
تم التحويل الى صيغة pdf
من طرف موقع - اتيد دوك - etudook.com
www.etudook.com
Meziane Maths :
المجلة الشاملة في الدوال الأسية
الأستاذ : مزيان محمد
01 درس مفصل
02 تمارين تدريبية محلولة
03 تمارين تجريبية
04 تمارين الواردة في البكالوريا
BAC 2022

المحتويات

قائمة المحتويات

الدرس 01

1 الدالة الأسية

مبرهنة و تعريف

✍ توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f'=f$ و $f(0)=1$ نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" ونسميها الدالة الأسية النيبيرية

مبرهنة

✍ الدالة الأسية موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

برهان

✍ نعرف الدالة g على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=exp(x).exp(-x)$

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=exp(x).exp(-x)-exp(x).exp(-x)=0$ و منه g دالة ثابتة و عليه :

بما أن : $exp(0)=1$ فإن : $g(x)=1$ و عليه : $exp(x).exp(-x)=1$ و منه : exp لا تنعدم أبدا .

✍ لنبرهن أن الدالة exp موجبة تماما بالخلف :

نفرض وجود عدد x_0 بحيث $exp(x_0)\leq 0$ في المجال $[0;x_0]$

أو المجال $[x_0;0]$. الدالة exp قابلة للاشتقاق فهي إذن مستمرة .

و لدينا : $exp(x_0)<0$ و $exp(0)>0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $exp(x)=0$ تقبل حلا في هذا المجال

و هذا يناقض الفرض لأن exp لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

و منه لا يوجد أي عدد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $exp(x_0)<0$ و عليه $exp(x)>0$ من أجل كل عدد طبيعي x .

نتائج

✍ $exp(0)=1$ ✍ $exp'(x)=exp(x)$

خواص جبرية

1. $exp(x)\neq 0$
2. $exp(-x)=\dfrac{1}{exp(x)}$
3. $exp(x+y)=exp(x)\times exp(y)$
4. $exp(x-y)=\dfrac{exp(x)}{exp(y)}$
5. $exp(nx)=[exp(x)]^n$

العدد e والترميز e^x

✍ العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e=exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2.718281828$. من أجل كل عدد

صحيح نسبي n ، $exp(n) = exp(n \times 1) = [exp(1)]^n$ ، لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $exp(n) = e^n$.
اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $exp(x)$ بـ e^x .

خواص بالترميز e^x

1. $e^0 = 1$.
2. $exp'(x) = e^x$.
3. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
4. $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
5. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
6. $e^{nx} = (e^x)^n$.

مثال تطبيقي

بسط العبارات التالية :

1. $(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x}$
2. $\frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}} = e^{2x+1-(-2x)} = e^{2x+1+2x} = e^{4x+1}$
3. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = e^{x-2x} + e^{-x-2x} = e^{-x} + e^{-3x}$
4. $\left(\frac{(e^x)^3 \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{(e^{3x}) \times e^{-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{e^{3x-6x}}{e^{4-x}}\right)^2 = \left(\frac{e^{-3x}}{e^{4-x}}\right)^2 = (e^{-3x-(4-x)})^2 = (e^{-3x-4+x})^2 = (e^{-2x-4})^2 = e^{-4x-8}$
5. $\sqrt{e^x} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}$
6. $\sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}} = \sqrt{3e^{x-1-(2x+1)}} = \sqrt{3e^{x-1-2x-1}} = \sqrt{3e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{e^{-x-2}} = \sqrt{3} \times (e^{-x-2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \times e^{\frac{-x-2}{2}}$

2 حلول المعادلة : $f' = kf$

مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : $f' = kf$ و $f(0) = 1$ هي الدالة $x \longmapsto e^{kx}$

برهان

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ كما أن $f(0) = e^0 = 1$ وبالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$
الوحدانية : نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$، نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$، الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - g(x)kf(x)}{[f(x)]^2} = 0$ إذن h ثابتة على $\mathbb{R}$ مع $h(0) = \frac{g(0)}{e^0} = 1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = 1$ وعليه $f(x) = g(x)$ إذن الدالة f موجودة ووحيدة.

1 دوال تحول المجمـــوع إلى جداء

مبرهنة

الدوال غير المعدومة f و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث : من أجل كل عددين حقيقين x و y ، $f(x+y)=f(x)f(y)$ هي الدوال $x \longmapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي

3 إتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$

برهان

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x=e^{2\cdot\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x\neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$.

خاصية

الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

برهان

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $exp'(x)=e^x>0$ ومنه الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

نتائج

من أجل كل عددين حقيقين a و b لدينا : $e^a<e^b$ معناه أن $a<b$ و $e^a=e^b$ تعني أن $a=b$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$

1 النهايـــات

خواص

n عدد طبيعي

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ 5 $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ 6 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

برهان

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-1$.
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.
إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x \geq x$ أي $e^x \geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

2 من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

3 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f''(x)\geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)\geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $f(x)\geq 0$، $e^x-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

4 لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و منه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

5 نضع $X=-x$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$ و منه: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty} -Xe^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{e^X}=0$.

6 من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{0+x}-e^0}{x}=exp'(0)=1$ إذن: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

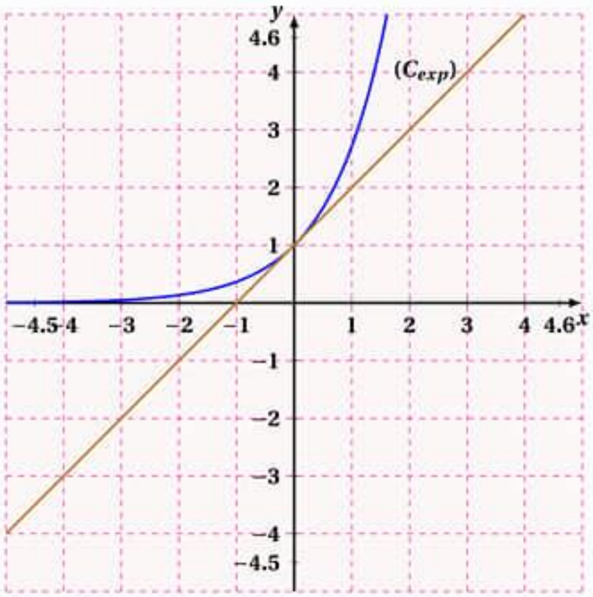
2 جدول التغيرات

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$

3 التمثيل البياني

التمثيل البياني



✍ المنحنى (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما x يؤول إلى $-\infty$

✍ لدينا $exp'(0) = exp(0) = 1$ إذن المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معادلته : $y = x + 1$

✍ من تعريف العدد المشتق لدينا $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{0+x} - e^0}{x} = exp'(0) = 1$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$

4 حل معادلات ومتراجحات

طريقة

✍ المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$

✍ المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تعني $u(x) < v(x)$

مثال تطبيقي

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1. $e^{2x} + 3 = 0$
2. $e^{-2x+1} - 1 = 0$

3 $e^{-2x-1}-e^{x}<0$
4 $e^{2x}>2-e^{x}$

الحل

1 تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$.إذن $S=\phi$.

2 تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=\frac{1}{2}$ إذن $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3 تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\frac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

4 تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^2+X-2\leq 0$ جذرا كثير الحدود $X^2+X-2=0$ هما -2 و 1 و منه $X^2+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$
$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.
$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة هي $S=]0;+\infty[$.

5 دراسة الدالة $exp\circ u$

1 النهايات

مبرهنة

a، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$
نعتبر الدوال التالية u ، exp و f حيث $f=exp\circ u$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b}e^{x}=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x+2}$.
لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

مثال تطبيقي

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-3x^3+2}$.
أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

الحل

- لدينا: $\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty}e^{-3x^3+2}=+\infty$ و بالتالي $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+2)=-\infty$ و بما أن $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}e^{-3x^3+2}=0$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2 اتجاه التغير

خاصية

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $exp\circ u$ نفس اتجاه التغير على المجال I

برهان

نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-3}$.
نلاحظ أن $f=exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2-3$.
بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.
وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3 المشتقة

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة $exp\circ u$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I،
$\boxed{(exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}}$

برهان

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " exp " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:
من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$.
أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

أمثلة

مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}$ هي $f'(x)=2.e^{2x}$.

مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{-5x+3}$ هي $g'(x)=-5.e^{-5x+3}$.

مشتقة الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $h'(x)=(2x+1)\,e^{x^2+x+1}$.

مشتقة الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $k(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $k'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

02 تمارين تدريبية محلولة

التمرين 01 : Meziane Maths

ضع العلامة ✔ أمام كل جملة صحيحة و العلامة ✖ أمام كل جملة خاطئة.

1. $e^{-3} < 0$
2. $e^{-5} = -e^{5}$
3. التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{x}$ يقطع حامل محور الفواصل .
4. $\sqrt{e^{2x}} = e^{x}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$
6. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي : $x \mapsto e^{3x}$.
7. $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$
8. إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^{x} \geq e^{2}$
9. إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^{x} \leq 0$
10. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x} = 1$
11. إشارة : $(x-1)e^{x}$ هي نفس إشارة $x-1$
12. من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$
14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ex}{x^{3}} = +\infty$
15. $e^{x} - e = e^{x-1}$
16. $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = (e^{x} - 1)^{2}$
17. الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
18. ليس للمتراجحة $e^{x^{2}-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$
19. الدالة : $x \mapsto e^{x^{2}-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$
20. $e^{-\frac{1}{2}} < 1$

الحل : Meziane Maths

1 ✖ .	5 ✔	9 ✖ .	13 ✖ .	17 ✔
2 ✖ .	6 ✖ .	10 ✔	14 ✔	18 ✖ .
3 ✖ .	7 ✔	11 ✔	15 ✖ .	19 ✖ .
4 ✔ .	8 ✔ .	12 ✖ .	16 ✔ .	20 ✔ .

التمرين 02 : Meziane Maths

بسط ما يلي :

1. $e^{3x}.e^{-2x}$
2. $e^{x}.e^{2}$
3. $\dfrac{1}{(e^{-x})^2}$
4. $\dfrac{e^{4x+1}}{e^{2x}.e^{-1}}$
5. $\dfrac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2}$
6. $e^{x}(e^{-x}+e^{2x})$

الحل : Meziane Maths

التبسيط :

1. $e^{3x}.e^{-2x}=e^{3x-2x}=e^{x}$
2. $e^{x}.e^{2}=e^{x+2}$
3. $\dfrac{1}{(e^{-x})^2}=\dfrac{1}{e^{-2x}}=e^{2x}$
4. $\dfrac{e^{4x+2}}{e^{2x}.e^{-1}}=e^{4x+1}.e^{-2x}.e^{1}=e^{4x-2x+1}=e^{2x+2}$
5. $\dfrac{e^{-4x+5}}{(e^{x-2})^2}=\dfrac{e^{-4x+5}}{e^{2x-4}}=e^{-4x+5}.e^{-2x+4}=e^{-6x+9}$
6. $e^{x}(e^{-x}+e^{2x})=e^{x}.e^{-x}+e^{x}.e^{2x}=e^{x-x}+e^{x+2x}=1+e^{3x}$

التمرين 03 : Meziane Maths

* بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

الحل : Meziane Maths

* نبين أن : $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}-\frac{1}{e^{x}}}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\times\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

التمرين 04 : Meziane Maths

بين أن الدوال f المعرفة كما يلي هي دوال معرفة على $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x+4}}$
4. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$

الحل : Meziane Maths

1. لدينا : $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x+e^{-x}\ge 0\}$ و هي محققة دوما لأن 0 $e^x>0$ و $e^{x}->0$ ، $D_f=\mathbb{R}$.
2. لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^{2x}+1\neq 0\}$ $e^{2x}+1=0$ تكافئ $e^{2x}=-1$ و هذا مستحيل إذن : $D_f=\mathbb{R}$.
3. لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x+4}}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x+4>0\}$ $e^x+4>0$ محققة دوما لأن $e^x>0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.
4. لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$ ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}: e^x+3\neq 0\}$ $e^x+3=0$ تكافئ : $e^x=-3$ وهذا مستحيل ومنه : $D_f=\mathbb{R}$.

التمرين 05 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$.

إذا علمنا أن : $0\le x\le 1$ عين حصرا للعبارة $f(x)$.

الحل : Meziane Maths

تعيين حصرا للعبارة : $f(x)$

لدينا : $0\le x\le 1$ ومنه : $e^0\le e^x\le e^1$ إذن : $2\le e^x+1\le 1+e$

و بالتالي : $\dfrac{1}{1+e}\le\dfrac{1}{e^x+1}\le\dfrac{1}{2}$

و منه : $0\times\dfrac{1}{1+e}\le x\times\dfrac{1}{e^x+1}\le 1(e+1)$ إذن : $0\le f(x)\le 1+e$.

التمرين 06 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. بين أن الدالة f فردية.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$.

الحل : Meziane Maths

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2 $$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{(e^x+1)^2+(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}=\frac{2\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x+1)^2}{(e^{2x}+1)}$$

و منه $\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\dfrac{(e^x-1)(e^x+1)}{(e^{2x}+1)}=\dfrac{(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)}=f(2x)$.

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

التمرين 07 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

1 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.

2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$.

الحل : Meziane Maths

ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

1 $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x(3e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2(e^x+1)}{e^x+1}$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$.
المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة للنقطة $A(0,1)$.

