إعداد الأستاذ بن علو – ثانوية ابن رستم تيارت -

- n عدد طبيعي غير معدوم. نرمز بالرمز $n!$ للجداء $1\times 2\times....\times n$ و يُقرَأ " n عاملي "
- اصطلاحا نكتب: $0!=1$
- خاصية: من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(n+1)!=(n+1)n!$

-1 المبادئ الأساسية للعد:

أ- مبدأ المجموع: E مجموعة منتهية ، A_1 ؛ A_2 ؛..؛ A_p تجزئة من E. $card(A_1)+card(A_2)+...+card(A_P)=card(E)$

ب- مبدأ الجداء: إذا كان وضع يشمل على p مرحلة ذات n_1 ؛ n_2 ؛..؛ n_p إمكانية، فإن عدد الإمكانيات هو: $n_1\times n_2\times..\times n_p$

-2 قوائم عناصر مجموعة منتهية:

- عدد القوائم ذات p عنصر من E هو n^p
- عدد القوائم ذات p عنصر من E متمايزة مثنى مثنى هو: $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ مع $1\le p\le n$
- نسمي توفيقة p عنصر من E ، كل جزء من E له p عنصر. عددها $\binom{n}{p}=C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

خواص: $C_n^p=C_n^{n-p}$ ، $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

المثلث العددي (مثلث باسكال):

p \ n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$$C_{n-1}^{p-1} \rightarrow C_{n-1}^{p} \downarrow C_n^p$$

- دستور ثنائي الحد: $$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p}b^p$$

الاحتمالات

.1 قانون الاحتمال: نسمي قانون احتمال p ، كل دالة ترفق بكل حادثة من Ω عدد حقيقي من المجال $[0;1]$، تحقق: $p(e_1)+p(e_2)+...+p(e_n)=1$

حالة خاصة: عند تساوي الاحتمالات $p(A)=\frac{A \text{ عدد عناصر}}{\Omega \text{ عدد عناصر}}$

ج- خواص:

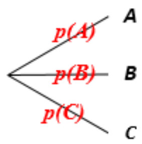
- A حادثة. $0\le p(A)\le 1$
- A و B حادثتان غير متلائمتان (أي $A\cap B=\varnothing$) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$
- A و B حادثتان كيفيتان $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- $p(\Omega)=1$ و $p(\varnothing)=0$. $\overline{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة A. $p(\overline{A})+p(A)=1$

.2 الاحتمالات الشرطية: احتمال الحادثة B علما أن A محققة، هو $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

.3 قواعد استعمال شجرة:

▪ القاعدة 01 " قانون العقدة ": مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع المرسومة من نفس العقدة يساوي 1

$p(A)+p(B)=1$



$p(A)+p(B)+p(C)=1$

▪ القاعدة 02: احتمال الحادثة الممثلة بمسار تساوي جداء الاحتمالات المكتوبة في فروع هذا المسار.

. $\underline{\quad p(A)\quad} A \underline{\quad p_A(B)\quad} B : p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$

. $\underline{\quad p(A)\quad} A \underline{\quad p_A(B)\quad} B \underline{\quad p_{A\cap B}(C)\quad} C : p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p_A(B)\times p_{A\cap B}(C)$

.4 الاحتمالات الكلية: $p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+...+p(A_n\cap B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)+...+p(A_n)p_{A_n}(B)$

القاعدة 03: احتمال الحادثة E هو مجموع احتمالات كل المسارات المؤدية للحادثة E.

.5 الاستقلالية: A و B مستقلتان بالنسبة إلى الاحتمال p يعني أن: $p(A\cap B)=p(B)\times p(A)$ يعني أن $P_A(B)=p(B)$

.6 المتغير العشوائي: نسمي متغير عشوائي، كل دالة عددية معرفة على Ω . الأمل الرياضي: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

التباين: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

.7 **قانون ثنائي الحد**: ليكن X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n,p)$. $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n,p)$. **الأمل الرياضي**: $E(X)=np$. **التباين**: $V(X)=np(1-p)=npq$

تمارين محلولة على الاحتمالات

التمرين 1:

يبدأ لاعب لعبة تشمل عدة جولات متتابعة. احتمال أن يخسر في الجولة الأولى هو $0,2$.
تجري اللعبة في ما بعد بالطريقة التالية: إذا ربح في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو $0,05$ وإذا خسر في جولة ما فإن احتمال أن يخسر الموالية هو $0,1$. نسمي: E_i: الحادثة: " اللاعب يخسر الجولة i " مع i عدد طبيعي غير معدوم و$p_i=p(E_i)$ نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يخسر اللاعب خلال الجولات الثلاثة الأولى. يمكن الاستعانة بشجرة.

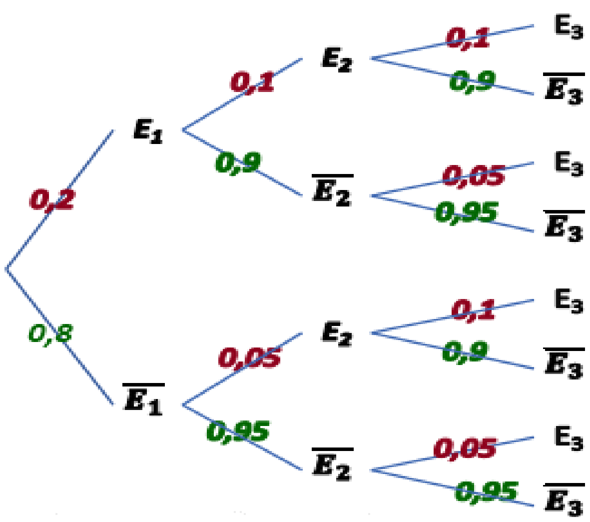
.1 أ - ما هي قيم X ؟
ب - بين أن $p(X=2)=0,031$
ج - عين قانون احتمال X.
د - أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X.

.2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$

.3 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = p_n - \frac{1}{19}$
أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب- استنتج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n ثم p_n بدلالة n.
ج- أحسب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

الحل المفصل للتمرين الأول

الشجرة المثقلة:



X	p
3	0,002
2	0,018
2	0,009
1	0,171
2	0,004
1	0,036
1	0,038
0	0,722

.1 أ - **قيم X :** $X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\}$

ب - **نبين أن احتمال الحادثة $p(X=2)=0,031$:**
$p(X=2)=0,018+0,009+0,004=0,031$

ج - **قانون احتمال X:**

x_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	0,722	0,245	0,031	0,002	1
$x_i.p_i$	0	0,245	0,062	0,006	0,313
$x_i^2\,p_i$	0	0,245	0,124	0,018	0,387

د - **حساب الأمل الرياضي و التباين للمتغير X:**
$E(X)=0,313$ ، $E(X^2)=0,387$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,387 - (0,313)^2 = 0,289031$$

.2 **استنتاج أن: $p_{n+1}=0,05p_n+0,05$:**

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p\left(E_{n+1} \cap (E_n \cup \overline{E_n})\right) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$$

أي $p_{n+1} = 0,1p_n + 0,05(1-p_n) = 0,05p_n + 0,05$

.3 أ- **نبين أن (u_n) متتالية هندسية:**

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = 0,05\left(u_n + \frac{1}{19}\right) - \frac{0,05}{19} = 0,05u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=0,05$ و حدها الأول $u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - -\frac{1}{19} = \frac{14}{95}$

ب - **استنتاج، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، u_n ثم p_n بدلالة n:**

$u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1}$ و $p_n = u_n + \frac{1}{19} = \frac{14}{95}(0,05)^{n-1} + \frac{1}{19}$

ج - **حساب النهاية لـ p_n لما n يؤول إلى $+\infty$:** $\lim_{+\infty} p_n = \frac{1}{19}$

التمرين2: يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء وكرتان سوداوان لا نفرق بينها عند اللمس.

-1 نقوم بثلاث سحبات متتابعة عشوائيا لكرة حسب الطريقة التالية: بعد كل سحب إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء، نعيدها للكيس وإذا كانت سوداء لا نعيدها إلى الكيس. ليكن X عدد الكرات السوداء المسحوبة بعد كل السحبات. يمكن الاستعانة بشجرة.

