إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: رمضان 1431 هـ

النهايات – الاشتقاقية

Limites – Dérivés

تمرين 1

احسب النهايات للدالة f عند حدود مجموعة تعريفها D_f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f(x)=3x^2+2|x|+7$
2. $f(x)=-x^3+2x^2$
3. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$
4. $f(x)=1+\dfrac{3+4x}{1-2x}$
5. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}$
7. $f(x)=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}$
8. $f(x)=\dfrac{3}{(x-4)^2}$
9. $f(x)=\dfrac{-3x^3+6x+4}{x^2+2}$
10. $f(x)=1+\dfrac{3x}{1-4x^2}$
11. $f(x)=3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$
12. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$
13. $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$
14. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$
15. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$

تمرين 2

احسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\dfrac{4}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3}{(x+1)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+7x-3}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-3}\dfrac{x+2}{x^2+3x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+4x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+9}}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$
8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$
9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}$
10. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$
11. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}$
12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$
13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$
15. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-4x-21}{x-4-\sqrt{x+2}}$
16. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$
17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-6x+10}+x+2\right)$
18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$
19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$
20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$
21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin x}$
22. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sin(4x-2)}{2x-1}$
23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+\sin x}$
24. $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x>\pi}}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$

$\frac{11}{4}$	8	4	$-\sqrt{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	5	$\frac{1}{2}$	12	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-3
		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	3	2	α	$\frac{3}{2}$	2

تمرين 3

احسب النهايات التالية باستعمال مبرهنة المقارنة:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1+\sin x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+\sin 2x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+x\cos x$
4. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin 2x^2}{x^2+1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{1+x}$

2	0	$+\infty, -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

تمرين4

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$-{3} بـــ:

$$f(x)=\frac{-x^2+5x+5}{x-3}$$

ليكن$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\neq 3$ فإن: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

2) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

3) بين أن$(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

4) ادرس وضعية$(\mathscr{C})$ بالنسبة للمسقيم المقارب المائل(Δ).

11 ; 2 ; -1

تمرين5

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$-{2} بـــ:

$$f(x)=\frac{2x^3-11x^2+25x-27}{x^2-4x+4}$$

ليكن$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\neq 2$ فإن: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}+\dfrac{d}{(x-2)^2}$

2) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

3) بين أن$(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.

4) ادرس وضعية(C) بالنسبة للمسقيم المقارب المائل(Δ).

-5 ; 5 ; -3 ; 2

تمرين6

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,,0]\cup[2\,,+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x}-2x+1$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x+2)\right]$،

استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحني$(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f.

تمرين7

– الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$-{-2} بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-1}{x+2}$$

– الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=x^2+1$

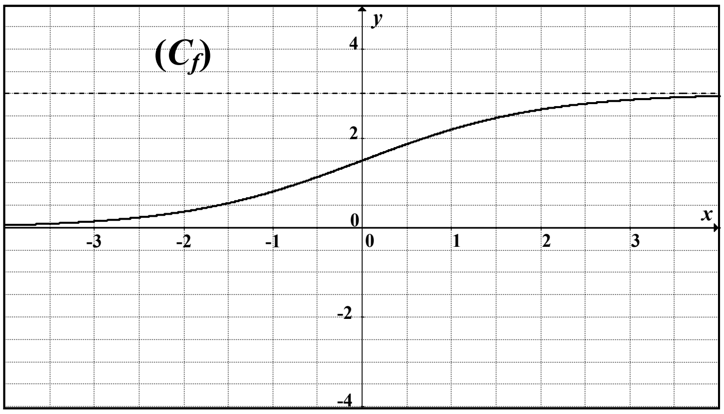
1) عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل $x\neq -2$ فإن:

