تمـارين تحضير للبكالوريا

بكالوريا فرنسية ، بكالوريا الجزائر نظام قديم مترجمة

ترجمة وإعداد : الطالب بلوناس عبد المؤمن – ثانوية عبد الرحمن بن خلدون، عين جاسر – باتنة
جويلية 2012

أتمنى أن تكون هذه التمارين مفيدة للتحضير للبكالوريا والدعاء بالتوفيق لما تبقى من المشوار

ملاحظة : قد تحتوي هذه السلسلة على أخطاء **كتابية** لكن حتمًا ستكون نادرة الوجود

لقد أخذت ترجمة وكتابة هذه التمارين وقتا طويلا لذا يرجى عدم التعدي على هذا الحق,

Baccalauréat de France 2003–2004-2005–2006 الباكالوريا الفرنسية

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ حيث a عدد حقيقي و $0 < a < 1$.

1– نفرض في هذا السؤال أنَّ $a = \frac{1}{8}$.

أ) أحسب u_1 و u_2.

ب) في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة 8 cm)، أرسم – على المجال $[0;2]$– المستقيم (d) $y = x$ والمنحنى $(\mathcal{P})$ الممثل للدالة $f: x \longmapsto x(x-2)$.

ج) باستعمال (d) و $(\mathcal{P})$ أنشئ النقط A_1، A_2 و A_3 ذات الفواصل u_1، u_2 و u_3 على الترتيب.

2– في هذا السؤال a عدد حقيقي كيفي من $0 < a < 1$.

أ) برهن بالتراجع أنَّ $0 < u_n < 1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ب) بيّن أنَّ المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) ماذا يمكنك أن تستنتج؟

3– نفرض من جديد أنَّ $a = \frac{1}{8}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرَّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - u_n$.

أ) عبر – من أجل كل عدد طبيعي n – عن v_{n+1} بدلالة v_n.

ب) استنتج تعبيرًا لـv_n بدلالة n.

ج) أحسب نهاية المتتالية (v_n) ثم نهاية (u_n).

التمرين الثاني: (03 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $n \in \mathbb{N} \left| \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases} \right.$.

1– أدرس رتابة المتتالية (u_n).

2– أ) بيّن من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ $u_n > n^2$.

ب) ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

3– خمّن تعبيرًا للحد العام u_n بدلالة n ثم أثبت التعبير المخمن .

التمرين الثالث: (03 نقاط)

1– لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرَّفة بـ: $n \in \mathbb{N}$ | $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

أ) أحسب u_1، u_2 و u_3 واكتبها على شكل كسور غير قابلة للاختزال.

ب) قارن بين الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتالية (u_n) والمتتالية (w_n) المعرَّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{n}{n+1}$.

ج) بالاعتماد على الاستدلال بالتراجع، بيّن، من أجل كل عدد طبيعي n صحة المساواة: $u_n = w_n$.

2– لتكن (v_n) المتتالية ذات الحد العام v_n المعرفة بـ: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

أ) أثبت أنَّ : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) ليكن S_n المجموع المعرَّف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots v_n$.

– عبّر عن S_n بدلالة n.

– أحسب نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

التمرين الرَّابع: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرَّفة على المجال $[0; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث طول الوحدة $5cm$.

1– أدرس تغيرات الدالة f على المجال$[0; 2]$ ثم أرسم (C)

– بين من أجل كل x من $[1; 2]$ أنَّ:$f(x) \in [1; 2]$.

2– (u_n) و(v_n) متتاليتان معرَّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

و $v_0 = 2$ و $v_{n+1} = f(v_n)$.

أ) في المعلم السابق، أنشئ على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتالية (u_n) و(v_n) مع ترك آثار الإنشاء.

– أعط تخمينًا حول اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و(v_n).

ب) برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n على أنَّ : $1 \leq v_n \leq 2$ و $v_{n+1} \leq v_n$.

نقبل أنَّ $1 \leq u_n \leq 2$ و $u_n \leq u_{n+1}$ تبرهن بنفس الطَّريقة.

ج) بين، من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ: $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

– استنتج من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ: $v_n - u_n \geq 0$ و $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

د) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ : $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

هـ) بين أنَّ كل من المتتاليتين (u_n) و(v_n) نحو نفس العدد الحقيقي α يطلب تعيين القيمة المضبوطة له.

التمرين الخامس: (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ النقط $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,4)$ و $C(-1,1,1)$.

1– أ) أثبت أن النقط A، B و C ليست استقامية.

ب) أثبت أنَّ الشعاع $\vec{n}(3,4,-2)$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

– استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2– ليكن (P_1) و (P_2) المستويين المعرّفين بالمعادلتين: $2x+y+2z+1=0$ و $x-2y+6z=0$

أ) بين أنَّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين في مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب) المستقيم (D) والمستوي (ABC)، هل همَا متقاطعان أم متوازيان.

3– ليكن t عدد حقيقي موجب كيفي. نعتبر G_t مرجَّح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 1، 2 و t على الترتيب.

أ) برّر وجود النقطة G_t من أجل كل عدد حقيقي t موجب.

ب) I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب. حدد إحداثيات النقطة I.

ج) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{IG_t}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

4– أ) بين أنَّ مجموعة النقط G_t لما يمسح t المجال $[0;+\infty[$ هي القطعة $[IC]$.

ب) من أجل أي قيمة لـ t ، ينطبق J منتصف القطعة $[IC]$ مع النقطة G_t؟

التمرين السادس: (08 نقاط)

1– من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعتبر الدالة f_n المعرَّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f_n(x)=\ln x+\frac{x}{n}-1 \ .$$

أ) حدّد نهايات الدَّالة f_n عند 0 و $+\infty$ ثم أدرس اتجاه تغيرها على المجال $]0;+\infty[$.

ب) بيّن أنَّ الدالة $f_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α_n على مجال تعريفها. ثم أثبت أنَّ: $\alpha_n\in]1;e[$.

2– المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\ \vec{j})$، و (Γ) المنحنى الممثل لدالة اللوغاريتم النيبيري.

أ) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. جد معادلة المستقيم (Δ_n) المار بالنقطتين $A(0;1)$ و $B_n(n;0)$.

ب) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (Γ) والمستقيمات (Δ_1)، (Δ_2) و (Δ_3).

ج) بين أنَّ α_n فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (Δ_n).

د) أضبط قيمة α_1 ثم أعط تخمينًا حول اتجاه تغير المتتالية (α_n).

3– أ) عبّر عن $\ln\alpha_n$ بدلالة n و α_n.

ب) عبّر عن $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n ثم تحقق من أنَّ: $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.

ج) استنتج من السؤال السَّابق اتجاه تغير المتتالية (α_n).

د) بين أن المتتالية (α_n) متقاربة. نضع ℓ نهايتها. تحقق من أنَّ: $\ln \ell = 1$ واستنتج قيمة ℓ.

4– نرمز بـ$(\mathfrak{D}_n)$ إلى المجال المحدود في المنحنى (Γ)، محور الفواصل والمستقيمين ذي المعادلتين : $x = \alpha_n$ و $x = e$.

أ) أحسب بدلالة α_n مساحة الحيز $(\mathfrak{D}_n)$ ثم بين أن هذه المساحة مساوية لـ$\frac{{\alpha_n}^2}{n}$.

ب) بيّن أنَّ : $(e - \alpha_n) \leq \frac{\alpha_n^2}{n} \leq (e - \alpha_n) \ln \alpha_n$.

ج) استنتج حصرًا للعدد $n(e - \alpha_n)$.

د) المتتالية ذات الحد العام $n(e - \alpha_n)$ هل هي متقاربة؟ تسمح نتيجة هذا السؤال بتقدير سرعة تقارب المتتالية (α_n).

التمرين السابع: (05 نقاط)

نعتبر في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$، لتكن النقط $A(2; 1; 3)$، $B(-3; -1; 7)$ و $C(3; 2; 4)$.

1– بيّن أنَّ النقط A، B و C ليست في استقامية.

2– ليكن (d) المستقيم الممثل وسيطيًا بـ: $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$.

أ) بيّن أنَّ المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أكتب معادَلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3– لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) و المستوي (ABC).

أ) بيّن أنَّ H مرجح النقط $(A; -2)$، $(B; -1)$ و $(C; 2)$.

ب) حدّد طبيعة (Γ_1) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:
$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$ ثم حدد عناصرها المميزة.

ج) حدّد طبيعة (Γ_2) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:
$\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$ ثم حدد عناصرها المميزة.

د) حدد طبيعة والعناصر المميزة لتقاطع المجموعتين (Γ_1) و(Γ_2).

هـ) هل النقطة $S(-8; 1; 3)$ من مجموعة النقط الناتجة عن تقاطع (Γ_1) و(Γ_2)؟

Baccalauréat de France 2009 الباكالوريا الفرنسية

التمرين الأوَّل: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ولتكن النقط $A(3;4;0)$، $B(0;5;0)$ و $C(0;0;5)$ و I منتصف القطعة $[AB]$.

4– أنشئ النقط A، B، C و I في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5– بين أنَّ كل المثلثين OCB و OAC قائم ومتساوي الساقين.

– ما طبيعة المثلث ABC ؟

6– لتكن H النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{15}{19};\frac{45}{19};\frac{45}{19}\right)$.

أ) بين أنَّ النقط H، C و I استقامية.

ب) بيّن أنَّ H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

7– حساب المساحات والحجوم.

أ) أحسب مساحة المثلث OAB ثم حجم رباعي الوجوه $OABC$.

ب) أحسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).

ج) أحسب مساحة المثلث ABC.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n \in \mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1– f هي الدالة المعرَّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(1+x)$.

أ) أدرس تغيرات الدالة f ثم أثبت من أجل كل عدد حقيقي موجب: $\ln(1+x) \leq x$.