أ – عين قيم X

ب - بين أن احتمال الحصول على الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$

ج – أحسب $p(X=1)$

-2 عين قانون احتمال X وأحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X

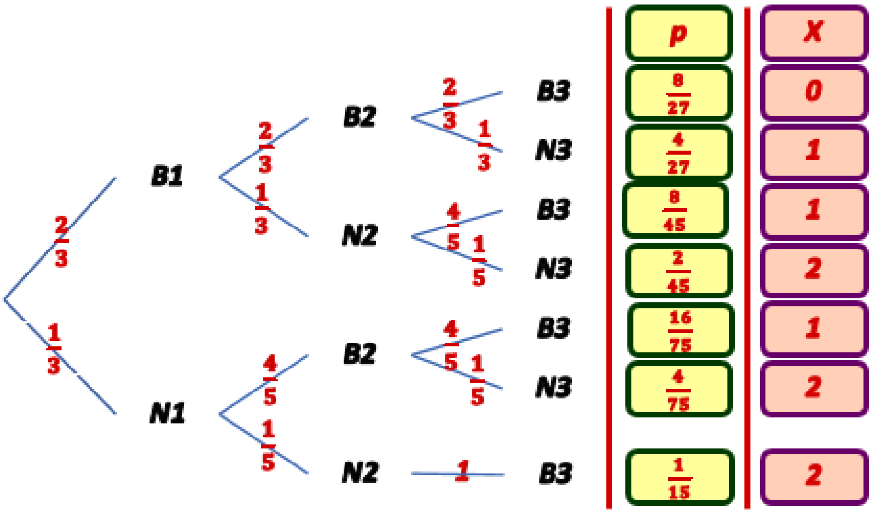
-3 نرجع إلى الكيس في حالته الأصلية: 4 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 3 نقوم بـ n سحب متتابعة بنفس الطريقة السابقة. ليكن k عدد طبيعي محصور بين 1 و n.

لتكن E الحادثة: " الكرة المسحوبة ذات الرتبة k سوداء و كل الكرات الأخرى المسحوبة بيضاء" و A الحادثة: " نحصل على كرة بيضاء في كل السحبات $k-1$ الأولى وكرة سوداء في السحبة ذات الرتبة k "

وC الحادثة: " نحصل على كرة بيضاء في كل من $(n-k)$ السحبات الأخيرة"

أحسب $p(A)$ ، $p_A(C)$ و $p(E)$.

الحل المفصل للتمرين الثاني



-1 إنشاء شجرة:

أ - قيم X: $X(\Omega)=\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$

ب - نبين أن احتمال الحصول على الكرة السوداء الوحيدة المسحوبة في السحب الثاني هو $\frac{8}{45}$.

$$p(BNB)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{45}$$

ج - حساب $p(X=1)$:

$$p(X=1)=\frac{4}{27}+\frac{8}{45}+\frac{16}{75}=\frac{364}{675}$$

-2 قانون احتمال X والأمل الرياضي والتباين لـ X

x_i	0	1	2	المجموع
$p_i=p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{364}{675}$	$\frac{37}{225}$	1
$x_i.p_i$	0	$\frac{364}{675}$	$\frac{74}{225}$	$E(X)=0{,}868$
$x_i^2p_i$	0	$\frac{364}{675}$	$\frac{148}{225}$	$E(X^2)=1{,}197$

الأمل الرياضي: $E(X)=0{,}868$

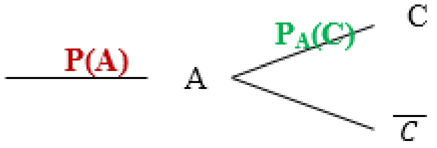
التباين: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=1{,}197-0{,}868^2=0{,}444$

الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=0{,}666$

-3 حساب $p(A)$:

$$A=\Big(\underbrace{BBB\ldots B}_{\text{مرة}(k-1)}N\Big)\quad ، \quad p(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

-4 حساب $p_A(C)$: نعلم أنه في السحب k ، سحبنا كرة سوداء و بالتالي تبقى كرة سوداء و 4 كرات بيضاء وبالتالي: $p_A(C)=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$



-5 حساب $p(N)$: $E=A\cap C=\Big(\underbrace{BBB\ldots B}_{\text{مرة}(k-1)}N\underbrace{BB\ldots .B}_{\text{مرة}(n-k)}\Big)$

لدينا: $p_A(C)=\frac{p(A\cap C)}{p(A)}=\frac{p(N)}{p(A)}$ يكافئ $p(E)=p(A)\times p_A(C)=\frac{2^{k-1}}{3^k}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}=\frac{2^{2n-k-1}}{3^k\times5^{n-k}}$

التمرين3: مربيان للطيور النادرة يقومان بتربية طيور يظهر لونها بعد شهر من تفقيس بيضها.

- بالنسبة للمربي الأول، بين اليوم الأول والشهر، 20% من الطيور ماتت و 70% تصبح ملونة و 10% تبقى بيضاء.
- بالنسبة للمربي الثاني، بين اليوم الأول والشهر، 7% من الطيور ماتت و 80% تصبح ملونة و 13% تبقى بيضاء.

بائع طيور اشترى كتاكيت عمرها يوم واحد: 70% من المربي الأول و 30% من المربي الثاني.

1- يشتري طفل طائر من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع، أي عمره يومان.

أ - بين أن احتمال أن يكون الطائر حيا بعد شهر هو $0{,}839$.

ب - عين احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر.

ج - علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول؟

2- يختار شخص عشوائيا وبطريقة مستقلة خمسة طيور من عند البائع يوم بعد وصولها إلى محل البائع.

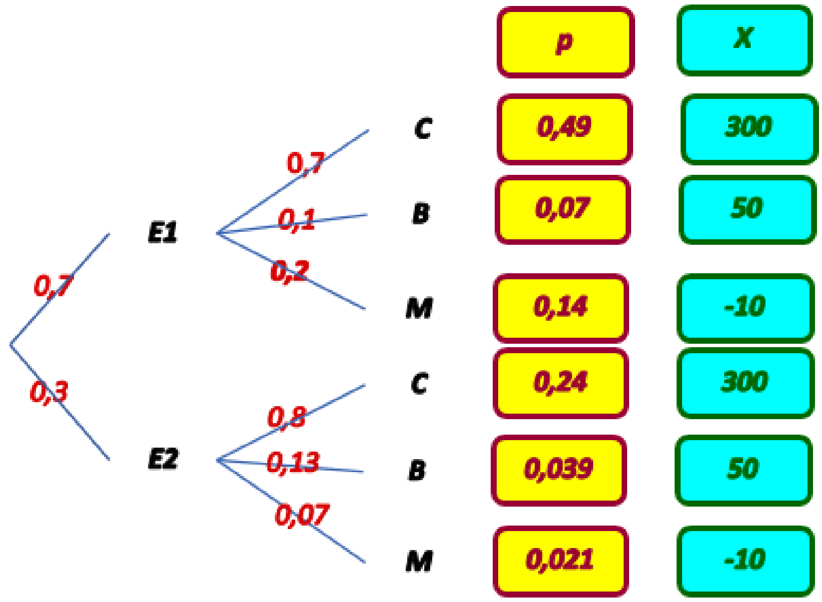
ما احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط حية؟

3- قرر بائع الطيور الاحتفاظ بالطيور حتى يظهر لونها أي بعد شهر لكي يبيعها بلونها النهائي. يربح 300 € عن كل طائر ملون و50 € عن كل طائر أبيض و يخسر 10 € عن كل طائر مات. نسمي X المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لبائع الطيور عن كل طائر اشتراه.

عين قانون الاحتمال لـ X وأمله الرياضي.

الحل المفصل

الشجرة:



1- أ - **نبين أن احتمال أن يكون الطائر حي بعد شهر هو 0,839:**

$p(V)=0{,}8\times0{,}7+0{,}93\times0{,}3=0{,}839$

ب - **احتمال أن يكون الطائر ملون بعد شهر:** $p(C)=0{,}7\times0{,}7+0{,}8\times0{,}3=0{,}73$

ج - **علما أن الطائر بقي أبيض بعد شهر، ما احتمال أن يكون من عند المربي الأول؟**

$$p_B(E1)=\frac{p(B\cap E1)}{p(B)}$$

$p(B\cap E1)=0{,}1\times0{,}7=0{,}07$ و $p(B)=0{,}1\times0{,}7+0{,}13\times0{,}3=0{,}109$

$$p_B(E1)=\frac{p(B\cap E1)}{p(B)}=\frac{0{,}07}{0{,}109}\cong 0{,}642$$

2- **احتمال أن تبقى بعد شهر، ثلاثة فقط حية:**

ليكن Y عدد الطيور التي تبقى حية بعد شهر. Y يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين $n=5$ و $p=p(V)=0{,}839$.

$$p(Y=3)=C_5^3p^3(1-p)^3=10(0{,}839)^3(0{,}161)^2\cong 0{,}153$$

3- **تعيين قانون الاحتمال لـ X و أمله الرياضي**

- **قيم X:** $X=\{-10\,;50\,;300\}$

$p(X=300)=p(C)=0{,}730$ $\quad$ $p(X=50)=p(B)=0{,}109$

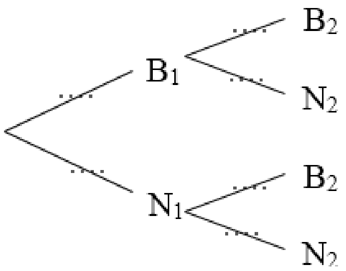
$$p(X=-10)=p(\overline{V})=1-p(V)=1-0{,}839=0{,}161$$