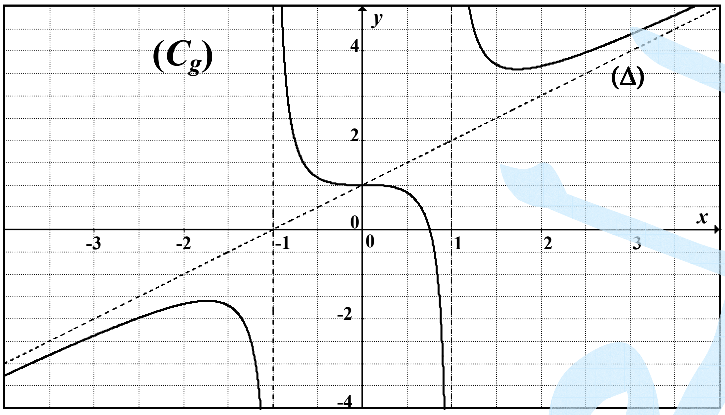
$$f(x)=g(x)+\frac{a}{x+2}$$

2) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$ ثم فسّر بيانيا النتيجة.

تمرين8

إليك بيانين لدالتين f و g :





1) بقراءة بيانية عين مجموعة تعريف كل دالة.

2) خمّن النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة.

3) عين المستقيمات المقاربة لكل منحن واكتب معادلاتها.

4) ادرس وضعية(C_g) بالنسبة لمسقيمها المقارب المائل(Δ).

5) ما هو عدد حلول المعادلة $g(x)=0$ ؟ احصره بين عددين صحيحين متتابعين.

تمرين9

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{|x|} & x\neq 0\\[2mm] 2 & x=0\end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=0$.

تمرين 10

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{x+2} & x\neq -2 \\ f(-2)=-4 \end{cases}$$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=-2$.

2) ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=-2$.

تمرين 11

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1} & x>1 \\ f(x)=\sqrt{x^2+3} & x\leq 1 \end{cases}$$

1) بيّن أن الدالة f مستمرة عند $x_0=1$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

تمرين 12

احسب مشتق الدالة f في كل حالة من الحالات التالية وذلك بعد تحديد D_f و $D_{f'}$.

.1 $f(x)=x^3-4x+5$ **.2** $f(x)=(x^2-1)^3$

.3 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$ **.4** $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$

.5 $f(x)=\dfrac{4}{(2x+3)^2}$ **.6** $f(x)=\dfrac{4}{(2\sin x+3)^2}$

.7 $f(x)=\sqrt{3x-6}$ **.8** $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$

.9 $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ **.10** $f(x)=x+\sin^3(\pi x)$

.11 $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ **.12** $f(x)=|x^2+4x-5|$

تمرين 13

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$-{-2} بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

عين العددين الحقيقين α و β بحيث المنحني الممثل للدالة f عند النقطة (1,-3) يقبل مماسا معامل توجيهه $\dfrac{2}{3}$.

-7 ; -3

تمرين 14

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f:x\mapsto ax^2+bx+c$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c $(a\neq 0)$ بحيث المنحني الممثل للدالة f يشمل النقطة $(0,3)$ ويقبل مماسا في $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل.

3 ; -5 ; 2

تمرين 15

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$-{ $\frac{3}{2}$ } بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x-3}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

2) بين أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل عند نقطتين A و B مماسين ميل كل منهما يساوي 4- . اكتب عندئذ معادلة كل مماس عند نقطتي التماس A و B .

3) عين نقطتين C و D من $(\mathscr{C})$ بحيث يقبل عندهما المنحني $(\mathscr{C})$ مماسا يشمل النقطة $\left(-3\,,\dfrac{4}{25}\right)$.

$(-1,\frac{4}{5})$; $(-21,-\frac{44}{5})$	y=-4x+4 y=-4x+13	(1 ,0) , (2,5)

تمرين 16

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3+mx+1$

1) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد القيم الحدية للدالة f .

2) عين قيمة m بحيث المنحني الممثل للدالة f يقبل مماسا معادلته $y=3x+1$ عند $x_0=0$.

3

تمرين 17

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f:x\mapsto x^3+3x^2+5x+1$

1) ادرس تغيرات الدالة f واستنتج أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathrm{I}=\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

2) هل المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا أخرى في $\mathbb{R}$ ؟

3) استنتج إشارة $f(x)$.

تمرين 18

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2,1[\cup]1,+\infty[$ بـ:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2}$$

1) احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

2) أنشئ جدول تغيرات f. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1<\alpha<2$. استنتج إشارة $f(x)$.

3) أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

$\boxed{1{,}5 < \alpha < 1{,}6}$

تمرين 19

الدالة f معرفة على $[-2,3]$ بـ: $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$

أنشئ جدول تغيرات الدالة f واستنتج عدد حلول المعادلات:

1) $f(x)=0$ 2) $f(x)=5$ 3) $f(x)=-5$

تمرين 20

الدالة f معرفة على $D=[1,3]$ بـ: $f(x)=\dfrac{8}{(x+1)^2}$

أنشئ جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج حصرا للعدد $f(x)$.

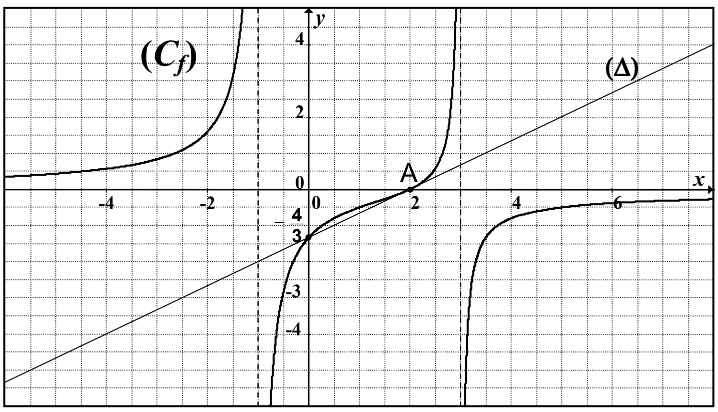
تمرين 21

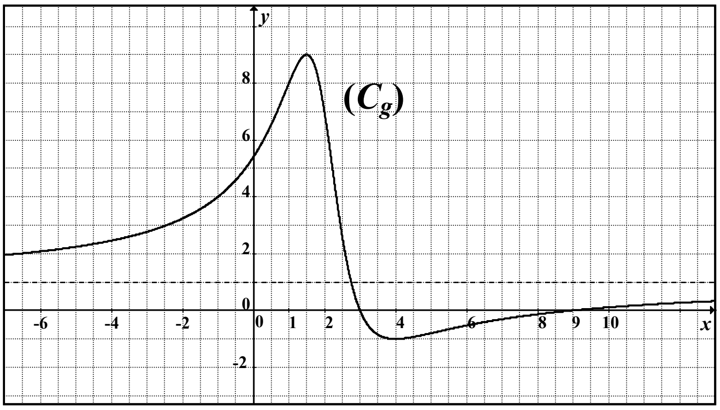
الدالة f معرفة على المجال D. أعط حصرا للعـدد $f(x)$ (دون دراسة التغيرات) في كل حالة من الحالات التالية:

1. $f(x)=x^2+3x$ ، $D=\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$
2. $f(x)=\sqrt{2-3x}$ ، $D=[-3,0]$
3. $f(x)=\dfrac{-3}{x(x-1)^2}$ ، $D=[2,3]$

تمرين 22

إليك بياني f و g حيث: $D_f = \mathbb{R}-\{-1,3\}$ و $D_g=\mathbb{R}$.





1) خمّن النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة.

2) عين بيانيا: $f(2)$ ، $f'(2)$ ، $g(4)$ و $g'(4)$.

3) أنشئ لكل دالة جدول تغيراتها ثم ادرس إشارة $f(x)$.

4) اكتب معادلة المماس (Δ) لـ(C_f) عند النقطة A.

5) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ).

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $g(x)=m$ ؟

7) عين الأعداد الحقيقية a , b , c , d بحيث من أجل كل x من D_f فإن: $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+cx+d}$.

