(2x^2 + x - 6)$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

6) $f(x) = \frac{2x - 1 + \ln x}{x}$

حل التمرين:

1) $f'(x) = \ln(-2x - 1)$

$$= \frac{-2}{-2x - 1}$$

www.facebook.com/bac35

(2

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2)\left(\frac{-1}{1-x}\right)\ln(1-x)$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

(3

$$f'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x-6}$$

(4

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1(x+1)-(x+1)}{(x+1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

(5

$$f(x) = \frac{2x-1+\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)(x) - 1(2x-1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{2-\ln(x)}{x^2}$$

www.facebook.com/bac35

دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية

تمرين :

ادرس تغيرات الدالة f على المجال D.

1] $f(x) = Ln(x-3)$; $D_f =]3, +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x-3} > 0$

	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما.

2] $f(x) = Ln(1-x)$; $D_f =]-\infty, 1[$

$f'(x) = -\frac{1}{1-x} < 0$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
-1		$-$		$-$	
$\frac{-1}{1-x}$		$-$		$+$	

f متناقصة تماما على $]-\infty, 1[$

3] $f(x) = \ln(2x^2)$ $D_f =]0, +\infty[$

$f'(x) = \frac{2(2)x}{2x^2} = \frac{2}{x}$

	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$		$+$	

www.facebook.com/bac35

ومنه f متزايدة تماما

4] $D_f =]2, +\infty[$; $f(x) = \ln|x-2|$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2}$$

نزع القيمة المطلقة عادي ولكن الإشارة تصبح إشارة البسط في المقام.

	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على $]2, +\infty[$

5] $D_f =]2, +\infty[$; $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$

خاصية:

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln a^{-1} = -1\ln(a) = -\ln a$$

$$f(x) = \ln(x-2)^{-1} = -\ln(x-2)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x-2} < 0$$

ومنه f متناقصة تماما على D_f.

6] $D_f =]-\infty, 1[$; $f(x) = 2x - \ln(1-x)$

$$f'(x) = \frac{2}{1-x}$$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة متزايدة تماما على $]-\infty, 1[$

www.facebook.com/bac35

7] $D =]1, +\infty[$; $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln(x-1)$

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة على $]1, +\infty[$

8] $D_f =]1, 3]$; $f(x) = 2x + \ln x - \ln(x-1)$

$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$

$= \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x-1)}$

ندرس إشارة المقام.

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$x(x-1) > 0$ في $]1, +\infty[$

ندرس إشارة البسط:

$2x^2 - 2x - 1$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

www.facebook.com/bac35

	$-\infty$		$x_1 \approx -0{,}36$		1		$x_2 \approx 1{,}36$		$+\infty$
$2x^2-2x-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متناقصة على مجال $]1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$

ومتزايدة على مجال $[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 3[$

$D_f =]-\infty, 0[$: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 5

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{1/x^2}{x - 1/x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)} > 0$$

ندرس إشارة المقام:

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x(x-1)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

ندرس إشارة البسط

$-x^2+x+2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = -1$

www.facebook.com/bac35

	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1[$

و الدالة متزايدة تماما على المجال $[-1,0[$

[10] $D_f=]0,+\infty[$; $f(x)=-\frac{3}{2}x+\ln(2x)$

$$f'(x)=\frac{-3x+2}{2x>0}\rightarrow]0,+\infty[$$

الإشارة من إشارة البسط.

$-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

	$-\infty$		$\frac{2}{3}$ (0,66)		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة متزايدة تماما على $]0,2/3[$

و متناقصة تماما على $[2/3,+\infty[$

[11] $D_f=]0;+\infty[$; $f(x)=x+1+\frac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$$

نضع $g(x)=x^2+1-\ln x$ على $]0,+\infty[$

ندرسها

$$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x>0}$$

الإشارة من إشارة البسط.

www.facebook.com/bac35

$x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 1$		$+$			$-$			$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]0, 1/\sqrt{2}[$
و متزايدة على $]1/\sqrt{2}, +\infty[$

	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
	$\searrow$		$1/2 + 1 + 1/2 \ln 2 > 0$		$\nearrow$

من الجدول نلاحظ أن $g(x) > 0$

إذن

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

$D_f =]0, +\infty[$; $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ $\quad$ ت12

$$f'(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2 > 0}$$

$\ln x - 2 = 0 \iff x = e^2$

www.facebook.com/bac35

	0		e^2		$+\infty$
$-2+\ln x$		$-$	0	$+$	

الدالة متناقصة على $]0, e^2[$

ومتزايدة على $]e^2, +\infty[$.