- **قانون الاحتمال:**

المجموع	300	50	-10	x_i
1	0,730	0,109	0,161	p_i
E(X)=222,84	219	5,45	-1,61	$x_i\,p_i$

- **الأمل الرياضي:** $E(X)=222{,}84$ DA

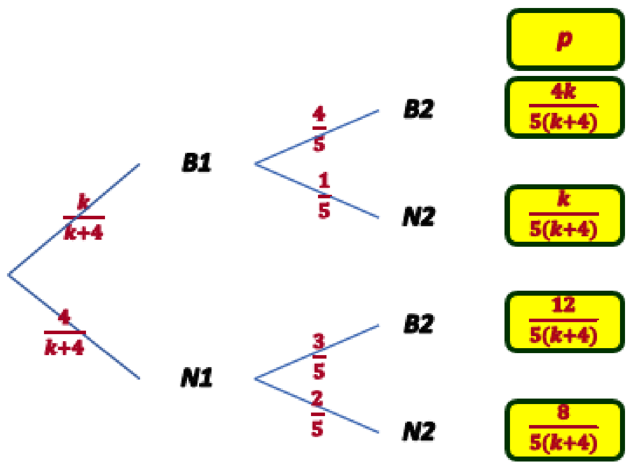
التمرين4: صندوقان U_1 و U_2 يحتويان على كرات غير معروفة عند اللمس.
U_1 يحتوي على k كرة بيضاء (k عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1) و 4 كرات سوداء. U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء.
نسحب عشوائيا كرة من U_1 و نضعها في U_2. نسحب عشوائيا بعد ذلك كرة من U_2. مجموع هذه العمليات تمثل اختبار.
نسمي B_1 الحادثة " الكرة المسحوبة من U_1 بيضاء " وN_1 الحادثة " الكرة المسحوبة من U_1 سوداء" .
نسمي B_2 الحادثة " الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء " وN_2 الحادثة " الكرة المسحوبة من U_2 سوداء" .



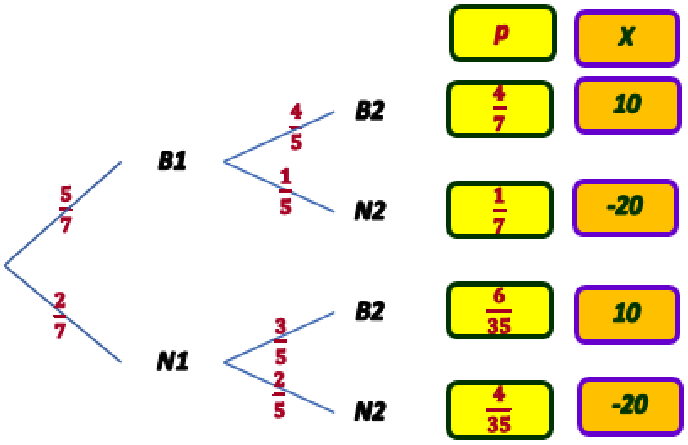
1- أ- أنقل وأتمم الشجرة.
ب- بين أن احتمال الحادثة B_2 يساوي $\frac{4K+12}{5K+20}$.
2- فيما تبقى نأخذ $k=10$.
راهن أحمد $20\ DA$ وقام باختبار(سحب كرة من U_1 ووضعها في U_2 ثم سحب بعد ذلك كرة من U_2).
إذا كانت الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء فيربح $30DA$ وإلا فلا يحصل على شيء و يخسر رهانه.
ليكن X المتغير العشوائي المساوي للربح الجبري لأحمد أي الفرق بين المبلغ المحصل عليه والمبلغ الذي راهنه.
أ - عين قيم X
ب - عين قانون احتمال X واحسب أمله الرياضي.
ج - هل اللعبة ملائمة لأحمد؟
3- يشارك أحمد n مرة متتابعة لهذه اللعبة. في بداية كل لعبة U_1 يحتوي على 10 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء و بالتالي الاختبارات المتتابعة مستقلة.
عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي $0,99$.

الحل المفصل

1- أ - إتمام الشجرة:



ب - نبين أن احتمال الحادثة B_2 يساوي $\frac{4K+12}{5K+20}$:
باستعمال قانون الاحتمالات الكلية نجد:
$$p(B_2)=\frac{k}{k+4}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{k+4}\times\frac{3}{5}=\frac{4k+12}{5k+20}$$ (وهو المطلوب)



2- أ - تعيين قيم X: $X(\Omega)=\{-20\ ;\ +10\}$
ب - قانون احتمال X وحساب أمله الرياضي:

x_i	-20	$+10$	المجموع
p_i	$\frac{9}{35}$	$\frac{26}{35}$	1
$x_i\,p_i$	$-\frac{180}{35}$	$\frac{260}{35}$	$E(X)=\frac{80}{35}$

$$E(X)=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}\cong 2,29\ DA$$

ج - هل اللعبة ملائمة لأحمد؟
بما أن $E(X)>0$ فإن اللعبة ملائمة لأحمد

3- تعيين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي $0,99$.
الاختبارات المتتابعة هي متطابقة ومستقلة، لدينا مخطط برنولي و المتغير العشوائي Y يتبع قانون ثنائي الحد$\left(n\,,\frac{26}{35}\right)B$
لدينا: الحادثة " تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 " هي الحادثة العكسية للحادثة " B_2 لا تتحقق" أي : $(Y\geq 1)=\overline{(Y=0)}$
$p\ (Y\geq 1)\geq 0,99$ يكافئ $1-p(Y=0)\geq 0,99$ أي $p(Y=0)\leq 0,01$ أي $\left(\frac{9}{35}\right)^n\leq 0,01$
يكافئ $n\geq\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{9}{35}\right)}$ أي $n\geq 9,01$.
أصغر عدد طبيعي n حتى يكون احتمال تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي $0,99$ هو 10.
تحقيق على الأقل مرة الحادثة B_2 يكون أكبر أو يساوي $0,99$ هو 10.

التمرين5: يحتوي كيس U_1 على 5 كرات بيضاء و 7 كرات سوداء ويحتوي كيس U_2 على كرة بيضاء و11 كرة سوداء. كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

1- لدينا زهرة نرد متجانسة تماما ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.
نرميها مرة: إذا حصلنا على الرقم 6، نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 ، وإلا نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_2.
نرمز بـ: $D6$ للحادثة: "نحصل على الرقم 6"

أ - لتكن B الحادثة: " نحصل على كرة بيضاء ". بين أن $p(B) = \frac{5}{36}$.

ب - إذا حصلنا على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من U_1 أكبر من احتمال أن تكون من U_2؟

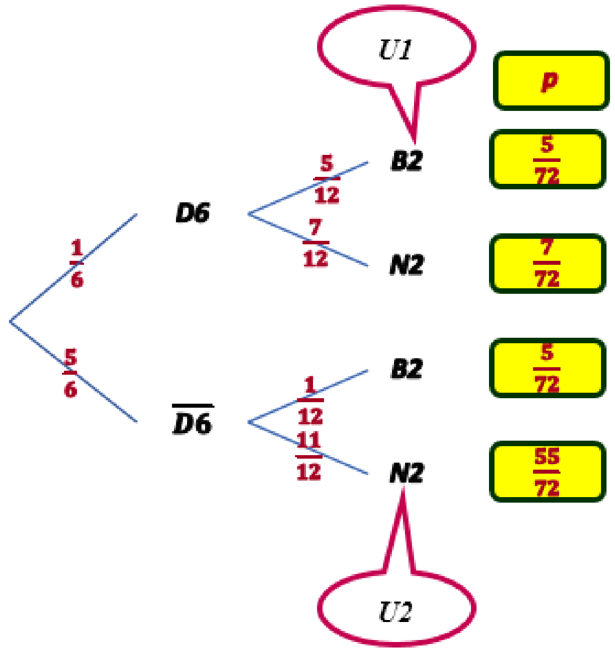
2- نكرر العملية المعرفة سابقا مرتين في شروط متطابقة ومستقلة (أي بعد الاختبار الأولى، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى).
ليكن x عدد طبيعي غير معدوم. نربح $x\ DA$ إذا حصلنا على كرة بيضاء ونخسر $20DA$ إذا حصلنا على كرة سوداء.
نرمز بـ X للمتغير العشوائي المرفق بالربح الجبري بعد الانتهاء من الاختبارين.

أ - عين قيم X.

ب - عين قانون احتمال X.

