القسمة في $\mathbb{Z}$

القسمة في زاد

1- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ + تطبيقات محلولة
2- القاسم المشترك الأكبر وخواصه PGCD
3- الموافقات في $\mathbb{Z}$
4- التعداد وقابلية القسمة
5- المضاعف المشترك الأصغر وخواصه PPCM
6- مبرهنة بيزو وتطبيقاتها
7- مبرهنة غوص وتطبيقاتها
8- حلول باكالوريات سابقة

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم، القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث $b = ka$. نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a.

ترميز:

نكتب $a|b$ ونقرأ a يقسم b

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$ للعددين a و $-a$ نفس القواسم

تمرين:

من اجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$a = n^2+5n+4 \quad و \quad b = n^2+3n+2$$

بين أن العدد $n+1$ هو قاسم للعددين a و b.

حل التمرين:

$$\begin{array}{r|l} n^2+5n+4 & n+1 \\ \hline -(n^2+n) & n+4 \\ \hline 4n+4 & \\ -(4n+4) & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n^2+3n+2 & n+1 \\ \hline -n^2-1n & n+2 \\ \hline 2n+2 & \\ -2n+2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$a = (n+1)(n+4) \Leftarrow n+1$ قاسم لـ a

$b = (n+1)(n+2) \Leftarrow n+1$ قاسم لـ b.

قواسم عدد صحيح

تمرين:

حلل العدد 1372 إلى جداء عوامل أولية و عين مجموعة قواسم العدد 1372 .

حل التمرين:

لتحليل عدد طبيعي نقوم بقسمته على الأعداد الأولية (2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29)

1372	2
686	2
343	7
49	7
7	7
1	

$$1372 = 2^2 . 7^3$$

طريقة:

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل اولية إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

$$(2+1)(3+1) = 3 \times 4 = 12$$

عدد قواسم العدد الطبيعي 1372 هو 12 قاسما.

ملاحظة:

إذا كنا في الأعداد الصحيحة نصبح 24 قاسما.

إستخراج القواسم لـ 1372 نستعمل شجرة القواسم

$2^0 = 1$ ← $7^0 = 1$ ، $7^1 = 7$ ، $7^2 = 49$ ، $7^3 = 343$

$2^1 = 2$ ← $7^0 = 2$ ، $7^1 = 14$ ، $7^2 = 98$ ، $7^3 = 686$

$2^2 = 4$ ← $7^0 = 4$ ، $7^1 = 28$ ، $7^2 = 196$ ، $7^3 = 137$

$D_{1372} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196, 343, 686, 1372\}$

تمرين:

عين الأعداد الطبيعية غير معدومة n التي من اجلها يكون العدد $n+6$ يقبل القسمة على n.

حل التمرين:

تعيين الأعداد الطبيعية:

$$\frac{n+6}{n} = \frac{n}{n} + \frac{6}{n} = 1 + \frac{6}{n} = K$$

$\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$ إذا كانت n هي قواسم العدد 6.

$\frac{6}{1}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{6}{6}$

$n \in \{1, 2, 3, 6\}$

تمرين:

1) عين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n+6$ يقسم 34.

حل التمرين

تعيين الأعداد الصحيحة n:

$5n+6 \mid 34$

$\frac{34}{5n+6} = K \qquad K \in \mathbb{Z}$

يجب أن يكون العدد $5n+6$ من قواسم العدد 34

$5n+6 \in \{-34, -17, -1, 1, 17, 34\}$

$5n+6 = -34 \Rightarrow 5n = -40 \Rightarrow n = -8 \in \mathbb{Z}$

$5n+6 = -17 \Rightarrow +5n = -23 \Rightarrow n = \frac{-23}{5} \notin \mathbb{Z}$

$5n+6 = -1 \Rightarrow 5n = -7 \Rightarrow n = \frac{-7}{5} \notin \mathbb{Z}$

$5n+6=1 \Rightarrow 5n=-5 \Rightarrow n=-1 \in \mathbb{Z}$

$5n+6=17 \Rightarrow 5n=11 \Rightarrow n=\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$

$5n+6=34 \Rightarrow 5n=28 \Rightarrow n=\frac{28}{5} \in \mathbb{Z}$

قيم العدد الصحيح n التي تحقق $5n+6 \mid 34$ هو

$n=\{-8,-1\}$

تمرين:

نعتبر العدد الناطق a حيث $a=\frac{n+2}{n-4}$

• تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n يختلف عن 4، $a=1+\frac{6}{n-4}$

• إستنتج الأعداد الصحيحة n التي يكون من اجلها a عددا صحيحا.

حل التمرين:

1. التحقق أن $a=1+\frac{6}{n-4}$ ؛ $n \neq 4$

ومنه: $a=\frac{n-4+6}{n-4}=\frac{n+2}{n-4}$

2. استنتاج الاعداد الصحيحة n حتى يكون $a \in \mathbb{Z}$

حتى يكون $a \in \mathbb{Z}$ يجب $a=1+\frac{6}{n-4}$

$n-4$ يقسم 6 $\quad n-4 \mid 6$

$D_6=\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

$n-4 \in \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

$n - 4 = -6 \Rightarrow n = -2 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = -3 \Rightarrow n = 1 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = -2 \Rightarrow n = 2 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = -1 \Rightarrow n = 3 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = 1 \Rightarrow n = 5 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = 2 \Rightarrow n = 6 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = 3 \Rightarrow n = 7 \in \mathbb{Z}$

$n - 4 = 6 \Rightarrow n = 10 \in \mathbb{Z}$

القيم

$n = \{-2, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$

حتى يكون صحيح

خواص القسمة في $\mathbb{Z}$

خاصية 1:

a ، b ، c ثلاثة اعداد صحيحة غير معدومة

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c.

برهان

$a|b$ $\quad b = Ka$ $\quad K \in \mathbb{Z}$

$b|c$ $\quad c = K'b$ $\quad K' \in \mathbb{Z}'$

$c = K'Ka$ $\quad K'K \in \mathbb{Z}$

خاصية 2:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم

إذا كان a يقسم b فإنه من اجل كل عدد صحيح m

فإن a يقسم mb

برهان

$a|b$ $\quad b = Ka$

$K \in \mathbb{Z}$

$mb = (Km)a$

$K.m \in \mathbb{Z}$

$a|mb$

خاصية 3:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح

غير معدوم m ، ma يقسم mb

برهان

$m.b = Kam$ $\quad K \in \mathbb{Z}$

$mb = (Km)a$ $\quad Km \in \mathbb{Z}$

$ma \mid mb$

(مهمة) خاصية 4:

a ، b ، c ثلاثة اعداد صحيحة و a غير معدوم
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من اجل كل عددين
صحيحين m و n ، a يقسم $mb+nc$.

برهان

$m\ a \mid b\ m$

$n\ a \mid c\ n$

$a \mid mb+nc$

$$\begin{cases} mb = k\,ma & k \in z \\ nc = k'na & k' \in z' \end{cases}$$

$mb+nc = k\,ma + k'na$

$mb+nc = (mk+nk')a$

$(mk+nk') \in z$

$mb+nc = \alpha a \qquad \alpha \in z$

$a \mid mb+nc$

تمرين:

a ، b ، n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a = 11n+3$; $b = 13n-1$
، بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50

حل التمرين:

البرهان أن كل قاسم مشترك للعددين a و b قاسم 50

$d \mid a \qquad d \mid 11n+3$

$d \mid b \qquad d \mid 13n-1$

نستعمل خاصية (4)

$d \mid (11n+3)(13)^m$

$d \mid (13n-1)(-11)^m$

$d \mid 13(11n+3) + (-11)(13n-1)$

$d \mid 13(11n) + 39 - 11(13n) + 11$

$d \mid 50$

ومنه d يقسم 50

حيث $d \mid a$ و $d \mid b$

تمرين:

a ، b ، n أعداد طبيعية غير معدومة حيث

$a = 5n^2+7$ ، $b = n^2+2$

• بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3.

حل التمرين:

البرهان أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3:

$d \mid (5n^2+7)(-1)^m$ $\quad d \mid a$

$d \mid (n^2+2)(5)^n$ $\quad d \mid b$

$d \mid -5n^2 - 7 + 5n^2 + 10$

$d \mid 3$

ومنه d يقسم 3

حيث $d \mid a$ و $d \mid b$.

تمرين:

n عدد صحيح. نضع $a=3n+7$ و $b=n+1$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ: a و b فإن d يكون قاسما للعدد 4.

حل التمرين:

إثبات أنه إذا كان $d|a$ و $d|b$ فإن $d|4$

$$\left.\begin{array}{l} d|a \\ d|b \end{array}\right\} \text{حسب خاصية } 4 \quad \begin{array}{l} d|(3n+7)(3) \\ d|(n+1)(-1) \end{array}$$

$$d|-\cancel{3n}+7+\cancel{3n}-3$$

$$d|4$$

وهو المطلوب

تمرين:

n عدد صحيح

نضع $a=3n+7$ و $b=7n+2$

أثبت أنه إذا كان العدد d قاسما لـ a و b فإن d يكون قاسما للعدد 43.

حل التمرين:

$$\begin{array}{ll} d|a & d|(3n+7)(7) \\ d|b & d|(7n+2)(-3) \end{array}$$

← الحذر فقط في العدد الذي نضرب فيه

$$d|21n+49-21n-6$$

$$d|43$$

وهو المطلوب

تمرين:

ليكن a و b عددين صحيحين

برهن انه إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$

حل التمرين:

لدينا $2 \mid a^2+b^2 \quad \ldots (1)$

ونريد أن نثبت أن

$2 \mid (a+b)^2$

$2 \mid a^2+b^2+2ab$

$2 \mid 2(a.b) \ldots (2)$

عدد طبيعي

بجمع (1) مع (2) نجد

$2 \mid a^2+b^2+2ab$

$2 \mid (a+b)^2$

ومنه $2 \mid (a+b)^2$

تمرين:

ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين

أ) انشر العبارة $(a+b)^3$

ب) برهن أنه إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن 3 يقسم $(a+b)^3$.

حل التمرين:

نشر العبارة:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+b^2+2ab)$$
$$= a^3 + ab^2 + 2a^2b + ba^2 + b^3 + 2ab^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + b^2 + 3ab^2 + 3a^2b$$

② البرهان إن ① $3 \mid a^3+b^3$ فإن $3 \mid (a+b)^3$

$3 \mid 3$

$3 \mid 3(ab^2)$ ... ②

$3 \mid 3(a^2b)$ ... ③

بالجمع بين ① و ② و ③

$3 \mid a^3+b^2+3(ab^2)+3(a^2b)$

أي $3 \mid (a+b)^3$

أي $3 \mid (a+b)^3$ وهي المطلوب

تمرين:

عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n| \leq 22$.

حل التمرين:

تعيين الأعداد الصحيحة n:

$13 \mid n+4$

$|n| \leq 22$

$-22 \leq n \leq 22$

$-18 \leq n+4 \leq 26$

نستخرج مضاعفات العدد 13 المحصورة بين -18 و 26

$n+4 \in \{-13, 0, 13, 26\}$

$n+4=-13 \Rightarrow n=-17$

$n+4=0 \Rightarrow n=-4$

$n+4=13 \Rightarrow n=9$

$n+4=26 \Rightarrow n=22$

$n \in \{-17, -4, 9, 22\}$

تمرين:

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية:

$$5xy - y^2 = 49$$

حل التمرين:

$$y(5x-y)=49$$

$D_{49}=\{-49,-7,-1,1,7,49\}$

$$\begin{cases} y=-49 \in \mathbb{Z} \\ 5x-y=-1 \Rightarrow x=-10 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$(-10,-49)$

$$\begin{cases} y=-7 \\ 5x-y=-7 \Rightarrow x=\frac{-14}{5} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$ مرفوض

مرفوض

$$\begin{cases} y=-1 \\ 5x-y=-49 \Rightarrow x=-10 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$(-10,-1)$

$$\begin{cases} y=1 \\ 5x-y=49 \Rightarrow x=10 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$(-10, 1)$

$$\begin{cases} y = 7 \\ 5x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{14}{5} \notin \mathbb{Z}$$

مرفوض

$$\begin{cases} y = 49 \\ 5x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \in \mathbb{Z}$$

$(10, 49)$

ومنه

$S = \{(-10, -49), (-10, -1), (10, 1), (10, 49)\}$

تمرين:

عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

حل التمرين:

تعيين الأعداد الطبيعية

584	2
292	2
146	2
73	

$584 = 2^3 \times 73$

$= (1)^2 (2^2)(2)\, 73$

الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584

هي 1 و 2

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة:

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم. توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث

$$a = bq + r \quad \text{و} \quad 0 \leq r < b$$

*

تسمى عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b و يسمى q و r بهذا الترتيب الحاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

ملاحظة:

يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b.

ونحصل على $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$

تمرين:

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b في كل حالة من الحالات التالية:

أ- $a = 118$ و $b = 5$

ب- $a = 152$ و $b = 7$

ج- $a = -118$ و $b = 5$

د- $a = -152$ و $b = 7$

حل التمرين:

أ- $118 = 5 \times 23 + 3$

ب- $-118 = -5(23) - 3$

$-118 = -5(23) - 3 + 5 - 5$

$-118 = -5(23) + 2 - 5$

$-118 = -5(23 + 1) + 2$

$-118 = -5(24) + 2$

$0 < 2 \leq |-5|$

تمرين:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على b هو 17 وباقيها هو 3، و $a - 27 = 23b$ عين a و b.

حل التمرين:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 3 & 17 \end{array}$$

$b \in \mathbb{N}^*$ ، $a \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} a = 17b + 3 \\ a - 27 = 23b \end{cases}$$

$17b + 3 - 27 = 23b$

$-6b = 24 \Rightarrow b = -4 \notin \mathbb{N}^*$

$a = 17(-4) + 3$

$a = -68 + 3$

$a = -65 \notin \mathbb{N}^*$

ومنه لا توجد أعداد طبيعية تحقق هذه المعطيات

القاسم المشترك الأكبر PGCD

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

a عدد طبيعي غير معدوم. نرمز ب D_a إلى مجموعة قواسم العدد a.