ت3 $D_f =]-5, 1[$; $f(x) = \ln(1-x) + \ln(x+5)$

$$f'(x) = \frac{-2x-4}{-x^2-4x+5} > 0$$

دراسة إشارة المقام:

$-x^2-4x+5 = 0$ $\quad \sqrt{\Delta} = 6$

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = -5$

	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2-4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن $-x^2-4x+5 > 0$

دراسة إشارة البسط.

$-2x-4 = 0 \Rightarrow x = -2$

	-5		-2		1
$-2x-4$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة على $]-5, -2]$

ومتناقصة على $[-2, 1[$.

www.facebook.com/bac35

استنتاج رسم منحنيات من منحنى الدالة اللوغاريتمية.

تمرين:

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنيها البياني (C) انطلاقا من التمثيل البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم ارسم (C).

أ) $f(x) = 1 + \ln x$

ب) $g(x) = -\ln x$

ج) $h(x) = \ln(x+2)$

د) $k(x) = 1 + \ln(x-1)$

2. نعتبر الدالتين φ و ψ المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي

$\varphi(x) = \ln(|x|)$ $\quad$ $\psi(x) = |\ln(|x|)|$

حل التمرين:

1. أ- يرسم (C_f) بواسطة انسحاب للمنحنى (C) شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ب- يرسم (C_g) بواسطة تناظر بالنسبة إلى محور الفواصل لـ C

ج- يرسم (C_h) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ للمنحنى (C)

د- يرسم (C_k) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ للمنحنى (C)

2.
$$\varphi(-x) = \ln(|-x|)$$
$$= \ln|x|$$
$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

ومنه φ دالة زوجية. فإن منحناها يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

$$|x| \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

www.facebook.com/bac35

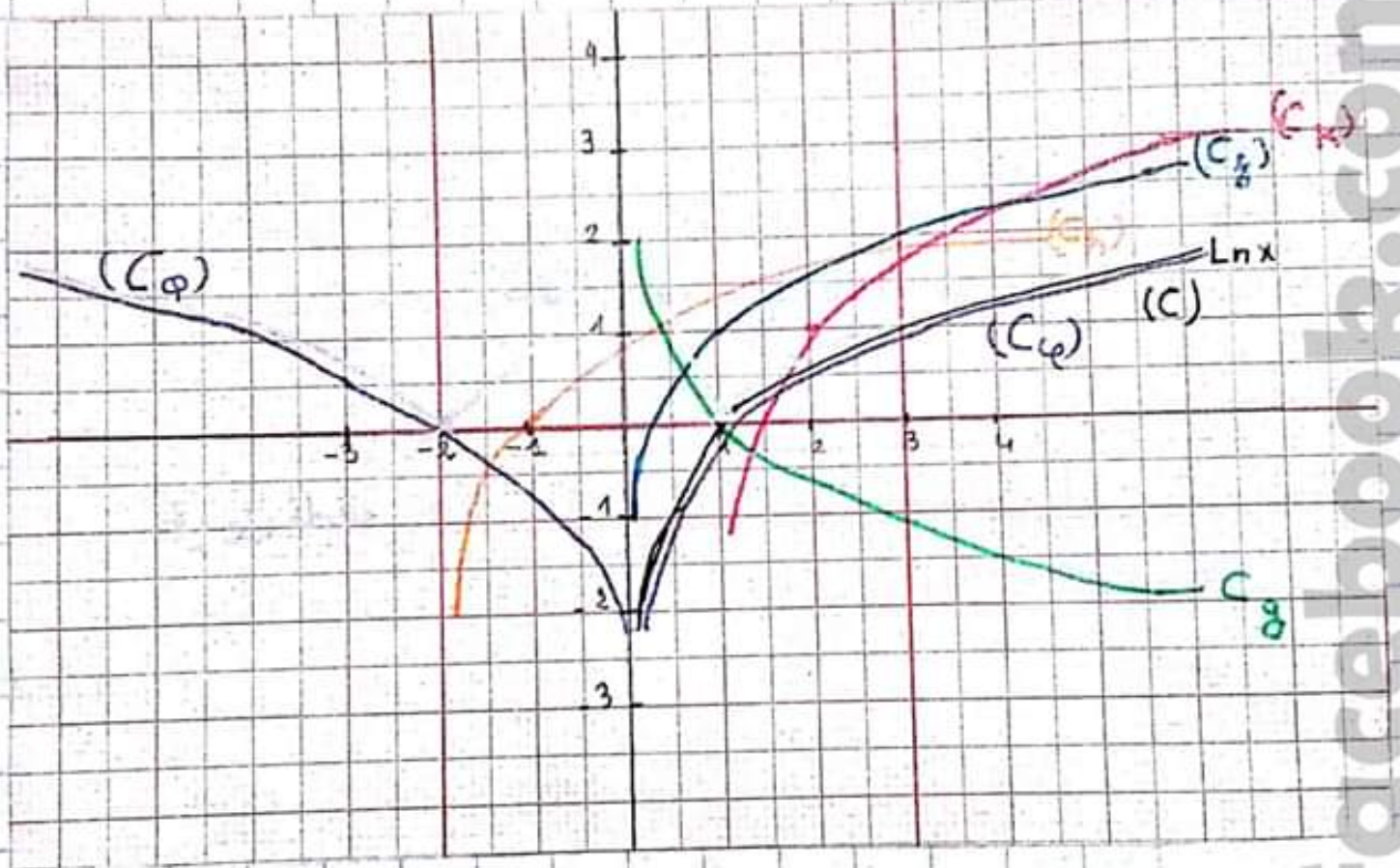
• يرسم $\psi(x)$ (C_ψ) ينطبق على (C_φ)