ب) استنتج، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، أنَّ : $\ln(u_n) \leq 1$.

ج) هل يمكن أن تتناهى المتتالية (u_n) إلى $+\infty$؟

2– نعتبر المتتالية (v_n)، المعرَّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n \in \mathbb{N}^*$، بـ: $v_n = \ln(u_n)$.

أ) نضع: $x = \frac{1}{n}$. عبر عن الحد العام v_n بدلالة x.

ب) أعط قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (لا يطلب التبرير).

أحسب عندئذ نهاية (v_n) عند $+\infty$.

ج) استنتج أنَّ المتتالية (u_n) متقاربة وحدّد نهايتها.

<u>التمرين الثالث:</u> (06 نقاط)

لتكن المعادلة (E): $\ln x = -x$

الهدف من هذا التمرين هو برهان أنَّ للمعادلة (E) حل وحيد α من المجال $]0; +\infty[$ واستعمال متتالية متقاربة لحصر الحل α.

الجزء الأول: نعتبر الدَّالة f المعرَّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \ln x$.

1– أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

2– بيّن أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α من المجال $]0; +\infty[$.

3– تحقق من أنَّ : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

الجزء الثاني: نعتبر الدَّالة g المعرَّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1– دراسة بعض خصائص الدالة g:

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ فـ$g(x)$ من هذا المجال.

ج) برهن أنه يكون عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان: $g(x) = x$.

2– لتكن المتتالية (u_n) المعرَّفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = g(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) باستعمال تغيرات الدالة g، برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

ب) استنتج أنَّ المتتالية (u_n) تتقارب نحو α.

3– البحث عن قيمة مقربة لـα :

أ) باستعمال آلة حاسبة علمية، حدد القيمة التقريبية إلى 10^{-6} لـu_{10}.

ب) نقبل أنَّ u_{10} هي قيمة تقريبية إلى 5×10^{-4} لـα .

استنتج حصرًا لـα بين عددين عشريين مكتوبين بـ3 أرقام بعد الفاصلة.

<u>التمرين الرابع:</u> (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ولتكن النقط $A(1; -1; 3)$، $B(0; 3; 1)$ و $C(6; -7; -1)$ و $D(2; 1; 3)$ و $E(4; -6; 2)$.

1– أ) بين أنَّ E مرجّح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

ب) استنتج طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2\sqrt{21}$.

2– أ) أثبت أن النقط A، B و D تحدد مستوي.

ب) أثبت أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD).

ج) حدد معادلة ديكارتية للمستوي (ABD).

3– أ) أعط تمثيلا وسيطيًا للمستقيم (EC).

ب) ما هي إحداثيات F نقطة تقاطع المستقيم (EC) والمستوي (ABD)؟

4– بيّن أن المجموعة (Γ) والمستوي (ABD) متقاطعين. حدد العناصر المميزة لهذا التقاطع.

Baccalauréat de France 2010 الباكالوريا الفرنسية

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

النقط A ، B و C معرفة في الفضاء السابق بـ: $A(1;-2;4)$ ، $B(-2;-6;5)$ و $C(-4;0;-3)$.

8- أ) بين أنَّ النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

ب) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1;-1;-1)$ ناظم للمستوي (ABC).

ج) حدد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

9- أ) أعط تمثيلاً وسيطيًا للمستقيم المَّار بالنقطة O والعمودي على المستوي (ABC).

ب) ما هي إحداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)؟

10- لتكن H المسقط العمودي لـO على المستقيم (BC) و t عدد حقيقي حيث: $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BC}$.

أ) بيّن أنَّ: $t=\frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.

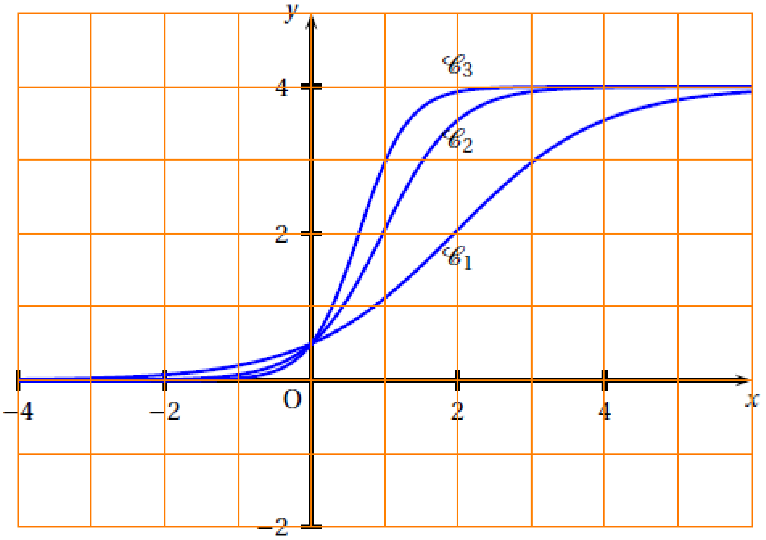
ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي t وإحداثيات النقطة H.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعرّف الدالة f_n المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_n(x)=\frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}.$$

نرمز بـ$(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. إليك $(\mathcal{C}_1)$ ،$(\mathcal{C}_2)$ و $(\mathcal{C}_3)$.



الجزء الأول: دراسة الدالة f_1 المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$.

1– تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من أنَّ : $f_1'(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$.

2– أ) بين أنَّ لـ$(\mathcal{C}_1)$ مستقيمين مقاربين يطلب إيجاد معادلتيهما.

ب) بيّن أنَّ الدالة f_1 متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

ج) أثبت من أجل كل عدد حقيقي أنَّ : $0 < f_1(x) < 4$.

3– أ) بين أن النقطة $(\ln 7\,; 2)$ f_1 مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

ب) أوجد معادلة لـ(T_1) المماس لـ$(\mathcal{C}_1)$ عند النقطة I_1.

ج) أرسم المماس (T_1).

4– أ) عين دالة أصلية للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب القيمة المتوسطة لـf_1 على المجال $[0; \ln 7]$.

الجزء الثاني: دراسة بعض خصائص الدالة f_n :

1– أثبت من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أنَّ $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ من المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

2– أ) بين أنه مهما تغيرت قيمة n من $\mathbb{N}^*$ فالمستقيم ذي المعادلة $y = 2$ يقطع $(\mathcal{C}_n)$ في نقطة وحيدة يطلب تعيين فاصلتها ولتكن I_n.

ب) حدد معادلة لـ(T_n) المماس لـ$(\mathcal{C}_n)$ عند النقطة I_n.

ج) أرسم المستقيمين (T_2) و (T_3).

3– لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ (من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم) بـ:

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)dx \; .$$

بيّن أنَّ (u_n) متتالية ثابتة.

التمرين الثالث: (06 نقاط)

الجزء الأوّل: لتكن g الدالة المعرَّفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - x\ln x$.

1– أحسب نهاية الدالة g عند 0 و $+\infty$.

2– أثبت أن g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأنَّ $g'(x) = -\ln x$.

3– أعط جدول تغيرات الدالة g.

الجزء الثاني: لتكن (u_n) المتتالية المعرَّفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{e^n}{n^n}$.

1– خمّن باستعمال آلة حاسبة:

أ) اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) نهاية المتتالية (u_n).

2– لتكن (v_n) المتتالية المعرَّفة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln(u_n)$.

أ) بين أنَّ : $v_n = n - n\ln n$.

ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية(v_n).

ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3– بيّن أنَّ المتتالية (u_n) محدودة.

4– برهن أنَّ المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

الهدف من هذا التمرين هو دراسة دالة ومتتالية مرافقة بهذه الدالة.

الجزء الأول: لتكن f الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل البياني للدالة f في منحنى المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$.

1– حدد نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$. ماذا تستنتج فيما يخص المنحنى $(\mathcal{C})$؟

2– دراسة تغيرات الدالة f:

أ) بين أنَّ مشتقة الدالة f ، يعبّر عنها من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا بـ:

$f'(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

ب) حدد إشارة f' واستنتج جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ج) بين أنَّ للمعادلة $f(x) = 2$ حل وحيد α موجب وأعط قيمته التدويرية المقربة إلى 10^{-2}.

3– أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول: ليكن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ التكامل I_n المعرَّف بـ: $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$.

1– أحسب I_2.

2– أ) برهن بالمكاملة بالتجزئة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ صحة العلاقة :

$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

ب) أحسب I_3.

3– أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ يكون لدينا: $0 \leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.

ب) استنتج حصرًا لـI_n ثم أحسب نهاية المتتالية (I_n).

<u>التمرين الخامس:</u> (06 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ليكن (D) المستقيم المار بالنقطتين : $A(1;-2;-1)$ و $B(3;-5;-2)$.

1– بين أنَّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) من الشكل :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}.$$

2– ليكن (D') المستقيم ذو التمثيل الوسيطي التالي:

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \quad k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}.$$

أثبت أنَّ المستقيمين (D) و (D') ليسَا من نفس المستوي.

3– $(\mathcal{P})$ المستوي ذي المعادلة الديكارتية : $4x + y + 5z + 3 = 0$.

أ) بين أن المستوي $(\mathcal{P})$ يضم المستقيم (D).

ب) بيّن أنَّ المستوي $(\mathcal{P})$ يقطع المستقيم (D') في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها.

4– ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{\omega}(1;1;-1)$.

بيّن أنَّ المستقيمين (Δ) و (D') متعامدين.

ب) بيّن أنَّ (Δ) يقطع –بصفة عمودية– المستقيم (D) في نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها.

<u>التمرين السادس:</u> (06 نقاط)

الجزء الأوّل: لتكن u الدالة المعرَّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1– أدرس تغيرات الدالة u على $]0;+\infty[$ وأحسب نهاياتها عند 0 و $+\infty$.