مثال:

مجموعة قواسم 8 هي $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$

ملاحظات:

مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b.

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ

$PGCD(a, b)$

ملاحظات:

$PGCD(1, a) = 1$ و $PGCD(a, a) = a$

$PGCD(0, a) = a$ (a غير معدوم)

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

تمرين:

ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $21n+4$ و $2n+1$

. بين أن $d=1$ أو $d=13$.

حل التمرين:

البرهان أن $d=1$ ، $d=13$

$$\begin{cases} d \mid (21n+4)\,(-2) \\ d \mid (2n+1)\,(21) \end{cases}$$

خاصية 4 $\quad d \mid \cancel{2n(21)} + 21 - \cancel{2(21n)} - 8$

$d \mid 13$

$d \mid 13$ قيم d الممكنة هي قواسم 13

$D_d = \{1, 13\}$

تمرين:

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n-1$ و n^2+n+3

أ- بين أن a يقسم n^2-2n+1

ب- إستنتج أن a يقسم $3n+2$

ج- بين إذن أن a يقسم 5.

د- ماهي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a؟

حل التمرين:

(أ) لدينا $a \mid n-1$

$a \mid n^2+n+3$

البرهان أن $a \mid n^2-2n+1$

$n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

$n-1 \mid (n-1)^2$

لكن $a \mid n-1$ بخاصية التعدي نجد :

$a \mid (n-1)^2$ أي $a \mid n^2 - 2n + 1$

ب) إستنتاج أن $a \mid 3n+2$

لدينا $a \mid (n^2+n+3)(1)$

و $a \mid (n^2 - 2n + 1)(-1)$

ولدينا $a \mid mb + nc$

$a \mid c$

$a \mid b$

$d \mid -\cancel{n^2} + 2n - 1 + \cancel{n^2} + n + 3$

$d \mid 3n + 2$

وهو المطلوب

ج) البرهان أن a يقسم 5

$a \mid (n-1)(-3)$

$a \mid (3n+2)(1)$

$a \mid -\cancel{3n} + 3 + \cancel{3n} + 2$

$a \mid 5$

د) القيم الممكنة الصحيحة للعدد a هي القواسم الصحيحة للعدد 5.

$D_5 = \{-5, -1, 1, 5\}$

$a \in \{-5, -1, 1, 5\}$

تمرين:

n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث

$\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ- بين أن $PGCD(\alpha,\beta) = PGCD(\beta;10)$. (يرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha,\beta)$ ؟

حل التمرين:

أ) البرهان أن $PGCD(\alpha,\beta) = PGCD(\beta,10)$

$$
\begin{array}{r|l}
2n^3 - 14n + 2 & n+3 \\ \cline{2-2}
-2n^3 - 6n^2 & 2n^2 - 6n + 14 \\ \cline{1-1}
-6n^2 - 14n + 2 & \\
+6n^2 + 18n & \\ \cline{1-1}
4n + 2 & \\
-4n - 12 & \\ \cline{1-1}
-10 &
\end{array}
$$

$$2n^3 - 14n + 2 = (n+3)(2n^2 - 6n + 4) - 10$$

d قاسم لـ α $\quad d|\alpha$ و $d|\beta$

لأن خاصية ④ $\begin{cases} d|(n+3)(2n^2-6n+4)-10 \quad (-1) \\ d|(n+3)(2n^2-6n+4) \end{cases}$

$$d|(n+3)(2n^2-6n+4) - (n+3)(2n^2-6n+4) + 10$$

أي $d|10$

أو بطريقة أخرى:

خاصية 1:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$.

r باقي قسمة a على b.. $PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)$

ⓑ القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha,\beta)$

تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث $d=PGCD(|a|;|b|)$

خاصية:

a و b عددان صحيحان غير معدومين K غير صحيح غير معدوم

$PGCD(Ka,Kb)=|K|\,PGCD(a,b)$

ملاحظة:

a و b عددان صحيحان غير معدومين

اذا كان b يقسم a فإن $PGCD(a,b)=|b|$

لدينا $PGCD(\alpha,\beta)=PGCD(\beta,10)$

$d|10$

$\frac{10}{d}\in\mathbb{Z}$ مع $d>0$

قيم d

$d \in \{1, 2, 5, 10\}$

قيم d الممكنة هي قواسم العدد 10 الطبيعية.

تمرين:

n عدد طبيعي أكبر من 5

① a و b عددان طبيعيان حيث: $a = n-2$ و $b = 2n+3$

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج- عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a,b) = 7$

② نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$q = n^2 - 7n + 10$ $\qquad$ $p = 2n^2 - 7n - 15$

أ- بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p,q)$

حل التمرين:

$n \geq 5$

① أ- القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$

$d \mid a \qquad d \mid (n-2)(-2)$

$d \mid b \qquad d \mid (2n+3)(1)$

$d \mid -\cancel{2n} + 4 + \cancel{2n} + 3$

$d \mid 7$

القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$

هي قواسم 7 أي 1 و 7

ب- البرهان أن a و b من مضاعفات 7

إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعف 7

$7 \mid n+5$ $\quad 7 \mid (2n+3)(1)$ $\quad 7 \mid (n-2)(-1)$

$7 \mid 2n+3-n+2$

$7 \mid n+5$ وهو المطلوب

ج- قيم n حتى $PGCD(a,b)=7$

لدينا $7 \mid n+5$ $\quad 7 \mid a$ $\quad 7 \mid b$

$n+5=7K$ $\quad K \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$n=7K-5$ $\quad n>5$ لأن $K>1$

2

أ- البرهان أن $n-5 \mid p$ و $n-5 \mid q$

$$\begin{array}{r|l} 2n^2-7n-15 & n-5 \\ \hline -2n^2+10n & 2n+3 \\ \hline 3n-15 & \\ -3n+15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$p=(n-5)(2n+3)$

$p=(n-5)(b)$

أي $n-5 \mid p$

$$\begin{array}{r|l} n^2-7n+10 & n-5 \\ \hline -n^2+5n & n-2 \\ \hline -2n+10 & \\ +2n-10 & \\ \hline 0\ 0 & \end{array}$$

$q=(n-5)(n-2)$

$q=(n-5)(a)$

أي $n-5 \mid q$

ب- تعيين قيم n تجعل $PGCD(p,q)$

$PGCD(p,q) = PGCD((n-5)b, (n-5)a)$

$= (n-5)\, PGCD(a,b)$

$= (n-5)(7) = 7n-35$ $\qquad PGCD(a,b)=7$ لأن

$PGCD(p,q) = 7(7K-5-5)$

$= 7(7K-10)$ $\qquad K>1$

$= (n-5)(1)$ $\qquad PGCD(a,b)=1$ لما

$= n-5 = 7K-5-5$

$= 7K-10$ $\qquad K>1$

كيفية إيجاد القاسم المشترك الأكبر

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

أمثلة:

PGCD(1631, 932) = 233.

1631	932		
699	1	699	
233	1	233	
0	3		

PGCD(9150, 8700) = 150.

9150	8700		
450	1	450	
150	19	150	
0	3		

PGCD(2007, 691) = 1 .

العددان 2007 و 691 أوليان فيما بينهما.

PGCD(1500, 250) = 250 .

1500	250
0	6

تمرين:

عين القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b في كل حالة من الحالات التالية:

أ- $a = -350$ و $b = -252$

ب- $a = 126$ و $b = -735$

ج- $a = -138$ و $b = 575$

حل التمرين:

أ-

$PGCD(-350, -252)$

$= PGCD(|-350|, |-252|) = d \in \mathbb{N}$

$PGCD(350, 250) = 14$

350	250				
98	1	98			
	56	2	56		
		42	1	42	
			14	1	14
				0	3

تمرين:

عين $PGCD(54, 82)$ ثم إستنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين $PGCD(5400, 8200)$

حل التمرين:

$PGCD(54, 82) = 2$

إستنتاج $PGCD(5400, 8200)$

$PGCD(5400, 8200) = 100\, PGCD(54, 82)$
$= 100\,(2) = 200$

تمرين:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين
يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا
كان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

تمرين:

$PGCD(2007, 691) = 1$ (حسب سابقا)
إذا العددين 2007 و 691 هما أوليان فيما بينهما.

خاصية:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك
للعددين a و b نضع $a = da'$ و $b = db'$
يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط
إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليان فيما بينهما.

تمرين:

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية غير
المعدومة حيث
$$\begin{cases} a + b = 66 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases}$$

حل التمرين:

$d = 6$ $\qquad a = 6a'$
$\qquad b = 6b'$

$6a' + 6b' = 66$

$a' + b' = 11$

a'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b'	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
b	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6

الثنائيات (a, b)

$(a,b) = \{(6,60), (12,54), (18,48), (24,42), (30,36), (36,30), (42,24), (48,18), (54,12), (60,6)\}$

تمرين :

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث :

$$\begin{cases} a \times b = 900 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$$

حل التمرين :

$a = 5a'$ $\qquad PGCD(a', b') = 1$

$b = 5b'$

$5a' \times 5b' = 900$

$25a'b' = 900$

$a'b' = 36$

$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36\}$

		يرفض (زوجي)	يرفض		يرفض		يرفض		
a'	1	2	3	4	6	9	12	18	36
b'	36	18	12	9	6	4	3	2	1
a	5	/	/	20	/	45	/	/	180
b	180	/	/	45	/	20	/	/	5

رفضنها لأن PGCD لتلك القيم ليست 1.

$(a,b) = \{(5,180),(20,45),(45,20),(180,5)\}$

تمرين:

عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حيث

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a,b) = 5 \end{cases}$$

حل التمرين:

$a = 5x$ مع $PGCD(x,y) = 1$

$b = 5y$

$a^2 - b^2 = 825$

$(a-b)(a+b) = 825$

$(5x-5y)(5x+5y) = 825$

$25(x-y)(x+y) = 825$

$(x-y)(x+y) = 33$

لكي تبقى العلاقة صحيحة $x - y > 0$

$x > y$

$D_{33} = \{1, 3, 11, 33\}$

$x-y$	1	3	11	33
$x+y$	33	11	3	1
x	17	7	7	17
y	16	4	-4	-16

مرفوض مرفوض

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=33 \end{cases} \Rightarrow 2x=34 \Rightarrow x=17$$
$$17+y=33 \Rightarrow y=16$$

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=11 \end{cases} \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$$
$$7+y=11 \Rightarrow y=4$$

$$\begin{cases} x-y=11 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$$
$$7+y=3 \Rightarrow y=-4$$

$$\begin{cases} x-y=33 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x=34 \Rightarrow x=17$$
$$17+y=1 \Rightarrow y=-16$$

a	85	35	/	/
b	80	20	/	/

$(x,y) = \{(17,16),(7,4)\}$

$(a,b) = \{(85,80),(35,20)\}$

إيجاد الحل الخاص للمعادلة $ax+by=c$

تمرين:

طريقة:

لإيجاد الثنائية (x,y) نستعمل خوارزمية إقليدس

• عين حلا خاصا (x_0,y_0) للمعادلة $13x+19y=1$

حل التمرين:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 13 \\ 6 & 1 \\ 1 & 6 \\ & 2 \end{array}$$

$1 = 13 - (2)(6)$

$1 = 13 - 2[19 - 13]$

$1 = 13 - 2(19) + 2(13)$

$1 = 13(3) + 19(-2)$

بالمطابقة

$(x_0,y_0) = (3,-2)$

تمرين:

اوجد حلا خاصا:

$-43x + 18y = 1$

ثم إستنتج حلا خاصا للمعادلة $-43x + 18y = 3$

حل التمرين:

$$\begin{array}{r|l} 43 & 18 \\ 7 & 2 \\ 4 & 7 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$43 = 18 \times 2 + 7 \Rightarrow 7 = 43 - 18(2)$

$18 = 7 \times 2 + 4 \Rightarrow 4 = 18 - 7(2)$

$7 = 4 \times 1 + 3 \Rightarrow 3 = 7 - 4(1)$

$4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 4 - 3(1)$

$1 = 4 - 3(1)$

$1 = 18 - 7(2) - 7 + 4(1)$

$1 = 18 - 43(2) + 18(4) - 43 + 18(2) + 18 - 43(2) + 18(4)$

$1 = 18(12) - 43(5)$

$-43(5) + 18(12) = 1$

$-215 + 216 = 1$

الحل الخاص :

$(x_0, y_0) = (5, 12)$

تمرين:

نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $324x - 245y = 7$

بإستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

حل التمرين:

324	245				
79	1	79			
	8	3	8		
		7	9	7	
			1	1	

$8 = 7(1) + 1 \Rightarrow 1 = 8 - 7(1)$

$79 = 8(9) + 7 \Rightarrow 7 = 79 - 8(9)$

$245 = 79(3) + 8 \Rightarrow 8 = 245 - 79(3)$

$324 = 245(1) + 79 \Rightarrow 79 = 324 - 245(1)$

$7 = 324 - 245(1) - 245(9) - 79(27)$

$7 = 324 - 245(1) - 245(9) - [324 - 245(1)](27)$

$7 = 324 - 245(1) - 245(9) - 324(27 + 245(27)$

$7 = 324(28) - 245(37)$

$324(28) - 245(37) = 7$

$324x - 245y = 7$

الحل الخاص بالمطابقة

$(x_0, y_0) = (28, 37)$

تمرين:

① عين $PGCD(182, 126)$

② باستعمال خوارزمية اقليدس، جد عددين صحيحين α و β يحققان: $182\alpha + 126\beta = 14$

حل التمرين:

① تعيين $PGCD(182, 126)$

182	126		
56	1	56	
14	2	14	
	0	4	

$PGCD(182, 126) = 14$

② إيجاد α ، β

$14 = 126 - 56(2)$

$182 = 126(1) + 56$

$56 = 182 - 126(1)$

$14 = 126 - [182 - 126(1)](2)$

$14 = 126 - 182(2) + 126(2)$

$14 = 126(3) - 182(2)$

$-182(2)+126(3)=14$

$182(-2)+126(3)=14$

$182(\alpha)+126(\beta)=14$

الحل الخاص بالمطابقة نجد

$(\alpha, \beta)=(-2, 3)$

المواقفات في $\mathbb{Z}$

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما الباقي في القسمة على n. ونرمز $a \equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

أمثلة:

$27 \equiv 92[5]$ ، $12 \equiv 34[11]$ ، $24 \equiv 3[7]$ ،

$-20 \equiv 1[7]$ ، $-59 \equiv -3[8]$

ملاحظات:

من اجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0[1]$

ترميز أخر $a \equiv b(n)$

مبرهنة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n، إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعف لـ n.