$$\psi(x) \begin{cases} \varphi(x) & \varphi(x) \geq 0 \\ -\varphi(x) & \varphi(x) \leq 0 \end{cases}$$

منحنى (C_ψ) يقع فوق محور الفواصل $\psi(x) = |\varphi(x)| \geq 0$

• (C_ψ) ينطبق على (C_φ) $]1, +\infty[$ و $]-\infty, -1[$

و C_ψ يناظر (C_φ) بالنسبة الى محور الفواصل $[-1, 1]$



www.facebook.com/bac35

الدالة اللوغاريتمية والمستقيم المقارب.

تمرين:

$$f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \qquad]-\infty, 0[$$

1/ بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

2/ أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

حل التمرين:

1

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - y] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - (x+5)\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = 0$$

$$6 \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right] = 0$$

$$u(x) = \frac{x}{x-1} \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$$

$$g = v \circ u \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} v(x) = \lim_{x \to 1} \ln(x)$$

$$= \lim_{x \to 1} \ln(1) = 0$$

ومنه C_f يقبل (Δ) م.م.مائل بجوار $-\infty$.

www.facebook.com/bac35

② ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$6 > 0$ موجبة دائما

إذن ندرس $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$e^{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} = e^{0} \iff \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 > 0}{x-1} = 0$$

x	$-\infty$	0
$x-1$	$-$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ) اسفل (Δ)	

www.facebook.com/bac35

التخلص من لوغاريتم ألفا.

تمرين:

I] g الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$$

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $0,76 < \alpha < 0,77$

II] f الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x\ln(x+1) - x$$

بين أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

حل التمرين:

I]

$$g(\alpha) = \ln(\alpha+1) - \frac{1}{\alpha+1} = 0$$

$$f(\alpha) = \alpha\ln(\alpha+1) - \alpha \quad \Big| \quad f(\alpha) = \frac{-\alpha^2}{\alpha+1}$$

نحاول التخلص من Ln

من $g(x)$ نجد:

$$\ln(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha+1}$$

نعوض

$$f(\alpha)\ \alpha\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) - \alpha$$

$$f(\alpha)\ \frac{\alpha - \alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{-\alpha^2}{\alpha+1}$$