2– أ) بيّن أنَّ المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلا وحيدًا α من المجال $]0;+\infty[$.

ب) أوجد حصرًا بالتقريب إلى 10^{-2} للعدد α.

3– حدّد إشارة $u(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x.

4– أثبت صحة المساواة : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

<u>الجزء الثاني:</u> نعتبر الدَّالة f المعرَّفة والقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

ولتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

1– عبّر، من أجل كل x من $]0;+\infty[$، عن $f'(x)$ بدلالة $u(x)$.

2– استنتج تغيرات f على المجال $]0;+\infty[$.

<u>الجزء الثالث:</u> في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، ليكن :

- (Γ) المنحنى الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري $x \longmapsto \ln x$.
- A النقطة ذات الإحداثيات $(0,2)$.
- M مجموعة النقط من (Γ) ذات الفاصلة x من المجال $]0;+\infty[$.

1– عبّر عن المسافة بين النقطتين A و M بدلالة x ثم استنتج علاقة بين AM و $f(x)$.

2– لتكن g الدالة المعرَّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ) بيّن أنَّ لـ f و g نفس اتجاه التغير على المجال $]0;+\infty[$.

ب) استنتج إحداثيات النقطة M حتى تكون المسافة AM أصغر ما يمكن (نرمز لهذه النقطة من (Γ) بـ M_0)

ج) بيّن أنَّ : $AM_0=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3– هل المستقيم (AM_0) عمودي على مماس المنحنى (Γ) عند النقطة M_0؟

<u>التمرين السابع:</u> (04 نقاط)

الجزء الأوّل: لتكن المعادلة التفاضلية (E) : $y'+y=e^{-x}$.

1– بيّن أنَّ الدالة u المعرَّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=xe^{-x}$ حل للمعادلة (E).

2– لتكن المعادلة التفاضلية (E') : $y'+y=0$. حل المعادلة التفاضلية (E').

3– v الدالة المعرَّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. بين أنَّ الدالة v حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $v-u$ حل للمعادلة التفاضلية (E').

4– استنتج عندئذ كل حلول المعادلة (E).

5– عين الحل الخاص g للمعادلة التفاضلية (E) حيث : $g(0)=2$.

<u>التمرين الثامن:</u> (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

- النقط $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$.
- المستوي (P) المار من النقطة B و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظم له.
- (Q) المستوي المعرف بالمعادلة : $x-y+2z+4=0$.
- (S) الكرة ذات المركز A ونصف القطر AB.

1- بيّن أنَّ المعادلة الديكارتية للمستوى (P) : $2x+y-z-8=0$.

2- عيّن معادلة للكرة (S) في الفضاء المنسوب إلى المعلم السابق.

3- أ) أحسب المسافة بين النقطة A والمستوي (Q).

- استنتج الوضع النسبي للكرة (S) والمستوي (Q).

ب) هل المستوي (P) مماس للكرة (S)؟

4- C المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) حيث $C(0,2,-1)$.

أ) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متقاطعين في مستقيم (D).

ب) بيّن أن المستقيم (D) يقبل تمثيلا وسيطيا من الشكل :

$$\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases} \text{ مع } t\in\mathbb{R} .$$

ج) برهن أنَّ النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D).

د) (R) المستوي الذي يشمل النقطة A والمستقيم (D).

- هل العبارة الرياضية التالية صحيحة أم خاطئة مع التبرير:

"كل نقطة من المستوي (R) متساوية البعد عن النقطتين B و C"؟

التمرين التَّاسع: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ من أجل كل عدد طبيعي n.

1- أحسب الحدود u_1، u_2 و u_3.

2- أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ لدينا: $u_n\geq 0$.

ب) استنتج من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ لدينا: $u_n\geq n-3$.

ج) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3- نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$.

أ) بين أنَّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{24}{4}$.

ج) ليكن S_n المجموع المعرّف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

- عبر عن المجموع S_n بدلالة العدد n حيث $n\in\mathbb{N}$.

التمرين العاشر: (06 نقاط)

لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=1+\ln(1+x)$.

نرمز بـ$(\mathcal{C}_f)$ إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

وليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

الجزء الأول:

1– أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f.

ب) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2– g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - x$.

أ) أحسب النهاية : $\lim_{x\to -1} g(x)$.

ب) أحسب النهاية : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$. استنتج $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

ج) أدرس اتجاه تغير الدالة g، ثم أعط جدول تغيراتها.

د) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث α سالب و $\beta \in [2;3]$.

هـ) بالاستعانة بما سبق، حدّد إشارة $g(x)$. استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (D).

الجزء الثاني:

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

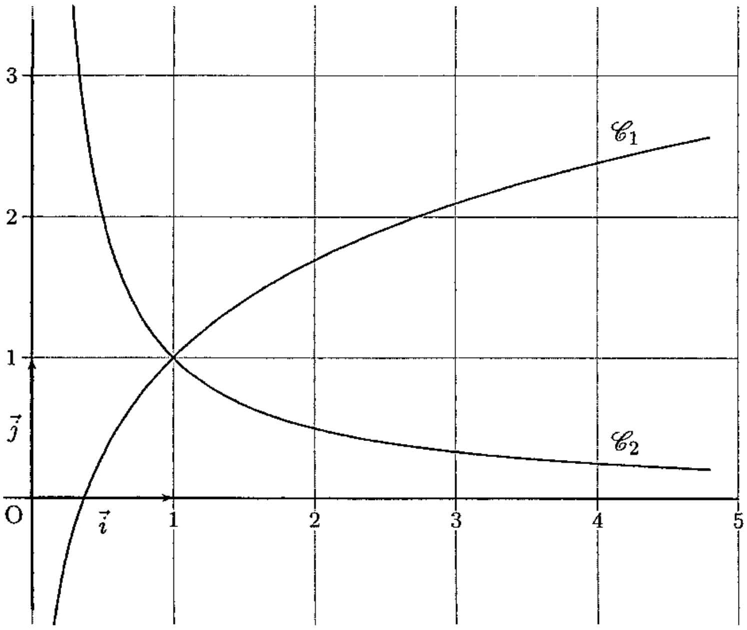
1– برهن من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \le u_n \le \beta$.

2– المتتالية (u_n) هل هي متقاربة؟ برّر جوابَك.

التمرين الأوَّل:

الجزء الأول:

يمثل الشكل المقابل منحيين بيانين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ والممثلين للدالتين f_1 و f_2 على الترتيب من أجل كل x من $]0;+\infty[$.



يُعطى:

- محور التراتيب مقارب لـ $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.
- محور الفواصل مقارب لـ $(\mathcal{C}_2)$.
- f_2 مستمرة ومتناقصة تمامًا على $]0;+\infty[$
- f_1 مستمرة ومتزايدة تمامًا على $]0;+\infty[$
- نهاية $f_1(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي هي $+\infty$.

من الاقتراحات الثلاث هناك واحدة فقط صحيحة. عينها دون برهان.

1– نهاية $f_2(x)$ لمَّا x يؤول إلى 0 هي: أ) 0 ب) $+\infty$ ج) مجهولة.

2– نهاية $f_2(x)$ لمَّا x يؤول إلى $+\infty$ هي: أ) 0 ب) 0.2 ج) مجهولة.

3– بجوار $+\infty$، $(\mathcal{C}_1)$ يقبل فرع لقطع مكافئ: أ) نعم ب) لا ج) مجهول.

4– جدول إشارة المقدار $f_2(x)-f_1(x)$ هو :

أ)

x	$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$\Vert$ $+$

ب)

x	$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$\Vert$ $-$

ج)

x	1 $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$\Vert$ $+$ 0 $-$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{x}$.

1– حدد نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

2– أدرس تغيرات الدالة f ثم عيّن إشارتها.

3– برهن أن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x\ln(x)-\ln(x)$ هي دالة أصلية للدالة f على مجال تعريفها.

4– أثبت أن المعادلة $F(x)=1-\frac{1}{e}$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1;+\infty[$

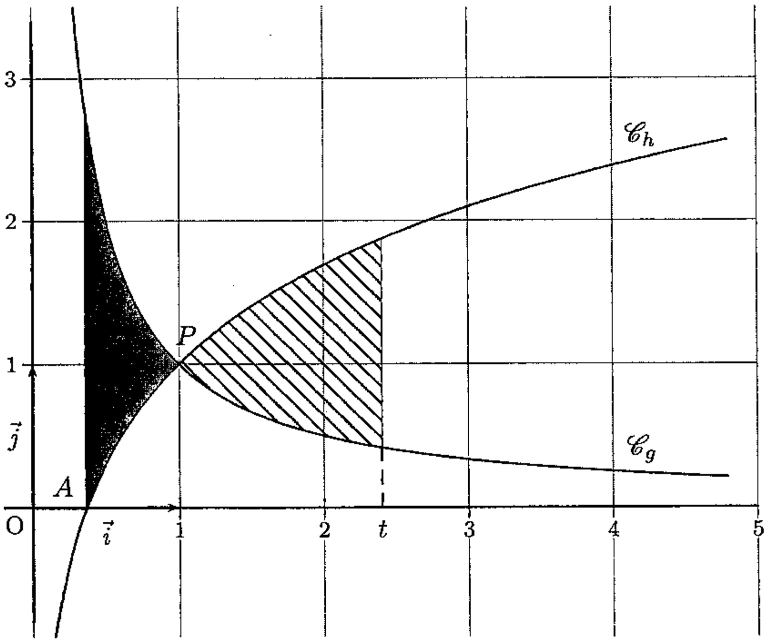
– أعط حصرًا لـ α بالتقريب إلى 10^{-1}.

الجزء الثالث:

g و h الدالتان المعرفتان من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا بـ:

$g(x) = \frac{1}{x}$ و $h(x) = \ln(x) + 1$.