2 $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

التمرين 08 : Meziane Maths

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1 $e^{2x-1}=1$

2 $e^{x^2-1}=e$

3 $(x^2-4x+3)e^x=0$

4 $e^{2x}-2e^x+1=0$

5 $(x^2-4)e^x=(9x+10)e^x$

6 $e^x-e^{-x}=0$

7 $e^{3x}-\dfrac{1}{e^x}=0$

الحل

Meziane Maths

حل المعادلات :

1. لدينا : $e^{2x-1}=1$ وهي تكافئ : $e^{2x-1}=e^{0}$ وعليه : $2x-1=0$ ومنه : $x=\frac{1}{2}$ وعليه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. لدينا : $e^{x^2-1}=e$ و هي تكافئ : $x^2-1=1$ ومنه : $x^2=2$ إذن : $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$ و بالتالي : $S=\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

3. لدينا : $(x^2-4x+3)x=0$ و هي تكافئ : $x^2-4x+3=0$ ، $\Delta'=4$ للمعادلة حلين : $x_1=1, x_2=3$ إذن : $S=\{1;3\}$

4. لدينا : $e^{2x}-2e^{x}+1=0$ بوضع $e^{x}=y$ نجد : $\begin{cases} y^2-2y+1=0 \\ y=e^{x}\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}(y-1)^2=0 \\ y=e^{x}\end{cases}$ و منه : $\begin{cases} y=1 \\ e^{x}=1\end{cases}$ أي : $\{ y=1e^{x}=e^{0}$ إذن : $x=0$ أي : $S=\{0\}$

5. لدينا : $(x^2-4)e^{x}=(9x-18)e^{x}$ و هي تكافئ : $x^2-4=9x-18$ و منه : $x^2-9x+14=0$ ، $\Delta=25$ و منه للمعادلة حلين $x_1=2$ و $x_2=7$ إذن : $S=\{2;7\}$

6. لدينا : $e^{x}-e^{-x}=0$ وهي تكافئ : $e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=0$ وعليه : $\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}=0$ إذن : $e^{2x}-1=0$ وعليه : $e^{2x}=1$ أي : $e^{2x}=e^{0}$ وبالتالي : $2x=0$ ومنه : $x=0$ إذن : $S=\{0\}$

7. لدينا : $e^{3x}-\frac{1}{e^{x}}=0$ و هي تكافئ : $\frac{e^{4x}-1}{e^{x}}=0$ ومنه : $e^{4x}-1=0$ إذن : $e^{4x}=1$ وعليه : $4x=0$ و منه : $x=0$ إذن : $S=\{0\}$

التمرين 09

Meziane Maths

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1. $xe^{2x}-x^2e^{2x}\leq 0$
2. $e^{2x-1}\leq 1$
3. $e^{x^2-4}\leq e^{7x-16}$
4. $e^{x^2-2}\leq \frac{1}{e^{x}}$
5. $e^{2x}-2e^{x}+1\leq 0$
6. $x^2e^{4x}+4e^{x}>0$

الحل

Meziane Maths

حل المتراجحات :

1. لدينا : $xe^{2x}-x^2e^{2x}\leq 0$ وهي تكافئ : $e^{2x}(x-x^2)\leq 0$ وعليه : $x-x^2\leq 0$ لأن : $e^{2x}>0$ إذن : $x(-x+1)\leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وعليه : $x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$ إذن : $S=\left]-\infty;0\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

2 لدينا : $e^{2x-1}\leq 1$ و هي تكافئ : $e^{2x-1}\leq e^{0}$ و منه : $2x-1\leq 0$ إذن : $x\leq \frac{1}{2}$ وعليه : $S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

3 لدينا : $e^{x^2-4}\leq e^{7x-16}$ وهي تكافئ : $x^2-4\leq 7x-16$ وعليه : $x^2-7x+12\leq 0$

ندرس إشارة : $x^2-7x+12$ ، $\Delta=1$ يوجد جذران : $x_1=3$ ، $x_2=4$

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2-7x+12$		+	0	−	0	+	

إذن : $S=[3;4]$

4 لدينا : $e^{x^2-2}\leq \frac{1}{e^x}$ وهي تكافئ : $e^{x^2-2}.e^{x}\leq 1$ وعليه : $e^{x^2+x-2}\leq 1$ إذن : $e^{x^2+x-2}\leq e^{1}$

وبالتالي : $x^2+x-2\leq 1$ إذن : $x^2+x-3\leq 0$

ندرس إشارة : x^2+x-3 ، $\Delta=13$ يوجد جذران : $x_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ ، $x_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-3		+	0	−	0	+	

إذن : $S=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

5 لدينا : $e^{2x}-2e^{x}+1\leq 0$

بوضع : $e^x=y$ نجد : $\begin{cases} y^2-2y+1\leq 0 \\ e^x=y\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} (y-1)^2\leq 0 \\ e^x=y\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases} y-1=0 \\ e^x=y\end{cases}$

إذن : $e^x=1$ وعليه : $x=0$ إذن : $S=\{0\}$

6 لدينا : $x^2e^{4x}+4e^{x}>0$ وهي تكافئ : $e^{x}(x^2e^{3x}+4)>0$ وهي محققة دوما لأن : $e^x>0$ و $e^{3x}>0$ و $x^2\geq 0$

وعليه : $S=\mathbb{R}$.

التمرين 10 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{\frac{1}{3}x+1}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني.

1 أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2 عين نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{x}{3}$.

الحل : Meziane Maths

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+1}$.
بما أن $e^{\frac{1}{3}x+1}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2 يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x_0 موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x_0)=\frac{1}{3}$
يكون لدينا إذن $\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x_0+1}=\frac{1}{3}$ أي $e^{\frac{1}{3}x_0+1}=1$ و هذا يعني $\frac{1}{3}x_0+1=0$ أي $x_0=-3$.
و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C_f) فاصلتها $x_0=-3$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

التمرين 11 : Meziane Maths

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة f' في كل حالة مما يلي :

1 $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$

2 $f(x)=xe^{x-1}$

3 $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-1}$

4 $f(x)=\frac{e^x}{x^2-1}$

5 $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$

6 $f(x)=\sqrt{e^x-1}$

7 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

8 $f(x)=\sin x e^{\cos x}$

9 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

10 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-2e^x+1}$

الحل : Meziane Maths

1 لدينا : $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$, حيث : $f'(x)=2e^{2x}+e^{-x}$.

2 لدينا : $f(x)=xe^{x-1}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$, حيث : $f'(x)=1.e^{x-1}+xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x)=(1+x)e^{x-1}$

3 لدينا : $f(x)=\frac{e^x+x}{e^x-1}$
الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$ و تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$, حيث : $f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x-1)-e^x(e^x+x)}{(e^x-1)^2}$
ومنه : $f'(x)=\frac{e^{2x}-1-e^{2x}-xe^x}{(e^x-1)^2}$ وعليه : $f'(x)=\frac{-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$

4 لدينا : $f(x)=\frac{e^x}{x^2-1}$
الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث : $f'(x)=\frac{e^x(x^2-1)-2x.e^x}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f'(x)=\frac{(x^2-2x-1)e^x}{(x^2-1)^2}$

5 لدينا : $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$ حيث : $D_f=\mathbb{R}$
الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=(2x-4)e^{3x}+(x^2-4x+5)e^x$

وعليه : $f'(x) = (2x-4+x^2-4x+5)e^x$ ومنه : $f'(x) = (x^2-2x+1)e^x$

6 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x-1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$

ومنه : $e^x - 1 \geq 0$ وعليه : $e^x \geq 1$ وبالتالي : $x \geq 0$ إذن : $D_f = [0;+\infty[$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

7 لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

8 لدينا : $f(x) = \sin x . e^{\cos x}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \cos x . e^{\cos x} + \sin x(-\sin x)e^{\cos x}$

ومنه : $f'(x) = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$ وعليه : $f'(x) = e^{\cos x}[\cos x - (1-\cos^2 x)]$

وبالتالي : $f'(x) = (\cos^2 x + \cos x - 1)e^{\cos x}$

9 لدينا : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

10 لدينا : $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}$

حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0\}$ نحل المتراجحة $e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0$ بوضع : $y = e^x$ نجد : $y^2 - 2y + 1 \geq 0$

و عليه : $(y-1)^2 \geq 0$

أي أن : $(e^x - 1)^2 \geq 0$ و هي محققة دوما . إذن : $D_f = \mathbb{R}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث : $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2e^x}{2\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}} = \dfrac{e^{2x} - e^x}{\sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}}$.

التمرين 12 : Meziane Maths

أحسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^x$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x}{x^2+x+1}$

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3+2x-1)e^x$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} [(2x-1)e^x - 3e^{2x}]$.

الحل : Meziane Maths

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و منه $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (2xe^x - e^x) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+x+1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+x+1} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+2x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3e^x+2xe^x-e^x) = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(2x-1)e^x - 3e^{2x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - 3\right) = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

التمرين 13 : Meziane Maths

احسب نهايات الدالة f في كل حالة مما يلي عند أطراف مجموعة التعريف :

1. $f(x) = x + e^x$
2. $f(x) = e^{-x+4}$
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$
4. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
6. $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$
7. $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$
8. $f(x) = (x-1)e^x$

الحل : Meziane Maths

1. لدينا : $f(x) = x + e^x$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+e^x) = -\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+e^x) = +\infty$

2. لدينا : $f(x) = e^{-x+4}$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+4} = +\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+4} = 0$

3. لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ حيث : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$ وعليه : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$

4. لدينا : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ حيث : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$ وعليه : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} xe^{\frac{1}{x}} = 0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ (نضع : $\frac{1}{x} = t$) . إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$

5. لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ حيث : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

6 لدينا : $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$ حيث : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{e^x + 1} = 0$$

7 لدينا : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ حيث : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{1}{x} = +\infty$$

8 لدينا : $f(x) = (x-1)e^x$ حيث : $D_f =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \to -\infty} xe^x - e^x = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)e^x = +\infty$.

التمرين 14 — Meziane Maths :

نعتبر الدالة f و المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 .

2 عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x \neq 0$.

الحل — Meziane Maths :

1 قابلية الاشتقاق عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\frac{e^{2x} - e^x}{x}}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x^2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = -\infty$$

و منه f غير قابلة لاشتقاق عند 0 من اليسار .

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x^2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

و منه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين و بالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

2 تعيين الدالة المشتقة من أجل $x \neq 0$:

$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}-e^{x})x-1(e^{2x}-e^{x})}{x^2}=\frac{2xe^{2x}-xe^{x}-e^{2x}+e^{x}}{x^2}=\frac{(2x-1)e^{2x}-(x-1)e^{x}}{x^2}$$

التمرين 15 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=(4x+3)e^{x}$

عين عبارة كل من : $f',f'',f^{(3)},f^{(4)}$ ، ثم خمن عبارة $f^{(n)}(x)$.

الحل : Meziane Maths

لكل x من $\mathbb{R}$:

$f(x)=(4x+3)e^{x}$

$f'(x)=4.e^{x}+(4x+3)e^{x}=(4+4x+3)e^{x}=(4x+7)e^{x}$

$f''(x)=4.e^{x}+(4x+7)e^{x}=(4+4x+7)e^{x}=(4x+11)e^{x}$

$f^{(3)}(x)=4.e^{x}+(4x+11)e^{x}=(4+4x+11)e^{x}=(4x+15)e^{x}$

$f^{(4)}(x)=4.e^{x}+(4x+15)e^{x}=(4+4x+15)e^{x}=(4x+19)e^{x}$

استنتاج عبارة $f^{(n)}$: $f^{(n)}(x)=(4x+3+4n)e^{x}$

التمرين 16 : Meziane Maths

أدرس التغيرات لكل من الدوال المعرفة كما يلي :

1. $f(x)=xe^{x}$
2. $f(x)=x-e^{x}$
3. $f(x)=\frac{e^{x}}{x}$
4. $f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

الحل : Meziane Maths

دراسة تغيرات f :

1. لدينا : $f(x)=xe^{x}$ حيث : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$

$f'(x)=e^{x}+xe^{x}=e^{x}(x+1)$

و عليه $f'(x)$ له نفس إشارة $x+1$ و لدينا :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ؛ و عليه جدول التغيرات كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 لدينا : $f(x) = x - e^x$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 - e^x$$

$f'(x)=0$ تكافئ : $1-e^x=0$ ومنه : $e^x=1$ وعليه : $x=0$

$f'(x)>0$ تكافئ : $1-e^x>0$ ومنه : $e^x<1$ إذن : $x<0$ و عليه f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

$f'(x)<0$ تكافئ $x>0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3 لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x}$ حيث : $D_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{e^x.x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة $x-1$ إذن : $f'(x)=0$ تكافئ : $x=1$

$f'(x)>0$ تكافئ $x>1$ إذن : f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

و كذلك f متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ وعلى $]0;1]$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4 لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^x-1\neq 0\}$

$e^x-1=0$ تكافئ $e^x=1$ و عليه : $x=0$.

إذن: $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x+1\longrightarrow 2\\ e^x-1\longrightarrow 0^-\end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$

لأن : $\begin{cases} e^x+1\longrightarrow 2\\ e^x-1\longrightarrow 0^+\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1$
- $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(e^x-1-e^x-1)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه : $f'(x)<0$

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و : $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

التمرين 17 : Meziane Maths

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=e^{x}+e^{-x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ؛ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)\geq 2$.

نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}-1}$

2) ادرس تغيرات الدالة g . أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g .

الحل : Meziane Maths

1) دراسة تغيرات f : $\bullet D_f=]-\infty;+\infty[$

$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\bullet f'(x)=e^{x}-e^{-x}$

$f'(x)=0$ تكافئ : $e^{x}-e^{-x}=0$ ومنه : $e^{x}=e^{-x}$

و عليه: $x=-x$ و منه: $2x=0$ أي: $x=0$.

$f'(x)>0$ تكافئ : $e^{x}-e^{-x}>0$ ومنه : $e^{x}>e^{-x}$

إذن : $x>-x$ ومنه : $2x>0$ وعليه : $x>0$

إذن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و بالتالي فهي متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

الاستنتاج :

من جدول التغيرات القيمة 2 هي قيمة حدية صغرى للدالة f على $\mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)\geq 2$

2) دراسة تغيرات الدالة g :

$\bullet D_g=\{x\in: e^{x}+e^{x}-1\neq 0\}$

نحل المعادلة: $e^{x}+e^{-x}-1=0$ أي: $e^{x}+e^{-x}=1$ أي: $f(x)=1$ و هذا مستحيل لأن : $f(x)\geq 2$ إذن ليس للمعادلة حلول و عليه : $D_f=]-\infty;+\infty[$.

$\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ $\qquad \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

$\bullet g'(x)=\dfrac{-e^{x}+e^{-x}}{(e^{x}+e^{-x}-1)^2}$

$g'(x)=0$ تكافئ : $-e^{x}+e^{-x}=0$ أي: $e^{-x}=e^{x}$ و عليه : $-x=x$ و منه : $2x=0$ أي : $x=0$

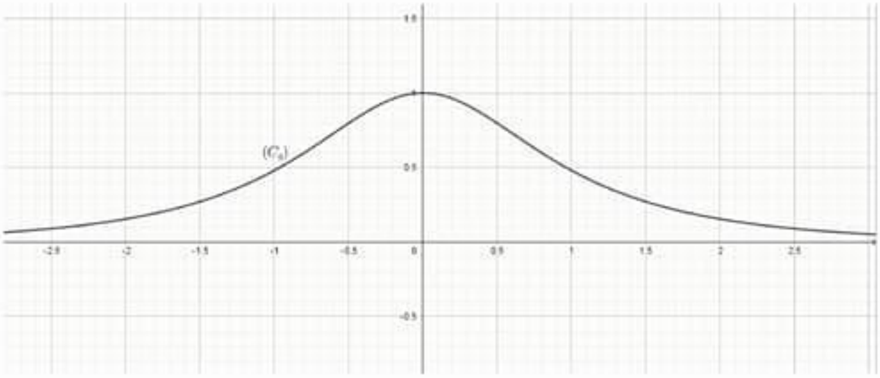
$g'(x)>0$ تكافئ : $-e^{x}+e^{-x}>0$ أي: $e^{-x}>e^{x}$ و عليه : $-x>x$ ومنه : $2x>0$ أي : $x>0$

إذن g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و عليه فهي متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

$g(0)=1$.

✍ إنشاء (C_g) :



التمرين 18   : Meziane Maths

I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=1-x-e^{-x}$.