ج - عين الأمل الرياضي $E(X)$ بدلالة x

د - من أجل أي قيم للعدد x يكون $E(X) \geq 0$؟



الحل المفصل

1- الشجرة:

أ - نبين أن $p(B) = \frac{5}{36}$:

باستعمال قوانين الاحتمالات الكلية نجد: $p(B) = \frac{5}{72} + \frac{5}{72} = \frac{5}{36}$

ب - إذا حصلنا على كرة بيضاء، هل احتمال أن تكون من U_1 أكبر من احتمال أن تكون من U_2؟

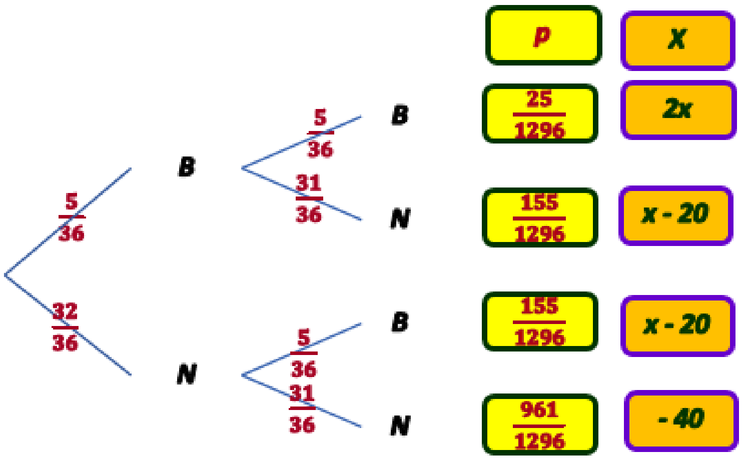
$$p_B(U_1) = \frac{p(B \cap U_1)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$p_B(U_2) = \frac{p(B \cap U_2)}{p(B)} = \frac{\left(\frac{5}{72}\right)}{\left(\frac{10}{72}\right)} = \frac{1}{2} = p_B(U_1)$$

2- الشجرة:

أ - تعيين قيم X:

$X(\Omega)=\{ -40 \ ; \ x-20 \ ; \ 2x \}$



ب - قانون احتمال X:

x_i	-40	x-20	2x	المجموع
p_i	$\frac{961}{1296}$	$\frac{310}{1296}$	$\frac{25}{1296}$	
$x_i p_i$	$\frac{-51840}{1296}$	$\frac{310x-6200}{1296}$	$\frac{50x}{1296}$	$E(X) = \frac{360x - 58040}{1296}$

ج - عين الأمل الرياضي $E(Y)$ بدلالة x: $E(X) = \frac{360x - 58040}{1296} = \frac{45x - 7255}{162}$

د - تعيين قيم للعدد x حيث: $E(Y) \geq 0$: $E(X) \geq 0$ يكافئ $45x - 7255 \geq 0$ يكافئ $x \geq 161{,}2$

قيم x حيث: $E(X) \geq 0$: هي الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 162.

التمرين6:

لدينا زهرة نرد ذات ستة أوجه متجانسة مرقمة من 1 إلى 6 وكيس يحتوي على 10 كرات غير معروفة عند اللمس: 6 خضراء و 4 حمراء.

تجري لعبة بمرحلتين:

المرحلة الأولى: نرمي زهرة النرد ونكتب الرقم المحصل عليه.

المرحلة الثانية:

- إذا كان الرقم المحصل عليه 1، نسحب كرة من الكيس: نربح إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء و يخسر في الحالة الأخرى.
- إذا كان الرقم المحصل عليه 3 أو 5، نسحب كرتين عشوائيا و في آن واحد من الكيس: نربح إذا كانت الكرتين المسحوبتين خضراوين و يخسر في الحالات الأخرى.
- إذا كان الرقم المحصل عليه زوجي، نسحب ثلاث كرات عشوائيا و في آن واحد من الكيس: نربح إذا كانت الكرات الثلاث المسحوبة خضراء و يخسر في الحالات الأخرى.

في آخر كل لعبة، نعيد في الكيس الكرة أو الكرات المسحوبة.

نعرف الحوادث التالية:

D_1 : "ظهور الرقم 1 في زهرة النرد " ؛ D_2 : "ظهور الرقم 3 أو 5 في زهرة النرد "

D_3 : "ظهور رقم زوجي في زهرة النرد " ؛ G : "السيد أحمد ربح اللعبة "

نذكر أن: $p_A(B)$ هو احتمال الحصول على B علما أن A محققة مع $p(A) \neq 0$.

1- أ - أنشئ شجرة مثقلة.

ب - عين الاحتمالات $p_{D_1}(G)$ ، $p_{D_2}(G)$ و $p_{D_3}(G)$.

ج - بين إذن أن $p(G) = \frac{157}{180}$.

2- ربحنا اللعبة. أحسب احتمال أن نحصل على الرقم 1 بزهرة النرد.

3- نجري ستة مرات نفس اللعبة. أحسب احتمال أن نربح بالضبط لعبتين فقط (تعطى النتيجة بتقريب 10^{-2}).

4- كم لعبة على الأقل نجريها حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من $0,9$؟

الحل المفصل

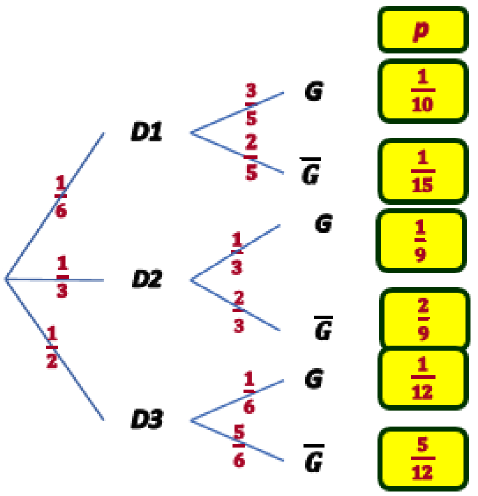
قبل البدء في الحل لنحسب بعض الاحتمالات المهمة

نسحب كرتين في آن واحد: احتمال سحب كرتين خضراوين في آن واحد من الكيس هو: $p = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$

نسحب ثلاث كرات في آن واحد: احتمال سحب ثلاث كرات خضراء في آن واحد من الكيس هو: $p = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

لنبدأ في الحل:

1- أ - إنشاء الشجرة:



ب - تعين الاحتمالات $p_{D_1}(G)$ ، $p_{D_2}(G)$ و $p_{D_3}(G)$:

$p_{D_1}(G) = \frac{3}{5}$ ، $p_{D_2}(G) = \frac{1}{3}$ ، $p_{D_3}(G) = \frac{1}{6}$.

ج - نبين إذن أن: $p(G) = \frac{157}{180}$:

$$p(G) = p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3)$$
$$= p_{D_1}(G)p(D_1) + p_{D_2}(G)p(D_2) + p_{D_3}(G)p(D_3)$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{53}{180}$$

2- احتمال أن نحصل على الرقم 1 بزهرة النرد علما أننا ربحنا اللعبة:

$$p_G(D_1) = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{53}{180}\right)} = \frac{18}{53}$$

3- احتمال أن نربح بالضبط لعبتين فقط

ليكن X المتغير العشوائي المساوي لعدد اللعبات التي نربحها. X يتبع قانون ثنائي الحد $B\left(6 ; \frac{53}{180}\right)$.

$$p(X = 2) = C_6^2 \left(\frac{53}{180}\right)^2 \left(1 - \frac{53}{180}\right)^4 = 15 \left(\frac{53}{180}\right)^2 \left(\frac{127}{180}\right)^4 \cong 0,32$$

4- كم لعبة على الأقل نجريها حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من $0,9$؟

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 \left(\frac{53}{180}\right)^0 \left(1 - \frac{53}{180}\right)^n = 1 - \left(\frac{127}{180}\right)^n$$

$p(X \geq 1) > 0,9$ يكافئ $1 - \left(\frac{127}{180}\right)^n > 0,9$ يكافئ $\left(\frac{127}{180}\right)^n < 0,1$

يكافئ $n \ln\left(\frac{127}{180}\right) > \ln(0,1)$ يكافئ $n > 6,9$

لا بد من 7 لعبات على الأقل حتى يكون احتمال أن نربح على الأقل واحدة أكبر تماما من $0,9$

التمرين7: مؤسسة تجارية أوكلت لشركة صبر الآراء بالهاتف تحقيقا حول نوعية منتجاتها. نقبل أنه عند المكالمة الأولى، احتمال أن لا يرفع الشخص السماعة هو $0,4$ و إذا رفع السماعة فأن احتمال أ، يرد على الأسئلة هو $0,3$.
يمكن إنشاء شجرة مثقلة.

1- نرمز بـ: D_1 للحادثة: "الشخص يرفع السماعة عند الاتصال الأول"، R_1 للحادثة : "الشخص يجيب على الأسئلة عند المكالمة الأولى"
أحسب احتمال الحادثة R_1.