وهو المطلوب إيجاده

II] حصر $f(\alpha)$:

$$0,76 < \alpha < 0,77$$

$$1,76 < \alpha+1 < 1,77$$

www.facebook.com/bac35

$$\frac{1}{1,77} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{1,76} \quad \dots (1)$$

$$(0,76)^2 < \alpha^2 < (0,77)^2 \quad \dots (3)$$

$$-(0,77)^2 < -\alpha^2 < -(0,76)^2 \quad \dots (2)$$

بضرب (1) في (3)

$$\frac{(0,76)^2}{1,77} < \frac{\alpha^2}{\alpha+1} < \frac{(0,77)^2}{1,76}$$

$$-\frac{(0,77)^2}{1,76} < -\frac{\alpha^2}{\alpha+1} < -\frac{(0,76)^2}{1,77}$$

$$-0,33 < f(\alpha) < -0,32$$

www.facebook.com/bac35

الدالة اللوغاريتمية ومبرهنة القيم المتوسطة

تمرين:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي

$g(x) = ax + 1 + Ln(bx)$ حيث a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

1) عين a و b بحيث يكون $g(1) = 2$ و $g'(1) = 2$

2) عين نهايتي الدالة g عند 0 وعند $+\infty$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$، باستعمال طريقة التنصيف جد حصرا للعدد α سعته 10^{-2}.

حل التمرين:

1)

$$g(1) = a + 1 + Ln(b) = 2$$

$$g'(x) = a + \frac{1}{x} \Rightarrow g'(1) = a + 1 = 2$$

$$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$1 + 1 + Ln(b) = 2 \Rightarrow Ln(b) = 0$$

$$e^{Ln(b)} = e^0$$

$$b = 1$$

إذن $g(x) = x + 1 + Ln(x)$

2)

$$\lim_{x \to 0} (\underset{0}{x} + 1 + \underset{-\infty}{Ln\, x}) = -\infty$$

$x = 0$ م.م. عمودي

$$\lim_{x \to +\infty} (\underset{+\infty}{x} + 1 + \underset{+\infty}{Ln\, x}) = +\infty$$

www.facebook.com/bac35

3] دراسة إتجاه تغير الدالة

المشتقة $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

موجبة على $]0,+\infty[$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

جدول التغيرات :

	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

4] بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة على $]0,1]$

و $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$ و $g(1) = 2$

وبما أن $0 \in]-\infty, 2]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا $0 < \alpha \leq 1$

إيجاد حصر

$$g(x) = x + 1 + \ln(x)$$

x	$0,25$		$0,5$
$g(x)$	$-0,136$		$0,8$

$\frac{0+1}{2} = 0,5$ $\qquad$ $g(0,5) = 0,8$

www.facebook.com/bac35

$\frac{0 + 0,5}{2} = 0,25 = 25 \times 10^{-2}$ $g(0,25) = -0,136$

www.facebook.com/bac35

الدالة اللوغاريتمية ومركز التناظر

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ و (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أحسب $f(-x) + f(x)$، ماذا نستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

حل تمرين:

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{(-x)} + 1 = 2$$

$$f(-x) + f(x) = 2$$

قانون التناظر. $f(2a - x) + f(x) = 2b$

حيث مركز التناظر $\omega(a, b)$.

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$

$2a = 0 \Rightarrow a = 0$

ومنه $\omega(0, 1)$ مركز تناظر C.

تمرين:

الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a + b\ln 2x}{4x^2}$،

حيث a و b عددان حقيقيان (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ للمنحنى (C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

حل التمرين:

$$f(1/2) = \frac{a + b\ln(1)}{1} = 1$$

www.facebook.com/bac35

و منه $a = 1$

معامل توجيه مماس موازي لمحور الفواصل و $f'(x) = 0$

$y = b \quad | \quad y = \underset{0}{\underset{\parallel}{a}}x + b$

$$f'(x) = \frac{4bx - 8ax - 8bx\ln(2x)}{16x^4} = 0$$

$$f'(1/2) = 2b - \underset{1}{4a} = 0 \Rightarrow 2b - 4 = 0$$

$b = 2$

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln(2x)}{4x^2}$$

www.facebook.com/bac35

الدالة اللوغاريتمية والمماسات

تمرين:

$f(x) = 1 + x\,Ln(x+2)$ المعرفة على $]-2,+\infty[$ ، (C_f) منحنيها البياني.

- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_a) و (T_b) يمران من المبدأ، يطلب تعيين معادلتهما.