يمثل الشكل الموالي المنحنيين البيانين لـg و h المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



1- A نقطة تقاطع المنحنى $(\mathcal{C}_h)$ ومحور الفواصل. عين إحداثيات النقطة A .

2- P نقطة تقاطع المنحنيين $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_h)$.
بين أنَّ : $P(1; 1)$

3- لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الجزء المحدود بالمنحنيين $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_h)$ والمستقيمين اللذان معادلتاهما $x = 1$ و $x = \frac{1}{e}$ (الجزء المضلل)

4- أ) عبّر عن المساحة $\mathcal{A}$ بالإعتماد على الدالة f (الجزء الثاني)
ب) أثبت أنّ : $\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{e}$

<u>التمرين الثاني:</u> (05 نقاط)

ليكن (D) مستقيم مدرّج مرفق بالمعلم $(O; \vec{\imath})$.

ولتكن النقط A_n من (D) المعرّفة بـ:

- A_0 هي النقطة O.
- A_1 هي النقطة ذات الفاصلة 1.
- من أجل عدد طبيعي n، النقطة A_{n+2} هي منتصف القطعة $[A_n A_{n+1}]$.

1- أ) أنشئ المستقيم (D) والنقط A_0، A_1، A_2، A_3، A_4، A_5 و A_6.
(حيث شعاع الوحدة $\vec{\imath} = 10cm$)

ب) من أجل كل عدد طبيعي n، تكن a_n فاصلة النقطة A_n.
– أحسب a_2، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6.

جـ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n المساواة : $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$.

2- برهن بالتراجع أنَّ $a_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

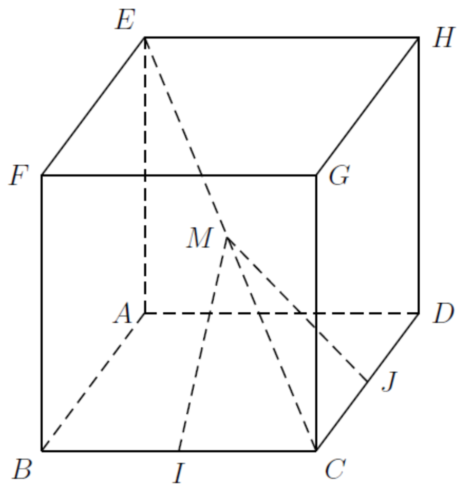
3– لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = a_n - \frac{2}{3}$

– أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ذات الأساس $-\frac{1}{2}$.

4– عين نهاية المتتالية (v_n).

– بين أنه ابتداءً من n_0 من $\mathbb{N}$ تصبح كل النقط A_n منطبقة يطلب تعيين فاصلتها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)



$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه **1** (وحدة اعتبارية).

لتكن I و J منتصفا $[BC]$ و [] على الترتيب.

M نقطة كيفية من الحرف $[CE]$. (لاحظ الشكل)

نرفق المستوي بالمعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1– أ) عيّن – من دون برهان – إحداثيات النقط C، E، I و J .

ب) أثبت وجود عدد حقيقي t من المجال $[0;1]$، حيث تكون $M(1-t;1-t;t)$.

2– أ) أثبت أن النقط C و E من المستوي محور القطعة $[IJ]$.

ب) استنتج أن المثلث MIJ متساوي الساقين رأسه الأساسي M.

جـ) عبر عن IM^2 بدلالة t.

3– ليكن θ قيس الزاوية $\widehat{IMJ}$ بالراديان ، حيث $\theta \in [0;\pi]$.

أ) برهن أن القيس θ يكون أعظميا إذا وفقط إذا كان $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ أعظميًا.

ب) استنتج أن القيس θ يكون أعظميا إذا كان IM أصغر ما يمكن.

جـ) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ: $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

د) استنتج وجود نقطة M_0 من مجموعة النقطة M في الضلع $[CE]$ حيث يكون قيس الزاوية $\widehat{IMJ}$ أعظميًا.

هـ) بين أن النقطة M_0 هي المسقط العمودي للنقطة I على الضلع $[CE]$.

التمرين الرابع: (05 نقاط)

الجزء الأول:

لتكن A، B و C ثلاث نقط من الفضاء و a، b و c أعداد حقيقية مجموعها غير معدوم.

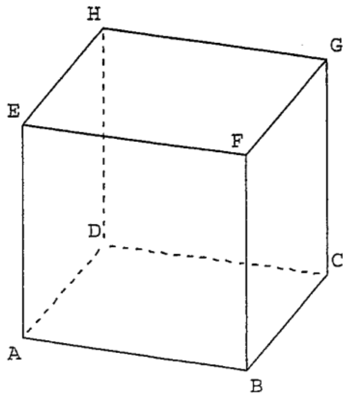
لتكن مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق : $\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{Mc}\| = k$

برهن أنه مجموعة النقط M كرة مركزها مرجح النقط A، B و C المثقلة بـa، b و c.

الجزء الثاني:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $1cm$ كما يبينه الشكل (الصحفة التالية).

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1– برهن أن الشعاع $\vec{n}(1,0,1)$ ناظم للمستوي (BCE).

– استنتج معادلة المستوي (BCE).

2– ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (BCE) في E.

– عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

3– بين أنَّ (Δ) قاطع لـ(ABC) في نقطة R نظيرة B بالنسبة إلى A.

4– أ. بين أن D هي مرجح الجملة $\{(\mathrm{R},1);(\mathrm{B},-1);(\mathrm{C},2)\}$.

ب. بين طبيعة والخصائص المميزة للمجموعة (S) من النقط M من الفضاء التي تحقق:

$\|\overrightarrow{\mathrm{MR}}-\overrightarrow{\mathrm{MB}}+2\overrightarrow{\mathrm{MC}}\|=2\sqrt{2}$.

ج. أثبت أن النقط B، E و G تنتمي إلى المجموعة (S).

د. برهن أن تقاطع (BCE) والمجموعة (S) دائرة يطلب تعيين نصف قطرها.

<u>التمرين الخامس:</u> (06 نقاط)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=e^x-x-1$.

1– أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2– عين حسب قيم x إشارة الدالة $g(x)$.

3– استنتج أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $e^x-x>0$.

الجزء الثاني:

لتكن الدالة f المعرّفة على $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

نقبل أنَّ f متزايدة تمامًا على المجال $[0;1]$.

1– أ) بين أنّه من أجل كل x من $[0;1]$ فـ: $f(x)\in[0;1]$.

ب) أرسم المنحنى (C).

2– ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.

أ) بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ فـ: $(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

ب) أدرس الوضعية النسبية للمستقيم (D) والمنحى (C) على المجال $[0;1]$.

3– أ) عين دالة أصلية لـ f على المجال $[0;1]$.

ب) أحسب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C)، المستقيم (D) المستقيمين ذي المعادلتين : $x = 0$ و $x = 1$.

الجزء الثالث:

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1– أنشئ على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) دون محي خطوط الإنشاء.د

2– أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3– استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

<u>التمرين السَّادس:</u> (06 نقاط)

I. لتكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = xe^x - 1$.

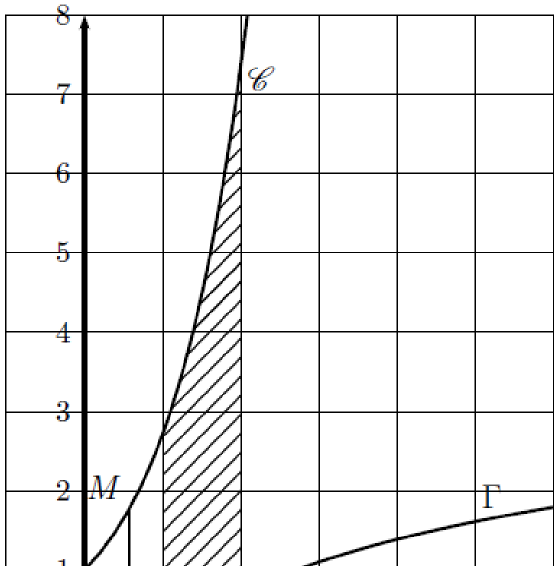
1– أحسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ وأدرس اتجاه تغيرها.

2– بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0;+\infty[$.

– أعط حصرًا لـ α بالتقريب إلى 10^{-2} .

3– عين حسب قيم x إشارة $f(x)$.

II. ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة الأسية و (Γ) لدالة اللوغاريتم النيبيري في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. – لاحظ الشكل –



ليكن x عدد حقيقي موجب تمامًا. M نقطة من $(\mathcal{C})$ فاصلتها x و N نقطة من (Γ) فاصلتها x . (ولدينا $e^x > \ln(x)$ من أجل كل عدد حقيقي موجب x).

1– بين أن المسافة MN أقصر ما يمكن لمّا $x = \alpha$.

أعط حصرًا لها بالتقريب إلى 10^{-2}.

2– باستعمال (الجزء **I**)، بين أنَّ: $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$.

استنتج أنَّ المماس لـ$(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة α

والمماس لـ(Γ) عند النقطة ذات نفس الفاصلة متوازيان.

III. 1– لتكن h الدالة المعرَّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = x\ln(x) - x$.

– بيّن أنَّ h دالة أصلية لدالة اللوغاريتم النيبيري على المجال $]0;+\infty[$.

2– أعط القيمة المضبوطة ثم المقربة إلى 10^{-2} لمساحة الحيّز المظلل في الشكل السابق بوحدة المساحات.

<u>التمرين السَّابع:</u> (05 نقاط)

$A(1,2,-1)$، $B(-3,-2,3)$ و $C(0,-2,-3)$ ثلاث نقط من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1– أ) بين أنَّ النقط A، B و C ليست على استقامية.

ب) بين أنَّ الشعاع $\vec{n}(2,-1,1)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC).

2– ليكن $(\mathcal{P})$ المستوي ذو المعادلة الديكارتية $x + y - z + 2 = 0$.