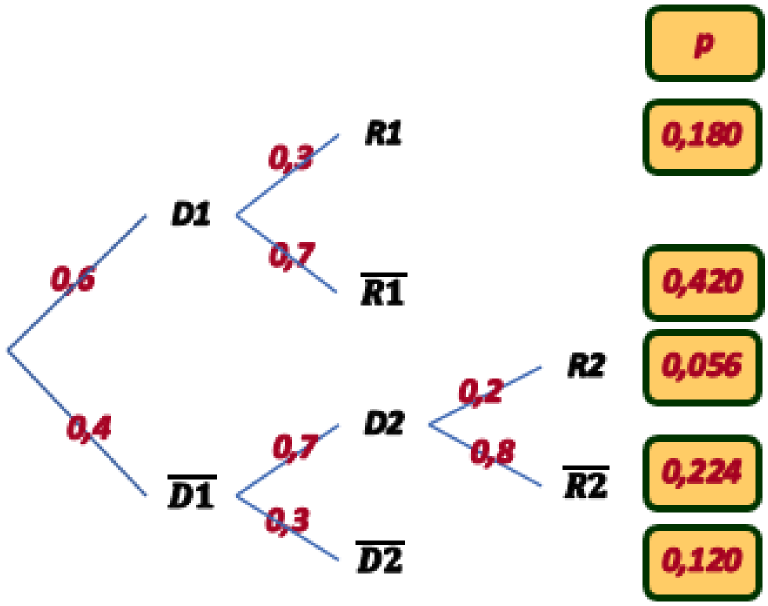
2- عندما لا يرفع شخص السماعة عند المكالمة الأولى، نعيد الاتصال به مرة ثانية.
احتمال أن لا يرفع الشخص السماعة مرة ثانية هو $0,3$ واحتمال أن يجيب عن الأسئلة علما أنه رفع السماعة هو $0,2$.
بعد الاتصال الثاني إن لم يرفع السماعة فلا نحاول الاتصال به.
نرمز بـ: D_2 للحادثة: "الشخص يرفع السماعة عند الاتصال الثاني"، R_2 للحادثة: "الشخص يجيب على الأسئلة عند المكالمة الثانية"
R للحادثة : " الشخص يجيب على الأسئلة "
بين أن احتمال الحادثة R هو $0,236$.

3- علما أن الشخص رد عن الأسئلة، أحسب احتمال أن تكون الأجوبة قدمت عند الاتصال الأول. (يعطى الجواب بمدور 10^{-3})

4- لدى محقق قائمة بـ 25 شخص للاتصال بهم. صبر الآراء لدى أشخاص من نفس القائمة مستقلة. ما احتمال أن يكون $20\ \%$ من الأشخاص تجيب عن أسئلة المحقق؟ (يعطى الجواب بمدور 10^{-3}).

الحل المفصل

إنشاء الشجرة:



1- حساب احتمال الحادثة R_1:

$p(R_1)=0,180$

2- بين أن احتمال الحادثة R هو $0,236$.

$p(R)=p(R_1)+p(R_2)=0,180+0,056=0,236$

3- علما أن الشخص رد عن الأسئلة، حساب احتمال أن تكون الأجوبة قدمت عند الاتصال الأول:

$$p_R(D_1)=\frac{p(R\cap D_1)}{P(R)}=\frac{0,180}{0,236}\cong 0,763$$

4- احتمال أن يكون $20\ \%$ من الأشخاص تجيب عن أسئلة المحقق:

20% من 25 شخص يساوي 5 أشخاص.

ليكن X عدد الأشخاص اللذين أجابوا عن أسئلة المحقق.

بما أن صبر الآراء لدى أشخاص من نفس القائمة مستقلة، فإن X يتبع قانون ثنائي الحد لبرنولي $B(25;0,236)$

$$p(X=5)=C_{25}^{5}(0,236)^5(1-0,236)^{20}=53130(0,236)^5(0,764)^{20}\cong 0,179$$

التمرين 8: عدد تلاميذ ثانوية ما موزعين على الشكل التالي: 40% سنة أولى و 35% سنة ثانية. البنات تمثل 60% من تلاميذ السنة الأولى ، 70% تلاميذ السنة الثانية و 80% من تلاميذ السنة الثالثة.

-1 نختار عشوائيا تلميذ من الثانوية.

نرمز بـ : S الحادثة : " التلميذ المختار من السنة الأولى" P الحادثة : " التلميذ المختار من السنة الثانية"

T الحادثة : " التلميذ المختار من السنة الثالثة" F الحادثة : " التلميذ المختار بنت"

أ - أنشئ الشجرة المثقلة المرفقة بالمعطيات.

ب - أحسب احتمال أن نختار:

- تلميذ من السنة الثالثة.
- بنت من السنة الثالثة.

ج - بين أن احتمال اختيار بنت هو $0,685$.

-2 يوجد من بين تلاميذ السنة الثالثة ثانوي من يمارسون التربية البدنية و من لا يمارسون التربية البدنية.

قررت إدارة الثانوية أن تجري امتحان كتابي اختياري في مادة التربية البدنية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي.

- احتمال أن يكون التلميذ المختار لم يمتحن ويمارس التربية البدنية هو $0,02$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار امتحن ولا يمارس التربية البدنية هو $0,03$.
- احتمال أن يكون التلميذ المختار امتحن هو $0,4$.

نرمز بـ: A الحادثة : "التلميذ المختار يمارس التربية البدنية" B الحادثة :" التلميذ المختار امتحن"

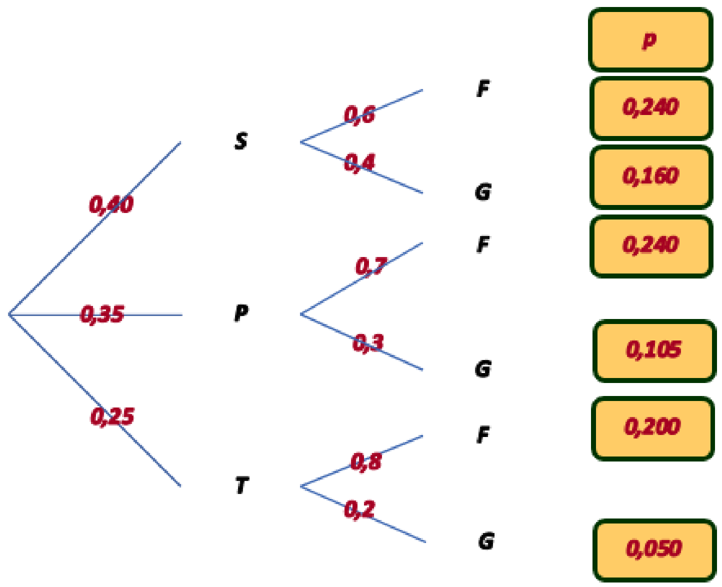
أ - بين أن احتمال أن يمارس التربية البدنية ويُمتحن هو $0,37$

ب - أحسب احتمال أن يمارس التربية البدنية.

ج - أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار أُمتحن علما أنه يمارس التربية البدنية

الحل المفصل

-1 أ - الشجرة:



ب - حساب احتمال أن نختار:

تلميذ من السنة الثالثة: $P(T)=0,25$

- بنت من السنة الثالثة: $P(F\cap T)=0,2$

ج - نبين أن احتمال اختيار بنت هو $0,685$:

$P(F) = 0,24 + 0,245 + 0,2 = 0,685$

-2 أ - بين أن احتمال أن يمارس التربية البدنية و يُمتحن هو $,37$:

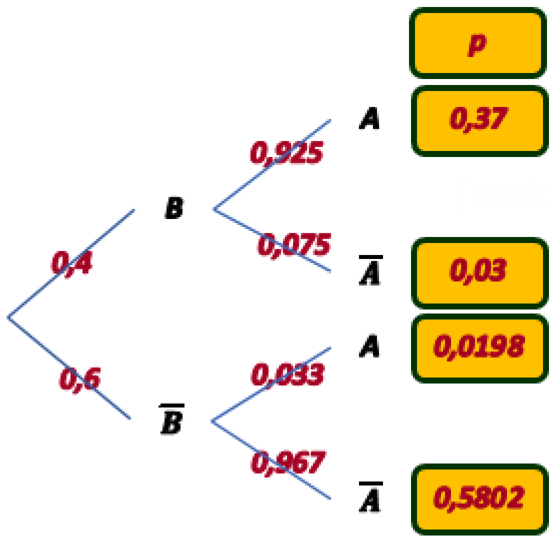
$P(A\cap B)=0,4\times0,925=0,37$

ب - احتمال أن يمارس التربية البدنية:

$P(A)=0,37+0,02=0,39$

ج - احتمال أن يكون التلميذ المختار أُمتحن علما أنه يمارس التربية البدنية:

$$p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{0,37}{0,39} = 0,9487$$



التمرين9:

جواب واحد صحيح فقط أذكر الجواب الصحيح. التبرير مطلوب.

تذكير: الترميز $p_A(B)$ يرمز إلى احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة.