تمرين:

في الترديدات الاتية أذكر الصحيحة والخاطئة:

1. $26 \equiv 11[5]$
2. $-32 \equiv 18[10]$
3. $478 \equiv 32[5]$
4. $58 \equiv -5[7]$

حل التمرين:

أ- صحيح $26 - 11 = 15$

$15 \div 5 = 3$

أي 15 من مضاعفات 5

إذن $26 \equiv 11 [5]$

ب- صحيح $-32 - 18 = -50$

$-50 \div 5 = 10$

$-50 \equiv 0 [10]$

أي $-32 \equiv 18 [10]$

ج- خطأ $478 - 32 = 446$

446 لا يقبل القسمة على 5

طريقة:

للبرهان على أن $a \equiv b [n]$ يمكن البرهان على أن $a - b$ مضاعف لـ n أو البرهان على أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n.

خواص الموافقات

خاصية 1:

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n، بترديد n

البرهان:

a عدد صحيح و r باقي قسمته على n. $0 \leq r \leq n$

$$a \equiv r[n]$$

مثل:

يجب على الباقي أن يكون موجب

$$-25 = 3(-8) - 1$$
$$-25 = 3(-8) - 1 + 3 - 3$$
$$-25 = 3(-8) + 2 - 3$$
$$-25 = 3(-8 - 1) + 2$$
$$-25 = 3(-9) + 2$$
$$-25 \equiv 2[3]$$

نعلم أن $a = rq + r$ حيث q عدد صحيح، ومنه
$a - r = nq$ وبالتالي $a - r$ مضاعف لـ n.

$$a \equiv r[n]$$
$$a = nq + r$$
$$a - r = nq$$
$$a - r = 0[n]$$

خاصية 2:

n عدد طبيعي غير معدوم ، من اجل كل عدد صحيح a

لدينا $a \equiv a[n]$

خاصية 3:

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b عددان صحيحان. إذا كان

$a \equiv b[n]$ فإن $b \equiv a[n]$

خاصية 4:

n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة، إذا كان

($a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$) فإن $a \equiv c[n]$

خاصية 5:

n عدد طبيعي غير معدوم، a، b، c، d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $a+c \equiv b+d\ [n]$

خاصية 6:

n عدد طبيعي غير معدوم، a، b، c، d أعداد صحيحة:

إذا كان ($a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$) فإن $ac \equiv bd[n]$

خاصية 7:

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b عددان صحيحان

من أجل كل عدد صحيح K ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $Ka \equiv Kb[n]$

الخاصية 8:

n و p عددان طبيعيان غير معدومين، a و b عددان

صحيحان. إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p\ [n]$

مثال:

ما هو باقي قسمة العدد $(2007)^{2008}$ على 2 :

$(2007)^{2008} \equiv ? \ [2]$

$2007 \equiv 1 \ [2]$

$(2007)^{2008} \equiv 1^{2008} \ [2]$

$(2007)^{2008} \equiv 1 \ [2]$

خاصية:

من اجل كل عددان صحيحين x و y ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم λ إذا كان $x \equiv y \ [n]$ فإن

$\lambda x \equiv \lambda y \ [\lambda n]$

ملاحظة هامة:

لدينا $2 \times 5 \equiv 4 \ [6]$ وبالقسمة على 2 نتحصل على $5 \equiv 2 \ [6]$

أي $(4 \div 2)$ يقبل القسمة على 6 وهذا خطأ ✗

إذن بشكل عام لا تبسط الموافقة بقسمتها على العامل المشترك لكن إذا كان $ab \equiv ac \ (n)$ و a و n أوليين فيما بينهما فإنه ينتج $b \equiv c \ [n]$

مثال:

$25 \equiv 10 \ [3]$

$5.5 \equiv 5.2 \ [3]$

بما أن $PGCD(5,3) = 1$

إذن نستطيع القسمة على 5

$5 \equiv 2 \ [3]$

تمرين:

a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 2[7]$ و $b \equiv 6[7]$

1. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7
2. عين باقي القسمة للعدد a^2+3b^2 على 7
3. أ- تحقق أن $b \equiv -1[7]$

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} و b^{1434} على 7

4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث : $(a+b)^n+n \equiv 0[7]$

حل التمرين:

① تعيين باقي القسمة الإقليدية

$a \equiv 2[7]$

$3a \equiv 6[7]$ $\qquad$ $b \equiv 6[7]$

$3a+b \equiv 12[7]$

و $12 > 7$ إذن نضع

$12 \equiv 5[7]$

$3a+b \equiv 5[7]$

الباقي هو 5

② باقي القسمة الإقليدية

$a \equiv 2[7]$ $\qquad$ $b \equiv 6[7]$

$a^2 \equiv 4[7]$ $\qquad$ $b^2 \equiv 36[7]$ / $36 \equiv 1[7]$

$b^2 \equiv 1[7]$

$3b^2 \equiv 3[7]$

$a^2 + 3b^2 \equiv 7[7]$

$7 \equiv 0[7]$

$a^2 + 3b^2 \equiv 0[7]$

③ أ- التحقق أن $b \equiv -1[7]$

لدينا $b \equiv 6[7]$

$b \equiv 6 - 7[7]$

ومنه $b \equiv -1[7]$

وهو المطلوب.

ب- إستنتاج البواقي:

$b \equiv -1[7]$	$b \equiv -1[7]$
$b^{2013} \equiv (-1)^{2013}[7]$	$b^{1434} \equiv (-1)^{1434}[7]$
$b^{2013} \equiv -1[7]$	$b^{1434} \equiv 1[7]$
$b^{2013} \equiv 6[7]$	الباقي هو 1

الباقي هو 6

④ عين الأعداد الطبيعية n بحيث $(a+b)^n + n \equiv 0[7]$

$a + b \equiv 6 + 2[7]$	$(a+b)^n \equiv 1^n[7]$
$a + b \equiv 8[7]$	$(a+b)^n \equiv 1[7]$
$8 \equiv 1[7]$	
$a + b \equiv 1[7]$	

$1 + n \equiv 0[7]$ ---- ①

$1 + n - 1 \equiv -1[7] \Rightarrow n \equiv -1[7]$

$\Rightarrow n \equiv 6[7] \ldots ②$

$n = 7K + 6 \quad | K \in \mathbb{N}$

تمرين :

① عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 28 على العدد 9.

② بين انه من أجل كل عدد طبيعي K : $10^K \equiv 1[9]$

③ إستنتج أن $4\times10^4 + 3\times10^3 + 2\times10^2 + 28 \equiv 1[9]$

④ أ- تحقق أن $2^3 \equiv -1[9]$

ب- عين الأعداد الطبيعية n بحيث $2^{6n} + n - 1 \equiv 0[9]$

حل التمرين :

① تعيين الباقي $28 \equiv 1[9]$

الباقي هو 1.

② البرهان أن $10^K \equiv 1[9]$

$10 \equiv 1[9]$

$10^K \equiv 1^K[9]$

ومنه $10^K \equiv 1[9]$

③ الإستنتاج

لدينا $10^K \equiv 1[9]$

$10^2 \equiv 1[9]$ | $10^4 \equiv 1[9]$ | $10^3 \equiv 1[9]$

$2\times10^2 \equiv 2[9]$ | $4\times10^4 \equiv 4[9]$ | $3\times10^3 \equiv 3[9]$

ولدينا $28 \equiv 1[9]$

$4\times10^4 + 3\times10^3 + 2\times10^2 + 28 \equiv 4 + 3 + 2 + 1[9]$

$4\times10^4 + 3\times10^3 + 2\times10^2 + 28 \equiv 10[9]$

$\equiv 1[9]$

وهو المطلوب

④ أ- التحقق أن $2^3 \equiv -1 [9]$

$2^3 = 8$ و $8 \equiv 8 [9]$

$8 \equiv -1 [9]$ وهو الجواب.

ب- تعيين الأعداد الطبيعية

$2^3 \equiv -1 [9]$

$(2^3)^2 \equiv (-1)^2 [9]$

$2^6 \equiv 1 [9]$

$2^{6n} \equiv 1^n [9]$

$2^{6n} \equiv 1 [9]$

$2^{6n} + n - 1 \equiv 0 [9]$

$1 + n - 1 \equiv 0 [9]$

$n \equiv 0 [9]$

$n = 9K \quad / K \in \mathbb{N}$

تمرين:

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2- تحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 [13]$

3- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون

$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 [13]$

حل التمرين:

① تعيين البواقي

$n = 0 \quad 10^0 \equiv 1 [13]$ /

$n = 1 \quad 10^1 \equiv 10 [13]$ /

$n = 2 \quad 10^2 \equiv 9 [13]$ /

$n = 3 \quad 10^3 \equiv 12 [13]$ /

$n = 4 \quad 10^4 \equiv 3 [13]$ /

$n = 5 \quad 10^5 \equiv 4 [13]$ /

$n = 6 \quad 10^6 \equiv 1 [13]$

الدورة

دور القسمة 6.

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$	
$2^n \equiv$	1	10	9	12	3	4	[13]

بواقي 10^n على 13 هي

$r \in \{1, 10, 9, 12, 3, 4\}$

② التحقق أن:

$(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 [13]$

$10 \equiv 10 [13]$

$10^{2008} \equiv 10^{2008} [13]$

$2008 \div 6 = 6(334) + 4$

من الشكل $2008 = 6K + 4$

$10^{2008} \equiv 3 [13]$

$(10^{2008})^2 \equiv 9 [13]$

$1 \equiv 1 [13]$

$$(10^{2007})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 3 + 9 + 1 [13]$$
$$\equiv 13 [13]$$
$$\equiv 0 [13]$$ ومنه

وهو المطلوب

③ تعيين n :

$$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 [13]$$

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$
$10^n \equiv$	1	10	9	12	3	4
$10^{2n} \equiv$	1	10^2	9^2	12^2	3^2	4^2
$1 \equiv$	1	1	1	1	1	1
$10^{2n}+10^n+1 \equiv$	3	111	91	157	13	21
	3	7	0	1	0	8

قيم n هي $S = \{6K+2 , 6K+4\}$

تمرين:

أ- جد باقي قسمة العدد 4^5 على 11

ب- إستنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد:

37^{5K} ، 37^{5K+1} ، 37^{5K+2} ، 37^{5K+3} و 37^{5K+4}

مع $K \in \mathbb{N}$.

حل التمرين:

أ- إيجاد باقي للعدد 4^5 على 11

$$4^5 = 1024$$

$4^5 \equiv 1 [11]$

الباقي هو 1.

ب- استنتاج البواقي:

$37^{5K} \equiv ? [11]$

$37 \equiv 4 [11]$

$37^5 \equiv 4^5 [11]$

$37^5 \equiv 1 [11]$

$37^{5K} \equiv 1 [11]$

الباقي هو 1

$37^{5K+1} \equiv ? [11]$

$\begin{cases} 37^{5K} \equiv 1 [11] \\ 37^1 \equiv 4 [11] \end{cases}$

$37^{5K} . 37^1 \equiv 4 [11]$

$37^{5K+1} \equiv 4 [11]$

الباقي هو 4.

$37^{5K+1} \equiv 4 [11]$

$37^1 \equiv 4 [11]$

$37^{5K+1} . 37^1 \equiv 16 [11]$

$37^{5K+2} \equiv 5 [11]$

الباقي هو 5

والباقي بنفس الطريقة

تمرين:

1. عين المجموعة L مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $x+4 \equiv 2[7]$

2. عين المجموعة L' مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث أن $5x \equiv 3[7]$

حل التمرين:

1.

$x+4 \equiv 2\ [7]$

$x+4-4 \equiv 2-4\ [7]$

$x \equiv -2[7]$

$x \equiv 5[7]$

$x = 7K+5 \quad | K \in \mathbb{N}$

2.

$5x \equiv 3\ [7]$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$5x \equiv$	0	5	3	1	6	4	2	[7]

بواقي العدد 7 : $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$x \equiv 2[7]$

$x = 7K+2 \quad | K \in \mathbb{N}$

الموافقات وجملة المعادلات

تمرين

حل في $\mathbb{Z}$ كل من الجملتين التاليتين

أ- $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$

ب- $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

حل التمرين

أ-

$$\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \rightarrow x = 6K + 1 \quad K \in \mathbb{Z}$$

نعوض قيمة x في الموافقة ① فنجد

$$6K + 1 \equiv 3[5]$$

$$6K \equiv 2[5]$$

$K \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$6K \equiv$	0	1	2	3	4	[5]

$$6K \equiv 2[5]$$

بواقي العدد 5 هي $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$K \equiv 2[5]$$

$$K = 5n + 2$$

$$x = 6(5n + 2) + 1$$

$$x = 30n + 13$$

حلول الموافقة.

$n \in \mathbb{Z}$.

ب-

$$\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$x = 2K + 1$$

$$4(2K+1) \equiv 1[3]$$

$$8K + 4 \equiv 1[3]$$

$$8K \equiv -3[3]$$

$$8K \equiv 0[3]$$

$8K \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	[3]
$K \equiv$	0	2	1	0	2	1	0	2	[3]

بواقي 8 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$K = 0[3]$$

$$K = 3n \quad / n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2(3n) + 1$$

$$x = 6n + 1 \quad x \in \mathbb{Z}$$

تمرين:

n عدد طبيعي.

1- أدرس تبعا لقيم n بواقي قسمة 5^n على 7.

2- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد

$(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلة للقسمة على 7

حل التمرين:

① دراسة بواقي 5^n على 7

$n=0 \quad 5^0 \equiv 1\ [7]$

$n=1 \quad 5^1 \equiv 5\ [7]$

$n=2 \quad 5^2 \equiv 4\ [7]$

$n=3 \quad 5^3 \equiv 6\ [7]$

$n=4 \quad 5^4 \equiv 2\ [7]$

$n=5 \quad 5^5 \equiv 3\ [7]$

$n=6 \quad 5^6 \equiv 1\ [7]$

دور القسمة هو: 6

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3

بواقي 5^n على 7 هي

$r \in \{1, 5, 4, 6, 2, 3\}$

② تعيين باقي 6^{2n} على 7

$7 \equiv 0\ [7]$

$6 + 1 \equiv 0\ [7]$

$6 \equiv -1\ [7]$

$6^2 \equiv 1\ [7]$

$6^{2n} \equiv 1^n\ [7]$

$6^{2n} \equiv 1\ [7]$

③ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(5^n+6^{2n}+3)$ قابلا للقسمة على 7.

تعيين قيم $5^n+6^{2n}+3\equiv 0\ [7]$

$6^{2n}\equiv 1\ [7]$

$6^{2n}+3\equiv 1+3\ [7]$

$6^{2n}+3\equiv 4\ [7]$

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]
$6^{2n}+3\equiv$	4	4	4	4	4	4	[7]
$5^n+6^{2n}+3$	5	2	1	3	6	0	[7]

$n=6K+5 \quad | K\in\mathbb{N}$

تمرين:

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 7.
2. أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n، العدد $(26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n)$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من اجلها العدد $(26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n)$ قابلا للقسمة على 7.

حل التمرين :

① دراسة البواقي

$n=0 \quad 5^0 \equiv 1\,[7]$

$n=1 \quad 5^1 \equiv 5\,[7]$

$n=2 \quad 5^2 \equiv 4\,[7]$

$n=3 \quad 5^3 \equiv 6\,[7]$

$n=4 \quad 5^4 \equiv 2\,[7]$

$n=5 \quad 5^5 \equiv 3\,[7]$

$n=6 \quad 5^6 \equiv 1\,[7]$

دور القسمة هو 6

n	$6K$	$6K+1$	$6K+2$	$6K+3$	$6K+4$	$6K+5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3

البواقي $r \in \{1, 5, 4, 6, 2, 3\}$

② البرهان أن $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0\,[7]$

$26 \equiv 5\,[7]$

$26^6 \equiv 5^6\,[7]$

$26^6 \equiv 1\,[7]$

$26^{6n} \equiv 1^n\,[7]$

$26^{6n} \equiv 1\,[7]$

$26^5 \equiv 5^5\,[7]$

$26^5 \equiv 3\,[7]$

$26^{6n} \cdot 26^5 \equiv 26^5\,[7]$

$26^{6n+5} \equiv 3\,[7]$

$47 \equiv 5\ [7]$

$47^{12} \equiv 5^{12}\ [7]$

$47^{12} \equiv 1\ [7]$

$(47^{12})^n \equiv 1^n\ [7]$

$47^{12n} \equiv 1\ [7]$

$47^{12n} \cdot 47^2 \equiv 47^2\ [7]$

$47^{12n+2} \equiv 4\ [7]$

$47^2 \equiv 5^2\ [7]$

$47^2 \equiv 4\ [7]$

$3 \equiv 3\ [7]$

اذن

$(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12+2} + 3) \equiv 3 + 2(4) + 3\ [7]$

$\equiv 14\ [7]$

ومنه

$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12+2} + 3 \equiv 0\ [7]$

③ تعيين قيم n التي من اجلها

$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12+2} + 5n \equiv 0\ [7]$

$3 + 2(4) + 5n \equiv 0\ [7]$

$11 + 5n \equiv 0\ [7]$

$4 + 5n \equiv 0\ [7]$

$5n \equiv -4\ [7]$

$5n \equiv 3\ [7]$

n	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$5n$	0	5	3	1	6	4	2	[7]

$n \equiv 2[7]$

قيم n التي تحقق : $n = 7K + 2$

تمرين :

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$

1) بين أن العدد 153 حل للجملة (S).

2) إذا كان x_0 حلا لـ (S) بين أن : (x حل لـ (S)) يكافئ

$$\left[\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right]$$

3) حل الجملة (S).

4) يريد مكتبي وضع عدد الكتب في علب، فإذا إستعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا إستعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

إذا علمت ان عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600، فما عدد هذه الكتب؟

حل التمرين :

1) البرهان أن 153 حل للجملة (S)

$153 \equiv 3[15]$

$153 = 15(10) + 3$

أي $153 \equiv 3[15]$ محققة

$153 \equiv 6[7]$

$153 = 7(21) + 6$

أي $153 \equiv 6\ [7]$ محققة)

أي 153 حلا للجملة (S) .

② x_0 حلا لـ (S)

$$\begin{cases} -x_0 \equiv -3\ [15] \\ -x_0 \equiv 6\ [7] \end{cases}$$

x حلا لـ (S)

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [15] \\ x \equiv 6\ [7] \end{cases}$$

بالجمع نجد باستعمال الخاصية 5 نجد

$$\begin{cases} x - x_0 \equiv 0\ [15] \\ x - x_0 \equiv 0\ [7] \end{cases}$$

③ حل الجملة (S)

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [15] \\ x \equiv 6\ [7] \end{cases} \Rightarrow x = 7K + 6$$

$$x \equiv 3\ [15]$$

$$7K + 6 \equiv 3\ [15]$$

$$7K \equiv -3\ [15]$$

$$7K \equiv 12\ [15]$$

بواقي 15

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

$K=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	[15]
$7K=$	0	7	14	6	13	5	12	4	11	3	10	2	9	1	8	[15]

من الجدول نجد $K \equiv 6[15]$

$K = 15n + 6 \quad / n \in \mathbb{Z}$

$x = 7(15n + 6) + 6$

$x = 105n + 42 + 6$

$x = 105n + 48$

④ عدد الكتب هي x:

$$\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$$

لدينا $500 \leq x \leq 600$

$500 \leq 105n + 48 \leq 600$

$452 \leq 105n \leq 552$

$\frac{452}{105} \leq \frac{105n}{105} \leq \frac{552}{105}$

$4,3 \leq n \leq 5,25$

$n = 5 \quad / n \in \mathbb{Z}$

نعوضها $x = 105(5) + 48$

$x = 573$ كتاب

تمرين:

a ، b ، n أعداد طبيعية غير معدومة حيث

$b = n^2 + 2$; $a = 5n^2 + 7$

① بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3.

② بين أن $PGCD(a,b) = 3$ إذا وفقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$

③ إستنتج حسب قيم n ، $PGCD(a,b)$

حل التمرين:

① البرهان:

$d|a$ و $d|b$

فإن $d| ma + nb$

$d|a$ $\quad d|(5n^2+7)(-1)$

$d|b$ $\quad d|(n^2+2)(5)$

$d| -5n^2 - 7 + 5n^2 + 10$

$d|3$

② البرهان أن $PGCD(a,b)$ إذا وفقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$

لدينا $a = a'3 \Rightarrow a \equiv 0[3]$

$b = b'3 \Rightarrow b \equiv 0[3]$

$5n^2 + 7 \equiv 0[3]$

$n^2 + 2 \equiv 0[3]$

$n^2 \equiv -2[3]$

$n^2 \equiv 1[3]$

$3n^2 + 2n^2 + 6 + 1 \equiv 0[3]$

$\begin{cases} 3x^2 \equiv 0[3] \\ 6 \equiv 0[3] \end{cases}$

$0 + 2n^2 + 0 + 1 \equiv 0[3]$

$$2n^2 \equiv -1[3]$$
$$2n^2 \equiv 2[3]$$

فإن 3 و 2 أوليان فيما بينهما $n^2 \equiv 1[3]$

ومنه $PGCD(a,b)=3$

إذا و فقط إذا كان $n^2 \equiv 1[3]$

القيم الممكنة لـ $PGCD(a,b)$ هي قواسم العدد 3 أي هي $\{1,3\}$.

③ إستنتاج حسب قيم n:

$PGCD(a,b)=3 \Rightarrow n^2 \equiv 1[3]$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

بواقي 3: $r \in \{0,1,2\}$

قيم n التي تحقق $n^2 \equiv 1[3]$ أي $PGCD(a,b)$

هي $n \equiv 1[3]$

$n \equiv 2[3]$

$$\begin{cases} n = 3K+1 \\ \text{أو} \\ n = 3K+2 \end{cases}$$

و $PGCD(a,b)=1$ أي $n \equiv 0[3]$

$n = 3K \mid K \in \mathbb{N}$

قابلية القسمة والبرهان بالتراجع

تمرين:

برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3.

حل التمرين:

البرهان أن $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3

$$5^n - 2^n = 3K$$

① مرحلة التحقق لدينا $P(n)$

من اجل $n = 0$

$$5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$P(0)$ محققة من اجل $n=0$

② نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل كل n

أي $5^n - 2^n = 3K$

③ ونبرهن صحة $P(n+1)$ من اجل $n+1$

أي $5^{n+1} - 2^{n+1} = 3K'$

لدينا $5^n = 3K + 2^n$

$$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5.5^n - 2.2^n$$

$$= 5(3K + 2^n) - 2.2^n$$

$$= 5.3K + 5.2^n - 2.2^n$$

$$= 3.5K + (5-2)\,2^n$$

$$= 3.5K + 3.2^n$$

$$= 3(5K + 2^n)$$

$= 3K'$: $K' = 5K + 2^n$

ومنه $P(n+1)$ محققة من اجل $n+1$

واخيرا $5^n - 2^n$ يقبل القسمة على 3.

التعداد

مبرهنة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a = q.x^n + r_{n-1}.x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + r_2x^2 + r_1x + r_0$

حيث:

$0 < q < x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

مثال:

$$a = \overline{2016}^{10} = 2(10)^3 + 0(10)^2 + 1(10)^1 + 6(10)^0$$
$$= 2000 + 0 + 10 + 6$$
$$= 2016$$

التعداد ذو الأساس x:

قاعدة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما

2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث: $0 < q < x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع

$\alpha \in \{0, 1, 2, \dots n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$

الكتابة $a=\overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x=10$، نكتب $a=qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0$

ملاحظات:

- النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر، أساسه 10
- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات وأرقامه هي $\{1,0\}$
- النظام ذو الأساس 8، أرقامه: $0,1,2,3,4,5,6,7$.
- النظام ذو الأساس 11، أرقامه: $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha$.

حيث $\alpha=10$

تمرين:

اكتب العدد 2007^{10} في نظام التعداد الذي أساسه 8

حل التمرين:

$a=\overline{3727}^{8}$ وللتحقق

$a=7(8)^0+2(8)^1+7(8)^2+3(8)^3=$

$a=2007$

$$\begin{array}{r|l} 2007 & 8 \\ \hline 7 & 250 \\ & 2 \\ \hline & 31 \\ & 7 \\ \hline & 3 \\ & 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

الانتقال من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري:

مثال:

نعتبر العدد n المكتوب في النظام الذي أساسه 3.

كما يلي $n=\overline{2002012}^{3}$. اكتب n في النظام العشري

$$n = \overline{2002012}^{3} = 2\times3^{0} + 1\times3^{1} + 0\times3^{2} + 2\times3^{3} + 0\times3^{4} + 0\times3^{5} + 2\times3^{6}$$

$$= 2 + 3 + 54 + 1458$$

$$n = \overline{1517}^{10}$$

الانتقال من نظام تعداد أساسه α إلى نظام تعداد أساسه β:

إذا كان n عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس α ونريد أن نكتب n في نظام تعداد أساسه β فنقوم بما يلي:

- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس 10
- نكتب n في نظام التعداد ذو الأساس β.

تمرين:

a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}$ في النظام ذي الأساس 8

1) اكتب a في النظام ذي الأساس 2.

حل التمرين:

$$\overline{643}^{8} = 3\times8^{0} + 4\times8^{1} + 6\times8^{2}$$

$$= 3 + 32 + 384 = \overline{419}^{10}$$

419	2								
1	209	2							
	1	104	2						
		0	52	2					
			0	26	2				
				0	13	2			
					1	6	2		
						0	3	2	
							1	1	2
									1	0

$\overline{643}^{8} = \overline{110100011}^{2}$

تمرين :

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري .

$c = 503019$ $\quad b = 5723$ $\quad , a = 12734$

حل التمرين :

$a = 4(10)^0 + 3(10)^1 + 7(10)^2 + 2(10)^3 + 1(10)^4$

$a = 4 + 30 + 700 + 2000 + 10000$

$a = 12734$.

$b = 3(10)^0 + 2(10)^1 + 7(10)^2 + 5(10)^3$

$b = 3 + 20 + 700 + 5000$

$b = 5723$.

$c = 9(10)^0 + 1(10)^1 + 0(10)^2 + 3(10)^3 + 0(10)^4 + 5(10)^5$

تمرين :

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6 .

$c = \overline{503012}^{6}$ $\quad b = \overline{1523}^{6}$ $\quad , a = \overline{234}^{6}$

حل التمرين :

$a = 4 \times (6)^0 + 3(6)^1 + 2(6)^2$

$b = 3(6)^0 + 2(6)^1 + 5(6)^2 + 1(6)^3$

$c = 2(6)^0 + 1(6)^2 + 0(6)^3 + 3(6)^4 + 0(6)^5 + 5(6)^6$

أكتب في النظام ذو الأساس 7 الأعداد التالية:

1- $a = 7^3 + 2\times7^2 + 3\times7 + 5$

2- $b = 5\times7^2 + 2\times7$

3- $c = 6\times7^3 + 2\times7 + 1$

حل التمرين:

$a = 1235$

$b = 520$

$c = 6021$

تمرين:

العددان $\overline{2306}^x$ و $\overline{1035}^x$ مكتوبان في النظام ذو الأساس x

1- ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x

2- أنشر العددين وفق الأساس x.

حل التمرين:

1- أصغر قيمة ممكنة للعدد x:

لـ $\overline{2306}^x$

أكبر رقم في العددين هو 6

$x = 7$ إذن: $x > 6$.