حل التمرين:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

حيث x_0 هي التي يمس فيها المماس المنحنى.

$$0 = f'(x_0)(-x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = Ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

$$0 = \left(Ln(x_0+2) + \frac{x_0}{x_0+2}\right)(-x_0) + \left(1 + x_0 Ln(x_0+2)\right)$$

$$-x_0 \cancel{Ln(x_0+2)} - \frac{x_0^2}{x_0+2} + 1 + x_0 \cancel{Ln(x_0+2)} = 0$$

$$\frac{-x_0^2}{x_0+2} + 1 = 0 \iff \frac{-x^2}{x_0+2} = -1$$

$$-x^2 + x_0 + 2 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$$

ومنه C_f يقبل مماسين عند الفاصلتين

$$x_a = 2 \qquad x_b = -1$$

www.facebook.com/bac35

$(T_a) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$y = (\ln 4 + 1/2)(x-2) + 1 + 2\ln 4$

$(T_b) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$(-1)(x+1) + 1$

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ و (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- اثبت أن للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا T يشمل النقطة $A(0,1)$ و يمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتها ثم أوجد معادلة للمماس (T).

حل التمرين:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$= \frac{2 - \ln(x_0^2) - \ln(x_0^2)}{x_0} = 0$ $\quad A(0,1)$

$2 - 2\ln(x_0)^2 = 0$

$\ln x_0^2 = 1$

$x^2 = e^1$ $\quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{e} \\ x_2 = \sqrt{e} \end{cases}$

ومنه (Δ) يمس المنحنى في نقطتين ذات فاصلتين

$x = -\sqrt{e}$ و $x = \sqrt{e}$

إيجاد الإحداثيات

$f(\sqrt{e}) = 1 - \frac{\ln(\sqrt{e})^2}{\sqrt{e}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$

www.facebook.com/bac35

$B\left(\sqrt{e},\ 1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $\quad$ $C\left(-\sqrt{e},\ 1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

معادلة المماس

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$$

$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$

$$y = -\frac{1}{e}(x - \sqrt{e}) + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

www.facebook.com/bac35

جملة معادلة لوغاريتمية

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2+2y=16 & \dots (1) \\ \ln\frac{x}{y} = -\ln 3 & (2) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}^*$ $\qquad D: \left(\frac{x}{y}\right) > 0$

حل التمرين:

$$e^{\ln\frac{x}{y}} = e^{\ln 3^{-1}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x = y$$

من (1) وبالتعويض:

$$x^2+6x=16$$

$$x^2+6x-16=0$$

$$\sqrt{\Delta}=10$$

$x_1=-8$ $\qquad x_2=2$

$y_1=-24$ $\qquad y_2=6$

$$S=\{(-8,-24),(2,6)\}$$

www.facebook.com/bac35

الدالة اللوغاريتمية والمشتقة الثانية

تمرين:

$]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$

ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2\ln x - mx^2 - \ln x - 2x^2 = 0$

حل التمرين: (مناقشة افقية)

انطلاقا من $x^2\ln x - mx^2 - \ln x - 2x^2$

نجد $f(x) =$ التي فيه m.