بين أن المستويين $(\mathcal{P})$ و (ABC) متعامدين.

3– G مرجّح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$.

أ) بين أن إحداثيات G في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي : $(2,0,-5)$.

ب) بين أنَّ المستقيم (CG) عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.

ج) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CG).

د) عين إحداثيات H نقطة تقاطع المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (CG).

4– (S) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$.

– أثبت أن مجموعة النقط (S) هي كرة يطلب تعيين خصائصها المميزة.

5– عين طبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي $(\mathcal{P})$ والكرة (S).

<u>التمرين الثامن:</u> (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + e^{-x}$.

$(\mathcal{C})$ المنحنى المنمذج للدالة f في معلم المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول:

1– أحسب نهاية الدالة f من أجل x كبير بالقدر الكافي.

2– أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

3– بيّن أن لـ$(\mathcal{C})$ مستقيم مقارب مائل، يطلب تعيين معادلته.

الجزء الثاني:

لتكن (u_n) المتتالية ذات الحدود الموجبة والمعرفة من أجل كل عدد طبيعي n موجب تمامًا بـ:

$u_1 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

1– بين باستعمال دالة g يطلب تعيين دستورها، أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب فـ:

$\ln(1+x) \leq x$.

2– استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فـ: $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.

3– برهن أنَّ: $f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

4– برهن بالتراجع أنه من أجل كل n (عدد طبيعي غير معدوم) فـ: $\ln(n) \leq u_n$.

5– استنتج نهاية المتتالية (u_n).

في بقية التمرين نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فـ: $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$.

6– أ) بيّن أنَّه من أجل كل عدد صحيح k أكبر تمامًا من 1 (مساوي أو أكبر من 2) فـ:

$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$.

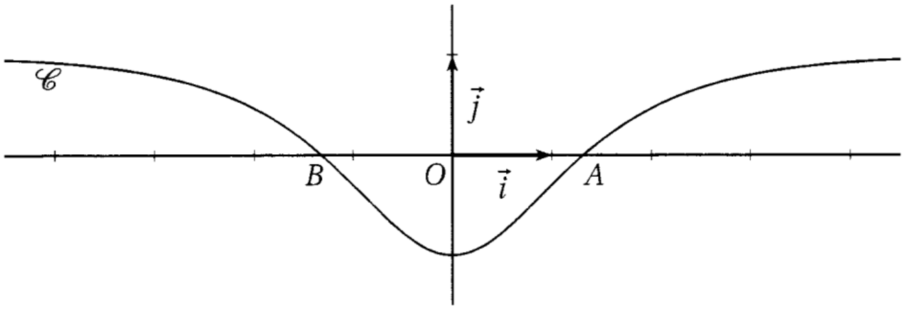
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فـ: $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

7– لدينا $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$. أثبت أن المتتالية $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geq 2}$ تتقارب نحو 1.

التمرين التاسع: (06 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

$(\mathcal{C})$ التمثيل البياني للدالة f في معلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



الجزء الأول: الهدف من هذا الجزء هو إثبات بعض الخصائص للدالة f والتي يمكن استنتاجها من البيان:

1– يظهر من البيان أنَّ f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي x أنَّ: $f'(x)=\frac{4e^{x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^{2}}$.

ب) استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2– انطلاقا من البيان يبدو أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ محور تناظر للمنحنى $(\mathcal{C})$

برر صحة الفرضية.

3– نرمز بـa لفاصلة النقطة A ولنضع $c=e^{a}$.

أ) بين أنّ العدد الحقيقي c هو حل للمعادلة $x^2-4x+1=0$.

– استنتج القيمة المضبوطة لـa فاصلة النقطة A.

ب) أعط إشارة $f(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

الجزء الثاني: نود دراسة بعض خصائص الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1– حدد اتجاه تغير الدالة F.

2– أوّل هندسيا العدد الحقيقي $F(a)$ ثم استنتج أنَّ : $-a\leq F(a)\leq 0$.

3– نبحث عن نهاية الدالة F من أجل $x\longrightarrow+\infty$:

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب t يكون: $f(t)\geq 1-4e^{t}$.

ب) استنتج أنَّ $F(x)\geq x-4$ من أجل كل عدد حقيقي موجب x ثم استنتج نهاية $F(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي $(x\longrightarrow+\infty)$.

4– باستعمال طريقة مناسبة حدّد نهاية $F(x)$ لما x يؤول إلى $(-\infty)$.

<u>التمرين العاشر :</u> (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرَّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1)\end{cases}$.

الجزء الأول: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

1– حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = x$.

2– أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 1]$.

استنتج أنه إذا كان $x \in [0; 1]$ فـ: $f(x) \in [0; 1]$.

الجزء الثاني:

1– برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أنَّ $u_n \in [0,1]$.

2– أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3– بين أنَّ المتتالية (u_n) متقاربة. حدد نهايتها.

التمرين الحادي عشر: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ولتكن النقط $A(-2; 0; 1)$، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$.

1– أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم الطولين AB و AC.

ب) استنتج قيمة مدورة إلى الوحدة للزاوية $\widehat{BAC}$.

ج) استنتج أنَّ النقط A، B و C ليست استقامية.

2– أثبت أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3– ليكن (P_1) و (P_2) المستويين ذي المعادلتين $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

– بين أنَّ المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين في مستقيم (D) حيث تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$$ مع $t \in \mathbb{R}$.

4– بين أن المستقيم (D) والمستوي (ABC) متقاطعان ثم حدد إحداثيات نقطة تقاطعها.

5– لتكن (S) الكرة ذات المركز $\Omega(1; -3; 1)$ ونصف القطر $r = 3$.

أ) أعط معادلة ديكارتية للكرة (S).

ب) أدرس تقاطع الكرة (S) والمستقيم (D).

ج) بين أن المستوي (ABC) مماسي للكرة (S)

– تكامل وحساب المساحات (بكالوريا فرنسا)　　　　بلوناس عبد المؤمن

التمرين الأوَّل: (07 نقاط)

I). لتكن φ الدالة المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1) أ− أحسب نهاية الدالة φ عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب− أدرس اتجاه تغير الدالة φ ثم أنشئ جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

2) بين أنَّ للمعادلة $\varphi(x) = 0$ حلان في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $\alpha \in [1; +\infty[$.

أعط حصرًا لـα سعته 10^{-2}.

3) استنتج إشارة المقدار $\varphi(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

II). f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ ، وليكن (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانين في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أنَّ المنحنيين (C_f) و (C_g) يقطعان محور التراتيب في نفس النقطة A ولهما نفس المماس عندها.

2) أ− بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.

ب− أدرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ(C_f) و (C_g).

3) أ− بين أنَّ الدالة h المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة $x \longmapsto f(x) - g(x)$.

ب− استنتج المسَاحة $\mathcal{A}$ (مقدرة بوحدة المساحة) للجزء من المستوي المحدود بـ(C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -\frac{1}{2}$ و $x = 0$.

− أحسب القيمة المضبوطة ثم الدورة إلى 10^{-4} لهذه المساحة.

<u>التمرين الثاني:</u> (05 نقاط)

f الدالة المعرَّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \ln x$، و (Γ) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ− أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

ب− بين أنَّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

2) أ− أثبت، من أجل كل عدد طبيعي n، أنَّ للمعادلة $f(x) = n$ حل وحيدٌ α_n على المجال $]0; +\infty[$.

ب− أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (Γ) ثم علم على محور الفواصل الأعداد α_0، α_1، ... ، α_5.

جـ− عين القيمة المضبوطة لـ α_1.

د− بين أنَّ المتتالية (α_n) متزايدة تمامًا على $\mathbb{N}$.

3) أ- أكتب معادلة (Δ) المماس لـ(Γ) عند النقطة ذات A ذات الفاصلة 1.

ب- ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ$h(x)=\ln x-x+1$.

استنتج الوضعية النسبية لـ(Δ) و(Γ) ثم أرسم (Δ).

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم يكون: $\frac{n+1}{2}<\alpha_n$.

أحسب نهاية المتتالية(α_n).

التمرين الأوَّل: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطتان A ، B ذات اللاحقتان $a=i$ و $b=1+i$ على الترتيب.

ليكن r_A الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، r_B الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r_O الدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

I). نعتبر النقطة C ذات اللاحقة $c=3i$، و D صورة النقطة C بالدوران r_A، G صورة D بالدوران r_B و H صورة C بالدوران r_O، حيث d، g و h لاحقات النقط D، G و H على الترتيب.

1– بين أنَّ : $d=-2+i$.

2– حدد كلا من g و h.

3– بين أنَّ الرباعي $CDGH$ مستطيل.

II). نعتبر M نقطة مختلفة عن O و A لاحقتها m. ولتكن النقطة N صورة النقطة M بالدوران r_A، النقطة P صورة النقطة N بالدوران r_B والنقطة Q صورة النقطة M بالدوران r_O.

حيث : n، p و q لاحقات النقط N، P و Q على الترتيب.

1– برهن أنَّ: $p=-m+1$، $q=-im$ و $n=im+1+i$.

2– بين أن الرباعي $MNPQ$ متوازي أضلاع.

3– أ) أثبت صحة المساواة: $\frac{m-n}{p-n}=i+\frac{1}{m}$.

ب) في هذا السؤال، كل بحث حتى وليس تام يؤخذ في الحساب:

– عين (Γ) مجموعة النقط M حتى يكون الرباعي $MNPQ$ مستطيلا.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث طول الوحدة $2cm$. J النقطة ذات اللاحقة i.

1– علم في المعلم السابق نعتبر النقط A، B، C و H ذات اللاحقات $a=-3-i$، $b=-2+4i$، $c=3-i$ و $h=-2$ على الترتيب.