1. ادرس تغيرات الدالة h .
2. استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}$

1. احسب $f'(x)$ ثم استنتج إشارتها و اتجاه تغير الدالة f .
2. احسب نهايات الدالة f عند مجموعة تعريفها . ثم استنتج جدول تغيراتها .
3. أنشئ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الحل   : Meziane Maths

1. دراسة تغيرات الدالة h : $D_h=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-x-e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left[\frac{-1}{x}+1-\frac{e^{-x}}{-x}\right]=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x - e^{-x} = -\infty$

$h'(x) = -1 + e^{-x}$

$h'(x) = 0$ تكافئ : $-1 + e^{-x} = 0$ ومنه : $e^{-x} = 1$

و عليه : $e^{-x} = e^{0}$ أي : $x = 0$

$h'(x) > 0$ تكافئ : $-1 + e^{-x} > 0$ وعليه : $e^{-x} > 1$

أي أن : $-x > 0$ و منه : $x < 0$

إذن h متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و عليه فهي متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$

$h(0) = 0$

2 استنتاج إشارة $h(x)$

لدينا : $h(x) = 0$ تكافئ : $x = 0$ و لدينا : $h(x) < 0$ من أجل : $x \in \mathbb{R}^*$.

1 حساب $f'(x)$: $D_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{1(e^x - 1) - e^x x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - e^{-x} - x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x - e^{-x})}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x \times h(x)}{(e^x - 1)^2}$$

و عليه $f'(x) = 0$ تكافئ $h(x) = 0$ ومنه : $x = 0$

$f'(x) < 0$ تكافئ $h(x) < 0$ و هي محققة لأن $h(x) < 0$ من أجل : $x \in \mathbb{R}^*$ إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2 حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{x}{e^x - 1} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$ جدول التغيرات :

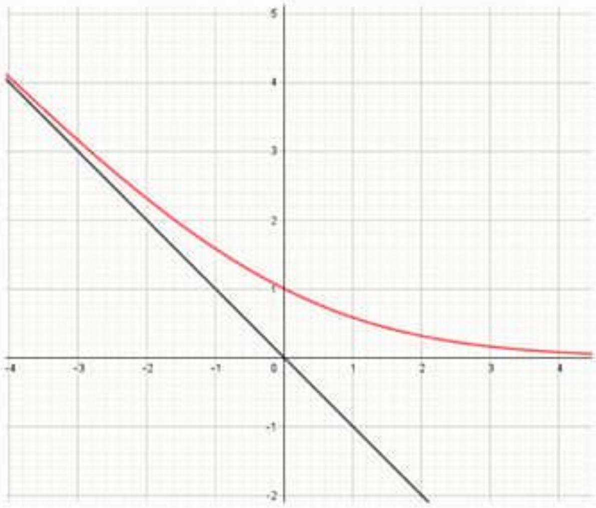
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1 | 1	$\searrow$	0

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{e^x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+xe^x-x}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}$$

إذن يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y=-x$ عند $-\infty$ و لدينا $y=0$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.

3 التمثيل البياني (C_f)



التمرين 19 : Meziane Maths

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f=\mathbb{R}^*$ حيث : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$

1 ادرس تغيرات الدالة f .

2 ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. بين أن (C_f) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

3 بين أن النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) ثم أنشئه .

(II) نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\dfrac{2e^x}{|e^x-1|}$

1 اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2 أنشئ (C_g) التمثيل البياني للدالة g باستخدام (C_f) .

3 ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي m بحيث : $(m-3)|e^x-1|=2e^x$.

الحل : Meziane Maths

1 دراسة تغيرات الدالة f : $D_f=\{x\in : e^x-1\neq 0\}$

$D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{e^x-1}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{2e^x}{e^x-1}=-\infty$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
e^x-1	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2e^x}{e^x-1}=+\infty$ لأن : $\begin{cases}2e^x\to 2\\ e^x-1\xrightarrow{<}0\end{cases}$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ لأن : $\begin{cases}2e^x\to 2\\ e^x-1\xrightarrow{>}0\end{cases}$

$f'(x)=\frac{2e^x(e^x-1)-e^x.2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^x(e^x-1-e^x)}{(e^x-1)^2}$ إذن: $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

و منه $f'(x)<0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين : $]-\infty;0[,]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

2 بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ فإن $y=0$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ فإن $y=2$ معادلة مستقيم مقارب

و بما أن $\left|\lim_{x\to 0} f(x)\right|=+\infty$ فإن $x=0$ معادلة مستقيم مقارب .

1 نبين أن $\omega(0;1)$ مركز تناظر :

من أجل $x\in D_f$:

لدينا : $2\alpha-x\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

أي : $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 1$ و عليه : $f(-x)+f(x)=2$

لدينا من أجل كل x من $D_f : D_f \ni -x$

إذن : $f(-x)+f(x)=\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}+\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}+\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}+\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{2}{1-e^x}+\frac{2e^x}{e^x-1}=\frac{-2}{e^x-1}+\frac{2e^x}{e^x-1}=$

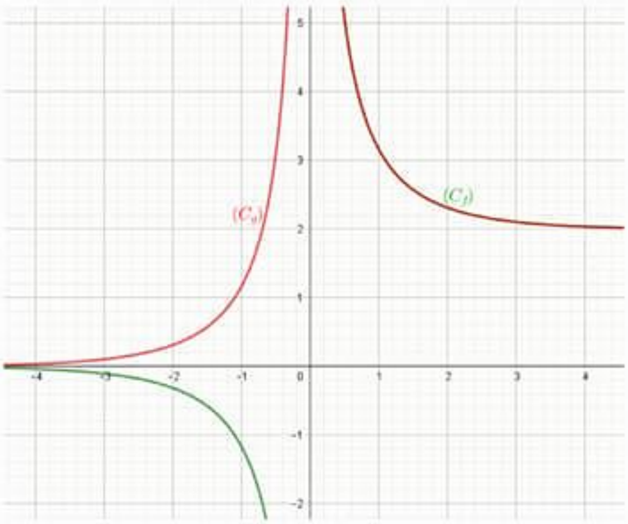
$\frac{-2+2e^x}{e^x-1}=\frac{2(e^x-1)}{e^x-1}=2$ و منه $\omega(0;1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .

2 كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{2e^x}{-(e^x-1)}, e^x-1<0, x<0 \\ g(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}, e^x-1>0, x>0 \end{cases}$$ إذن : $$\begin{cases} g(x)=-f(x), x\in]-\infty;0] \\ g(x)=f(x), x\in]0;+\infty[\end{cases}$$

في المجال $]0;+\infty[: (\delta)$ ينطبق على (C_f) و في المجال $]-\infty;0] : (\delta)$ نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

- إنشاء (C_g) و (C_f) :



3 - المناقشة البيانية : $(m-3)|e^x-1|=2e^x$

أي : $m-3=\dfrac{2e^x}{|e^x-1|}$ أي : $m-3=g(x)$ و منه بوضع $m-3=\alpha$ نجد : $g(x)=\alpha$

- لما $\alpha\le 2$ أي : $m-3\le 2$ أي : $m\le 5$, ومنه ليس للمعادلة حلول .

- لما $\alpha>2$ أي $m>5$: للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .

التمرين 20 : Meziane Maths

✍ a و b عددان حقيقيان و g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{x^2+ax+b}$.

عين قيمتي a و b الموافقتين لجدول تغيرات الدالة g التالي :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$e^{-\frac{5}{4}}$	↗ $+\infty$

الحل Meziane Maths :

من جدول التغيرات لدينا : $g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ و $g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{-\frac{5}{4}}$

مشتقة الدالة g : $g'(x)=(2x+a)e^{x^2+ax+b}$.

$g'\left(\frac{3}{2}\right)=0$ تكافئ $(3+a)e^{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right)}=0$ تكافئ $3+a=0$ لأن : $e^{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right)}\neq 0$

إذن : $a=-3$.

$g\left(\frac{3}{2}\right)=e^{-\frac{5}{4}}$ تكافئ $e^{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right)}=e^{-\frac{5}{4}}$ و منه : $\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}a+b\right)=-\frac{5}{4}$ و منه : $b=1$

و بالتالي : $a=-3$ و $b=1$.

التمرين 21 Meziane Maths :

(C_f) هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

للدالة f حيث : $f(x)=ae^{-2x}+be^{-x}+cx$ مع c,b,a أعداد حقيقية ثابتة.

عين الدالة f إذا علمت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معادلته $y=2x-\frac{1}{2}$ في النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

و يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=2x$.

الحل Meziane Maths :

النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى (C_f) معناه : $f(0)=-\frac{1}{2}$ أي : $a+b=-\frac{1}{2}$

المماس (T) عند النقطة $H\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ معادلته : $y=2x-\frac{1}{2}$ معناه : $f'(0)=2$.

$f'(x)=-2ae^{-2x}-be^{-x}+c$ و منه : $f'(0)=2$ تكافئ : $-2a-b+c=2$ أي : $-2a-b=2-c$

$y=2x$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-cx]=\lim_{x\to+\infty}[ae^{-2x}+be^{-x}]=0$$

معناه : $y=cx$ معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ و بالتالي : $c=2$.

لتعيين a و b نحل الجملة : $\begin{cases}a+b=-\frac{1}{2}\\-2a-b=2-c\end{cases}$ التي تكافئ : $\begin{cases}a+b=-\frac{1}{2}\\-2a-b=0\end{cases}$

و منه : $a=\frac{1}{2}$ و $b=-1$ و بالتالي : $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}+2x$.

التمرين 22 Meziane Maths :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان. (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و كتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يشمل المنحني (C_f) النقطة $\Omega(1,e)$ و يقبل مماسا معامل توجيهه $3e$.

2) أحسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4;5]$.

3) أكتب معادلة المماس للمنحني عند النقطة التي فاصلتها 0.

4) بين أن المنحني يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

5) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[-4;5]$ كما يلي : $g(x)=[f(x)]^2$.
استنتج جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$.

الحل : Meziane Maths

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b :
المنحني (C_f) يشمل النقطة $\Omega(1,e)$ معناه : $f(1)=e$
معامل توجيه المماس عند $\Omega(1,e)$ يساوي $3e$ معناه : $f'(1)=3e$
نحسب $f'(x)$ فنجد : $f'(x)=(ax+a+b)e^x$ و بالتالي نحل الجملة : $\begin{cases} f(1)=e \\ f'(1)=3e \end{cases}$
و منه : $\begin{cases} (a+b)e=e \\ (2a+b)e=3e \end{cases}$ و بالتالي نجد : $a=2$ و $b=-1$ أي : $f(x)=(2x-1)e^x$.
2) حساب $f'(x)$: $f'(x)=2e^x+e^x(2x-1)=e^x(2+2x-1)=e^x(2x+1)$.
إشارة المشتقة من إشارة $(2x+1)$ لأن : $e^x>0$
جدول تغيرات الدالة f :

x	-4		$-\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-9-4e^{-4}$	↘	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	↗	$9e^5$

3) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 .
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه معادلة المماس المطلوبة هي : $y=x-1$
4) نبين أن المنحنى يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.
حساب الدالة المشتقة الثانية فنجد $f''(x)=(2x+3)e^x$ تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ و جدول إشارتها هو :

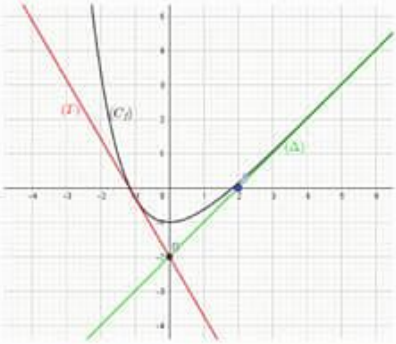
x	-4		$-\frac{3}{2}$		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند $-\frac{3}{2}$ و غيرت من إشارتها فإن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};-4e^{-\frac{3}{2}}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).
5) جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-4;5]$ حيث : $g(x)=[f(x)]^2$.
$g'(x)=2f'(x).f(x)$ حيث : $f(x)=(2x-1)e^x$ و $f'(x)=(2x+1)e^x$.

x	4		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$81e^{-8}$	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$81e^{30}$

التمرين 23

Meziane Maths :



(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ax+b+e^{-x}$ حيث : a و b عددان حقيقيان .

(Δ) المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$.

(T) هو المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها -1 و معامل توجيهه هو $1-e$.

1) أكتب معادلة للمستقيم (Δ).

2) إستنتج قيمة كلا من a و b.

3) أكتب معادلة للمماس (T).

الحل

Meziane Maths :

1) بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

فإن معادلة (Δ) هي : $y=ax+b$ و المار من النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,-2)$

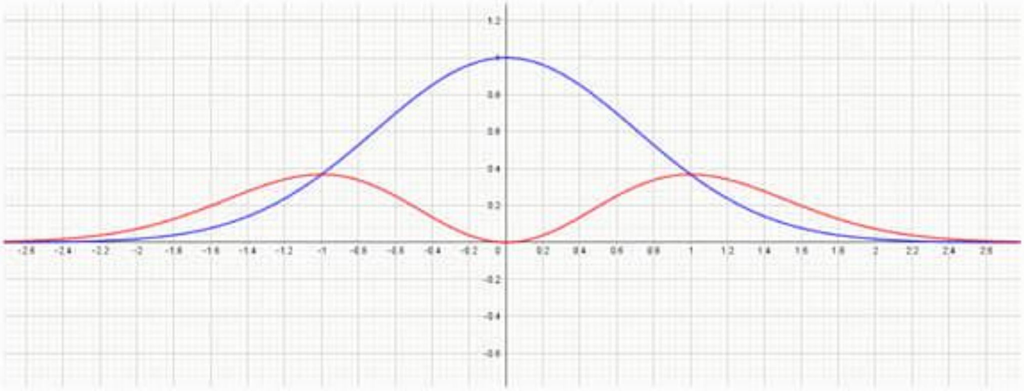
فيكون لدينا : $\begin{cases}0=2(a)+b\\-2=0(a)+b\end{cases}$ فنحصل على : $a=1$ و $b=-2$.

إذن : $f(x)=x-2+e^{-x}$ و معادلة (Δ) هي : $y=x-2$.

2) معادلة (T) : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي : $y=(1-e)(x+1)-3+e$ و بالتالي : معادلة (T) هي : $y=(1-e)x-2$.

التمرين 24 : Meziane Maths

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=e^{-x^2}$ و $g(x)=x^2e^{-x^2}$.
و ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لهما على الترتيب.



1) ميز (C_f) و (C_g) مع التعليل .
2) أدرس شفعية الدالتين f و g .
3) عين النهاية عند $+\infty$ و أدرس إتجاه تغيرات الدالتين f و g.
4) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g).

الحل : Meziane Maths

1) (C_f) هو المنحني الذي يشمل النقطة $A(0,1)$ لأن : $f(0)=1$
و (C_g) هو المنحني الذي يشمل المبدأ $O(0,0)$ لأن : $g(0)=0$.
2) شفعية الدالتين f و g :
شفعية f : من أجل $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ و $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$ و منه f دالة زوجية.
شفعية g : من أجل $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ و $g(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=g(x)$ و منه f دالة زوجية.
3)أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ حيث : f و g زوجيتان.
ب) دراسة تغيرات الدالة f :
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

ج) دراسة تغيرات الدالة g : $g'(x)=2xe^{-x^2}+(-2x)e^{-x^2}(x^2)=2x(1-x^2)e^{-x^2}$
جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4) الوضعية النسبية : ندرس إشارة الفرق $g(x)-f(x)$.