$$x^2\ln x - mx^2 - \ln x - 2x^2 = 0$$

$$x^2\ln x - \ln x - 2x^2 = mx^2$$

$$x^2\ln x - \frac{\ln x}{x^2} - 2x^2 = m$$

$$\frac{x^2\ln x}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} = m$$

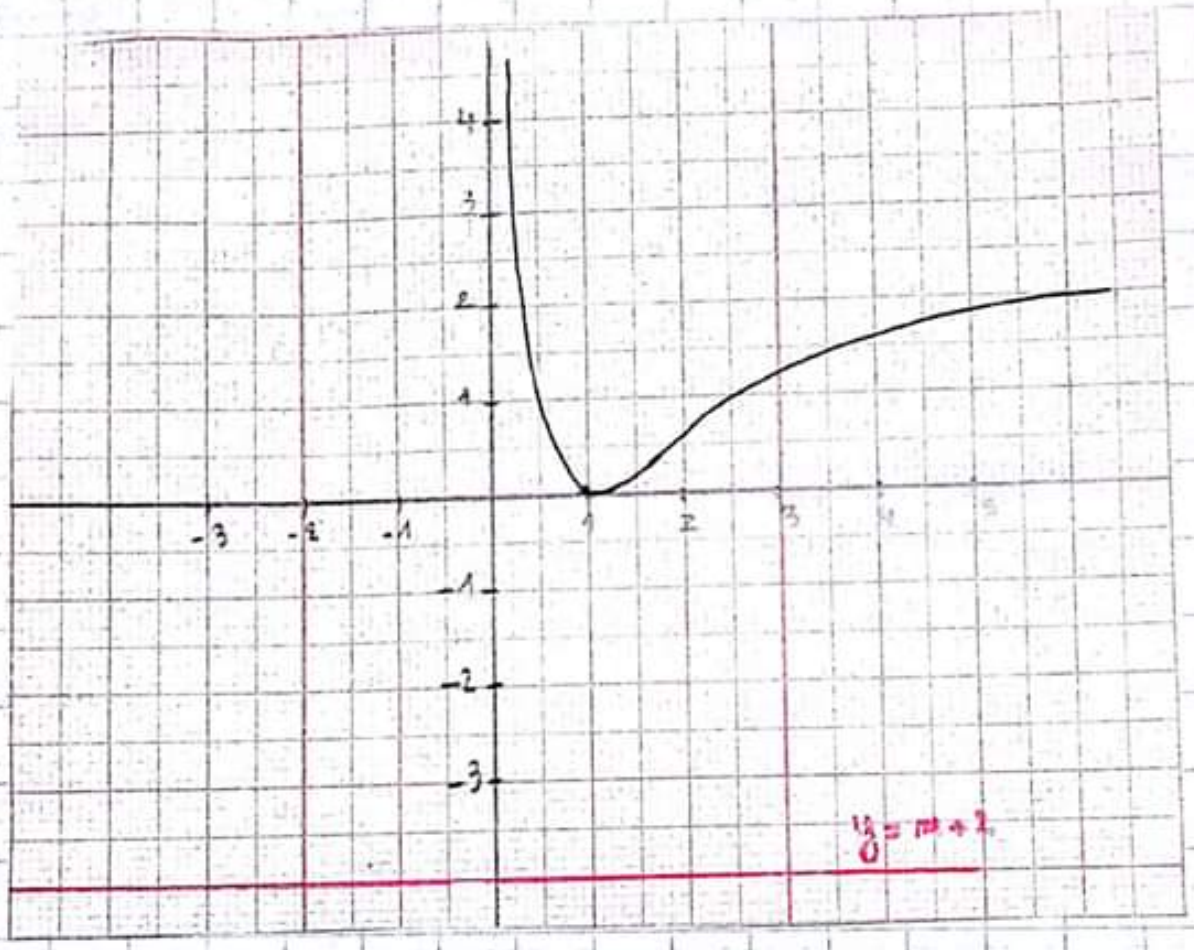
$$\ln x - \frac{\ln x}{x^2} = m + 2$$

$$f(x) = m + 2$$

حلول المعادلة $f(x) = x + 2$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m + 2$.

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = m + 2 \end{cases}$$

www.facebook.com/bac35



المناقشة :

$m = y - 2$

$y \in]-\infty, 0[$

$m \in]-\infty, -2[$

لا يوجد حلا للمعادلة .

$m = -2$

$y = 0$

للمعادلة حلا مضاعفا.

$y \in]0, +\infty[$ $\quad$ $m \in]-2, +\infty[$

للمعادلة حلان موجبان و متمايزان .

www.facebook.com/bac35

تمرين :

$]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - Ln(x)$

f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{Lnx}{x}$ و (C_f) منحنيها البياني $f'(x) = \frac{1+g(x)}{x^2}$

1- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ميله يساوي $\frac{1}{2}$ ، عين x_0 ثم اكتب معادلة (Δ).

2- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.

حل التمرين : مناقشة مماثلة

معامل التوجيه = الميل = المشتقة

I]

$$f'(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$1 - Ln(x_0) = 0 \iff Ln(x_0) = 1$$