2- نشر العددين:

$2306 = 6(x)^0 + 0(x)^1 + 3(x)^2 + 2(x)^3$

$$1035 = 5(x)^0 + 3(x) + 0(x^2) + 1(x^3)$$

تمرين:

n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي $\overline{1101101}$

ماهو اساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي $\overline{214}$

حل التمرين:

$\overline{214}^x \quad / x > 4$

$$\overline{1101101}^2 = 1(2)^0 + \cancel{0(2)^1} + 1(2)^2 + 1(2)^3 + \cancel{1(2)^4} + 1(2)^5 + 1(2)^6$$

$$= 1 + 4 + 8 + 32 + 64$$

$$= 109$$

$$\overline{214}^x = 4(x)^0 + 1(x) + 2(x^2)$$

$$= 4 + x + 2x^2$$

$$2x^2 + x + 4 = 109$$

$$2x^2 + x - 105 = 0$$

$$\Delta = 1 + 840$$

$$\sqrt{\Delta} = 29$$

$$x_1 = \frac{-1-29}{4} = \frac{-30}{4} = \frac{15}{2} \; ; \; x_2 = \frac{-1+29}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$S = \left\{ \frac{15}{2}, 7 \right\}$$

$\frac{15}{2} \notin N$ مرفوض

$7 \in N$ مقبول

إذن

$$\overline{1101101}^2 = \overline{214}^7$$

تمرين:

في كل حالة من الحالات التالية أوجد اساس التعداد الذي تكون فيه المساواة محققة:

1- $\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$

2- $\overline{21} \times \overline{14} = \overline{324}$

حل التمرين:

① $x > 5$

$\overline{411} = \overline{15} \times \overline{23}$

$1(x)^0 + 1(x)^1 + 4(x)^2 = [5(x)^0 + 1(x)^1] \times [3(x)^0 + 2(x)^1]$

$1 + x + 4x^2 = (5 + x)(3 + 2x)$ $15 + 10x + 3x + 2x^2$

$4x^2 + x + 1 = 2x^2 + 13x + 15$

$2x^2 - 12x - 14 = 0$

$\Delta = 144 + 112 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{256}$

$\sqrt{\Delta} = 16$

$x_1 = \frac{12 - 16}{4} = -1$; $x_2 = \frac{12 + 16}{4} = 7$

$-1 \notin \mathbb{N}$ مرفوض

مقبول

إذن $x = 7$

$\overline{411}^7 = \overline{15}^7 \times \overline{23}^7$

② $x > 4$

$\overline{324}^x = \overline{21}^x \times \overline{14}^x$

$4(x)^0 + 2(x)^1 + 3(x)^2 = [1(x)^0 + 2(x)^1][4(x)^0 + 1(x)^1]$

$3x^2 + 2x + 4 = [2x + 1][4 + x]$ $8x + 2x^2 + 4 + x$

$3x^2 + 2x + 4 = 2x^2 + 8x + 4$

$x^2 - 6x = 0$

$\Delta = 64$ $\qquad$ $\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{6-8}{2} = -1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{6+8}{2} = 7$

مرفوض $-1 < 0$ $\qquad$ مقبول $7 \in \mathbb{N}$

إذن

$\overline{21}^7 \times \overline{14}^7 = \overline{324}^7$

تمرين :

في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟

احسب $\overline{77} \times \overline{63}$ في النظام العشري ثم في النظام ذو الأساس 8 .

حل التمرين :

إيجاد أساس التعداد x :

$\overline{162}^x = \overline{77}^x + \overline{63}^x$ $\qquad$ $x > 7$

$2(x)^0 + 6(x)^1 + 1(x)^2 = 7(x)^0 + 7(x)^1 + 3(x)^0 + 6(x)^1$

$2 + 6x + x^2 = 7 + 7x + 3 + 6x$

$x^2 + 6x + 2 = 13x + 10$

$x^2 - 7x - 8 = 0$

$\Delta = 49 + 32 \Rightarrow \Delta = 81$

$\sqrt{\Delta} = 9$

$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = 8$

مرفوض $-1 \notin \mathbb{N}$ $\qquad$ مقبول

$x = 8$

$\overline{162}^8 = \overline{77}^8 + \overline{63}^8$

حساب $\overline{77}^8 \times \overline{63}^8$ في النظام العشري

$[7\times(8)^0 + 7\times(8)^1] \times [3(8)^0 + 6(8)^1]$

$[7+56]\times[3+48]$

$63 \times 51 = 3213$

نحول 3213 إلى النظام الثماني

3213	8		
5	401	8	
	1	50	8
		2	6	8
			6	0

$\overline{77}^8 . \overline{63}^8 = \overline{6215}^8$

قابلية القسمة على 2، 5، 3، 9، 4، 11

N عدد طبيعي يكتب $N=\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ في النظام العشري a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1} أعداد طبيعية أصغر تماما من 10 و a_n عدد طبيعي غير معدوم أصغر تماما من 10.

• نريد تعيين شروط قابلية القسمة على كل من الأعداد 10، 2، 5، 3، 9، 4، 11.

1. باستعمال الترديدة $10 \equiv 0[10]$

$$N \equiv a_0 [10]$$

أمثلة:

$$25810 = 0(10)^0 + 1(10)^1 + 8(10)^2 + 5(10)^3 + 2(10)^4$$

$$25810 \equiv 0[10]$$

$$851\alpha \equiv ?$$

إذا كان

$\alpha = 0$ فإن $851\alpha \equiv 0[10]$

2. باستعمال الترديدة $10 \equiv 0[2]$

$$N \equiv a_0 [2]$$

أمثلة:

من بين الأعداد التالية اذكر التي تقبل القسمة على 2:

37891 ، 7318964 ، 378488

1 لا يقبل لأنه لا يوافق $1 \equiv 0[2]$

4 يقبل لأن $4 \equiv 0[2]$

8 يقبل لأن $8 \equiv 0[2]$

3. باستعمال التردية: $10 \equiv 0[5]$

$N \equiv a_0 [5]$

أمثلة:

من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 5:

34915 ، 4417347 ، 266480

5 تقبل $5 \equiv 0[5]$

7 لا تقبل $7 \not\equiv 0[5]$. $7 \equiv 2[5]$

0 تقبل $0 \equiv 0[5]$

4. باستعمال التردية $10 \equiv 1[3]$

$N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)[3]$

أمثلة:

من بين الأعداد التالية اذكر التي تقبل القسمة على 3: 25881 ، 728548 ، 264493

إذا كان مجموع الأرقام يقبل القسمة على 3

$25881 = 24$ قابل

$24 \div 3 = 8$ $24 \equiv 0[3]$

$728548 = 34$ لا تقبل

$34 \div 3 = 11 + 1$ $34 \equiv 1[3]$

$264493 = 28$ لا تقبل

$28 \div 3 = 9 + 1$ $28 \equiv 1[3]$

5. باستعمال التردية $10 \equiv 1[9]$

$N \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0)[9]$

أمثلة:

من بين الأعداد التالية اذكر التي تقبل على 9

25881 ، 275841 ، 624599

لا تقبل $25881 \not\equiv 0[9]$ ← $2+5+8+8+1$

تقبل $275841 \equiv 0[9]$

لا تقبل $624599 \not\equiv 0[9]$.

6. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي p باقي قسمة 10^p على 4

$N \equiv 10a_1 + a_0 [4]$

من بين الأعداد التالية اذكر التي تقبل القسمة على 4:

38924 74820 85930

أمثلة:

38924 تقبل

$4+10(2) = 24 \equiv 0[4]$

74820

$0+10(2) = 20$ تقبل

85930

$0+3(10)$ لا تقبل .

7. بإستعمال الترديدة $10 \equiv -1[11]$

$N \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots a_2 + a_1 + a_0 [11]$

• من بين الأعداد التالية أذكر التي تقبل القسمة على 11:

3658721 ، 287392358 ، 51829941

7345591

أمثلة :

3658721 يقبل

$(3-6)+(5-8)+(7-2)+1 = 0 \equiv 0[11]$

287392358 يقبل

$(2-8)+(7-3)+(9-2)+(3-5)+8 = 11 \equiv 0(11)$

5182994 1 لا يقبل

$4+6-0+3 \quad 13 \not\equiv 0[11]$

7345591 يقبل

$4-5-4+1 \quad 0 \equiv 0[11]$

تمرين :

لتكن x ، y ، z ثلاثة اعداد طبيعية حيث

$y = \overline{131}^x$ و $z = \overline{101}^x$

① بين انه يمكن كتابة الجداء xyz في الأساس x وذلك بدون معرفة x.

② عين الأعداد الطبيعية x ، y ، z علما أن $x+y+z=50$

حل التمرين :

① البرهان :

$y = 1(x)^0 + 3(x) + 1(x^2)$

$y = 1 + 3x + x^2$

$z = 1(x)^0 + 0(x)^1 + 1x^2$

$z = 1 + x^2$

$$x \cdot y \cdot z = x(x^2+3x+1)(x^2+1)$$
$$= (x^3+3x^2+x)(x^2+1)$$
$$x \cdot y \cdot z = (x^5+3x^4+x^3+x^3+3x^2+x$$
$$x \cdot y \cdot z = x^5+3x^4+2x^3+3x^2+x+1(x)^0$$
$$x\,y \cdot z = \overline{13\,2\,3\,1\,0}^{\times} \qquad x \geqslant 4$$

② تعيين الأعداد x, y, z

$$x+y+z = x+1+3x+x^2+1+x^2 = 50$$
$$= 2x^2+4x+2 = 50$$
$$x^2+2x+1 = 25$$
$$x^2+2x-24 = 0$$

$\Delta = 4+96 \qquad \sqrt{\Delta} = 10$

$x_1 = -6$ مرفوض $\qquad x_2 = 4$ مقبول

$$\begin{cases} y = 1+3(4)+(4)^2 & \Rightarrow y = 29 \\ z = 1+(4)^2 & \Rightarrow z = 17 \end{cases}$$

ومنه: $x = 4;\ y = 29;\ z = 17$

$4+29+17 = 50$

تمرين :

ليكن a عدد طبيعي أكبر تماما من 2 ولدينا العددان التاليان :

$$y = (a-1)^2 \quad و \quad x = 2(a-1)$$

① اكتب x و y في نظام التعداد ذو الأساس a.

② تحقق من أن x و y يتألفان من نفس الأرقام و بترتيب معكوس.

حل التمرين :

① $a > 2$ إذن $a = 2 + \alpha$ مع $\alpha > 0$

$$-2 = \alpha - a$$

لدينا

$$x = 2a - 2$$

$$x = 2a + \alpha - a$$

$$x = a + \alpha$$

$$x = 1(a)^1 + \alpha(a)^0$$

$$x = \overline{1\alpha}^{a}$$

لدينا

$$y = a^2 + 1 - 2a$$

$$y = a^2 + 1 + (-2)(a)$$

$$y = a^2 + 1 + (\alpha - a)(a)$$

$$y = a^2 + 1 + a\alpha - a^2$$

$$y = \alpha(a^1) + 1(\alpha^0)$$

$$y = \overline{\alpha 1}^{a}$$

$x = \overline{1\alpha}^{a}$

$y = \overline{\alpha 1}^{a}$ ②

من الجواب السابق نجد أن x و y يتألفان من نفس الأرقام بترتيب معاكس.

تمرين:

n عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس 9: $n = \overline{127x}$

① عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8.

② عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11.

حل التمرين:

$n = \overline{127x}^{9}$ $\quad 0 \leq x < 9$

① تعيين x حتى $n \equiv 0\ [8]$

$n = x(9)^0 + 7(9)^1 + 2(9)^2 + 1(9)^3$

$n = x + 994$

$n \equiv 0\ [8]$

$x + 994 \equiv 0\ [8]$

$994 \equiv 2\ [8]$

$x + 2 \equiv 0\ [8]$

$x \equiv -2\ [8]$

$x \equiv 6\ [8]$

$x = 8K + 6 \quad | K \in \mathbb{N}$

لما $K=0$ إذن $x = 6$

② تعيين x حتى $n \equiv 0\ [11]$

$x + 954 \equiv 0\ [11]$

$954 \equiv 8\ (11]$

$x + 8 \equiv 0\ [11]$

$x \equiv -8\ [11]$

$x \equiv 3\ [11]$

$x = 11k' + 3$

لما $k' = 0$ ومنه $x = 3$

الأعداد الأولية

تعريف:

القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه.

ملاحظات وتذكير:

0 غير أولي لانه يقبل مالانهاية من القواسم.

1 غير أولي لانه يقبل قاسم واحد هو 1.

2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25

خاصية:

كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$

تمرين:

في كل حالة من الحالات الآتية اذكر إن كان العدد أوليا أم لا

1) 349

2) 341

3) 841

حل التمرين:

(3) 841

طريقة:

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ أوليا أم لا. نحسب $\sqrt{n}$

$\sqrt{849} = 29$

• إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي

إذن 849 غير أولي.

$\sqrt{341} = 18,46$

• إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الاعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب

بالفاصلة = 7 ÷ و 5 ÷ و 3 ÷ و 2 ÷ 341

$341 \div 11 = 31$

$341 = 31 \times 11$

إذن 341 غير أولي

$\sqrt{349} = 18,68$

بالفاصلة = 17 ÷ , 13 ÷ , 11 ÷ , 7 ÷ , 5 ÷ و 3 و 2 ÷ 341

أ- إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرأن n أولي

ب- إذا وجدنا احد البواقي معدوما نتوقف ونقرأن n غير أولي

إذن 349 أولي

المضاعف المشترك الأصغر وتطبيقاته

(PPCM)

1 تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. M_a مجموعة مضاعفات a، M_b مجموعة مضاعفات b.

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b.