2– بين أنَّ J مركز الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC ثم أحسب نصف قطرها.

3– أحسب – على الشكل الجبري– العدد المركب $\frac{b-c}{h-a}$.

– استنتج أنَّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدين.

نقبل في بقية التمرين أنَّ H نقطة تلاقي الإرتفاعات في المثلث ABC.

4– لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث ABC. حدّد g لاحقة النقطة G ثم أنشئ G في الشكل.

5– بين أنَّ النقط G، J و H على استقامة واحدة.

6– نعتبر النقطتان A' و K منتصفا $[BC]$ و $[AH]$ على الترتيب. لاحقة النقطة A' هي $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

أ) عين لاحقة النقطة K.

ب) بين أنَّ الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع.

<u>التمرين الثالث:</u> (05 نقاط)

نعتبر في المستوي $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث طول الوحدة $4\ cm$ النقطة A ذات اللاحقة $a = -1$، و التطبيق f، من المستوي $(\mathcal{P})$ نحو نفسه، الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن A ولاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة $z' = \frac{iz}{z+1}$، أي $M' = f(M)$.

1– حدّد لاحقة النقط M حيث $M' = M$.

2– برهن أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن A يكون:

$OM' = \frac{OM}{AM}$ و $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2}$ إلى 2π تقريبًا.

3– أ) لتكن النقطة B ذات اللاحقة $b = -\frac{1}{2} + i$.

علم في المعلم النقطة B ثم أنشئ (Δ) محور القطعة $[OA]$.

ب) أحسب –على الشكل الجبري– b' لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتطبيق f.

– تحقق من أنَّ B' تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ ذات المركز O ونصف القطر 1.

– علم النقطة B' ثم أرسم الدائرة $(\mathcal{C})$ في المعلم.

ج) باستعمال السؤال 2، برهن أنه إذا كانت نقطة M تنتمي إلى المحور (Δ)، فصورتها M' بالتطبيق f تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$.

د) لتكن C نقطة من المستوي $(\mathcal{P})$ حتى يكون AOC مثلثا متقايس الأضلاع (مباشر).

بالاستعانة بنتائج السؤال 2، أنشئ باستعمال المسطرة والمدور، صورة النقطة C بالتطبيق f.

4– في هذا السؤال، نهدف إلى تحديد –بطريقتين مختلفتين– (Γ) مجموعة النقط M المختلفة عن A و O حيث الصورة M' بالتطبيق f تنتمي إلى محور الفواصل (السؤالين أ) و ب) مستقلين)

أ) نضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $(x,y) \neq (-1,0)$ و $(x,y) \neq (0,0)$.

بين أنَّ الجزء الخيالي لـ z' مساوٍ لـ: $\frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.

استنتج طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة ثم أنشئها في المعلم السابق

ب) بالاستعانة بالسؤال 2، أوجد هندسيا طبيعة المجموعة (Γ).

<u>التمرين الرابع:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث طول الوحدة $2\ cm$.

نعتبر النقط A، B و D ذات اللاحقات i، $-2i$ و 1 على الترتيب و E نقطة من المستوي حيث يكون المثلث ADE متقايس أضلاع (في الاتجاه المباشر).

ليكن f التطبيق العددي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z (حيث $z \neq i$) النقطة M' ذات اللاحقة z' المعرفة بـ: $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1– بين أنَّ لاحقة النقطة E هي$(1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2– عبر –بالشكل الجبري– عن لاحقة النقطة D' صورة D بالتطبيق f.

3– أ) برهن أنَّه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i، يكون $(z'+2i)(z-i)=1$.

ب) استنتج أنَّه من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z (حيث $z \neq i$) يكون:

$BM' \times AM = 1$،

و $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح نسبي.

4– أ) برهن أن النقطتين D و E تنتمي إلى الدائرة (C) ذات المركز A ونصف القطر $\sqrt{2}$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 3–ب)، علم النقطة E' صورة النقطة E بالتطبيق f.

5– ما طبيعة المثلث $BD'E'$؟

<u>التمرين الخامس:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث طول الوحدة $1\ cm$.

1– من أجل كل نقطة M تختلف عن Ω، تكون النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r الذي مركزه Ω وزاويته θ إذا وفقط إذًا كان: $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ (+2k\pi) \end{cases}$.

– لتكن z،z' و ω لاحقات النقط M،M' و Ω على الترتيب. عبر عن z' بدلالة z، θ و ω.

2– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

تعطى الحلول على الشكل الجبري.

3– لتكن النقطتان A و B ذات اللاحقتان $a = 2\sqrt{3} - 2i$ و $b = 2\sqrt{3} + 2i$ على الترتيب.

أ) أكتب كلا من a و b على الشكل الأسّي.

ب) أرسم شكلا ثم علم النقطتان A و B.

ج) بين أنَّ المثلث OAB متقايس الأضلاع.

4– C النقطة ذات اللاحقة $c = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

– علم في الشكل السابق النقطتين C و D ثم أعط d لاحقة النقطة D.

5– بين أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاكٍ مركزه O يطلب تعيين نسبته.

6– ما طبيعة المثلث OAD؟ برر جوابك.

<u>التمرين السادس:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث طول الوحدة $1\ cm$.

1– لتكن النقطتان C و D لاحقتاهما $c = 3$ و $d = 1 - 3i$ على الترتيب. $\mathcal{S}_1$ التشابه الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي، نقطةً M' نظيره M بالنسبة للمحور $(O;\vec{u})$ – محور الأعدد الحقيقية–.

أ) علم النقط C و D ثم C_1 و D_1 صورها على الترتيب بالتشابه $\mathcal{S}_1$.

ب) أكتب العبارة المركبة للتحويل $\mathcal{S}_1$.

2– ليكن $\mathcal{S}_2$ التشابه المباشر المعرَّف بـ: C_1 صورتها C' ذات اللاحقة $c' = 1 + 4i$ والنقطة D_1 صورتها D' ذات اللاحقة $d' = -2 + 2i$.

– بين أنَّ عبارة التشابه $\mathcal{S}_2$ هي: $z' = iz + 1 + i$، ثم استنتج عناصره المميزة.

3– $\mathcal{S}$ التشابه المعرَّف بـ: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$. أعط العبارة المركبة لـ$\mathcal{S}$.

4– نقبل أنَّ $\mathcal{S}$ تشابه غير مباشر عبارته المركبة $z' = i\bar{z} + 1 + i$.

أ) ما هي صورة كل من النقطتين C و D بالتشابه $\mathcal{S}$؟

ب) لتكن H النقطة ذات اللاحقة h حيث $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.

بين أنَّ المثلث CDH متقايس الأضلاع مباشر.

ج) H' صورة H بالتشابه $\mathcal{S}$. بين طبيعة المثلث $C'D'H'$ ثم أنشئ H' (دون حساب h').

<u>التمرين السابع:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث طول الوحدة $1\ cm$.

A، B، C و P النقط التي لاحقاتها: $a = -2$، $b = 2 - 2i\sqrt{3}$، $c = 3 + 3i\sqrt{3}$ و $p = 10$.

I). دراسة الخصائص:

1– أ) علم النقطتين A و P في في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) حدد طويلتي العددين المركبين b و c .

ج) استعمل الدوائر ذات المركز O ونصف القطر 4 و6 على الترتيب لإنشاء B و C.

2– برهن أنَّ المثلث BCP متقايس الأضلاع.

3– نرمز بـr_A إلى الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{3}$.

أ) بين أن لاحقة النقطة Q صورة C بالدوران r_A هي: $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

ب) تحقق من صحة المساواة: $q = -2b$. ماذا تستنتج فيما يخص النقط B، O و Q ؟

4– لتكن R نظيرة النقطة C بالنسبة إلى مبدأ المعلم O.

أ) برهن أن المستقيمات (AP)، (BQ) و(CR) متقاطعة في النقطة O.

ب) استنتج أنَّ $AP = BQ = CR$.

II). لتكن f الدالة التي يرفق بكل نقطة M من المستوي العدد الحقيقي $f(M)$ والمعرفة بـ:

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1– أحسب $f(O)$.

2– لتكن M نقطة كيفية من المستوي و N صورتها بالدوران r_A.

– بين أنَّ: $MC = NQ$.

3– في هذا السؤال، كل بحث حتى وليس تام يؤخذ في الحساب:

باستعمال المتباينة المثلثية، أثبت أنه من أجل كل نقطة M من المستوي يكون: $f(M) \geq 12$.

التمرين الثامن: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، حيث طول الوحدة $1\ cm$.

B، C و H النقط التي لاحقاتها $b = 5i$ ، $c = 10$ و $h = 2 + 4i$ على الترتيب.

1– أ) بين أنَّ النقطة H تنتمي إلى المستقيم (BC).

ب) أحسب النسبة $\frac{h}{h-c}$ ثم استنتج أنَّ $\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2– أ) أحسب النسب : $\frac{BH}{AH}$ ، $\frac{BA}{AC}$، $\frac{AH}{CH}$.

ب) أثبت وجود تشابه مباشر $\mathcal{S}_1$ يحول المثلث CHA إلى المثلث AHB.

ج) حدد العبارة المركبّة لهذا التشابه $\mathcal{S}_1$ وعناصره المميزة.

3– في هذا السؤال، كل بحث حتى وليس تام يؤخذ في الحساب:

نرمز بـ $\mathcal{S}_2$ إلى التشابه الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z نقطة M' لاحقتها z'

حيث: $z' = (-1-2i)\bar{z} + 10$.

– بين أنَّ $\mathcal{S}_2$ مركب من تناظر محوري حول (Δ) وتشابه مباشر مركزه Ω من (Δ). ثم حدد (Δ).

4– أحسب نسبة التشابه المركب $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$ ثم استنتج النسبة بين مساحتي CHA و BAC.