$g(x)-f(x)=x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}=(x^2-1)e^{-x^2}$ إشارة هذا الفرق من إشارة x^2-1 لأن : $e^{-x^2}>0$ و منه :

على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ يكون $x^2-1>0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع فوق المنحنى (C_f).

على المجال $]-1,1[$ يكون $x^2-1<0$ و بالتالي المنحنى (C_g) يقع تحت المنحنى (C_f).

المنحنيان يتقاطعان في النقطتين $B(-1;e^{-1})$ و $C(1;e^{-1})$.

التمرين 25 : Meziane Maths

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\frac{3e^x-1}{e^x+1}$ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f ,ثم شكل جدول تغيراتها .

3) (C_f) .حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى

4) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=2$ و فسر النتيجة بيانيا.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ,يطلب كتابة معادلته.

6) أحسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ,ثم أرسم كلا من (T) و (C_f) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(3-m)e^x=m+1$.

الحل : Meziane Maths

1) حساب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x-1}{e^x+1} = -1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-1 = -1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(3+e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(3+e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{3}{1} = 3$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$ لأن : $4e^x>0$ و $(e^x+1)^2$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ 3

3) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ إذن : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ إذن : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$.

4) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)+f(-x)=2$

$f(x)+f(-x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1} + \frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{3e^x-1}{e^x+1} + \frac{e^{-x}(3-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{3e^x-1}{e^x+1} + \frac{3-e^x}{1+e^x} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2$.

تفسير النتيجة هندسيا :

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا : $f(x)+f(-x)=2$ معناه : $f(2\times0-x)+f(x)=2\times1$ و عليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 ،يطلب كتابة معادلة له :

(T) معامل توجيهه 1 معناه : $f'(x)=1$

لنحل المعادلة $f'(x)=1$ معناه : $\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=1$ و يكافئ : $4e^x = e^{2x}+2e^x+1$ و يكافئ : $e^{2x}-2e^x+1=0$ و يكافئ :

$(e^x-1)^2=0$ أي : $x=0$ و بالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

كتابة معادلة للماس (T) :

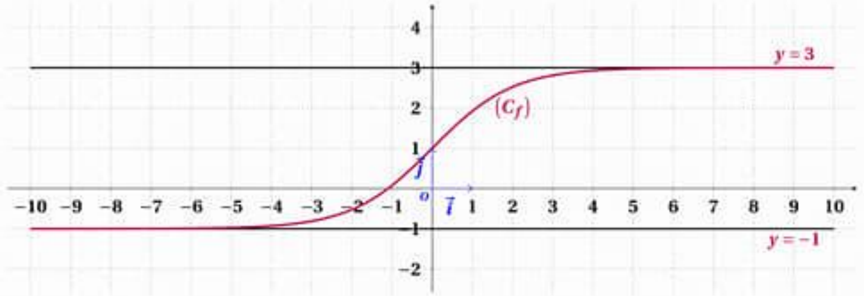
$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي : $y=x+1$.

6) حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل :

نحل المعادلة $f(x)=0$ تكافئ : $\frac{3e^x-1}{e^x+1}=0$ و تكافئ : $3e^x-1=0$ و تكافئ : $e^x=\frac{1}{3}$ أي : $x=-ln3$ إذن :

$(C_f)\cup(xx')=\{A(-ln3;0)\}$.

رسم كلا من (T) و (C_f) :



7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(3-m)e^x = m+1$

$(3-m)e^x = m+1$ تكافئ : $3e^x - me^x = m+1$ تكافئ : $3e^x - 1 = m(e^x+1)$ أي : $f(x) = m$.مناقشة أفقية .

إذا كان $m \leq -1$ أو $m \geq 3$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

إذا كان : $-1 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

إذا كان : $1 < m < 3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا معدوما.

التمرين 26   : Meziane Maths

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$.

2) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

3) ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

5) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

6) أرسم (T) و (C_f) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2 - 3 + me^x = 0$.

الحل   : Meziane Maths

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

$f(0) = -3$ و هذا يعني $c = -3$

و لدينا $f'(x) = (2ax+b)\,e^{-x} - \left(ax^2+bx+c\right)e^{-x} = \left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

$f'(0)=3$ يعني أن $b-c=3$ و منه $b=0$.

$f\left(\sqrt{3}\right)=0$ يعني ان $f\left(\sqrt{3}\right)=(3a-3)\,e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$.

2) نضع $a=1\,,\ b=0\,,\ c=-3$ تصبح $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\right)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$

نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right] = 4\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)e^{-x}=+\infty$.

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتقة : $f'(x)=(2x)e^{-x}-e^{-x}\left(x^2-3\right)=\left(-x^2+2x+3\right)e^{-x}$

إشارة المشتقة : إشارتها من إشارة $\left(-x^2+2x+3\right)$ تنعدم عند العددين 3 و 1- و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ و متزايدة على المجال $[-1;3]$.

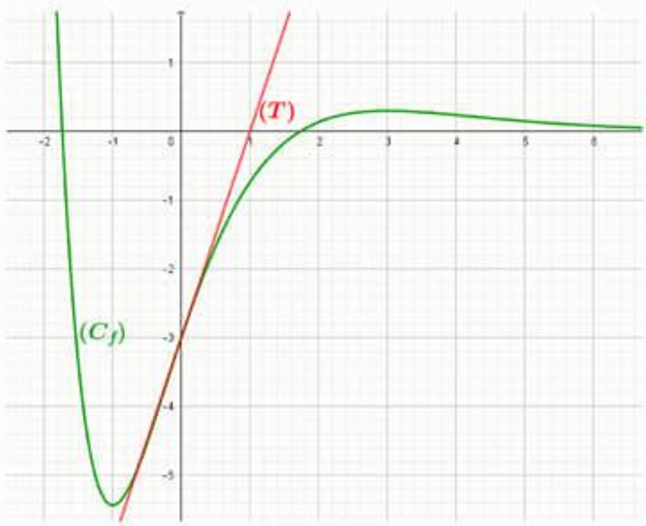
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

4) كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$.

5) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$.اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B\left(\sqrt{3};0\right)$ و $C\left(-\sqrt{3};0\right)$.

6) رسم (T) و (C_f)



7) m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة : $x^2-3+me^x=0$ المعادلة تكافئ $me^x=-(x^2-3)$ أي ان $-m=(x^2-3)e^{-x}$ يكافئ $-m=f(x)$
حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=-m$.

المناقشة :

- لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .
- لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.
- لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين.
- لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .
- لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .
- لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .
- لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة.
- لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

التمرين 27 : Meziane Maths

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x-1$.

1) عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2) أدرس تغيرات الدالة g,ثم شكل جدول تغيراتها .
3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث : $-1.2<\alpha<-1.1$ و $1.8<\beta<1.9$.
4) إستنتج أشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$
3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ,ثم شكل جدول تغيراتها .
4) بين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$,ثم عين حصر للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.(تدور النتائج إلى 10^{-2}).
5) أرسم (C_f).

لدينا الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^{x}-1$.

1) تعيين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^{x}-1=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-1=-1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}-1=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}=e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$

2) دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=-e^{x}+e^{x}(2-x)=-e^{x}+2e^{x}-xe^{x}=e^{x}(1-x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x , $e^{x}>0$ و منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-x)$

من أجل $x\in]1;+\infty[$, $1-x<0$ أي : $g'(x)<0$

من أجل $x\in]-\infty;1[$, $1-x>0$ أي : $g'(x)>0$

و عليه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	↗	$e-1$	↘	$-\infty$

3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين α و β بحيث : $-1.2<\alpha<-1.1$ و $1.8<\beta<1.9$

لدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و خاصة على المجال $[-1.2;-1.1]$ و $g(-1.2)\approx-0.03$ و $g(-1.1)\approx0.03$ إذن : $g(-1.2)\times g(-1.1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1.2;-1.1[$ بحيث : $g(\alpha)=0$.

و لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و خاصة على المجال $[1.8;1.9]$ و $g(1.8)\approx0.2$ و $g(1.9)\approx-0.3$ إذن : $g(1.8)\times g(1.9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β من المجال $]1.8;1.9[$ بحيث : $g(\beta)=0$.

4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	z-		

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}-x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\frac{x}{e^{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^{x}}\right)}=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

ليكن $x\in\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x(2-x)-1}{(e^x-x)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-x)^2}$.

3) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

لدينا $(e^x-x)^2>0$ و منه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ و عليه $f'(\alpha)=0$ و $f'(\beta)=0$

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[$ فإن : $f'(x)<0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[\beta;+\infty[$

من أجل $x\in]\alpha;\beta[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

4) تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-1}{e^\alpha-\alpha}$ و لدينا : $g(\alpha)=0$ تكافئ $(2-\alpha)e^\alpha-1=0$ و تكافئ $e^\alpha=\dfrac{1}{2-\alpha}$ و منه : $f(\alpha)=\dfrac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=$

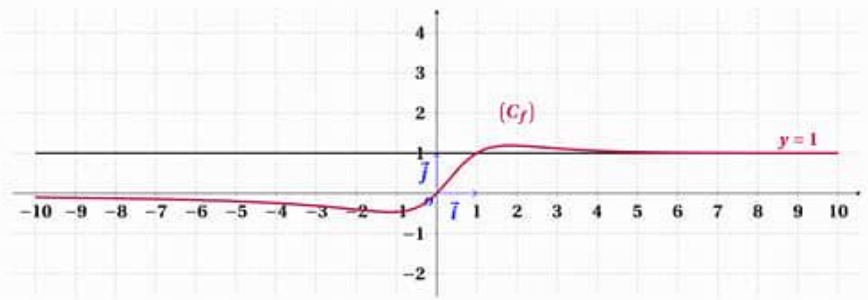
$\dfrac{\frac{-1+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}=\dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

تعيين حصر للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$:

$-1.2<\alpha<-1.1$ معناه $-2.2<\alpha-1<-2.1$ تكافئ $\dfrac{1}{-2.2}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{-2.1}$ أي : $-0.48<f(\alpha)<-0.45$

و لدينا : $1.8<\beta<1.9$ معناه $0.8<\beta-1<0.9$ تكافئ $\dfrac{1}{0.8}<\dfrac{1}{\beta-1}<\dfrac{1}{0.9}$ أي : $1.11<f(\beta)<1.25$

5) إنشاء المنحنى (C_f) :



التمرين 28 : Meziane Maths

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.70<\alpha<0.71$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .

1) أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(2-x)]$ ، و فسر النتيجة بيانيا .

ج) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}\times g(x)$, ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن $f(\alpha)=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$, ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) احسب أحداثيتي A نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب .

5) اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة A.

6) احسب $f(2)$ و $f(2\ln\frac{1}{2})$ ، ثم ارسم كل من المستقيم (Δ) , المماس T والمنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $2e^{\frac{1}{2}x}=\frac{m-2}{x-2}$.

الحل : Meziane Maths

الجزء الأول

❶ دراسة تغيرات الدالة g : g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=x-e^{-\frac{1}{2}x}$

أولا : حساب النهايات $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=-\infty \text{ و } \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=+\infty}$

ثانيا :اتجاه التغير الدالة g معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\boxed{g'(x)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}}$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)>0$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

❷ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال : $]0,7;0,71[$ و $g(0,7)\times g(0,71)\leq 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,7<\alpha<0,71$

جدول الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجـزء الثاني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x$

❶ حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-2)\left(2e^{\frac{1}{2}x}-1\right)=+\infty$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}+2-x\right)=+\infty$$

حساب : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x-2+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{\frac{1}{2}x}-4e^{\frac{1}{2}x}\right)=0$$

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=2-x$ بجوار $(-\infty)$

دراسة الوضع النسبي :

يؤول إلى دراسة اشارة الفرق $f(x)-(2-x)$

لدينا : $f(x)-(2-x)=(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}$

ومن أجل كل عدد حقيقي لدينا : $e^{\frac{1}{2}x}>0$

ومنه دراسة إشارة الفرق تؤول إلى دراسة اشارة العبارة $2x-4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(2;0)$	(C_f) فوق (Δ)

❷ دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}-1=(2+x-2)e^{\frac{1}{2}x}-1=xe^{\frac{1}{2}x}-1=e^{\frac{1}{2}x}\left(x-e^{-\frac{1}{2}x}\right)=e^{\frac{1}{2}x}g(x)$$

بما أن $e^{\frac{1}{2}x}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه :

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ إثبات ان $f(\alpha)=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$: لدينا مماسبق $g(\alpha)=0$ تكافئ $\alpha-e^{-\frac{1}{2}\alpha}=0$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}\alpha}=\alpha$ إذن $e^{\frac{1}{2}\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

بالتعويض نجد : $\boxed{f(\alpha)=(2\alpha-4)\frac{1}{\alpha}+2-\alpha=\frac{2\alpha}{\alpha}-\frac{4}{\alpha}+2-\alpha=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}}$

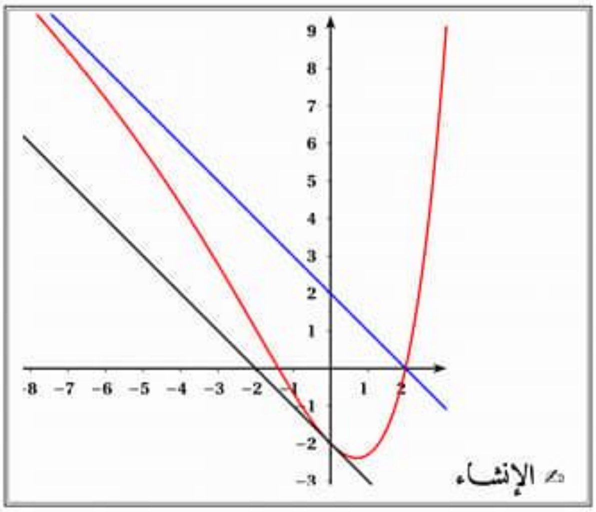
✍ حصر $f(\alpha)$:

لدينا $0,7<\alpha<0,71$ ومنه : $3,29<4-\alpha<3,3$ و $-5,71<-\frac{4}{\alpha}<-5,61$ إذن : $\boxed{-2,42<f(\alpha)<-2,31}$

✍ احداثيي النقطة A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب : لدينا : $f(0)=-2$ ومنه $\boxed{(C_f)\cap(y'y)=\{A(0;-2)\}}$

✍ معادلة المماس عند A: $\boxed{(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x-2}$

✍ الإنشاء



✍ المناقشة البيانية:

لدينا: $\frac{m-2}{x-2}=2e^{\frac{1}{2}x}$ تكافئ $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}=m-2$

أي $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2=m$ وعليه $\boxed{f(x)=m-x}$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m-x$

✍ من أجل $m<-2$ المعادلة لاتقبل حلولا

✍ من أجل $-2<m<2$ المعادلة تقبل حلن مختلفين في الإشارة

✍ من أجل $m=-2$ المعادلة تقبل حلا وحيد $x=0$

✍ من أجل $m>2$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

التمرين 29 — Meziane Maths :

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $f(x)+f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ثم إستنتج أن النقطة $\omega(0,1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f).
2) أُحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3) إدرس إتجاه تغير الدالة f ,ثم شكل جدول تغيراتها .
4) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
5) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$;ثم فسر النتيجة بيانيا.
6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-1.7<\alpha<-1.6$.
7) من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكون العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$.
8) أرسم (C_f) و مستقيميه المقاربين .