يسمى اصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

ونرمز له $PPCM(a,b)$

ملاحظات:

- $PPCM(a,a) = a$ و $PPCM(1,a) = a$

مثال: مجموعة مضاعفات 6 $M_6 = \{0, 6, 12, 18, \dots\}$

- المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0

تمرين:

عين $PPCM(230, 128)$

حل التمرين:

128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$128 = 2^7$

230	2
115	5
23	23

$230 = 2 \times 5 \times 23$

$PPCM(230, 128) = 2^7 . 5 . 23$

$= 14720$

2) تحديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو اصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|, |b|)$

تمرين:

عين $PPCM(-15, 18)$

حل التمرين:

$18 = 2 . 3^2$

$15 = 3 . 5$

$PPCM(|-15|, |18|) = 90$

$2 . 3^2 . 5 = 90$

تمرين:

عين العدد الطبيعي غير المعدوم a حيث $PPCM(18, a) = 630$

حل التمرين:

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$630 = 2 . 3^2 . 5 . 7$

$18 = 2 . 3^2$

$PPCM(18, a) = 2 . 3^2 . 5 . 7$

$a = 2^n . 3^p . 5 . 7$

$n \in \{0, 1\}$

$p \in \{0, 1, 2\}$

$2^0 \begin{cases} 3^0 = 1 \\ 3^1 = 3 \\ 3^2 = 9 \end{cases}$ $\quad 2^1 \begin{cases} 3^0 = 2 \\ 3^1 = 6 \\ 3^2 = 18 \end{cases}$

$a \{1.35 ; 3.35 ; 9.35 ; 2.35 ; 6.35 ; 18.35\}$

3- خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. K عدد صحيح غير معدوم

$PPCM(Ka, Kb) = |K| \, PPCM(a, b)$.

تمرين :

n عدد طبيعي غير معدوم.

a و b عددان طبيعيان حيث أن:

$a = 3^n(11^{n+2} - 11^n)$ و $b = 11^n(3^{n+1} - 3^n)$

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

حل التمرين :

تحليل a :

$a = 3^n[11^n . 11^2 - 11^n]$

$a = 3^n . 11^n . 11^2 - 3^n . 11^n$

$a = 3^n . 11^n [121 - 1]$

$a = 3^n . 11^n . 120$

تحليل b:

$b = 11^n[3^n . 3^1 - 3^n]$

$b = 11^n . 3^n . 3^1 - 11^n 3^n$

$b = 11^n . 3^n [3 - 1]$

$b = 11^n . 3^n . 2$

$$PPCM(a,b) = PPCM(3^n.11^n.120 ; 3^n.11^n.2) =$$
$$3^n.11^n PPCM(120;2) = 120$$
$$PPCM(a,b) = 120.3^n.11^n$$

4- حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأصغر أس.

5- حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة و بأكبر أس.

تمرين:

باستعمال التحليل إلى جداء عوامل اولية عين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5600 و 28800.

حل التمرين:

$$5600 = 2^5.5^2.7$$

$28800 = 2^7 . 3^2 . 5^2$

$PGCD(a,b) = 2^5 . 5^2 = 800$

$PPCM(a,b) = 2^7 . 3^2 . 5^2 . 7 = 201600$

6- العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساو لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر. بعبارة أخرى

$$PGCD(a,b).PPCM(a,b) = a.b$$

التمرين السابق:

$$m.d = a.b \Rightarrow m = \frac{a.b}{d}$$

$$m = \frac{5600 \times 28\,800}{800} = 201600$$

تمرين:

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية حلول الجملة:

$$\begin{cases} a \times b = 18000 \\ PPCM(a,b) = 600 \end{cases}$$

حل التمرين:

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = d \\ PPCM(a,b = m \end{cases}$$

$$d.m = a.b = 18000$$

$$d.600 = 18000 \Rightarrow d = 30$$

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 30 \\ PPCM(a,b) = 600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$$

$a \cdot b = 18000$

$da' \cdot db' = 18000$

$900 \cdot a' \cdot b' = 18000$

$a' \cdot b' = \frac{18000}{900} = 20$

$a' \cdot b' = 20$

a'	1	2	4	5	10	20
b'	20	10	5	4	2	1

مرفوض مرفوض

غير أوليان فيما بينهما.

$(a', b') = \{(1,20), (4,5), (5,4), (20,1)\}$

$(a, b) = \{(30,600), (120,150), (150,120), (600,30)\}$

مبرهنة بيزو وتطبيقاتها

مبرهنة:

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث

$$au + bv = 1$$

تمرين:

n عدد طبيعي. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما في كل من الحالتين التاليتين:

أ- $a = n$ $\quad b = 2n + 1$

ب- $a = 2n + 3$ $\quad b = 3n + 5$

حل التمرين:

أ

$$nu + (2n+1)v = 1$$
$$n(-2) + (2n+1)(1) = 1$$
$$-2n + 2n + 1 = 1$$
$$1 = 1$$
$$(u, v) = (-2, 1)$$

حسب مبرهنة بيزو فإن a و b أوليان فيما بينهما.

ب-

$$(2n+3)(-3) + (3n+5)(2) = 1$$
$$-6n - 9 + 6n + 10 = 1$$
$$(u, v) = (-3, 2)$$

حسب مبرهنة بيزو فإن العددان a و b أوليان فيما بينهما

خواص:

خاصية 1:

إذا كان d قاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث:

$$au + bv = d$$

تمرين:

عين عددين صحيحين u و v حيث أن $135u + 55v = 5$

حل التمرين:

$$\begin{array}{r|l} 135 & 55 \\ \hline 25 & 2 \\ & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25 \\ \hline 2 \end{array}$$

$55 = (25 \times 2) + 5$ $\qquad$ $135 = 55(2) + 25$

$5 = 55 - 2(25)$ $\qquad$ $25 = 135 - 55(2)$

$5 = 55 - 2[135 - 55(2)]$

$5 = 55 - 135(2) + 55(4)$

$5 = 55(5) + 135(-2)$

$5 = 55(v) + 135(v)$

$(u, v) = (-2, 5)$

بتطبيق خاصية بيزو.

خاصية 2:

إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

خاصية 3:

إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$

تمرين:

ليكن n عددا صحيحا

① اثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما

② اثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما.

③ إستنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما

حل التمرين:

① إثبات أن a و b أوليان فيما بينهما:

$$(n+1)(-2)+(2n+3)(1)=1$$

$$-2n-2+2n+3=1$$

حسب مبرهنة بيزو فإن a و b أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u,v)=(-2,1)$

② إثبات أن a و c أوليان فيما بينهما

$$(3n+4)(1)+(n+1)(-3)=1$$

$$3n+4-3n-3=1$$

$$(u,v)=(-3,1)$$

حسب مبرهنة بيزو فإن a و c أوليان فيما بينهما لأنه يوجد ثنائية $(u,v)=(-3,1)$

③ إستنتاج أن a أولي مع $b\times c$:

$$(2n+3)(3n+4)=6n^2+17n+12$$

بما أن $(n+1)$ و $(2n+3)$ أوليان فيما بينهما

و $(n+1)$ أولي مع $(3n+4)$

فإن $n+1$ أولي مع جدائهما $6n^2+17n+12$

تمرين:

اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n، يكون:

$PGCD(n;n^2+1)=1$; $PGCD(11n+3;7n+2)=1$

حل التمرين:

①

$a.u+b.v=1$

$11n+3(-7)+7n+2(11)=1$

$-77n-21+77n+22=1$

يوجد ثنائية $(u,v)=(-7,11)$

حسب بيزو فإن العددان أوليان فيما بينهما

$PGCD(11n+3;7n+2)=1$

②

$n(-n)+(n^2+1)(1)=1$

$-n^2+n^2+1=1$

الثنائية $(u,v)=(-n,1)$

حسب بيزو فإن العددان أوليان فيما بينهما

إذن $PGCD(n;n^2+1)=1$

تمرين:

n عدد طبيعي غير معدوم

نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$

بإستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

حل التمرين:

البرهان أن a و b أوليان فيما بينهما.

$(2n^2+4n+1)(1)+(n+2)(-2n)=1$

$\cancel{2n^2}+\cancel{4n}+1-\cancel{2n^2}-\cancel{4n}=1$

ومنه يوجد ثنائية $(u,v)=(1,-2n)$

وحسب مبرهنة بيزو فإن العددان a و b أوليان فيما بينهما

تمرين:

n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- تحقق من أن $(n^3+1)^2=n^2(n^4+2n)+1$

ب- إستنتج أن العددين n^3+1 و n^4+2n أوليان فيما بينهما.

حل التمرين:

أ- $(n^3+1)^2=n^6+2n^3+1$

$=n^2(n^4+2n)+1$ ومنه

ب- إستنتاج أن a و b أوليان فيما بينهما.

$(n^3+1)(n^3+1)+(n^4+2n)(-n^2)$

$=\cancel{n^2}(\cancel{n^4+2n})+1+[\cancel{n^4+2n}](-\cancel{n^2})=1$

$=$ توجد ثنائية $(u,v)=(n^3+1;-n^2)$

حسب مبرهنة بيزو فإن العددان أوليان فيما أوليان.

تمرين:

بإستعمال خوارزمية إقليدس عين ثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ تحقق

$12x+35y=1$

حل التمرين:

35	12	
11	2	11
	1	1

$35 = 12(2) + 11 \qquad 11 = 35 - 12(2)$

$12 = 11(1) + 1$

$1 = 12 - 11(1)$

$1 = 12 - [35 - 12(2)]$

$1 = 12 - 35 + 12[2]$

$1 = (3)12 + (-1)35$

إذن $12(3) + 35(-1) = 1$

$(x, y) = (3, -1)$

تمرين:

أ- اكتب خوارزمية اقليدس لتعيين: $PGCD(257, 45)$

ب- إنطلاقا من المساواة الأخيرة والتي يكون فيها الباقي غير معدوم، احسبه بدلالة البواقي السابقة له.

ج- عين ثنائية من الأعداد الصحيحة (u, v) حيث:

$257u + 45v = PGCD(257, 45)$

حل التمرين:

257	45			
32	5	32		
	13	1	13	
		6	2	6
			1	2

$257 = 45(5) + 32 \qquad 32 = 257 - 45(5)$

$45 = 32(1) + 13 \qquad 13 = 45 - 32(1)$

$32 = 13(2) + 6 \qquad 6 = 32 - 13(2)$

$13 = 6(2) + 1 \qquad 1 = 13 - 6(2)$

$PGCD(257, 45) = 1$ ①

العددان 257 ، 45 أوليان فيما بينهما.

$1 = 13 - 6(2)$ ②

$1 = [45 - 32(1)] - [32(2) - 13(2)]$

$1 = 45 - 32(1) - 32(2) + 13(2)$

$1 = 45 - [257 - 45(5)] - [257(2) - 45(10)] + [45(2) - 32(2)]$

$1 = 45 - 257 + 45(5) - 257(2) + 45(10) + 45(2) - 257(2) + 45(10)$

$1 = 45(40) + 257(-7)$

③

$257u + 45v = 1$

$257(-7) + 45(40) = 1$

تمرين:

a ، b ، n أعداد طبيعية غير معدومة حيث:

$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$

$b = 2n^2 + n$

1- بين أن العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b.

2- باستعمال مبرهنة بيزو بين أن $PGCD(n, n+1) = 1$ و

$PGCD[n, (n+1)^2] = 1$

3- استنتج $PGCD(a, b)$.

حل التمرين:

① البرهان $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b.

$$
\begin{array}{r|l}
2n^3+5n^2+4n+1 & 2n+1 \\
-\ 2n^3+n^2 & n^2+2n+1 \\
\hline
4n^2+4n+1 & \\
-\ 4n^2+2n & \\
\hline
0+2n+1 & \\
-\ 2n+1 & \\
\hline
0\ 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2n^2+n & 2n+1 \\
-\ 2n^2+n & n \\
\hline
0\ 0 &
\end{array}
$$

$2n^2+n = n(2n+1)$

$2n^3+5n^2+4n+1 = (2n+1)(n^2+2n+1)$

$= (2n+1)(n+1)^2$

بما أن $2n+1 \mid a$ و $2n+1 \mid b$ فإن

$(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b.

② البرهان أن $PGCD(n, n+1) = 1$

$n(u) + (n+1)(v) = 1$

$n(-1) + (n+1)(1) = 1$

$-n + n + 1 = 1$

يوجد ثنائية $(u, v) = (-1, 1)$ أي حسب مبرهنة بيزو فإن n و $n+1$ أوليان فيما بينهما.

$PGCD(n, n+1) = 1$

البرهان $PGCD(n, (n+1)^2)$

$n(\ ) + (n+1)^2(\ ) = 1$

$n(-n-2) + (n^2+2n+1)(1) = 1$

$-n^2 - 2n + n^2 + 2n + 1 = 1$

$(u, v) = (-n-2, 1)$

$PGCD(n, (n+1)^2) = 1$ حسب بيزو فإن

③ إستنتاج $PGCD(a, b)$

$PGCD(a, b) = PGCD([2n+1][n+1]^2, [2n+1]n)$

$(2n+1)\, PGCD((n+1)^2, n)$

لكن لدينا : $PGCD(n, (n+1)^2) = 1$

إذن

$PGCD(a, b) = 2n + 1.$

مبرهنة غوص ونظيرتها

مبرهنة:

a ، b و c ثلاث اعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b، فإن a يقسم c.

تمرين:

1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول (x,y): $9x - 16y = 0$

2) تأكد أن الثنائية $(4,2)$ حل للمعادلة ذات المجهول (x,y): $9x - 16y = 4$

3) إستنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول (x,y): $9x - 16y = 4$

حل التمرين:

1)

$16 \mid 9x$

$PGCD(16,9) = 1$

أي 16 و 9 اوليان فيمابينهما

فإن حسب مبرهنة غوص فإن $16 \mid x$

$x = 16K \quad K \in \mathbb{Z}$

$9\,16K = 16y \Rightarrow y = 9K \quad K \in \mathbb{Z}$

2) التأكد من الثنائية $(4,2)$:

$9(4) - 16(2) = 4$

$36 - 32 = 4$

ومنه $(4,2)$ حل للمعادلة $9x-16y=4$

③ إستنتاج في $\mathbb{Z}^2$ كل الثنائيات

$$9x-16y=4$$
$$9(4)-16(2)=4$$
$$9x-16y+9(-4)-16(-2)=0$$
$$9(x-4)-16(y-2)=0$$
$$9(x-4)=16(y-2)$$

$16 \mid 9(x-4)$ لكن 9 أولي مع 16

حسب مبرهنة غوص فإن

$$16 \mid x-4$$
$$x-4=16K \qquad K\in\mathbb{Z}$$
$$x=16K+4$$
$$9(16K+4-4)=16(y-2)$$
$$y=9K+2$$
$$(x,y)=(16K+4\ ,\ 9K+2)$$

تمرين:

عين كل الثنائيات (a,b) من الأعداد الصحيحة التي تحقق

$$5a=7b$$

حل التمرين:

تعيين كل الثنائيات

$$5a=7b$$

$7 \mid 5a$ 5 أولي مع 7

فإن حسب مبرهنة غوص $7|a$

$a = 7K$

$5.7K = 7b$

$b = 5K$

تمرين:

عين كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول المعادلة $55x = 16y$

حل التمرين:

$16 | 55x$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 16 \\ 7 & 3 \\ & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$PGCD(55, 16) = 1$

العددان أوليان فيما بينهما

فحسب مبرهنة غوص فإن

$K \in \mathbb{Z} \ / \ x = 16K$ أي $16|x$

$55(16K) = 16y \Rightarrow y = 55K$

$(x, y) = (16K, 55K) \quad K \in \mathbb{Z}$.