التمرين التاسع: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

I). بين أنَّه من أجل كل عددين مركبين z و z' و n عدد طبيعي غير معدوك تكون المساوتين محققتين:

1– $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ ، 2– $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

II). نعتبر المعادلة (E): $z^4 = -4$ حيث z عدد مركب.

1– بيّن أنه إذا كان z حلٌّ للمعادلة (E)، فالعددين المركبين $-z$ و $\bar{z}$ حلين لـ(E) أيضًا.

2– ليكن العدد المركب z_0 المعرَّف بـ: $z_0 = 1 + i$.

– أكتب العدد المركب z_0 على الشكل الأسي وتحقق أنَّه حل للمعادلة (E).

3– استنتج حلول المعادلة (E).

III). A، B، C و D أربع نقط لاحقاتها: $z_A = 1 + i$، $z_B = -1 + i$، $z_C = -1 - i$ و $z_D =$ $1 - i$ على الترتيب.

r الدوران الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ولتكن E و F صورتا B و D على الترتيب بالدوران r .

1- أعط العبارة المركبة للدوران r.

2- أ) بين أنَّ لاحقة النقطة E، نرمز لها بـ z_E، مساوية لـ $-1 + \sqrt{3}$.

ب) حدد z_F لاحقة النقطة F.

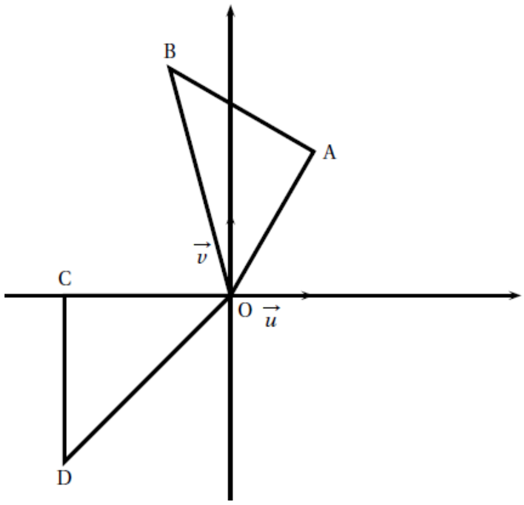
ج) أحسب النسبة $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$. ماذا تستنتج فيما يخص النقط A، E و F؟

التمرين العاشر: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A و B النقطتان ذات اللاحقتين: $a = 1 + i\sqrt{3}$ و $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$ على الترتيب.

I). نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. c لاحقة النقطة C صورة A بالدوران r، و d لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r. (لاحظ الشكل)



1- أكتب $\frac{-a}{b-a}$ على الشكل الجبري ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

2- أ) أثبت أنَّ $c = -2$ و $d = -2 - 2i$.

ب) بين أنَّ معادلة المستقيم (AC): $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$.

ج) أثبت أنَّ منتصف القطعة $[BD]$ ينتمي إلى المستقيم (AC).

II). ليكن θ عدد حقيقي من المجال $]0; 2\pi[$ ، r الدوران ذو المركز O والزاوية θ.

a' و b' لاحقتا حقيقي A' و B' صورتي النقطتين A و B على الترتيب.

الهدف هو إثبات أنَّ المستقيم (AA') يقطع $[BB']$ في منتصفها.

1- عبر عن a' بدلالة a و θ ثم b' بدلالة b و θ .

2- لتكن P النقطة ذات اللاحقة p منتصف القطعة $[AA']$ و Q النقطة ذات اللاحقة q منتصف $[BB']$.

أ) عبر عن p بدلالة a و θ ثم عن p بدلالة b و θ .

ب) أثبت أنَّ: $\frac{-a}{b-a} = \frac{-p}{q-p}$. استنتج الوضع النسبي للمستقيمين (OP) و (PQ).

ج) برهن أنَّ النقطة Q تنتمي إلى المستقيم (AA').

التمرين الحادي عشر: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتان A و B لاحقتاهما 2 و-2 على الترتيب. نعرِّف التطبيق f الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن A ولاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{\bar{Z}(Z-2)}{\bar{Z}-2}$.

1–أ) عيّن لاحقة النقطة P' صورة النقطة P ذات اللاحقة $1+i$ بالتحويل f.

ب) أثبت أنَّ المستقيم (AP) موازٍ لـ(BP') وعمودي على (PP').

2–حدد مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f.

3– أ) بين أنَّه من أجل كل عدد مركب z، فالجداء $(z-2)(\bar{z}-2)$ عدد حقيقي بحت.

– استنتج أنَّ العدد $\frac{Z'+2}{Z-2}$ حقيقي من أجل أجل $z \neq 2$.

ب) أثبت أن المستقيمين (AM) و(BM') متعامدين.

4–في هذا السؤال، كل بحث حتى وليس تام يؤخذ في الحساب:

لتكنM نقطة كيفية لا تنتمي إلى المستقيم (AB). عمم نتائج السؤال 1–ب).

5–أ) لتكنM تختلف عن A. استنتج من الأسئلة السَّابقة طبيعة مجموعة النقط M' صورة النقطة M بالتطبيق f.

ب) أنشئ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة Q ذات اللاحقة $3-2i$ وصورتها بالتحويل f.

<u>التمرين الثاني عشر :</u> (05 نقاط)

$ABCD$ مربَّع مباشر، لتكن النقط J، K وL منتصفات الأضلاع $[AB]$، $[CD]$ و$[DA]$ على الترتيب. (Γ_1) الدائرة ذات القطر $[AI]$ و(Γ_2) الدائرة ذات القطر $[BK]$.

I). 1– حدد نسبة وزاوية التشابه المباشر s حيث $s(A)=I$ و $s(B)=K$.

2– بين أنَّ الدائرتين (Γ_1) و(Γ_2) تتقاطعان في نقطتين:النقطة J وΩ مركز التشابه المباشر s.

3– أ) حدد صور المستقيمين (AC) و(BC) بالتشابه s ثم استنتج صورة النقطة C بهذا التشابه.

ب) لتكن E صورة النقطة I بالتشابه s. برهن أنَّ النقطة E منتصف الضلع $[ID]$.

4– بالاعتماد على التشابه $t = s \circ s$، بين أنَّ النقط A، Ω وE في استقامية.

II). نعتبر في هذا الجزء أنَّ طول ضلع المربع 10 وحدات، وليكن المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $\left(A;\frac{1}{10}\overrightarrow{AB};\frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1– أعط لاحقات النقط A، B، C و D .

2–برهن أنَّ عبارة التشابه المباشر s هي : $z' = \frac{i}{2}z+5+5i$.

3– أحسب ω لاحقة Ω مركز التشابه s.

4– أحسب z_E لاحقة النقطة E ثم بين ادرس استقامية النقط A، Ω و E .

5– بين أنَّ المستقيمات (AE)، (CL) و(DJ) متقاطعة في النقطة Ω.

التمرين الثالث عشر: (05 نقاط)

في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نرفق بكل نقطة M لاحقتها z حيث $z \neq 0$، النقطة M' منتصف القطعة $[MM_1]$ حيث M_1 النقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z}$.

النقطة M' تدعى صورة النقطة M.

1– أ) بين أنَّ : $OM \times OM_1 = 1$ ، $(\vec{u};\overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u};\overrightarrow{OM}) + 2k\pi$ حيث k صحيح نسبي.

ب) A نقطة من الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2. أنشئ النقطة A' صورة النقطة A.

2– أ) برهن أنَّ z' لاحقة النقطة M' من الشكل: $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

ب) لتكن B و C نقطتان لاحقتاهما $2i$ و $-2i$ على الترتيب.

أحسب لاحقتي النقطتين B' و C' صورتا B و C على الترتيب.

ج) علم النقط B ،C ،B' و C' في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3– حدد مجموعة النقط M الصامدة.

4– في هذا السؤال، كل بحث ولو لم يكن تامًا يؤخذ في الحسبان.

بين أنَّه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1، فصورتها M' تنتمي إلى القطعة $[KL]$ حيث K و L لاحقتاهما -1 و 1 على الترتيب.

التمرين الثالث عشر: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 2cm.

لتكن A، B و C النقط ذات اللاحقات $a = 3 - i$، $b = 1 - 3i$ و $c = -1 - i$ على الترتيب.

1– أ) علّم النقط A، B و C في المعلم السَّابق.

ب) ما هي طبيعة المثلث ABC؟

ج) بين أنَّ النقطتين A و B تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) ذات المركز O يطلب تعيين نصف قطرها.

2– لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها m و N لاحقتها n صورة A بالدوران r الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

– أعط العبارة المركبة للدوران r ثم استنتج عبارة n بدلالة m.

3– لتكن Q منتصف القطعة $[AN]$ ولاحقتها q. بيّن أنَّ: $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.

4– نعتبر أنَّ النقطة M من الدائرة (Γ).

أ) برر وجود عدد حقيقي θ حيث: $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

ب) أحسب $|q - 2 - i|$. ما هو المحل الهندسي Γ' لـ Q حين تمسح M الدائرة (Γ).

التمرين الرَّابع عشر: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 2cm.

لتكن A و B نقطتين لاحقتاهما $z_A = i$ و $z_B = 1 + 2i$ على الترتيب.

1– برر وجود تشابه مباشر وحيد S حيث: $S(O) = A$ و $S(A) = B$.
2– بين أن العبارة المركبة للتشابه S هي: $z' = (1-i)z + i$ وعين خصائصه المميزة.
(نرمز بـΩ إلى مركزه).
3– نعتبر متتالية النقط (A_n) حيث: A_0 مبدأ المعلم (O)، ومن أجل كل عدد طبيعي n يكن لدينا: $A_{n+1} = S(A_n)$، ولتكن z_n لاحقة النقطة A_n.
أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكن لدينا: $z_n = 1 - (1-i)^n$.
ب) حدد بدلالة العدد الطبيعي n لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ ثم قارن بين طويلتيهما.
– أحسب قيس الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
ج) استنتج كيفية إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n. أنشئ النقطتين A_3 و A_4.
4– ما هي نقط المتتالية (A_n) التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB)؟

<u>التمرين الخامس عشر:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث وحدة الطول 1cm.
f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = iz + 4 + 4i$.