$$e^{Ln x_0} = e^1$$

$$x_0 = e$$

ومنه C_f يقبل مماسا عند $x_0 = e$ ميله $1/2$

$$y = f'(e)(x-e) + f(e)$$

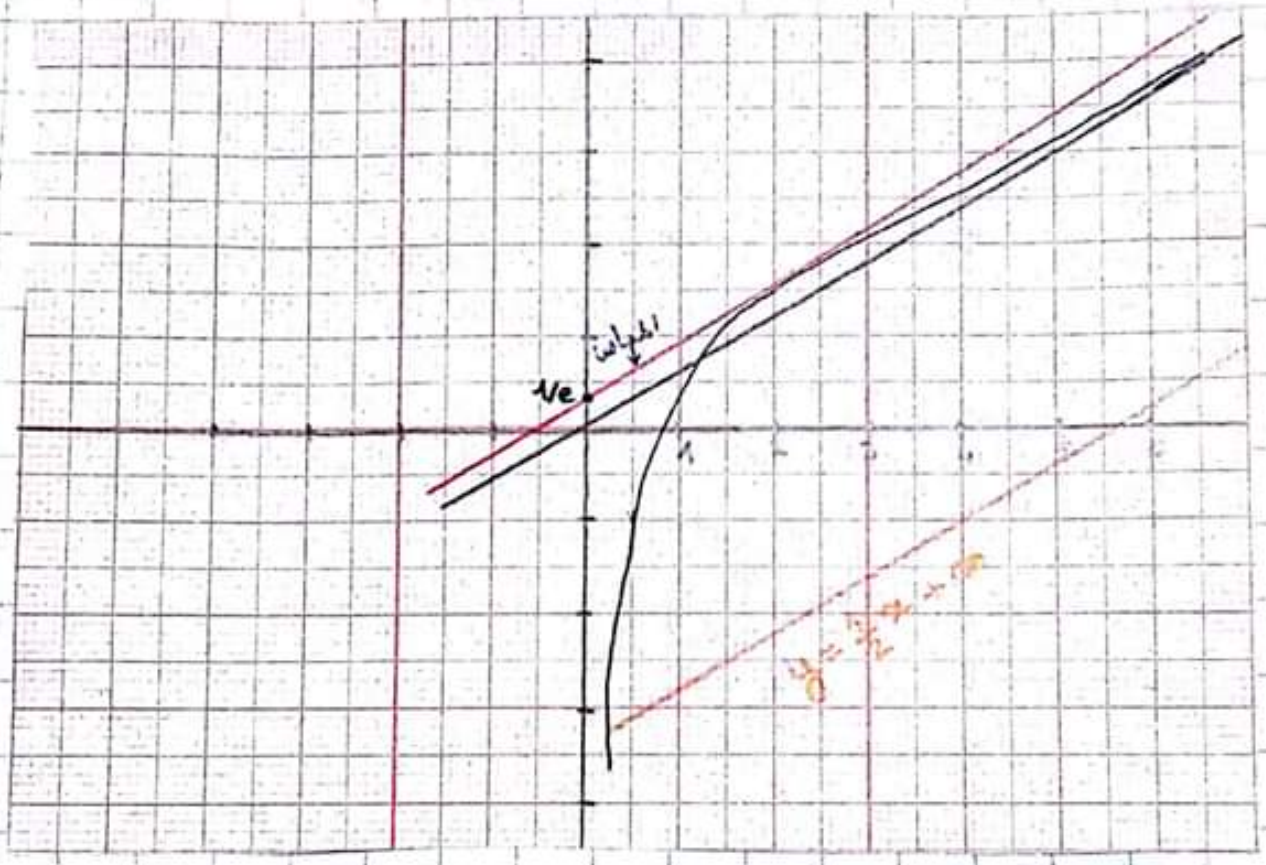
$$y = \frac{1}{2}(x-e) + \frac{1}{2}e + \frac{1}{e}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{e}$$

II] حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x + m$ هي فواصل تقاطع C_f مع المستقيم Δ_m حيث $(\Delta_m): y = \frac{1}{2}x + m$

www.facebook.com/bac35

$(\Delta) \parallel (\Delta_m)$



المناقشة :

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = \frac{1}{2}x + m \end{cases}$$

قيم m تمثل تقاطع (Δ_m) مع (yy')

$m \in]-\infty, 0[$

للمعادلة حل موجبا

$y = 1/2\, x + 0$

$y = \frac{1}{2}x + m$

www.facebook.com/bac35

$m \in]0, \frac{1}{e}[$

للمعادلة حلان موجبان متمايزان

$m = \frac{1}{e}$

للمعادلة حلا وحيدا $x = e$

$m \in]\frac{1}{e}, +\infty[$

لا توجد حلول للمعادلة.