تمرين:

عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الصحيحة التي تكون حلول للمعادلة: $21(x-3)=12(y+4)$

حل التمرين:

تعيين الثنائيات (x,y)

$$21(x-3)=12(y+4)$$
$$7.3(x-3)=4.3(y+4)$$
$$7(x-3)=4(y+4)$$

$$4 \mid 7(x-3)$$

و 7 أولي مع 4 أي حسب نظرية غوص

$$4 \mid x-3$$

$$x-3=4K \Rightarrow x=4K+3 \qquad K\in Z$$

$$7(4K+\cancel{3}-\cancel{3})=4(y+4)$$
$$7.\cancel{4}K=\cancel{4}(y+4)$$
$$7K=y+4 \Rightarrow y=7K-4 \qquad K\in Z$$
$$(x,y)=(4K+3,\ 7K-4)$$

تمرين:

① حل في Z^2 المعادلة $3x-13y=1$

② إستنتج مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث $3x\equiv 1[13]$

حل التمرين:

①

$$1=13-3(4)$$
$$3(-4)-13(-1)=1$$

الحل الخاص للمعادلة $(x_0, y_0) = (-4, -1)$

② لدينا

$3x - 13y = 1$

$(3(-4) - 13(-1) = 1) \times (-1)$

بجمع

$3x - 13y + 3(4) - 13(1) = 0$

$3(x+4) - 13(y+1) = 0$

$3(x+4) = 13(y+1)$

$13 \mid 3(x+4)$

13 أولي مع 3 أي حسب مبرهنة غوص

$x+4 \mid 13$

K

$x + 4 = 13K$

$x = 13K - 4 \quad K \in \mathbb{Z}$

$3(13K - 4 + 4) = 13(y+1)$

$y = 3K - 1 \quad K \in \mathbb{Z}$

حلول المعادلة $(x, y) = (13K - 4 ; 3K - 1)$

$K \in \mathbb{Z}$

③ إستنتاج مجموعة الأعداد الصحيحة حيث

$3x \equiv 1 \ [13]$

$3x = 13y + 1$

$3x - 13y = 1$

قيم x التي تحقق هي $13K - 4$

تمرين:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y) التالية:

$$2045x - 64y = 1 \quad \dots (1)$$

① عين $PGCD(2045, 64)$

② إستنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.
عين حلا خاصا للمعادلة (1).

③ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)

حل التمرين:

①

2045	64		
61	31	61	
	3	1	3
		1	20

$PGCD(2045, 64) = 1$

② إستنتاج أن المعادلة تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.
بما أن 2045 و 64 أوليان فيما بينهما.
فإن حسب مبرهنة بيزو يوجد ثنائية صحيحة (x,y)
حيث $2045x - 64y = 1$
ومنه يوجد حلا على الأقل للمعادلة ① في $\mathbb{Z}^2$
تعيين الحل الخاص:

$2045 = 64(31) + 61 \Rightarrow 61 = 2045 - 64(31)$

$64 = 61(1) + 3 \Rightarrow 3 = 64 - 61(1)$

$61 = 3(20) + 1 \Rightarrow 1 = 61 - 3(20)$

$1 = 61 - 3(20)$

$1 = 61 - [64(20) - 61(20)]$

$1 = 2045 - 64(31) - 64(20) + 2045(20) - 64(620)$

$1 = 2045(21) - 64(671)$

$2045(21) - 64(671) = 1$

$2045x - 64y = 1$

$(x, y) = (21, 671)$ الحل الخاص

③ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة

$2045x - 64y = 1$

$(2045(21) - 64(671) = 1) \times -1$

$2045x - 64y + 2045(-21) - 64(-671) = 0$

$2045(x - 21) - 64(y - 671) = 0$

$2045(x - 21) = 64(y - 671)$

لدينا 2045 و 64 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص $64 \mid 2045(x - 21)$

$64 \mid x - 21$

$x - 21 = 64K$

$x = 64K + 21$ $K \in \mathbb{Z}$

$2045(64K + 21 - 21) = 64(y - 671)$

$y = 2045K + 671$ $K \in \mathbb{Z}$

حلول المعادلة $(x, y) = (64K + 21, 2045K + 671)$

تمرين :

في $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة (1) التالية $11x - 5y = 14$

① تحقق من ان الثنائية $(19, 39)$ حل للمعادلة (1) ثم إستنتج كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة التي تحقق المعادلة (1)

② بين انه توجد ثنائية وحيدة (x_0, y_0) حلا للمعادلة (1) مع $0 < x_0 < 5$

حل التمرين :

① التحقق أن $(19, 39)$ حلا للمعادلة :

$$11(19) - 5(39) = 14$$
$$209 - 195 = 14$$
$$14 = 14$$

ومنه

إذن $(19, 39)$ حلا للمعادلة.

② حل المعادلة في $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} 11x - 5y = 14 \\ (11(19) - 5(39) = 14) \times -1 \end{cases}$$

بالجمع نجد

$$11x - 5y + 11(-19) - 5(-39) = 0$$
$$11(x - 19) - 5(y - 39) = 0$$
$$11(x - 19) = 5(y - 39)$$

11 و 5 أوليان فيما بينهما

و $5 \mid 11(x - 19)$

إذن حسب مبرهنة غوص فإن $5 \mid x-19$

$$x = 5K + 19 \qquad K \in \mathbb{Z}$$

$$11(5K + 19 - 19) = 5(y - 39)$$

$$y = 11K + 39$$

حلول المعادلة

$$(x, y) = (5K + 19 ; 11K + 39) \qquad K \in \mathbb{Z}$$

② البرهان ان هناك ثنائية وحيدة

مع $0 < x_0 < 5$

$$x_0 = 5K + 19$$

$$y_0 = 11K + 39$$

$$0 < 5K + 19 < 5$$

$$-19 < 5K + 19 - 19 < 5 - 19$$

$$-19 < 5K < -14$$

$$-\frac{19}{5} < K < -\frac{14}{5}$$

$$-3,8 < K < -2,8$$

$$K = -3$$

$$x_0 = 5 \times (-3) + 19 \Rightarrow x_0 = 4$$

$$y_0 = 11(-3) + 39 \Rightarrow y_0 = 6$$

إذن $(x_0, y_0) = (4, 6)$

تمرين:

في المستوي المنسوب إلى معلم، نعتبر المستقيم Δ ذي المعادلة $21x - 31y - 2 = 0$

أ- تحقق أن المعادلة $A(6,4)$ تنتمي إلى المستقيم Δ.

ب- عين كل نقط المستقيم (Δ) التي إحداثياتها تكون أعدادا صحيحة

حل التمرين:

أ- التحقق أن $A(6,4)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

$21(6) - 31(4) - 2 = 0$

$126 - 124 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

ومنه $A(6,4)$ تنتمي إلى (Δ)

$A(6;4) \in (\Delta)$

ب- تعيين كل نقط المستقيم:

$21x - 31y = 2$

$(21(6) - 31(4) = 2) \times (-1)$

$21x - 31y + 21(-6) - 31(-4) = 0$

$21(x-6) - 31(y-4) = 0$

$21(x-6) = 31(y-4)$

$31 \mid 21(x-6)$

مع 31 و 21 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص

$31 \mid x - 6$

$x - 6 = 31K \Rightarrow x = 31K + 6$

$$21(31K+6-6) = 31(y-4)$$

$$y = 21K+4 \qquad K \in \mathbb{Z}$$

النقط هي: $(x, y) = (31K+6, 21K+4)$

$K \in \mathbb{Z}$

الحساب والمضاجعات

تمرين:

1. أ- أوجد الـ PGCD للعددين: 168 و 20.

ب- لتكن المعادلتان

$168x + 20y = 6 \dots (1)$

$168x + 20y = 4 \dots (2)$

حيث x و y مجهولان صحيحان.

- هل تقبل كل من المعادلتين حلولا في $\mathbb{Z}^2$ ؟

2. أ- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين العددين الصحيحين m و p اللذان يحققان $42m + 5p = 1$

ب- إستنتج العددين u و v اللذان يحققان $42u + 5v = 2$

ج- اثبت أن الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}$ هي حل للمعادلة

$42x + 5y = 2 \dots (3)$ إذا، وفقط إذا كان

$42(x+4) = 5(34-y)$

د- أوجد كل الثنائيات (x, y)، حلول المعادلة (3)

3. إستنتج من السؤال 2. الثنائيات (x, y) حلول المعادلة:

$(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$

حل التمرين:

(1) أ- إيجاد

$PGCD(168, 20) = 4$

$$\begin{array}{r|l} 168 & 20 \\ 8 & 8 \\ \hline & 8 \\ 4 & 2 \\ \hline & 4 \\ 0 & 2 \end{array}$$

ب- دراسة المعادلة ①

$168x + 20y = 6$

لدينا $PGCD(168, 20) = 4$

$4 | 168$ $\quad$ $4 | 20$

فإن $4 | 168x + 20y$ أي $4 | 6$

وهذا مستحيل

$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

أي المعادلة ① مستحيلة الحل في $\mathbb{Z}^2$

دراسة المعادلة ②

طريقة 1: $PGCD(168, 20) = 4$

حسب مبرهنة بيزو يوجد عددين صحيحين x و y بحيث $168x + 20y = 4$

طريقة 2:

$4 | 168$ و $4 | 20$ فإن

$4 | 168x + 20y$ أي $4 | 4$

إن للمعادلة ② حلول في $\mathbb{Z}^2$.

2- أ.

$$\begin{array}{r|l} 42 & 5 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$42 = 5(8) + 2 \Rightarrow 2 = 42 - 5(8)$

$5 = 2(2) + 1 \Rightarrow 1 = 5 - 2(2)$

$2 = 1(2) + 0$

$1 = 5 - 2(2)$

$1 = 5 - [42 - 5(8)](2)$

$1 = 5 - 42(2) + 5(16)$

$1 = 5(+17) - 42(2)$

$$\begin{cases} 42(-2) + 5(17) = 1 \\ 42(m) + 5(p) = 1 \end{cases}$$

$(m, p) = (-2, 17) \in \mathbb{Z}^2$

ب- إيجاد u و v اللذان يحققان

$42u + 5v = 2$

$(42(-2) + 5(17) = 1) \times 2 \Rightarrow u = -4 ; \; v = 34$

ج- $42x + 5y + 42(4) + 5(-34) = 0$

$42(x+4) + 5(y-34) = 0$

$42(x+4) = -5(y-34)$

ومنه $42(x+4) = 5(34-y)$

د- إيجاد كل الثنائيات : $42x + 5y = 2$

لدينا $42(x+4) = 5(34-y)$

$5 \mid 42(x+4)$

لكن $PGCD(42, 5) = 1$

أي 5 و 42 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص

$5 \mid x+4$

$x+4=5K \qquad K\in\mathbb{Z}$

$x=5K-4$

$42(5K-4+4)=5(34-y)$

$y=34-42K \qquad K\in\mathbb{Z}$

$(x,y)=(5K-4,\ 34-42K) \qquad K\in\mathbb{Z}$

3. إستنتاج الثنائيات حلول المعادلة

$(42x+5y-3)(42x+5y+3)=-5$

$(42x+5y)^2-9=-5$

$(42x-5y)^2=4$

$$\begin{cases} 42x-5y=2 \quad \dots ③ \\ 42x-5y=-2 \quad \dots ④ \end{cases}$$ أو

حل المعادلة ③ سابقا

$(x,y)=(5K-4,\ 34-42K)$

$(x,y)=(-5K+4,\ -34+42K)$

تمرين:

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة. لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x,y):

$43x-13y=\lambda \dots (*)$ حيث λ وسيط صحيح.

1. تحقق من أن $(-3\lambda,\ -10\lambda)$ حل المعادلة $(*)$، حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة.

2. N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{\beta 0yyy}$ في النظام تعداد أساسه 5. بين أن

α ، β ، γ تحقق $43\alpha - 13\beta = \gamma$

- عين α ، β ، γ ثم أكتب N في النظام العشري.