الحل — Meziane Maths :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$.

1) حساب $f(x)+f(-x)$:

لدينا $x\in\mathbb{R}$ فإن : $-x\in\mathbb{R}$

$$f(x)+f(-x)=x+\frac{2}{e^x+1}-x+\frac{2}{e^{-x}+1}=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=-\frac{2}{e^x+1}+\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x+2}{e^x+1}=2$$

لدينا $x\in\mathbb{R}$ فإن : $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا : $f(x)+f(-x)=2$ معناه $f(2\times -x)+f(x)=2\times 1$ إذن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) .

2) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{e^x+1}=+\infty$ لأن : $\lim_{x\to-\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$.

إستنتاج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا : $f(x)=2-f(-x)$ و منه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[2-f(-x)]=\lim_{t\to+\infty}[2-f(t)]=-\infty$.

3) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x , $e^{2x}+1>0$ و $(e^x+1)^2>0$

إذن : $f'(x)>0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) تبيان أن المستقيم ذا المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{2}{e^x+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مسقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty} x+\frac{2}{e^x+1}-x-2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}-2=2-2=0$$

تفسير النتيجة بيانيا :

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+2$ بجوار $-\infty$.

6) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1.7<\alpha<-1.6$

لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و خاصة على المجال $[-1.7;-1.6]$ و $f(-1.7)\approx-0.008$, $f(-1.6)\approx0.064$ أي : $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-1.7;-1.6[$ بحيث $f(\alpha)=0$

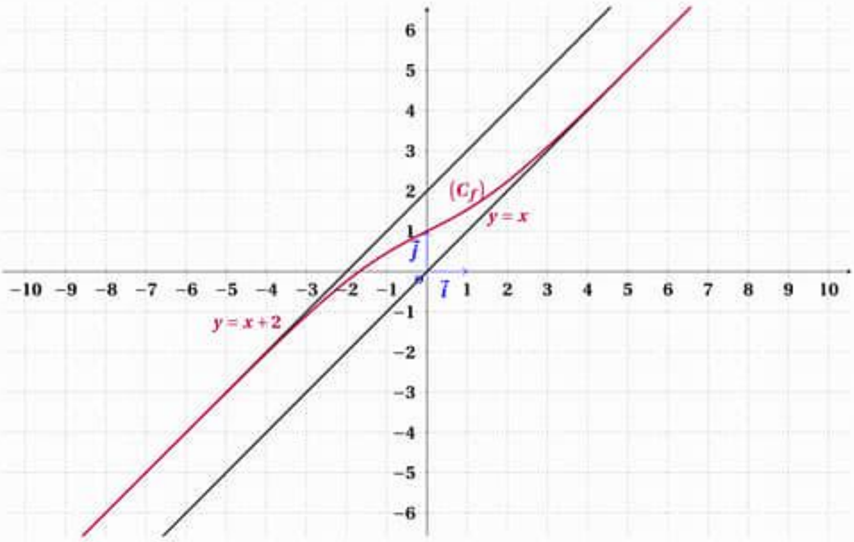
و بما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد .

ب) من أجل أي قيمة للعدد الحقيقي k يكزن العدد $(-\alpha)$ حلا للمعادلة $f(x)=k$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x)+f(-x)=2$ و خاصة $f(\alpha)+f(-\alpha)=2$ و منه $f(-\alpha)=2$ لأن : $f(\alpha)=0$

إذن العدد $(-\alpha)$ هو حل للمعادلة $f(x)=2$ و عليه $k=2$.

7) رسم (C_f) و مستقيميه المقاربين :



التمرين 30   : Meziane Maths

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x + x + 1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1.3 < \alpha < -1.2$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس

1) بين أن $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x+)^2}$؛ ثم إستنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

2) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$؛ ثم إستنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

3) عين معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ؛ثم أدرس الوضع النسبي بين (T) و (C_f)

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)؛ ثم أرسم (T) ، (Δ) و (C_f).

الحل   : Meziane Maths

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x) = e^x + x + 1$

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x + x + 1 = -\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x) = e^x + 1$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) > 0$ و عليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1.3 < \alpha < -1.2$

الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ و خاصة على المجال $[-1.3;-1.2]$ ، لدينا : $g(-1.3) \approx -0.02$ و $g(-1.2) \approx 0.10$ أي : $g(-1.3) \times g(-1.2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1.3;-1.2[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ و بما أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من أجل $x \in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x) < 0$

$x \in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$

1) تبيان أن : $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x-xe^x2x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إستنتاج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

في المجال $]-\infty;\alpha[$, $g(x)<0$ أي : $f'(x)<0$

و في المجال $]\alpha;+\infty[$, $g(x)>0$ أي : $f'(x)>0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x+1}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+1=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}=\frac{xe^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x(1+e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^{-x}}=+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) تبيان أن $f(\alpha)=\alpha+1$

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $e^\alpha+\alpha+1=0$ أي : $e^\alpha=-(\alpha+1)$

إذن : $f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-(\alpha+1)+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha-1+1}=\frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha}=\alpha+1$

إستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

$-1.3<\alpha<-1.2$ معناه $-0.3<\alpha+1<-0.2$ أي : $-0.3<f(\alpha)<-0.2$

3) تعيين معادلة المماس (d) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة صفر.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و لدينا : $f'(0)=\frac{1}{2}$ و $f(0)=0$ و منه : $(d):y=\frac{1}{2}x$.

دراسة الوضع النسبي لـ (d) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{xe^x}{e^x+1}-\frac{x}{2}=\frac{2xe^x-xe^x-x}{2(e^x+1)}=\frac{xe^x-x}{2(e^x+1)}=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$$

لدينا $2(e^x+1)>0$ و منه إشارة $f(x)-\frac{1}{2}x$ من إشارة $x(e^x-1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$	
$f(x)-\frac{1}{2}x$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) فوق (d)	(C_f) يمس (d) في النقطة $A(0;0)$	(C_f) فوق (d)	

4) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

لدينا : $f(x)-x=\frac{xe^x}{e^x+x}-x=\frac{xe^x-xe^x-x}{e^x+1}=\frac{-x}{e^x+1}$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}\right)}=0$

و منه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

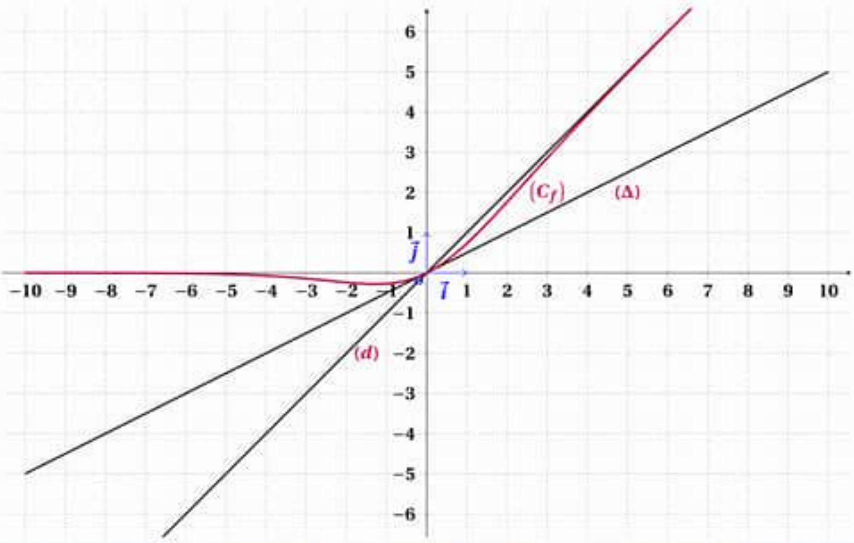
5) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

لدينا : $f(x)-y=\frac{-x}{e^x+1}$ و منه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(0;0)$	(C_f) تحت (Δ)	

رسم (d) و (Δ) و (C_f) :



التمرين 31 : Meziane Maths

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $g(x) = (x^2 - 1)e^x + 1$.

1) أوجد $g'(x)$ ثم أدرس إشارتها مستنتجا إتجاه تغير الدالة g.

2) أحسب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين ,نرمز بـ α للحل غير المعدوم حيث : $0.7 < \alpha < 0.8$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$ و نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أوجد $f'(x)$ مستنتجا إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أثبت ان : $f(\alpha) = \alpha - 1 + \frac{2}{\alpha + 1}$ مستنتجا حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أثبت أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف مع تحديد فاصلة كل منهما.

5) اكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند نقطة منه $A(1;1)$.

6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل (Δ) كمقارب مائل بجوار $-\infty$ ثم حدد وضعيته.

7) بين أن (C_f) يقبل مماس (Δ') موازي لـ (Δ) يطلب إيجاد معادلته.

8) أرسم كل من (Δ) ، (Δ') و المنحنى (C_f).

9) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(x-1)^2 e^x - m = 0$.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = f(x-1) - 1$.

1) إستنتج إتجاه تغير الدالة h دون حساب $h'(x)$.

2) أوجد عبارة الدالة المشتقة $h'(x)$ ، مشكلا جدول تغيرات الدالة h.
3) إستنتج كيفية إنشاء (C_h) بيان الدالة h إنطلاقا من (C_f)، ثم أرسم (C_h).

الحل : Meziane Maths

I) $D_g = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ ، $g(x) = (x^2-1)e^x + 1$.
1) حساب $g'(x)$:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = 2x.e^x + e^x(x^2-1) = e^x[2x + x^2 - 1] = (x^2+2x-1)e^x$.
إشارة $g'(x)$:
إشارة $g'(x)$ من إشارة (x^2+2x-1) لأن $e^x > 0$.
$x^2+2x-1=0$ نحسب المميز Δ $\Delta = b^2 - 4ac = 4+4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$.
المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1-\sqrt{2} \approx -2.41$ و $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1+\sqrt{2} \approx 0.41$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+2x-1		+	0	−	0	+	

إتجاه تغير الدالة g :
من إشارة $g'(x)$ نستنتج أن : f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1-\sqrt{2}]$ و المجال $[-1+\sqrt{2};+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}]$.
2) حساب نهايات g عند $-\infty$ و $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - e^x + 1 = 1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x + 1 = 1$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)e^x + 1 = +\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
جدول تغيرات الدالة g : $g(-1-\sqrt{2}) = 1.43$ و $g(-1+\sqrt{2}) = -0.25$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	1	↗	1.43	↘	−0.25	↗	$+\infty$

3) التحقق أن $g(x) = 0$ تقبل حلين :
لدينا : $g(0) = (0^2-1)e^0 + 1 = -1+1 = 0$ و منه : $g(0) = 0$.
نلاحظ أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[-1+\sqrt{2};+\infty[$ و خاصة على المجال $[0.7;0.8]$
و $g(0.7) = -0.03$; $g(0.8) = 0.20$.
و منه : $g(0.7) \times g(0.8) < 0$
و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا آخرا α حيث : $0.7 < \alpha < 0.8$.
4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:
من جدول التغيرات لـ g و $g(0) = g(\alpha) = 0$ نستنتج جدول الإشارة التالي :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) $f(x) = x + (x-1)^2 e^x$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

1) نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + (x-1)^2 e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x + x^2e^x - 2xe^x + e^x = -\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 2xe^x + e^x = 0\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (x-1)^2 e^x = +\infty$ لأن $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^x = +\infty\right)$.

2) إيجاد $f'(x)$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = 1 + 2(x+1)e^x + e^x(x-1)^2 = e^x(2x - 2 + x^2 - 2x + 1) + 1 = (x^2-1)e^x + 1 = g(x)$.

إتجاه تغير الدالة f :

بما أن : $f'(x) = g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و المجال $[\alpha;+\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f : $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) التحقق أن $f(\alpha) = \alpha - 1 + \dfrac{2}{\alpha+1}$:

لدينا : $f(\alpha) = \alpha + (\alpha-1)^2 . e^\alpha$.

و نعلم أن : $g(\alpha) = 0$ و منه : $(\alpha^2-1)e^\alpha + 1 = 0$ و منه : $e^\alpha = \dfrac{-1}{\alpha^2-1}$.

و بذلك : $f(\alpha) = \alpha + (\alpha+1)^2 . \dfrac{-1}{\alpha^2-1} = \alpha - \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-1)}{\alpha-1)(\alpha+1)} = \alpha - \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1} = \alpha - \dfrac{\alpha+1-2}{\alpha+1} = \alpha - \left(1 - \dfrac{-2}{\alpha+1}\right) =$ $\alpha - 1 + \dfrac{2}{\alpha+1}$.

حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $0.7 < \alpha < 0.8$ فإن : $-0.3 < \alpha - 1 < -0.2$ و $\dfrac{2}{1.8} < \dfrac{2}{\alpha+1} < \dfrac{2}{1.7}$ و منه : $-0.3 + \dfrac{2}{1.8} < \alpha - 1 + \dfrac{2}{\alpha+1} < -0.2 + \dfrac{2}{1.7}$

ومنه : $0.81 < f(\alpha) < 0.98$.

4) إثبات أن (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف :

ندرس إشارة المشتقة الثانية $f''(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا : $f''(x) = [f'(x)]' = g'(x)$

و لدينا من الجزء I) السؤال 1) أن $g'(x)$ تنعدم عند كل من القيمتين $(-1-\sqrt{2})$ و $(-1+\sqrt{2})$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن المشتقة الثانية إنعدمت عند كل من $(-1-\sqrt{2})$ و $(-1+\sqrt{2})$ و غيرت من إشارتها و منه (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلة كل منهما $(-1-\sqrt{2})$ و $(-1+\sqrt{2})$.

5) معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند A :

$(\Delta) = f'(1)(x-1)+f(1) = 1(x-1)+1 = x-1+1 = x$.