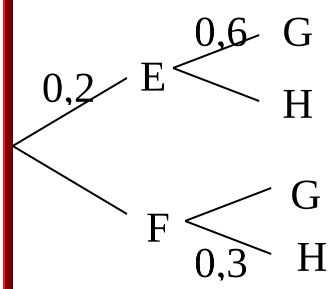
1- A و B حادثتان مستقلتان حيث $p(A)=0,7$ و $p(B)=0,2$:

ج1: $p(A\cap B)=0,14$ ج2: $p(A\cup B)=0,9$ ج3: $p_A(B)=0,5$

2- قطعة نقدية هي بحيث احتمال ظهور " وجه" يساوي $\frac{1}{3}$. نرميها 4 مرات متتابعة. ما احتمال الحصول على الأقل مرة " وجه" :

ج1: $\frac{18}{81}$ ج2: $\frac{72}{81}$ ج3: $\frac{65}{81}$

3- نعتبر الشجرة المثقلة التالية:



ما احتمال $p_H(F)$ ؟ ج1: $p_H(F)=0,75$ ج2: $p_H(F)=0,56$ ج3: $p_H(F)=0,856$

4- يحتوي صندوق 5 كريات بيضاء و 5كريات سوداء. نسحب ، مع الإعادة ، كرة عشوائيا n مرة متتابعة $(n>1)$. ما احتمال الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون ؟

ج1: $1-\frac{1}{2^n}$ ج2: $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ ج3: $1-\frac{1}{2^{2n}}$

الحل المفصل

1- الجواب الصحيح هو: ج1: $p(A\cap B)=0,14$

التبرير: بما أن A و B حادثتان مستقلتان فإن $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)=0,7\times 0,2=0,14$

ملاحظة: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,7+0,2-0,14=0,76$ و $p_A(B)=p(B)=0,2$

2- الجواب الصحيح هو: ج3: $\frac{65}{81}$

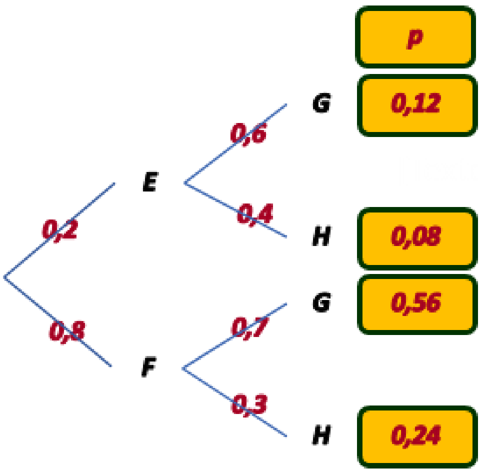
التبرير: لدينا: $p(F)=\frac{1}{3}$ و $p(P)=\frac{2}{3}$

لتكن A الحادثة: "الحصول على الأقل مرة " وجه" و $\bar{A}$ الحادثة: "الحصول على أربع مرات " ظهر"

$$p(A)=1-p(\bar{A})=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81}$$

3- الجواب الصحيح هو: ج1: $p_H(F)=0,75$

التبرير: لدينا: $p_H(F)=\frac{p(H\cap F)}{p(H)}=\frac{0,24}{0,24+0,08}=\frac{0,24}{0,32}=0,75$



4- الجواب الصحيح هو: ج2: $1-\frac{1}{2^{n-1}}$

التبرير: لدينا: $p(N)=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{1}{2}$

لتكن A الحادثة: "الحصول على كريات ليست كلها من نفس اللون" و $\bar{A}$ الحادثة: "الحصول على كريات كلها من نفس اللون

$$p(A)=1-p(\bar{A})=1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

التمرين10:

مدة صلاحية، معبرة بالساعات، لمفكرة إليكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

نذكر أنه من أجل كل $t \geq 0$، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

الدالة R المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $R(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1- *Restitution organisée des connaissances*- إعادة استثمار المفاهيم -

أ - برهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $R(t) = e^{-\lambda t}$

ب - برهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة، أي أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t+s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2- في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0{,}00026$.

أ - أحسب $P(X \leq 1000)$ وَ $P(X > 1000)$.

ب - علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

ج - علما أن مفكرة اشتغلت 2000 ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل 3000 ساعة؟ هل يمكن توقع هذه النتيجة؟

الحل المفصل

مدة صلاحية؛ مَعبَرة بالساعات، لمفكرة إليكترونية هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

نذكر أنه من أجل كل $t \geq 0$ ، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

الدالة R المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $R(t) = P(X > t)$ تسمى دالة وفاء. - *Fiabilité* -

1- *Restitution organisée des connaissances* - إعادة استثمار المفاهيم -

أ - <u>نبرهن أنه من أجل كل $t \geq 0$ لدينا: $R(t) = e^{-\lambda t}$:</u>

لدينا: من أجل كل عدد حقيقي $t \geq 0$ ، $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

و منه: $R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

ب - <u>نبرهن أن المتغير X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة:</u>

أي نبرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t+s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

لدينا: $P_{X>t}(X > t +) = \frac{P(\{X>t+s\} \cap \{X>t\})}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$

ومنه: من أجل كل عدد حقيقي $s \geq 0$ ، الاحتمال الشرطي $P_{X>t}(X > t+s)$ مستقل عن العدد $t \geq 0$.

2- في هذا السؤال، نأخذ $\lambda = 0{,}00026$

أ - <u>حساب $P(X \leq 1000)$ وَ $P(X > 1000)$:</u>

لينا: $P(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}00026(1000)} = 1 - e^{-0.26}$ ، $P(X > 1000) = e^{-0{,}26}$

ب - <u>حساب</u> $p_{X>1000}(X > 2000)$

علما أن الحادثة $(X > 1000)$ محققة، أحسب احتمال الحادثة $(X > 2000)$

لدينا: $P_{X>1000}(X > 2000) = P_{X>1000}(X > 1000 + 1000) = P(X > 1000) = e^{-0{,}26}$

ج - علما أن مفكرة اشتغلت 2000 ساعة، ما احتمال أن تتعطل قبل 3000 ساعة ؟

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = \frac{P(2000<X\leq 3000)}{P(X>2000)} = \frac{\int_{2000}^{3000} \lambda e^{-\lambda x} dx}{R(2000)} = \frac{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{2000}^{3000}}{e^{-2000\lambda}} = \frac{e^{-2000\lambda} - e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}}$$

$$P_{X>2000}(X \leq 3000) = 1 - e^{-1000\lambda} = 1 - e^{-0.26}$$

د - <u>هل يمكن توقع هذه النتيجة؟</u>

نعم يمكن توقع هذه النتيجة لأن المتغير العشوائي X يتبع قانون مدة حياة بدون شيخوخة (بدون ذاكرة) وبالتالي:

$$p_{X>2000}(x \leq 3000) = p_{X>0}(x \leq 1000) = p(X \leq 1000) = 1 - e^{-0{,}26}$$

التمرين 11:

يحتوي كيس U_1 على كرتان حمراوان و3 كرات سوداء ويحتوي كيس U_2 على 3 كرات حمراء و كرتان سوداوان.

كل الكرات غير معروفة عند اللمس.

نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1: إذا كانت سوداء نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_2 ، وإلا نتوقف.

نعتبر الحوادث التالية: $R1$: "الكرة المسحوبة من U_1 حمراء" ، $R2$: "الكرة المسحوبة من U_2 حمراء"

$N1$: "الكرة المسحوبة من U_1 سوداء" ، $N2$: "الكرة المسحوبة من U_2 سوداء" ،

1- أ – أحسب احتمالات الحوادث $R1$ و $N1$

ب - أنشئ شجرة الاحتمالات المرفقة بالمعطيات السابقة

ج - بين أن $p(R_2) = \frac{3}{10}$.

د – أحسب $p(N_2)$

2- نستعمل هذه العملية في لعبة حيث للمشاركة في هذه اللعبة يقوم لاعب بدفع مبلغ $20\ DA$

- عن كل كرة حمراء يتحصل على $50DA$ من صاحب اللعبة
- عن كل كرة سوداء يدفع $10DA$ لصاحب اللعبة

نرمز بـ X للمتغير العشوائي المرفق بالربح الجبري بعد الانتهاء من اكل عملية (أي الفرق بين ما تحصل ومبلغ المشاركة)

أ - عين قيم X.

ب - عين قانون احتمال X.