حل التمرين:

① التحقق

$$43(-3k) - 13(-10k) = k$$
$$-129k + 130k = k$$

ومنه $(-3k, -10k)$ حل للمعادلة

② حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة

لدينا $43x - 13y = k$

ومن الجواب السابق $43(-3k) - 13(-10k) = k$

$$43x - 13y + 43(3k) - 13(10k) = 0$$
$$43(x + 3k) - 13(y + 10k) = 0$$
$$43(x + 3k) = 13(y + 10k)$$

نستنتج $13 \mid 43(x + 3k)$

لكن 13 و 43 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص فإن $13 \mid x + 3k$

$$x + 3k = 13K \qquad K \in \mathbb{Z}$$
$$x = 13K - 3k$$
$$43(\cancel{13}K - \cancel{3}K + \cancel{3}K) = \cancel{13}(y + 10k)$$
$$43K = y + 10k$$
$$y = -10k + 43K$$

$$(x, y) = (13K - 3k ; -10k + 43K) \qquad K \in \mathbb{Z}$$

$N' = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^{6}$ $\quad 0 < \alpha < 6$ ②

$\quad 0 \leq \beta < 5$

$N' = \overline{\beta 0 \gamma\gamma\gamma}^{5}$ $\quad 0 \leq \gamma < 5$

البرهان أن $43\alpha - 13\beta = y$

$N' = \alpha 6^0 + \beta 6^1 + \alpha 6^2 + \beta 6^3 + \alpha 6^4$

$N' = \gamma 5^0 + \gamma 5^1 + \gamma 5^2 + 0.5^3 + \beta.5^4$

$N' = \alpha + 6\beta + 36\alpha + 216\beta + 1296\alpha$

$N' = 1333\alpha + 222\beta$

$N' = \gamma + 5\gamma + 25\gamma + 625\beta$

$N' = 31\gamma + 625\beta$

$1333\alpha + 222\beta = 31\gamma + 625\beta$

$1333\alpha - 403\beta = 31\gamma$

$PGCD(1333, 403, 31) = 31$

وهو المطلوب: $43\alpha - 13\beta = \gamma$

③ تعيين α و β و γ:

$43\alpha - 13\beta = y$ لدينا ...(**)

$43x - 13y = \lambda$ ...(*)

حلول المعادلة (**) هي نفس حلول المعادلة (*)

أي $(x,y) = \{(13K-3\lambda),(43K-10\lambda)$

$$\begin{cases} \alpha = 13K - 3\gamma \\ \beta = 43K - 10\gamma \end{cases}$$

لدينا $0 < \beta < 5$

لما $K = 1$ $\beta = 43 - 10\gamma$

$$0 < 43 - 10\gamma < 5$$

$$(-43 < -10\gamma < -38) \times (-1)$$

$$38 < 10\gamma < 43$$

$$\frac{38}{10} < \gamma < \frac{43}{10}$$

$$3,8 < \gamma < 4,3$$

إذن $\gamma = 4$

$$\begin{cases} \beta = 43 - 10\times 4 \\ \alpha = 13 - 3\times 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

كتابة N في النظام العشري

$N = \overline{13131}^{6} = 1333 \times 1 + 222(3)$

$N = \overline{30444}^{5} = 31(4) + 625(3)$

$N = 1999$

تمرين:

1. أثبت أن العددين 993 و 170 أوليان فيما بينهما
2. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I) ذات المجهولين x و y حيث:

$$993x - 170y = 143 \quad ...(1)$$

أ- عين الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (I) بحيث: $x_0 + y_0 = 6$

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (I)

3. أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $(a-1)$ على كل من العددين 198 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب.

حل التمرين:

① إثبات أن العددان أوليان فيما بينهما

993	170						
143	5	143					
	27	1	27				
		8	5	8			
			3	3	3		
				2	2	2	
					1	1	1
						0	2

ومنه $PGCD(993, 170) = 1$

إذن 993 و 170 أوليان فيما بينهما

② أ- تعيين الحل الخاص لـ (I)

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 6 \\ 993x_0 - 170y_0 = 143 \\ 170x_0 + 170y_0 = 1020 \end{cases}$$

بجمع $1163x_0 + 0 = 1163$

$x_0 = 1$

$y_0 = 6 - 1 \Rightarrow y_0 = 5$

$(x_0, y_0) = (1, 5)$

ب- حل المعادلة I في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $993x - 170y = 143$

$(993(1) - 170(5) = 143) \times -1$

بالجمع $993x - 170y + 993(-1) - 170(-5) = 0$

$993(x-1) - 170(y-5) = 0$

$993(x-1) = 170(y-5)$

$170 \mid 993(x-1)$

لكن 170 و 993 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص فإن $170 \mid x - 1$

$x - 1 = 170K \qquad K \in \mathbb{Z}$

$x = 170K + 1$

$993(\cancel{170}K + \cancel{1} - \cancel{1}) = \cancel{170}(y-5)$

$993K = y - 5 \Rightarrow y = 993K + 5$

$(x, y) = (170K + 1 ; 993K + 5)$

③

$a-1 \equiv 14\ [1986]$

$a-1 \equiv 300\ [340]$

$$a-1 = 1986x + 14$$

$$a-1 = 340y + 300$$

$$1986x + 14 = 340y + 300$$

$$1986x - 340y = 286$$

$$993x - 170y = 143 \quad \ldots(*)$$

حلول المعادلة (*) هي نفسها حلول المعادلة (I)

$(x, y) = (170K + 1,\ 193K + 5)$

$K \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$a - 1 = 1986(1) + 14$$

$$a = 2001$$

الموافقات والقواسم

تمرين BAC MATH 2015

① أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب- إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2^{53}]$

② أ- بين أن 89 أولي.

ب- عين القواسم الطبيعية للعدد 7832.

ج- بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما

③ x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2.

عين x و y علما أن
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

④ a، b، c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c

أ- باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$

ب- بإستعمال الإستدلال بالتراجع، اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $PGCD(a;b^n) = 1$

(يرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر).

ج- إستنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

حل التمرين:

1) أ- بواقي 2^n على 7

$n=0$ $\quad 2^0 \equiv 1[7]$

$2^1 \equiv 2[7]$

$2^2 \equiv 4[7]$

$2^3 \equiv 8[7]$

$2^4 \equiv 1[7]$

دور القسمة هو 3:

$n \equiv$	$3K$	$3K+1$	$3K+2$	$[3]$
$2^n \equiv$	1	2	4	$[7]$

بواقي 2^n على 7 هي $\{1, 2, 4\}$

ب- الإستنتاج

$1962 \div 7 = \quad + 2$

$1962 \equiv 2[7]$

$1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$

$2^{1954} \equiv 2[7]$

$1954 \div 3 = 651 + 1 \Rightarrow 1954 = 3(651) + 1)$

$= 3K + 1$

ومنه $1962^{1954} \equiv 2[7]$

$1954 \equiv 1[7]$

$1954^{1962} \equiv 1^{1962}[7]$

$1954^{1962} \equiv 1[7]$

$2015 \equiv 6[7]$

$2015^{53} \equiv 6^{53}[7]$

6^{54} عدد صحيح زوجي

$7 \equiv 0[7]$

$6+1 \equiv 0[7]$

$6 \equiv -1[7]$

$2015 \equiv -1[7]$

$2015^{53} \equiv (-1)^{53}[7]$

$2015^{53} \equiv -1[7]$

$1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv ?[7]$

$\equiv 2 - 1 - 1[7]$

$\equiv 0[7]$

باقي A على 7 هو 0.

أي A يقبل القسمة على 7.

② أ- بين أن 89 عدد أولي:

طريقة: (توجد من قبل).

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) أوليا أم لا. نحسب $\sqrt{n}$

$\sqrt{89} = 9,43 \in \mathbb{N}$

بالفاصلة 2, 3, 5, 7

إذن 89 لا يقبل القسمة على 2, 3, 5, 7

ومنه 89 عدد أولي

ب - تعيين كل قواسم العدد 7832

7832	2
3916	2
1958	2
979	11
89	89
1	

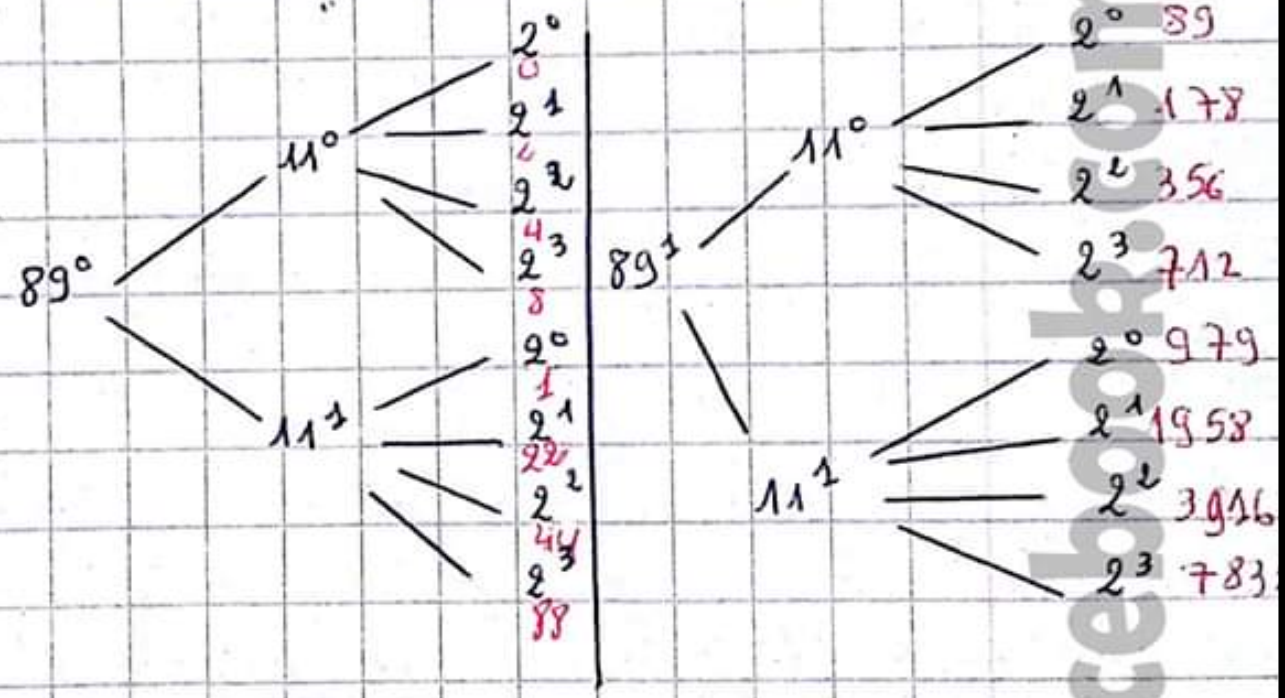
$7832 = 2^3 . 11^1 . 89^1$

عدد قواسم العدد 7832 هي

$N = (3+1)(1+1)(1+1)$

$= 4(2)(2) = 16$

عدد قواسم العدد 7832 هي 16 قاسما



$D_{7832} = \{0, 2, 4, 8, 1, 22, 44, 88, 89, 178, 356, 712, 979, 1958, 3916, 7832\}$

ج - البرهان أن العددين 981 و 977

$PGCD(981, 977) =$

$$\begin{array}{r|l} 981 & 977 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} & 4 & \\ \hline 1 & 244 & 1 \\ \hline & 0 & 4 \end{array}$$

$PGCD(981, 977) = 1$

ومنه 981 و 977 أوليان فيما بينهما

③ عين x و y علما أن

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

$PGCD(x, y) = 2$

معناه

$x = 2x'$

$y = 2y'$

حيث $PGCD(x', y') = 1$

$(2x')^2 - (2y')^2 = 31328$

$4x'^2 - 4y'^2 = 31328$

$x'^2 - y'^2 = 7832$

$(x' + y')(x' - y') = 7832$

$x - y \equiv 8[22]$

$2x' - 2y' \equiv 8[2]$

$x' - y' \equiv 4[11]$

$x'-y'$	-1	-2	-4	-8	-11	-22	-44	-88	-89	-178	-356	-712	-979	-1958	-3916	-7832
$x'+y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	88	44	22	11	8	4	2	1
x'	3916,5	1959	981	493,5	361,5	367	111	88,5	88,5	111	367	361,5	493,5	981	1959	3916,5
y'		1957	977			167	134									

$$(x'-y')+(x'+y') = 2x'$$
$$-x'+y'+x'+y' = 2y'$$

$$x'-y' \equiv 4[11]$$

$$\begin{cases} 1959-1957 \not\equiv 4[11] \\ 2 \not\equiv 4[11] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 981-977 \equiv 4[11] \\ 4 \equiv 4[11] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 367-167 \not\equiv 4[11] \\ 200 \not\equiv 4[11] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 111-134 \not\equiv 4[11] \end{cases}$$

الثنائية الوحيدة التي حققت

$$\begin{cases} x' = 981 \\ y' = 977 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2\times 981 \\ y &= 2\times 977 \end{aligned}$$

$$(x,y) = (1962, 1954)$$

④ أ- برهان أن a أولي مع $b \times c$

a أولي مع b حسب مبرهنة بيزو

فإنه يوجد عددين صحيحين u ، v

$au + bv = 1$ ... ①

a أولي مع c حسب مبرهنة بيزو

فإنه يوجد عددين صحيحين u' ، v' .

$au' + cv' = 1$ ... ②

$(au + bv)(au' + cv') = 1$

$a^2uu' + acuv' + abvu' + bcvv' = 1$

$a(auu' + cuv' + bvu') + bcvv' = 1$

$a(\alpha) + bc(\beta) = 1$

ومنه حسب مبرهنة فإن العددين a و bc

أوليان فيما بينهما

ب- إثبات أن $PGCD(a, b^n) = 1$

① من اجل $n = 1$

$PGCD(a,b) = 1$

لأن a أولي مع b

$PGCD(a,b) = 1$

أي $P(1)$ محققة

② نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n أي

$PGCD(a, b^n) = 1$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أنها محققة أي $PGCD(a,b^{n+1})=1$

لدينا $PGCD(a,b^n)=1$

ولدينا $PGCD(a,b\times c)=1$

أي $\begin{cases} PGCD(a,b)=1 \\ PGCD(a,b^n)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow PGCD(a,b^n.b)=1$

$PGCD(a,b^{n+1})=1$

ومنه $P(n+1)$ محققة من اجل $n\neq 1$

وأخيرا $PGCD(a,b^n=1$

ج) إستنتاج $PGCD(1954^{1962},1962^{1954})$

لدينا $PGCD(977,981)=1$

$PGCD(2.977,2.981)=2$

$PGCD(1954,1962)=2$

$PGCD(a,b^n)=1$

$PGCD(2^{1962}.977^{1962};2^{1954}.981^{1954})$

$=2^{1962}PGCD(977^{1962}.2^8;981^{1954})$

لكن $PGCD(977,981=1$

$PGCD(977^{1954},981^{1954})=1$

كذلك $PGCD(2,981)=1$

$PGCD(2^8,981^{1954})=1$

أي $\begin{cases} PGCD(2^8.977^{1962},981^{1954})=1 \\ PGCD(a,b.c)=1 \end{cases}$

وأخيرا

$PGCD(1954^{1962},1962^{1954})=2^{1954}$