6) التحقق أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} x+(x-1)^2e^x - x = \lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^x = \lim_{x\to+\infty} x^2e^x-2xe^x+e^x = 0$ و منه : $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

الوضعية النسبية بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-y = x+(x-1)^2e^x - x = (x-1)^2e^x$

إشارة الفرق من إشارة $(x-1)^2$ لأن : $e^x > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يمس (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)

7) إيجاد معادلة المماس (Δ') الموازي لـ (Δ) للمنحنى (C_f) :

بفرض x_0 فاصلة نقطة التماس حيث : $x_0 \in \mathbb{R}-\{1\}$

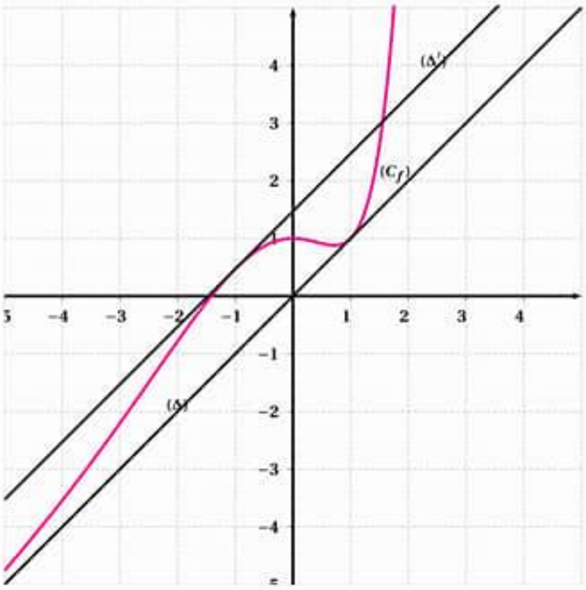
فإن : $(\Delta'): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

و بما أن $(\Delta) \parallel (\Delta')$ فإن : $f'(x_0)=1$ و منه : $g(x_0)=1$ و منه : $(x_0^2-1)e^{x_0}+1=1$ و منه : $(x_0^2-1)e^{x_0}=0$ و منه : $x_0^2-1=0$ لأن : $e^{x_0}\neq 0$

و منه : $x_0^2=1$ و منه : $x_0=-1$ (مقبول) أو $x_0=1$ (مرفوض) , و منه : $x_0=-1$.

و بذلك : $(\Delta'): y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 1(x+1)-1+4e^{-1} = x+1-1+\frac{4}{e} = x+\frac{4}{e}$

8) رسم كل من (Δ) , (Δ') و (C_f) :



9) المناقشة البيانية :

لدينا : $(x-1)^2e^x - m = 0$ $\cdots$ (1) و منه : $(x-1)^2e^x = m$ و منه : $x+(x-1)^2e^x = x+m$ و منه : $f(x) = x+m$.

و منه : $y = f(x)$ و $y = x+m$

و منه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x+m$ مع $m \in \mathbb{R}$.

- $m \in]-\infty;0[$ المعادلة لا تقبل حلول .
- $m = 0$ المعادلة تقبل حل مضاعف $x = 1$.
- $m \in]0;1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين و حل سالب .
- $m = 1$ المعادلة تقبل حل موجب , حل سالب و حل معدوم .
- $m \in]1;\frac{4}{e}[$ المعادلة تقبل حلين سالبين و حل موجب .
- $m = \frac{4}{e}$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب و حل آخر موجب .
- $m \in]\frac{4}{e};+\infty[$ المعادلة تقبل حل موجب .

III) $x \in \mathbb{R}$ / $h(x) = f(x-1) - 1$.

1) إتجاه تغير الدالة h دون إستعمال h' :

لدينا : $h(x) = f(x-1) - 1$ فإن إتجاه تغير الدالة h نفس إتجاه تغير الدالة $f(x-1)$ حيث : $h(x) = (f \circ u)(x) - 1$ مع $u(x) = x-1$.

الدالة $u(x) = x-1$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (دالة تآلفية $a = 1 > 0$)

- عندما $0 \leqslant u(x) \leqslant \alpha$ فإن : $0 \leqslant x-1 \leqslant \alpha$ و منه : $1 \leqslant x \leqslant \alpha - 1$ فإن h متناقصة تماما .
- عندما $\begin{cases} u(x) \leqslant 0 \\ u(x) \geqslant \alpha \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} x-1 \leqslant 0 \\ x-1 \geqslant \alpha \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant \alpha+1 \end{cases}$ فإن h متزايدة تماما.

و بالتالي : h متزايدة تماما على المجال $[\alpha+1;+\infty[$ و المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;\alpha+1]$.

2) عبارة $h'(x)$ على $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} h'(x) = [f(x-1)-1]' = [f(x-1)]' - (1)' = f'(x-1) \times (x-1)' - 0 = f'(x-1) \times 1 = g(x-1) = [(x-1)^2 - 1]e^{x-1} + 1 \\ h'(x) = (x^2 - 2x)e^{x-1} + 1 \end{cases}$$

جدول تغيرات الدالة h :

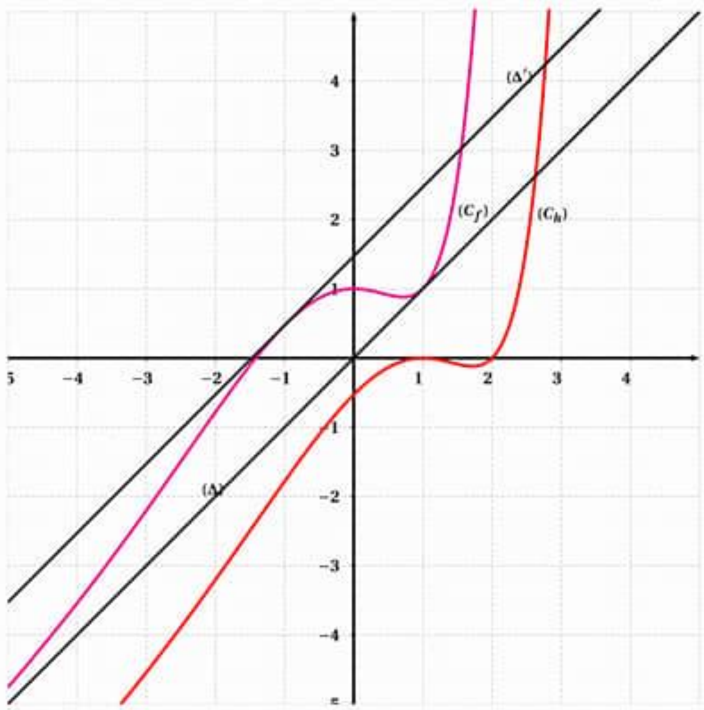
x	$-\infty$		1		$\alpha+1$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$h(0)=f(0)-1$ و $h(\alpha+1)=f(\alpha)-1=\alpha-2+\dfrac{2}{\alpha+1}$ $\left(-0.19<h(\alpha+1)<-0.02\right)$.

3) كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

لدينا : $h(x)=f(x-1)-1$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بإنسحاب شعاعه $1\vec{i}-1\vec{j}$.

✍ إنشاء (C_h) :



التمرين 32 : Meziane Maths

✍ لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) .

1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة f .

3) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

6) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha=-0.375$) .

✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي .

1) عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\dfrac{x}{e^x}+1-m=0$.

الحل : Meziane Maths

✍ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1 $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\boxed{-\infty}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}-e^{-x}+2\right)=\boxed{2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(2-x)e^{-x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$e^{-2}+2$	↘	2

2 إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty,2[$ ومنه على المجال : $]-0.38,-0.37[$.

وبما أن $g(-0.38)\times g(-0.37)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.

3 إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1 لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}+2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

2 دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا ايضا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4 لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=-xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(2x+1)$	$+$	$\|\|$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$\|\|$	(C_f) تحت (Δ)

5 إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x)=g'(x)$ ومنه

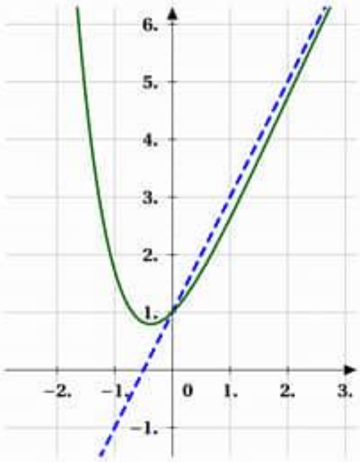
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6 إثبات أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

$g(\alpha)=0$ تكافئ $e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{\alpha-1}$ ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1\alpha-e^{-\alpha}=2\alpha+1+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7 رسم المنحنى (C_f)



(Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي

1 تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y=2x+m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0)=2$ اي أن $g(x)=2$ ومنه $(x-1)e^{-x}=0$ وبالتالي $x_0=1$

لدينا : $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y=2x+1-e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m=1-e^{-1}$

2 المناقشة البيانية :

$\frac{-x}{e^x}+1-m=0$ يعني $m=-xe^{-x}+1$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m+2x=-xe^{-x}+1+2x$ أي أن $m+2x=f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m)، لدينا عندئذ :

- إذا كان $m\in]-\infty,1-e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- إذا كان $m=1-e^{-1}$ للمعادلة حل وحيد .
- إذا كان $m\in]1-e^{-1},1[$ للمعادلة حلان .
- إذا كان $m>1$ للمعادلة حل وحيد.

التمرين 33 : Meziane Maths

g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم عين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$، استنتج أنّ: $e^{-x}+x\geq 1$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسر النتيجتين بيانيا.

3) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.

4) أدرس اشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) أكتب معادلة لماس المنحنى (C_f) عند النقطة O.

6) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$، ثم استنتج اشارة $x-f(x)$.

7) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

8) أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $m=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}-1$.

الحل : Meziane Maths

1 حساب $g'(x)$ تعيين اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=-e^{-x}+1$

$g'(x)\geq 0$ يكافئ $-e^{-x}+1\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\leq 1$ يكافئ $1\leq e$ يكافئ $x\geq 0$

و

$g'(x)\leq 0$ يكافئ $-e^{-x}+1\leq 0$ يكافئ $e^{-x}\geq 1$ يكافئ $-x\geq 0$ يكافئ $x\leq 0$

إذن إذا كان $x\in]-\infty;0]$ فإن الدالة g متناقصة تماماً، و إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماماً

2 تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$

من أجل $x\in]-\infty;0]$: $g(x)\geq g(0)$ لأن g متناقصة على $]-\infty;0]$ و منه $g(x)\geq 0\cdots(1)$

من أجل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)\geq g(0)$ لأن g متزايدة على $[0;+\infty[$ و منه $g(x)\geq 0\cdots(2)$

من (1) و (2) ينتج أن $g(x)\geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geq 1$

لدينا: $g(x)\geq 0$ يكافئ $e^{-x}+x-1\geq 0$ و منه $e^{-x}+x\geq 1$

1 التحقق من أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$

لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{e^{-x}+x}=\frac{(x)\times 1}{(x)\times\left(\frac{e^{-x}}{x}+1\right)}=\frac{1}{\frac{e^{-x}}{x}+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$$

2 حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{xe^x} = -\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}} = 0^-$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{xe^x} = 1$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}} = 1$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

✍ التفسير البياني:

✍ عند $-\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا (Δ) معادلته: $y=0$ و $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ)

✍ عند $+\infty$: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته: $y=1$.

3 f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{1(e^{-x}+x)-(-e^{-x}+1)(x)}{(e^{-x}+x)^2} = \dfrac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$ إذن $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$

4 دراسة إشارة $f'(x)$ ثم تشكيل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}(x+1)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+1$ لأن $e^{-x}>0$ و المقام موجب تماما، اذن :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\dfrac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

5 معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O:

لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$، إذن معادلة المماس هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$

6 التحقق من أن $x-f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

$$x-f(x) = x-\frac{x}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1} = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$$

✍ إشارة $x-f(x)$:

لدينا $g(x)\geqslant 0$ و منه $g(x)+1\geqslant 1$ و منه $g(x)+1>0$، إذن إشارة $x-f(x)$ من إشارة x

إذا كان $x<0$ فإن $x-f(x)<0$ ،

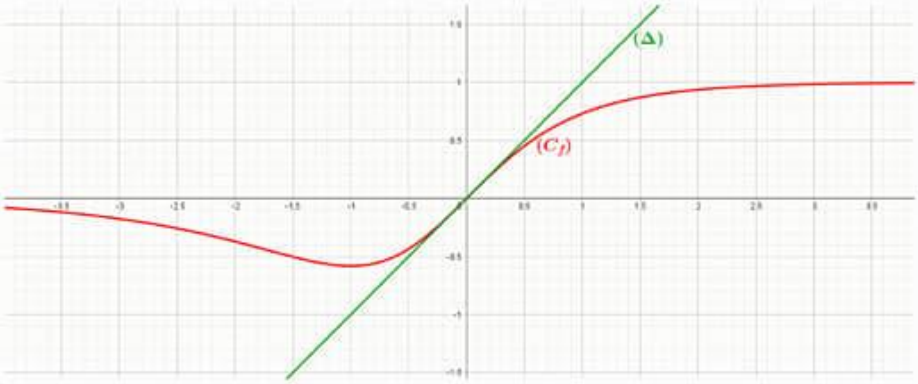
$x>0$ فإن $x-f(x)>0$

و إذا كان $x=0$ فإن $x-f(x)=0$.

7 الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$:

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
(C_f) فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة O	(C_f) تحت (Δ)

8 رسم (C_f) و (Δ)

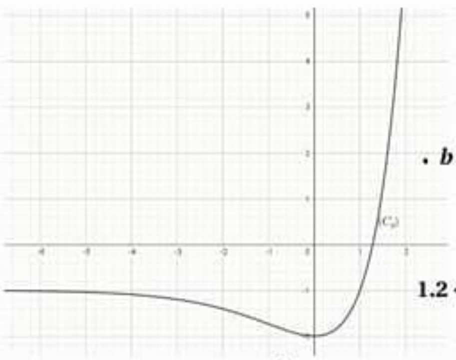


9 المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $m = \frac{xe^x}{xe^x+1} - 1$

المناقشة: لدينا $m = \frac{xe^x}{xe^x+1} - 1$ يكافئ $\frac{e^x}{e^x}\frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ يكافئ $\frac{x}{x+e^{-x}} = m+1$ أي $f(x) = m+1$، حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m+1$، نميز الحالات التالية:

- إذا كان $m+1 \geqslant 1$ أي $m \geqslant 0$ ، المعادلة ليس لديها حلول
- إذا كان $0 < m+1 < 1$ أي $-1 < m < 0$، للمعادلة حل وحيد موجب
- إذا كان $m+1 = 0$ أي $m = -1$، للمعادلة حل وحيد معدوم $x_0 = 0$
- إذا كان $\frac{1}{1-e} < m+1 < 0$ أي $\frac{1}{1-e} - 1 < m < -1$، للمعادلة حلين سالبين متمايزين
- إذا كان $m+1 = \frac{1}{1-e}$ أي $m = \frac{1}{1-e} - 1$، للمعادلة حل واحد سالب هو $x_1 = -1$
- إذا كان $m+1 < \frac{1}{1-e}$ أي $m < \frac{1}{1-e} - 1$، المعادلة ليس لديها حلول .

التمرين 34 : Meziane Maths



✍ في الشكل المقابل (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x)=(ax+b)e^{x}+c$

1) بقراءة بيانية :

أ) عين $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم إستنتج قيمة c.

ب) عين نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عين كلا من : $g(0)$ و $g'(0)$ ثم إستنتج قيمتي كل من a و b .

2) نفرض فيما يلي: $g(x)=(x-1)e^{x}-1$.

أ) شكل جدول تغيرات الدالة g

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.2<\alpha<1.3$

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

✍ f هي الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}+1}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4) بين $f(\alpha)=\alpha-1$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحنى (C_f).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

7) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$

أ) بين أن h دالة زوجية .