ج - عين الأمل الرياضي $E(X)$. هل اللعبة ملائمة للاعب؟

3- نكرر اللعبة السابقة n مرة في شروط متطابقة ومستقلة (أي بعد كل لعبة، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى). (n عدد طبيعي غير معدوم)

عين الحد الأدنى لعدد المرات لكي يربح اللعب على الأقل مرة أكبر تماما من $0,9999$

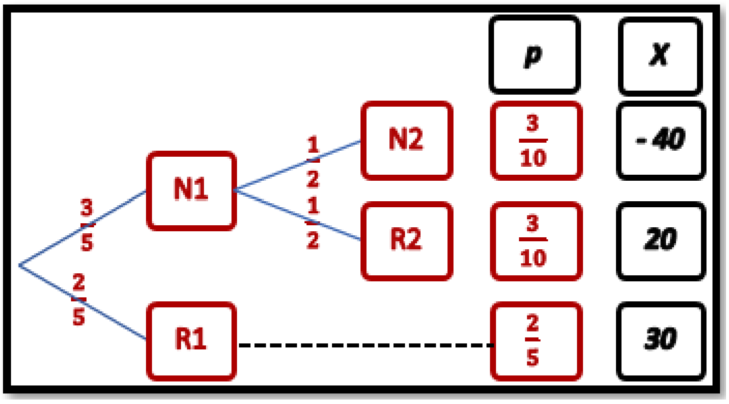
الحل المفصل

U_1 : 5 كرات: $2R$ و$3N$ ، U_2: 5 كرات: $3R$ و $2N$

1- أ – حساب $p(R1)$ و $p(N1)$:

$$p(R1) = \frac{2}{5} \text{ ، } p(N1) = \frac{3}{5}$$

ب - شجرة الاحتمالات المرفقة بالمعطيات السابقة:



ج - بين أن $p(R2) = \frac{3}{10}$:

$$p(R2) = p(N1) \times p_{N1}(R2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

د – حساب $p(N_2)$:

$$p(N2) = p(N1) \times p_{N1}(N2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

2- أ - تعيين قيم X:

$$X(\Omega) = \{-40; 20; 30\}$$

ب - عين قانون احتمال X:

x_i	-40	20	30	المجموع
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1
$x_i.p_i$	- 12	6	12	$E(X)$=6

ج - تعيين الأمل الرياضي $E(X)$:

$E(X)= 6DA$

هل اللعبة ملائمة للاعب؟

بما أن $E(X) > 0$ فإن اللعبة ملائمة للاعب

3- نكرر اللعبة السابقة n مرة في شروط متطابقة ومستقلة (أي بعد كل لعبة، الكيسين يكون لهما نفس التركيبة الأولى).

تعيين الحد الأدنى لعدد المرات لكي يربح اللعب على الأقل مرة أكبر تماما من $0,9999$:

ليكن Y عدد المرات التي يربح فيها اللاعب اللعبة، Y يتبع قانون ثنائي الحد ذو الوسيطين n و $p = p(X > 0) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

$$p(Y \geq 1) > 0,9999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n > 0,9999 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{7}{10}\right)^n < ln(0,0001) \Leftrightarrow n.ln\left(\frac{7}{10}\right) < ln(0,0001) \Leftrightarrow n > \frac{ln(0,0001)}{ln\left(\frac{7}{10}\right)} \Leftrightarrow n > 28,8$$

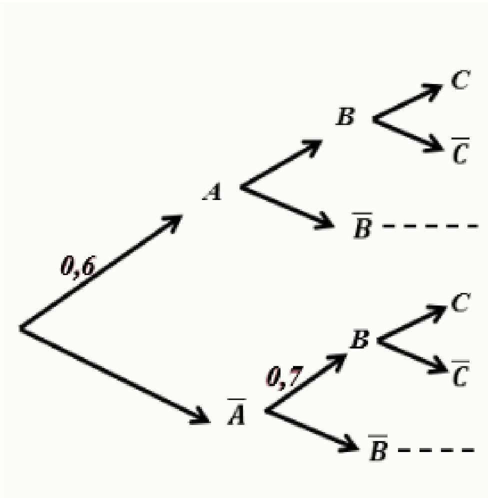
الحد الأدنى لعدد المرات لكي يربح اللعب على الأقل مرة أكبر تماما من $0,9999$ هو 29

التمرين12:

إليك شجرة الاحتمالات التالية:

أ - أنقل وأتمم الشجرة

ب - جواب صحيح واحد فقط، عينه مع التبرير.



X	p
3	
2	0,108
0	0,42
2	0,1344
3	
0	

1- الاحتمال $p(A \cap B \cap C) =$:

ج1: $1,3$ ج2: $0,4$ ج3: $0,072$

2- الاحتمال $p(C) =$:

ج1: $0,1344$ ج2: $0,2064$ ج3: $0,072$

3- الاحتمال $p(\overline{B}) =$:

ج1: $0,54$ ج2: $0,42$ ج3: $0,072$

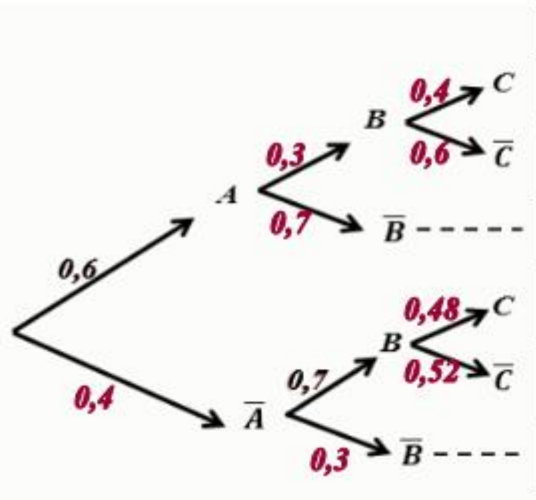
4- الاحتمال $p_{A\cap B}(\overline{C}) =$:

ج1: $0,2536$ ج2: $0,6$ ج3: $0,88$

5- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X : ج1: $E(X) = 1,1376$ ج2: $E(X) = 1$ ج3: $E(X) = 3,1020$

الحل المفصل

أ – الشجرة:



X	p
3	0,072
2	0,108
0	0,42
2	0,1344
3	0,1456
0	0,12

ب - جواب صحيح واحد فقط، عينه مع التبرير.

1- الجواب الصحيح هو: ج3

التبرير: $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p_A(B) \times p_{A\cap B}(C) = 0,6 \times 0,3 \times 0,4 = 0,072$

2- الجواب الصحيح هو: ج2

التبرير: $p(C) = 0,072 + 0,1344 = 0,2064$

3- الجواب الصحيح هو: ج1

التبرير: $p(\overline{B}) = 0,42 + 0,12 = 0,54$

4- الجواب الصحيح هو: ج2

التبرير: $p_{A\cap B}(\overline{C}) = 0,6$

5- الجواب الصحيح هو: ج1

التبرير: $E(X)=3(0,072+0,1456)+2(0,108+0,1344)+0(0,42+0,12)=1,1376$

التمرين13:

يتكون قسم A من 40 تلميذ: 15 ذكور كلهم خارجيين و25 بنت منهن 5 داخليات ويتكون قسم B من 30تلميذ: 10 ذكور كلهم خارجيين و20 بنت منهن 3 داخليات. نختار عشوائيا تلميذ من كل قسم.

1- ما احتمال الحصول على تلميذين من نفس الجنس؟

2- ما احتمال الحصول على داخليتين؟

3- ما احتمال الحصول على تلميذين خارجيين؟

4- نرفق بكل بنت داخلية نقطة واحدة وبكل بنت خارجية نقطتان وبكل ولد خارجي ثلاثة نقط وليكن X مجموع النقط المحصل عليها عند اختيار التلميذين؛ عين قانون احتمال X و احسب أمله الرياضي.

الحل المفصل

A : 40 تلميذ: $15GE$ و $25F$: $20FE$ و $5FI$

B : 30 تلميذ: $10GE$ و $20F$: $17FE$ و $3FI$

نختار عشوائيا تلميذ من كل قسم.