1– أ) أوجد ω لاحقة النقطة الصامدة Ω بالتحويل f ثم بين أنَّ: $z' - 4i = i(z - 4i)$.
ب) استنتج طبيعية التحويل النقطي f وعناصره المميزة.
2– A و B نقطتان لاحقتاهما $a = 4 - 2i$ و $b = -4 + 6i$ على الترتيب.
أ) علم النقط A، B وΩ في المعلم المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
ب) حدد لاحقتي A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالتحويل النقطي f.
3– لتكن m، n،p و q لواحق النقط M، N، P و Q منتصفات القطع $[AA']$، $[A'B]$، $[BB']$ و $[B'A]$ على الترتيب.
أ) أحسب اللواحق m، n،p و q .
ب) بين أنَّ الرباعي $MNPQ$ متوازي أضلاع.
ج) أكتب العدد المركب $\frac{q-m}{n-m}$ على الشكل الجبري. فسّر النتيجة هندسيًا.
4– بين أنَّ المستقيمين $(B'A)$ و (ΩN) متعامدين.

<u>التمرين السادس عشر:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث وحدة الطول 2cm.
لتكن النقط A، B، C، D و E لاحقاتها: $z_A = 2i$، $z_B = 2$، $z_C = 4 + 6i$، $z_D = -1 + i$ و $z_E = -3 + 3i$ على الترتيب.

1– علّم النقط A، B، C، D و E في المعلم المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2– حدد طبيعة المثلث ABC.

3– ليكن S التشابه المباشر حيث $S(A) = D$ و $S(B) = A$.

أ) أعط العبارة المركبة للتشابه S ثم حدد زاويته، نسبته ومركزه Ω.

ب) بين أن المثلث DAE هو صورة المثلث ABC بالتشابه S ثم استنتج طبيعته.

4– لتكن (Γ_1) الدائرة ذات المركز $[AB]$ و (Γ_1) الدائرة ذات المركز $[AD]$. نرمز بـM إلى النقطة الثانية لتقاطع الدائرة (Γ_1) والمستقيم (BC) و بـN إلى النقطة الثانية لتقاطع الدائرة (Γ_2) والمستقيم (AB).

أ) حدد صورة النقطة M بالتشابه S واستنتج طبيعة المثلث ΩMN.

ب) بين أنَّ: $MB \times NE = MC \times NA$.

<u>التمرين السَّابع عشر:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 1cm.

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z^2 + 4z + 8 = 0$.

تُعطى الحلول على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي.

2– لتكن A و B النقطتين من المستوي لاحقتاهما $a = 2 - 2i$ و $b = -a$ على الترتيب.

أ) علم النقطتين A و B ثم حدد c لاحقة النقطة C، صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) لتكن D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. بين أنَّ لاحقة النقطة D هي $d = 2 - 6i$.

ج) علّم النقطتين C و D . ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

3– α عدد حقيقي غير معدوم، وليكن G_α مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;\alpha)\}$.

أ) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$.

ب) استنتج وأنشئ مجموعة النقط G_α لما يمسح α مجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة.

ج) عين قيمة α حتى تنطبق النقطة G_α على D.

4– نفرض أنَّ $\alpha = -2$. حدد وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق:

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$.

<u>التمرين الثامن عشر:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 2cm.

لتكن النقط A، B، C، D و E لاحقاتها $z_A = 2$، $z_B = 2 + 3i$، $z_C = 3i$، $z_D = -\frac{5}{2} + 3i$ و $z_E = -\frac{5}{2}$ على الترتيب.

1– علم النقط A، B، C، D و E في المعلم المركب السَّابق.

2– بين أنَّ المستطيلين $OABC$ و $ABDE$ متشابهين.

3– أ) أعط العبارة المركبة للتشابه المباشر s الذي يحول O إلى A و A إلى B.

ب) بين أن التشابه s يحول المستطيل $OABC$ إلى $ABDE$ ثم عين زاويته.

ج) لتكن Ω مركز التشابه s. باستعمال التركيب $s \circ s$، بين أن النقطة Ω تنتمي إلى المستقيمين (OB) و (AD). استنتج وضعية النقطة Ω.

4– أ) بين أن العبارة المركب للتشابه غير المباشر s' الذي يحول O إلى B و A به نقطة صامدة من الشكل: $z' = -\frac{3}{2}i\bar{z} + 2 + 3i$.

ب) بين أنَّ s' يحول $OABC$ إلى $BAED$.

5– في هذا السؤال، كل بحث حتى وليس تام يؤخذ في الحساب:

بين أنَّ s' هو تركيب لتناظر محوري حول (OA) متبوع بتشابه مباشر يطلب تعيين خصائصه المميزة.

التمرين التاسع عشر: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 4cm.

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 2 + i$ ولتكن (Γ) الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $\sqrt{2}$.

1– علّم النقط A ثم أرسم الدائرة (Γ).

2– أ) عين لاحقات نقطتي تقاطع الدائرة (Γ) والمحور $(O;\vec{u})$.

ب) B و C نقطتان لاحقتاهما $z_B = 1$ و $z_C = 3$ على الترتيب. أُحسب z_D لاحقة النقطة D النظيرة قطريًا للنقطة B على الدائرة (Γ).

3– لتكن M النقطة ذات اللاحقة $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

أ) أحسب العدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

ب) فسر هندسيًا طويلة العدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$، ثم استنتج أنَّ النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4– لتكن (Γ') الدائرة ذات القطر $[AB]$. المستقيم (BM) يقطع الدائرة (Γ') من جديد في نقطة N.

أ) بين أنَّ المستقيمين (DM) و (AN) متوازيين.

ب) عين لاحقة النقطة N.

5– نعني بـM' صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة (Γ').

التمرين العشرون: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 4cm.

M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب غير المعدوم z ولتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' حيث $z' = -\frac{1}{z}$.

1– أ) من أجل كل عدد مركب غير معدوم z، أوجد علاقة بين طويلتي z و z' ثم بين عمدتي z و z' .

ب) بين أنَّ النقط O، M و M' في استقامية.

ج) بين أنه من أجل كل عدد مركب غير معدوم z، لدينا المساواة: $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

2– A و B نقطتان لاحقتاهما 1 و -1 على الترتيب. ولتكن (C) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z-1| = 1$.

أ) ما هي طبيعة المجموعة (C)؟

ب) لتكن M نقطة من (C) لاحقتها z، تختلف عن المبدأ O.

– بين أنَّ $|z'| = |z'+1|$ ثم فسر المساواة هندسيا.

– هل إذا كان $|z'| = |z'+1|$ فـ $|z-1| = 1$؟

ج) أنشئ المجموعة (C). إذا كانت M نقطة من (C)، بين كيفية إنشاء النقطة M' ثم أنشئها.

<u>التمرين الحادي والعشرون:</u> (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث وحدة الطول 4cm.

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 2+i$ ولتكن الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر $\sqrt{2}$.

1– علم في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة A ثم أنشئ الدائرة (Γ).

2– أ) عين لاحقتي نقطتي تقاطع الدائرة (Γ) مع المحور $(O;\vec{u})$.

ب) لتكن B و C نقطتين من المستوي لاحقتاهما $z_B = 1$ و $z_C = 3$ على الترتيب.

– عين z_D لاحقة النقطة D النظيرة قطريًا لـ B على الدائرة C.

3– لتكن M النقطة ذات اللاحقة $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

أ) أحسب العدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

ب) فسر هندسيًا عمدة العدد المركب $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ ثم استنتج أنَّ النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4– نرمز بـ(Γ') إلى الدائرة ذات القطر $[AB]$. المستقيم (BM) يقطع من جديد الدائرة (Γ') في N.

أ) بين أنَّ المستقيمين (DM) و (AN) متوازيين.

ب) عين لاحقة النقطة N.

5– M' صورة النقطة M بالدوران ذي المركز B والزاوية $-\frac{\pi}{2}$. عين لاحقة النقطة M' ثم أثبت أنها تنتمي إلى الدائرة (Γ').

<u>التمرين الثاني والعشرون:</u> (04 نقاط)

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

نعتبر المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ –طول الوحدة 1cm– النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب $a = 3-2i$، $b = 3+2i$ و $c = 4i$.

2– أنشئ النقط A، B و C ثم بين أنَّ $OABC$ متوازي أضلاع.

3– عين لاحقة النقطة Ω مركز متوازي الأضلاع $OABC$.

4– عين وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$.

5– لتكن M نقطة من المستقيم (AB). نرمز بـβ إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة M. لتكن N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) بين أنَّ N ذات اللاحقة $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب) عين قيمة β حتى تنتمي N إلى (BC)؟

<u>التمرين الثالث والعشرون:</u> (04 نقاط)

نعتبر المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}-i$، $z_B=1-i\sqrt{3}$، $z_C=\sqrt{3}+i$ و $z_D=-1+i\sqrt{3}$.

1– أ) أنشئ النقط A، B، C و D في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث طول الوحدة 2cm.

ب) عين منتصفي القطعتين $[AC]$ و$[BD]$، ثم أحسب النسبة $\frac{z_B}{z_A}$. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

2– ليكن g التشابه المباشر ذو العبارة المركبة $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+2$.

أ) عين العناصر المميزة للتشابه g.

ب) أنشئ النقط E، F و J صور A، C و O بالتشابه g على الترتيب.

ج) ماذا تلاحظ فيما يخص النقط E، F و J ؟ تحقق من ذلك.