ب) أرسم (C_h) المنحنى البياني للدالة h إعتمادا على (C_f) في نفس المعلم السابق .

الحل : Meziane Maths

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ ، و نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(ax+b)e^{x}+c]=\lim\limits_{x\to-\infty}(axe^{x}+be^{x}+c)=c$.

إذن نستنتج أن : $c=-1$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ج) لدينا : $g(0)=-2$ و $g'(0)=0$

لدينا : $g(0)=-2$ أي : $(a\times0+b)e^{0}-1=-2$ أي : $b-1=-2$ و منه : $b=-1$.

نحسب $g'(x)$: $g'(x)=a\times e^{x}+e^{x}(ax+b)=e^{x}(a+ax+b)$

لدينا : $g'(0)=0$ أي : $e^{0}(a+a\times0-1)=0$ أي : $a-1=0$ و منه : $a=1$

إذن : $g(x)=(x-1)e^{x}-1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-1 \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[1,2;1,3]$ و بما أن : $g(1.2) = -$ و $g(1.3) = +$ أي : $g(1.2) \times g(1.3) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : 1.2 و 1.3 .

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}} = 0$.

بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta): y = x$, نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x}{e^x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x - xe^x - x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-xe^x}{e^x+1} = 0$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و (Δ) .

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$.

أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ إذن إشارة الفرق من إشارة : $(-x)$.

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

نحسب المشتقة $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{(e^x+1) - xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-[(x-1)e^x - 1]}{(e^x+1)^2} = \dfrac{-g(x)}{(e^x+1)^2}$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ لأن : $(e^x+1)^2 > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow 0$

4) إثبات : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

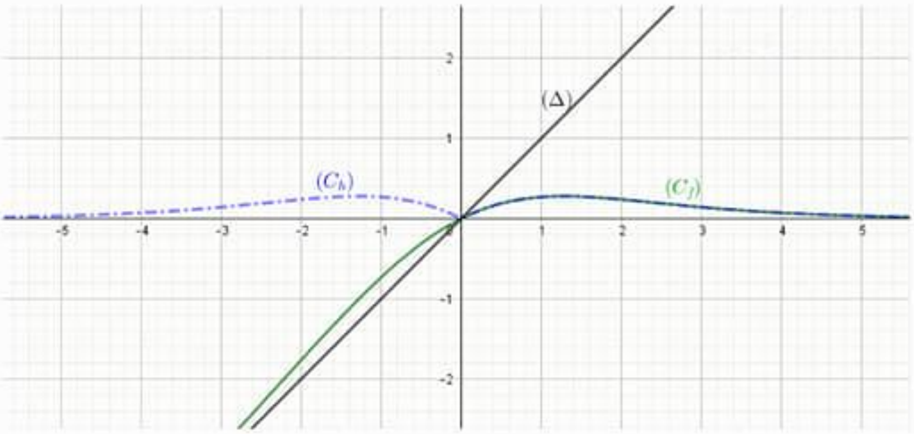
نعلم أن : $g(\alpha)=0$, أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}-1=0$ أي : $(\alpha-1)e^{\alpha}=1$, ومنه : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

لنحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha}=\alpha-1$.

و هو المطلوب .

حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $1.2<\alpha<1.3$ أي : $0.2<\alpha-1<0.3$ و منه : $0.2<f(\alpha)<0.3$.

5) الإنشاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x)=f(m)$, عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y=f(m)$.

إذا كان : $m\in]-\infty;0]$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

إذا كان : $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

إذا كان : $m=\alpha$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

7) لدينا الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $h(x)=f(|x|)$.

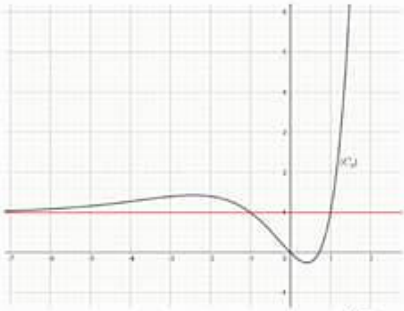
أ) تبيان أن الدالة h زوجية : $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ و وبالتالي الدالة h زوجية .

إنشاء المنحنى (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;+\infty[$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب في المجال $]-\infty;0]$.

التمرين 35   Meziane Maths :



لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x^2-1)e^x+1$.
(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس .
يعطى جدول القيم التالي :

x	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
g(x)	-0.17	-0.11	-0.03	0.07	0.2

1) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجموعة $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
2) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=g(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
2) تحقق من أن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$.
3) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,1)$.
ب) بين أن المماس (T) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f)و المماس (T) .
ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلة للمماس (T') .
4) أرسم كلا من (T) ، (T') و (C_f) .
5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(E):(x-1)^2e^x-m-1=0$ ثلاثة حلول .

الحل   Meziane Maths :

I) 1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
لدينا : $g(0)=(0^2-1)e^0+1=-1+1=0$ و منه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.
ولدينا : g دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0.7;0.75]$ و $g(0.70)\times g(0.75)=-0.03\times0.07=-0.0021<0$.
و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
و بالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $0.7<\alpha<0.75$.
2) إستنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

II) لدينا : $f(x)=x+(x-1)^2e^x$ معرفة على $D_f=\mathbb{R}$.
1) أ) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)^2e^x\right]=\lim_{x\to-\infty}(x+x^2e^x-2xe^x+e^x)=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x+(x-1)^2e^x] = +\infty$

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$f'(x) = 1+2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x = 1+[2x-2+(x-1)^2e^x] = 1+(2x-2+x^2-2x+1)e^x = 1+(x-1)^2e^x = g(x)$.

أي : $f'(x) = g(x)$.

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ و f متناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) التحقق من أن : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

لدينا : $f(\alpha) = \alpha+(\alpha-1)^2e^\alpha$.

و لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه : $1+(\alpha^2-1)e^\alpha = 0$ و بالتالي : $e^\alpha = -\dfrac{1}{\alpha^2-1}$.

إذن : $f(\alpha) = \alpha+(\alpha-1)^2\times(-\dfrac{1}{\alpha^2-1})$ أي : $f(\alpha) = \alpha-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2-1} = \dfrac{\alpha^3-\alpha-\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha^2-1}$

و بالتالي : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3-\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2-1} = \dfrac{\alpha^2(\alpha-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \dfrac{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $0.70<\alpha<0.75$ و منه : $(0.70)^2+1<\alpha^2+1<(0.75)^2+1$ و $0.70+1<\alpha+1<0.75+1$.

إذن : $\dfrac{(0.70)^2+1}{0.70+1} < \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1} < \dfrac{(0.75)^2+1}{0.75+1}$ وبالتالي : $0.85<f(\alpha)<0.92$.

3) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$:

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1) = g(1)(x-1)+1 = x-1+1 = x$.

ب) تبيان أن المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x+(x-1)^2e^x-x] = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2e^x-2xe^x+e^x) = 0$

و منه المماس (T) هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

دراسة الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المماس (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y = x+(x-1)^2e^x-x = (x-1)^2e^x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	+
الوضعية	(C_f) فوق (T)	(C_f) يمس (T) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (T)

تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في نقطة B :

لدينا : $(T')\parallel(T)$ يعني معامل توجيه المماس (T') يساوي 1 أي : $f'(x_0)=1$

و منه : $1+(x_0^2-1)e^{x_0}=1$ وبالتالي : $(x_0^2-1)e^{x_0}=0$ و منه : $(x_0^2-1)=0$ لأن : $e^{x_0}\neq 0$ و عليه : $x_0=1$ أو $x_0=-1$.

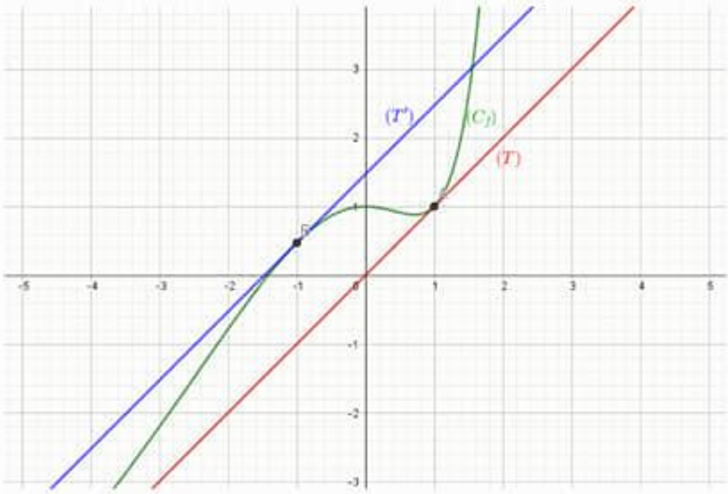
إذن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (T) في النقطة B ذات الفاصلة -1.

كتابة معادلة المماس (T') :

لدينا : $B(-1;-1+4e^{-1})$

إذن : $(T'):y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=1\times(x+1)-1+4e^{-1}=x+4e^{-1}$.

الرسم :



تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ثلاثة حلول:

لدينا : $(x-1)^2e^x=m+1$ تكافئ : $x+(x-1)^2e^x=x+m+1$ تكافئ : $f(x)=x+m+1$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=x+m+1$ الموازي لكل من المماسين (T) و (T').

المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول يعني : $0<m+1<4e^{-1}$ وبالتالي : $-1<m<-1+4e^{-1}$.

التمرين 36 — Meziane Maths

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة g .

2) إستنتج أن : $g(x)\geqslant 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

3) علل أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}-x>0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) فسر النتائج هندسيا .

2) أ) أحسب $f'(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

ج) علل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4) أرسم (T) و المنحنى (C_f).

الحل — Meziane Maths

لدينا الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=e^{x}-1$

$g'(x)=0$ معناه : $e^{x}-1=0$ تكافئ : $e^{x}=1$ أي : $x=0$

$g'(x)>0$ معناه : $e^{x}-1>0$ تكافئ : $e^{x}>1$ أي : $x>0$

$g'(x)<0$ معناه : $e^{x}-1<0$ تكافئ : $e^{x}<1$ أي : $x<0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2) إستنتاج أن : $g(x)\geqslant 0$ من أجل كل عدد حقيقي x :

لدينا : $g(0)=e^{0}-0-1=0$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى تبلغها عند $x=0$ و عليه من أجل كل عدد حقيقي x , $g(x)\geqslant g(0)$ أي : $g(x)\geqslant 0$

3) تعليل أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $e^{x}-x>0$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x , $g(x)\geqslant 0$ يكافئ : $e^{x}-x-1\geqslant 0$ أي : $e^{x}-x\geqslant 1$ و بالتالي : $e^{x}-x>0$

II) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\frac{e^{x}}{x}\right)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)-1}=-1$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-1}=-1$, لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

ب) تفسير النتائج هندسيا :

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

2) أ) حساب $f'(x)$:

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$$

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : $e^x>0$ و $(e^x-x)^2>0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$

من أجل $x\in]1;+\infty[$, $1-x<0$ و منه : $f'(x)<0$

من أجل $x\in]-\infty;1[$, $1-x>0$ و منه : $f'(x)>0$

و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3) أ) تعيين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 :

معادلة المماس (T) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي : $y=x$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\frac{-xg(x)}{e^x-x}$$

لدينا : $g(x)\geq 0$ و $e^x-x>0$ و منه إشارة $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$ هي نفس إشارة $-x$

إذا كان : $x>0$ فإن : $-x<0$ و منه : $f(x)-x<0$

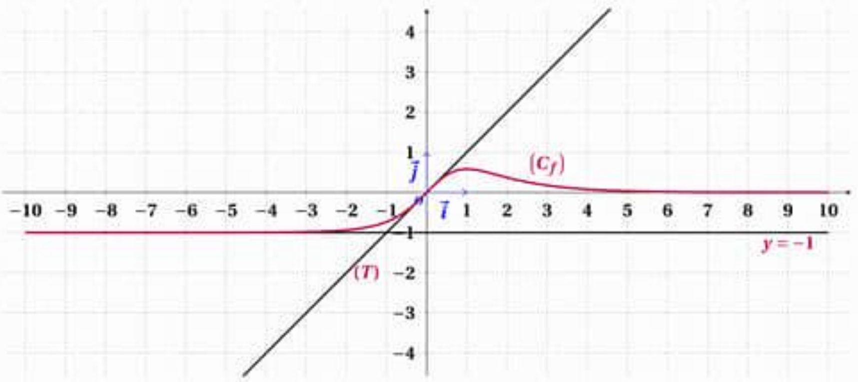
إذا كان : $x<0$ فإن : $-x>0$ و منه : $f(x)-x>0$

و عليه من أجل $x\in]-\infty;0[$ (C_f) يوجد فوق (T) , و من أجل $x\in]0;+\infty[$ (C_f) يوجد تحت (T) و (T) يخترق (C_f) في النقطة O مبدأ المعلم .

ج) التعليل ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

بما أن المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في نقطة التماس O فإن النقطة O هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

4) إنشاء المماس (T) و المنحنى (C_f) :



التمرين 37

: Meziane Maths

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1) أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x)=x+(x-2)e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x)=g(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

6) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.6<\alpha<1.7$.

7) أحسب $f(0)$, $f(2)$ ثم أرسم (Δ) , (T) و المنحنى (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

الحل

: Meziane Maths

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1) حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+xe^x-e^x=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+(x-1)e^x=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x , $e^x > 0$ و منه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x و عليه $g'(0) = 0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ فإن : $g'(x) < 0$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geqslant 0$

II) لدينا الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي : $f(x) = x + (x-2)e^x$

1) أ) تبيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن : $f'(x) = g(x)$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty;2]$ و منه : $f'(x) = 1 + e^x + (x-2)e^x = 1 + (x-1)e^x = g(x)$

ب) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ و منه من أجل كل $x \in]-\infty;2]$, $f'(x) \geqslant 0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;2]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	2

2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} x + (x-2)e^x - x = \lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^x - 2e^x = 0$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x$

الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = x + (x-2)e^x - x = (x-2)e^x$$

و منه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $(x-2)$ لأن : $e^x > 0$

$x - 2 < 0$ في المجال $]-\infty;2]$ و بالتالي (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]-\infty;2]$.

3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها :

لدينا : $f''(x) = g'(x)$ و منه $f''(x)$ تنعدم عند 2 و تغير من إشارتها و بالتالي النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

ملاحظة : يمكن إثبات ذلك مباشرة بما أن $f'(x)$ تنعدم عند 0 و لا تغير من إشارتها فإن النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$ و منه : $(T): y = (x-1)+1-e = x-1+1-e = x-e$

6) تبيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.6 < \alpha < 1.7$:

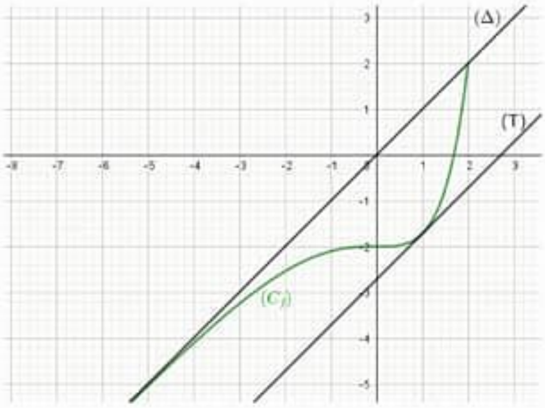
لدينا الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و خاصة على المجال $[1.6;1.7]$ و $f(1.6) \approx -0.38$ و $f(1.7) \approx 0.05$ أي : $f(1.6) \times f(1.7) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]1.6;1.7[$ بحيث : $f(\alpha) = 0$ و بما أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن α وحيد .