1- احتمال الحصول على تلميذين من نفس الجنس:

$$p = \frac{15\times10+25\times20}{40\times30} = \frac{13}{24}$$

2- احتمال الحصول على داخليتين :

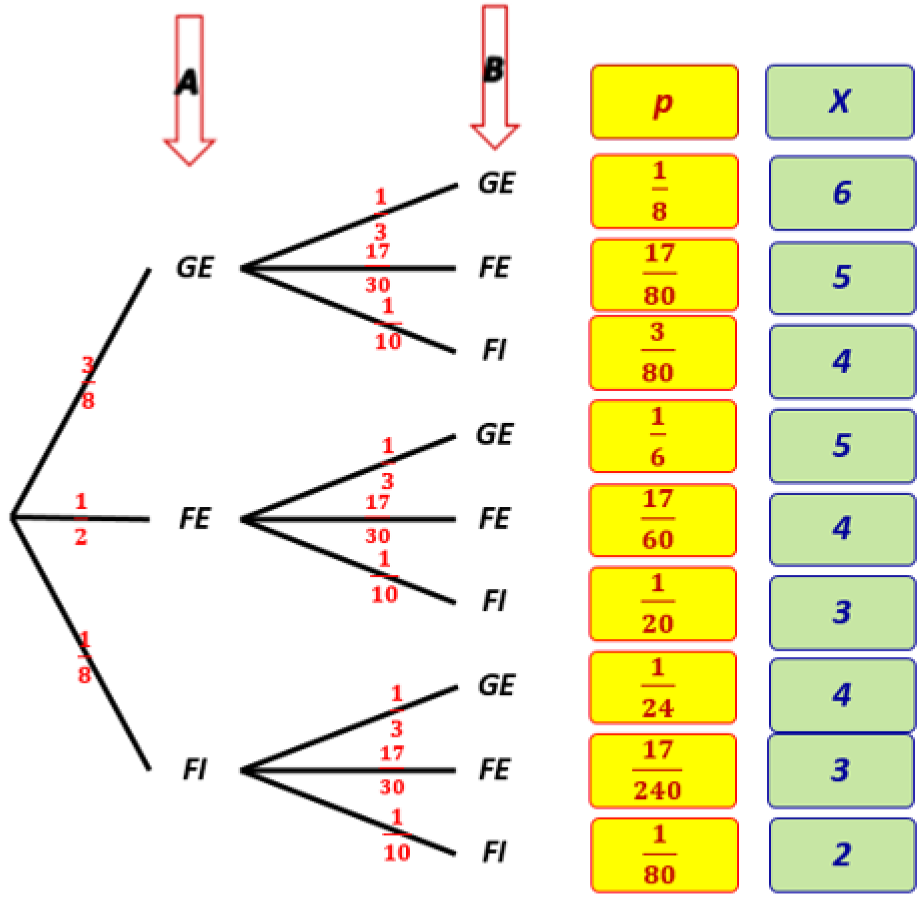
$$p = \frac{5\times3}{40\times30} = \frac{1}{80}$$

3- احتمال الحصول على تلميذين خارجيين:

$$p = \frac{35\times27}{40\times30} = \frac{63}{80}$$

4- قانون احتمال X وأمله الرياضي:

الشجرة:



$p_i=p(X=x_i)$

x_i	2	3	4	5	6	المجموع
p_i	$\frac{1}{80}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{91}{240}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i.p_i$	$\frac{1}{40}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{29}{20}$	$\frac{91}{48}$	$\frac{3}{4}$	$E(X) = \frac{12823}{4800} \cong 2,67$

الأمل الرياضي: $E(X) = \frac{12823}{4800} \cong 2,67$

التمرين 14: ***Baccalauréat S Antilles-Guyane, Juin 2005***

جواب واحد صحيح فقط من بين اقتراحات ثلاث، أذكر الجواب الصحيح. التبرير مطلوب

تحتوي مكتبة على *150* كتاب قصص بوليسية و *50* كتاب أدبي. *40%* من مؤلفي القصص البوليسية هم فرنسيون و *70%* من مؤلفي الكتب الأدبية هم فرنسيون. نختار عشوائيا كتابا من بين *200* كتاب.

1- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسية هو: ج1: *0,4* ج2: *0,75* ج3: $\frac{1}{150}$

2- اخترنا كتاب قصص بوليسية، احتمال أن يكون المؤلف فرنسي هو: ج1: *0,3* ج2: *0,8* ج3: *0,4*

3- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسي فرنسي هو: ج1: *1,15* ج2: *0,4* ج3: *0,3*

4- احتمال أن نختار كتاب لمؤلف فرنسي هو: ج1: *0,9* ج2: *0,7* ج3: *0,475*

5- احتمال أن نختار كتاب قصص بوليسية علما أن المؤلف فرنسي هو: ج1: $\frac{4}{150}$ ج2: $\frac{12}{19}$ ج3: *0,3*

6- جاء شخص *20* مرة للمكتبة احتمال أن يختار على الأقل كتاب قصص بوليسية هو: ج1: $1-(0,25)^{20}$ ج2: $20\times 0,75$ ج3: $0,75(0,25)^{20}$

التمرين 15: ***Baccalauréat S Centres Etrangers, Juin 2007***

جواب واحد صحيح فقط من بين الاقتراحات الثلاث، أذكر الجواب الصحيح. التبرير غير مطلوب

يحتوي صندوق على *8* كرات غير معروفة عند اللمس، *5* حمراء و*3* سوداء.

1- **نسحب *3* كرات في آن واحد.** أ - احتمال سحب ثلاث كرات سوداء هو: ج1: $\frac{1}{56}$ ج2: $\frac{1}{120}$ ج3: $\frac{1}{3}$

ب - احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون هو: ج1: $\frac{11}{56}$ ج2: $\frac{11}{120}$ ج3: $\frac{16}{24}$

2- **نسحب عشوائيا كرة من الكيس، نكتب لونها ثم نعيدها للكيس؛ نعيد هذه العملية *5* مرات متتابعة و مستقلة مثنى مثنى.**

أ - احتمال الحصول خمس مرات كرة سوداء هو: ج1: $\left(\frac{3}{8}\right)^3\times\left(\frac{3}{8}\right)^3$ ج2: $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ ج3: $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

ب - احتمال الحصول على كرتان سوداوين و *3*كرات حمراء هو:

ج1: $\left(\frac{5}{8}\right)^3\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$ ج2: $5\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}$ ج3: $10\times\left(\frac{5}{8}\right)^3\times\left(\frac{3}{8}\right)^2$

3- **نسحب بالتتابع و بدون إرجاع كرتين من الكيس.** نرمز بـ: R_i: " الكرة i المسحوبة حمراء" وN_i : " الكرة i المسحوبة سوداء"

أ - الاحتمال الشرطي $p_{R_1}(R_2)$ هو: ج1: $\frac{5}{8}$ ج2: $\frac{4}{7}$ ج3: $\frac{5}{14}$

ب - احتمال الحادثة $N_1\cap R_2$ هو: ج1: $\frac{16}{49}$ ج2: $\frac{15}{64}$ ج3: $\frac{15}{56}$

ج - احتمال سحب كرة حمراء في السحب الثاني هو: ج1: $\frac{5}{8}$ ج2: $\frac{5}{7}$ ج3: $\frac{3}{28}$

د - احتمال سحب كرة حمراء في السحب الأول علما أننا حصلنا على كرة سوداء في السحب الثاني هو: ج1: $\frac{15}{56}$ ج2: $\frac{3}{8}$ ج3: $\frac{5}{7}$

التمرين 16: ***Baccalauréat S Liban, Mai 2011***

جواب واحد صحيح فقط، أذكر الجواب الصحيح. التبرير غير مطلوب

1- محل عتاد إعلام آلي يبيع نوعان من الكمبيوتر بنفس السعر و نفس المميزات و العلامتين M_1 و M_2. الحاسبان مقترحان بلونين أبيض وأسود. حسب دراسة على مبيعات النموذجين، *70 %* من الزبائن يختارون الحاسوب M_1 من بينهم، *60 %* يفضلون اللون الأسود. من جهة أخرى *20 %* من الزبائن الذين اشتروا حاسوب M_2 ، اختاروه باللون الأبيض. نستعمل قائمة الزبائن الذين اشتروا حاسوب و**نختار عشوائيا زبون.**

أ - احتمال أن نختار زبون اشترى حاسوب M_2 لونه أسود هو: ج1: $\frac{3}{5}$ ج2: $\frac{4}{5}$ ج3: $\frac{3}{50}$ ج4: $\frac{6}{25}$

ب - احتمال أن نختار زبون اشترى حاسوب لونه أسود هو: ج1: $\frac{21}{50}$ ج2: $\frac{33}{50}$ ج3: $\frac{3}{5}$ ج4: $\frac{12}{25}$

ج - الزبون اختار حاسوب أسود، احتمال أن يكون من العلامة M_2 هو: ج1: $\frac{4}{11}$ ج2: $\frac{6}{25}$ ج3: $\frac{7}{11}$ ج4: $\frac{33}{50}$

2- يحتوي كيس *4* كرات صفراء، كرتان حمراوان و*3* كرات زرقاء غير معروفة عند اللمس. **نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد**

أ - احتمال أن نسحب ثلاث كرات من نفس اللون هو: ج1: $\frac{11}{81}$ ج2: $\frac{2}{7}$ ج3: $\frac{5}{84}$ ج4: $\frac{4}{63}$

ب - احتمال أن نسحب ثلاث كرات مختلفات اللون هو: ج1: $\frac{2}{7}$ ج2: $\frac{1}{7}$ ج3: $\frac{1}{21}$ ج4: $\frac{79}{84}$

ج - **نعيد العملية عدة مرات بطرق مستقلة وبإعادة في كل مرة الكرات الثلاث للكيس.** الحد الأدنى لعدد العمليات حتى يكون احتمال الحادثة: " الحصول على الأقل مرة ثلاث كرات صفراء" أكبر أو يساوي *0,99* هو: ج1: *76* ج2: *71* ج3: *95* ج4: *94*