تمرين: المناقشة الدورانية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ و (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

للمنحنى (C_f) مماسا وحيدا (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين.

- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$

حل التمرين:

المماس: $(T): y = \frac{-1}{e}x + 1$

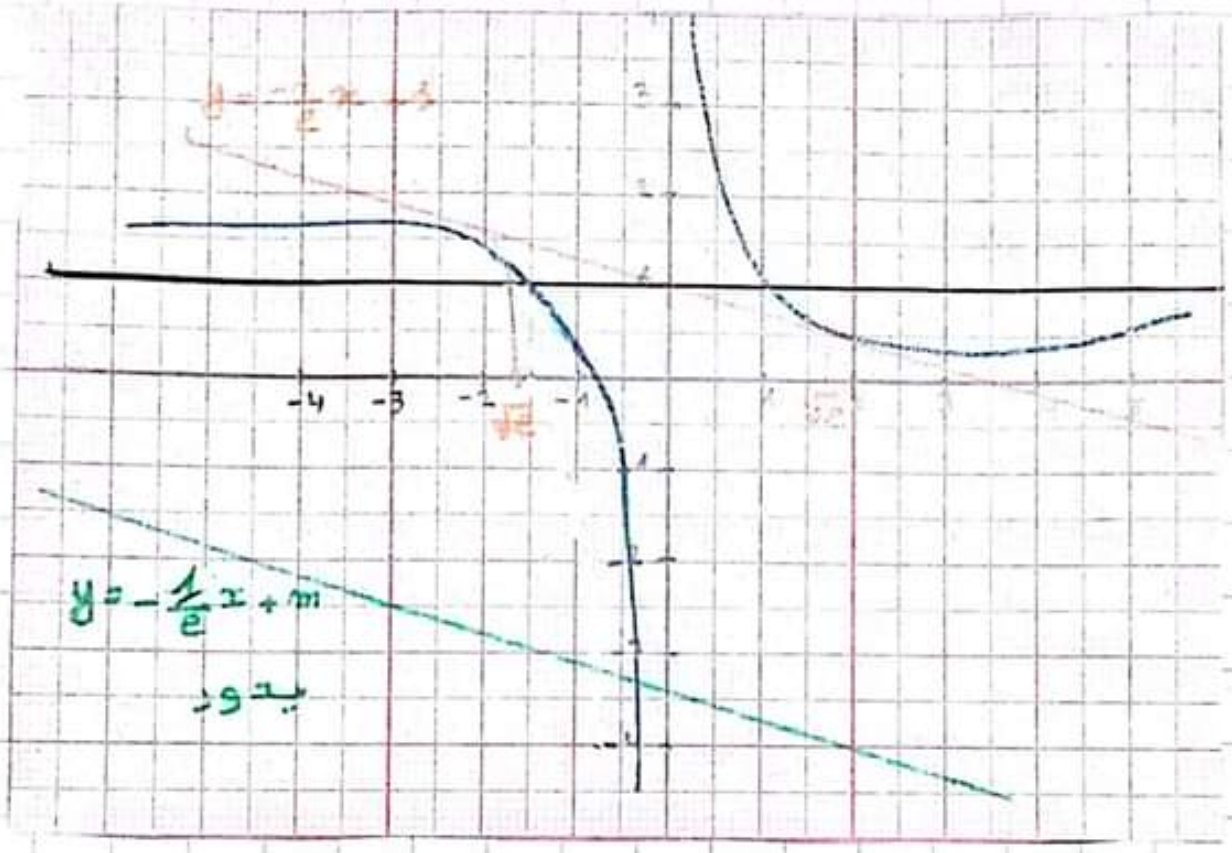
$f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) $y = mx + 1$

$(\Delta_m): y = mx + 1$

$(T): y = \frac{-1}{e}x + 1$

www.facebook.com/bac35



المناقشة: $m = \frac{-1}{e}$

للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

$x = \sqrt{e}$, $x = -\sqrt{e}$

$m \in]-\frac{1}{e}, 0[$ نتعامل مع معامل التوجيه

للمعادلة 4 حلول

2 موجبة 2 سالبة

عندما يكون الميل (عمودي) هو ∞

www.facebook.com/bac35

$m \in]0, +\infty[$

للمعادلة حلان احداهما موجب و الأخر سالب

نهاية الدوال اللوغارتمية

www.facebook.com/bac35