و منه (C_f) يقطع حامل محر الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1.6 < \alpha < 1.7$

7) حساب $f(0)$ ، $f(2)$ و رسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) :

$f(0) = 0 + (0-2)e^0 = -2$ و $f(2) = 2 + (2-2)e^2 = 2$



8) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

- إذا كان $m < -e$ أو $m > 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .
- إذا كان $m = -e$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا .
- إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا و وحيدا .
- إذا كان $-e < m < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين .

التمرين 38 — Meziane Maths :

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1-x)e^x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

3) تحقق أن $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، بين ان : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث (Δ') هو المستقيم ذو المعادلة $y=1$.

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f .

ب) بين أن : $f(\alpha)=\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) أ) أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ).

ج) أكتب معادلة (T).

6) أرسم (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=x+f(m)$.

الحل : Meziane Maths

I) الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+(1-x)e^x$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+(1-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x-xe^x=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+(1-x)e^x=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)=-\infty$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=-e^x+e^x(1-x)=-e^x+e^x-xe^x=-xe^x$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x>0$ و منه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $-x$ و عليه : $g'(0)=0$

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، $-x>0$ و منه $g'(x)>0$ و من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $-x<0$ و منه $g'(x)<0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α على المجال $[0;+\infty[$

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$

3) التحقق أن : $1.27<\alpha<1.28$

لدينا : $g(1.27)\approx 0.03$ و $g(1.28)\approx -0.007$ إذن : $g(1.27)\times g(1.28)<0$ و منه $1.27<\alpha<1.28$.

إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$, $g(x)>0$ و من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$, $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$

II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$

1) تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

2) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+x+1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$

ب) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)=\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}=\frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا : $e^x>0$ و $e^x+1>0$ و منه إشارة الفرق $f(x)-y$ هي نفس إشارة $-x$:

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ و منه : $f(x)-y<0$

إذا كان $x<0$ فإن $-x>0$ و منه $f(x)-y>0$

و عليه من أجل $x\in]-\infty;0[$, (C_f) يوجد فوق (Δ) و من أجل $x\in]0;+\infty[$, (C_f) يوجد تحت (Δ) و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$: $f(x)-y=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}-1=\dfrac{e^x+x+1-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{x}{e^x+1}$

و منه إشارة الفرق $f(x)-y$ هي نفس إشارة x على $\mathbb{R}$

و عليه من أجل $x \in]0;+\infty[$ ، (C_f) يوجد فوق (Δ') و من أجل $x \in]-\infty;0[$ ، (C_f) يوجد تحت (Δ') و (C_f) يقطع (Δ') في النقطة $A(0;1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;1)$	(C_f) فوق (Δ)

4) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=\dfrac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}=$

$$\frac{e^{2x}+e^x+e^x+1-e^{2x}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1+e^x-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن $(e^x+1)^2>0$ و عليه :

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $g(x)>0$ أي : $f'(x)>0$

من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $g(x)<0$ أي : $f'(x)<0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha$

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}+1$ و لدينا : $g(\alpha)=0$ تكافئ $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ و منه : $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha}{e^\alpha+1}+1=\frac{\alpha}{\frac{-1}{1+\alpha}+1}+1=\frac{\alpha}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}+1=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{-\alpha}\right)+1=-1+\alpha+1=\alpha$$

طريقة ثانية :

$$f(\alpha)-\alpha=\frac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}-\alpha=\frac{e^\alpha+\alpha+1-\alpha e^\alpha-\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{1+(1-\alpha)e^\alpha}{e^\alpha+1}=\frac{g(\alpha)}{e^\alpha+1}=0$$

بما أن : $f(\alpha)-\alpha=0$ فإن : $f(\alpha)=\alpha$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\infty$

5) أ) تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$:

$f(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و لدينا : $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ يكافئ : $e^{-\alpha}=\alpha-1$

إذن : $\frac{(\alpha-1)-\alpha+1}{(\alpha-1)+1}=0$ و منه : $f(-\alpha)=$ (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $-\alpha$.

ب) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ) :

المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(-\alpha)=1$

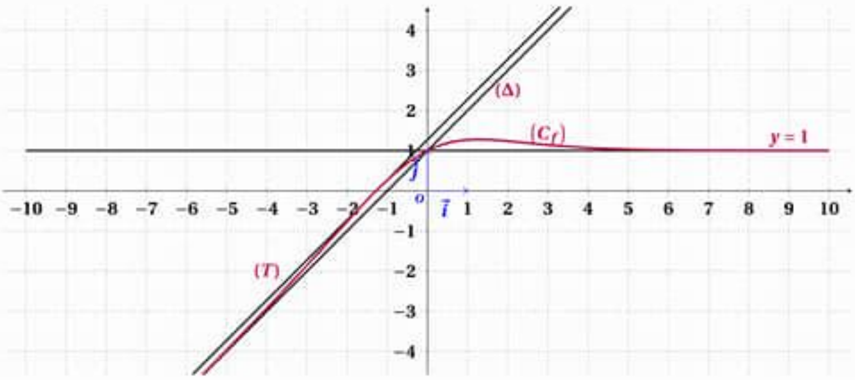
$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1-(1+\alpha)(\alpha-1)}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{1+\alpha^2-1}{\alpha^2}=1$$.

و منه (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha;0)$ موازيا للمستقيم (Δ) .

ج) كتابة معادلة (T) :

معادلة المماس (T) هي : $y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$ أي : $y=x+\alpha$

6) رسم (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f) :



7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=x+f(m)$

إذا كان $m<0$ فإن $f(m)<1$ و منه المعادلة تقبل حلا واحدا موجبا .

إذا كان $m=0$ فإن : $f(m)=1$ و منه المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .

إذا كان $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ فإن : $1<f(m)<\alpha$ و منه المعادلة تقبل حلين سالبين .

إذا كان $m=\alpha$ فإن $f(m)=\alpha$ و منه المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا $x=-\alpha$.

التمرين 39 Meziane Maths :

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x+4-4e^x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.6<\alpha<-1.59$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2e^x-1}{2xe^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .

3) أدرس تغيرات الدالة f.

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم إستنتج إشارة $f(x)$.

5) بين أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$, ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) أرسم المنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $2mx-2+(m+1)e^{-x}=0$.

الحل

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x+4-4e^x$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=2-4e^x=2(1-2e^x)$

$g'(x)=0$ معناه : $1-2e^x=0$ يكافئ : $e^x=\frac{1}{2}$ أي : $x=-ln2$

$g'(x)>0$ معناه : $1-2e^x>0$ يكافئ : $e^x<\frac{1}{2}$ أي : $x<-ln2$

$g'(x)<0$ معناه : $1-2e^x<0$ يكافئ : $e^x>\frac{1}{2}$ أي : $x>-ln2$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-ln2]$ و متناقصة تماما على المجال $[-ln2;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x+4-4e^x=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to-\infty} 2x+4=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} 4e^x=0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+4-4e^x=\lim_{x\to+\infty} x\left(2+\frac{4}{x}-4\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$2-2ln2$	↘ $-\infty$

ب) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1.6<\alpha<-1.59$

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-ln2]$ و تأخذ قيما في المجال $]-\infty;2-2ln2]$ و $0\in]-\infty;2-2ln2]$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-\infty;-ln2]$ بحيث : $g(\alpha)=0$

و كذلك الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-ln2;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2-2ln2]$ و $0\in]-\infty;2-2ln2]$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد β في المجال $[-ln2;+\infty[$ بحيث : $g(\beta)=0$ و بما أن $g(0)=2(0)+4-4e^0=0$

فإن : $\beta=0$

و لدينا : $g(-1.6)\approx-0.007$ و $g(-1.59)\approx0.004$ أي : $g(-1.59)\times g(-1.6)<0$ و منه : $-1.6<\alpha<-1.59$

ج) إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{2e^x(2xe^x+1)-(2e^x+2xe^x)(2e^x-1)}{(2xe^x+1)^2}=\frac{4xe^x+2e^x-4e^{2x}+2e^x-4xe^{2x}+2xe^x}{(2xe^x+1)^2}=$$

$$\frac{4e^x+2xe^x-4e^{2x}}{(2xe^x+1)^2}=\frac{e^x(2x+4-4e^x)}{(2xe^x+1)^2}=\frac{e^x g(x)}{(2xe^x+1)^2}$$

2) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم تفسير النتائج هندسيا .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}=-1$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x+1=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(2x+e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-e^{-x})}{(2x+e^{-x})}=0$

التفسير : (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $y=-1$ و $y=0$ بجوارات $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب .

3) دراسة تغيرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ لأن $e^x>0$ و $(2xe^x+1)^2>0$ و عليه : $f'(\alpha)=0$

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[$ يكون $f'(x)<0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

و من أجل كل $x\in]\alpha;0[$ يكون $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;0]$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم إستنتاج إشارة $f(x)$:

$f(x)=0$ تكافئ : $\dfrac{2e^x-1}{2xe^x+1}=0$ و تكافئ : $2e^x-1=0$ أي : $x=-ln2$

إشارة $f(x)$:

يمكن إشتنتاج إشارة $f(x)$ من جدول تغيراتها و التي تكون كما يلي :

من أجل $x\in]-\infty;-ln2[$ ، $f(x)<0$ و من أجل $x\in]-ln2;+\infty[$ ، $f(x)>0$ كما أن $f(-ln2)=0$

5) تبيان أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$:

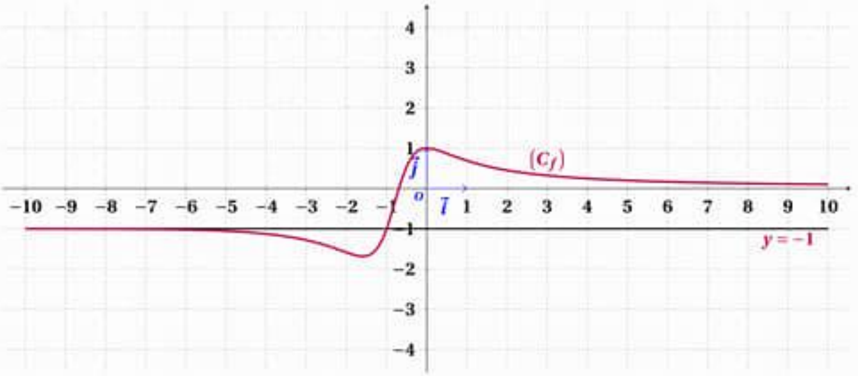
$f(\alpha)=\dfrac{2e^\alpha-1}{2\alpha e^\alpha+1}$ و لدينا : $g(\alpha)=0$ يكافئ : $2\alpha+4-4e^\alpha=0$ و يكافئ : $e^\alpha=\dfrac{\alpha+2}{2}$ و $2\alpha e^\alpha=\alpha^2+2\alpha$

إذن : $f(\alpha)=\dfrac{2e^\alpha-1}{2\alpha e^\alpha+1}=\dfrac{(\alpha+2)-1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{\alpha+1}$

تعيين حصرا للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $-1.6 < \alpha < -1.59$ معناه : $-0.6 < \alpha+1 < -0.59$ ويكافئ : $\frac{1}{-0.6} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{-0.59}$ أي : $-1.7 < f(\alpha) < -1.66$

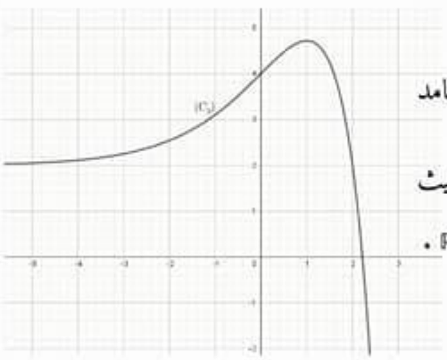
6) رسم المنحنى (C_f) :



7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $2mx-2+(m+1)e^{-x}=0$ معناه : $2mxe^{x}-2e^{x}+m+1=0$ و معناه : $m(2xe^{x}+1)=2e^{x}-1$ و تكافئ : $m=\frac{2e^{x}-1}{2xe^{x}+1}$ أي : $f(x)=m$ (مناقشة أفقية)

- إذا كان $m<\frac{1}{\alpha+1}$ أو $m>1$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .
- إذا كان $m=\frac{1}{\alpha+1}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا $x=\alpha$
- إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
- إذا كان $\frac{1}{\alpha+1}<m<-1$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين
- إذا كان $-1<m<0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

التمرين 40 : Meziane Maths



- g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2+(2-x)e^{x}$.
(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الشكل المقابل)

1) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2.21<\alpha<2.22$.

2) بقراءة بيانية عيّن إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

- نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{1+e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أن : $f(-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$ ، ثم عيّن حصرا للعدد $f(-\alpha)$.

4) (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (δ) .

5) أنشئ كلا من المنحنى (δ) و المنحنى (C_f) (تعطى $f(-\alpha)=0.48$).

الحل : Meziane Maths

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(2-x)e^x$.

1) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2,21<\alpha<2,22$.

• الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;3[$ و $]2.21;2.22[\subset]1;3[$ و $\begin{cases} g(2.21)\approx 0,08 \\ g(2.22)\approx -0,02 \end{cases}$ أي $g(2.21)\times g(2.22)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]1;3[$ حلا وحيدا α ، حيث $2,21<\alpha<2,22$.

بقراءة بيانية : إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ب) تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x+1}=0$$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

2)أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

الدالة f قابلة للأشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{2x(1+e^{-x})+x^2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{x((2+(x+2)e^{-x}))}{(1+e^{-x})^2}=\frac{xg(-x)}{(1+e^{-x})^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(-\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

3) لدينا : $f(-\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{1+e^{\alpha}}=\dfrac{\alpha^2}{1-\dfrac{2}{2-\alpha}}=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{-\alpha}{2-\alpha}}=-\alpha(2-\alpha)=\alpha(\alpha-2)$.

تعيين حصر للعدد $f(-\alpha)$:

لدينا :$2,21<\alpha<2,22$ و منه $0,21<\alpha-2<0,22$ إذن $0,46<\alpha(\alpha-2)<0,48$ و بالتالي $0,46<f(-\alpha)<0,49$.

4) (γ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في المعلم السابق .

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+e^{-x}}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=0$.

التفسير البياني : المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (γ) :

لدينا : $f(x)-x^2=\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $\dfrac{-x^2e^{-x}}{1+e^{-x}}\leq 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المنحنى (γ) .

5) الرسم :