$d=-3$ ، $c=-2$ ، $b=4$ ، $a=-2$	$2x-3y-4=0$

تمرين 23

لتكن f دالة عددية و (C) تمثيلها البياني، بين أن $x=\alpha$ محور تناظر لـ(C) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+3}$ ، $\alpha=2$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ ، $\alpha=1$

3) $f(x)=2x^2-12x+2|x-3|-7$ ، $\alpha=3$

تمرين 24

لتكن f دالة عددية و (C) تمثيلها البياني، بين أن النقطة ω مركز تناظر لـ(C) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-3x-2$ ، $\omega(0,-2)$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x-1}$ ، $\omega(1,6)$

3) $f(x)=[x+\pi+\tan 3x]\cos x$ ، $\omega(-\pi,0)$

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب
بوزريعة: شوال 1431 هـ

دراسة الدوال

Etude de fonctions

ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ، ثم ارسم تمثيلها البياني في مستوٍ مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

(1 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad \Re$

(2 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ $\quad \Re-\{-1,3\}$

(3 $f(x)=x+1-\dfrac{2}{x}$ $\quad \Re-\{0\}$

(4 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}$ $\quad \Re-\{0\}$

(5 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2-4x+5}$ $\quad \Re$

(6 $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \Re-\{1\}$

(7 $f(x)=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ $\quad \Re-\{-1\}$

(8 $f(x)=\dfrac{2x-7}{x^2-2x-3}$ $\quad \Re-\{-1,3\}$

(9 $f(x)=\dfrac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2}$ $\quad \Re-\left\{\dfrac{1}{2},2\right\}$

(10 $f(x)=-x+2-\dfrac{2}{x+1}$ $\quad \Re-\{-1\}$

(11 $f(x)=-2x+2-\dfrac{1}{x^2}$ $\quad \Re-\{0\}$

(12 $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\quad \Re-\{2\}$

(13 $f(x)=x^2-1-\dfrac{2}{x}$ $\quad \Re-\{0\}$

(14 $f(x)=\dfrac{2x^3-2x^2}{(2x-1)^2}$ $\quad \Re-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

(15 $f(x)=\sqrt{-2x+4}$ $\quad]-\infty,2]$

(16 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \Re$

(17 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

(18 $f(x)=(x+1)\sqrt{x+4}$ $\quad [-4,+\infty[$

(19 $f(x)=\sqrt{-x^2+4}$ $\quad [-2,2]$

(20 $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$ $\quad \Re$

(21 $f(x)=\sqrt{4x^2-4x-3}$ $\quad x\le-\dfrac{1}{2}$ و $x\ge\dfrac{3}{2}$

(22 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}-2$ $\quad]-\infty,0]\cup]2,+\infty[$

(23 $f(x)=\sqrt{x^2-2}-x$ $\quad x\le-\sqrt{2}$ و $x\ge\sqrt{2}$

(24 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x &]-\infty,0[\\ \dfrac{-2x^2+4x}{(x-1)^2} & [0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

(25 $f(x)=|x-1|-\dfrac{4}{x+3}$ $\quad \Re-\{-3\}$

(26 $f(x)=\dfrac{x^2+|2x-1|}{x}$ $\quad \Re-\{0\}$

(27 $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ $\quad \Re$

(28 $f(x)=\sin 2x+2\sin x$ $\quad \Re$

(29 $f(x)=\dfrac{1}{(1+\cos x)^2}$ $\quad -\pi<x<\pi$

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ذوالقعدة 1431 هـ

دراسة الدوال

Etude de fonctions

تمرين1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{-1,3} بـ:

$$f(x)=\frac{4x^2-8x}{x^2-2x-3}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث من أجل كل $x \neq$ -1 و $x \neq 3$ فإن: $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$

2- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .

- اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.
- ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمسقيم المقارب الأفقي.
- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- عين A و B نقطتي تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.

- اكتب معادلتي المماسين (Δ) و (Δ') للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطتين A و B . عين إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) و (Δ').

4- أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C})$.

5- احسب $f(-3)$ ، $f(-2)$ ثم ارسم (Δ) ، (Δ') و $(\mathscr{C})$.

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{-4x+12}{x^2-6x+10}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .

- اكتب معادلة المستقيم المقارب الأفقي (D) للمنحني $(\mathscr{C})$.
- ادرس إشارة $f(x)$ واستنتج وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (D).
- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- لتكن A نقطة تقاطع المنحني $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.

- عين إحداثيتي النقطة A.
- أثبت أن النقطة A مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.
- اكتب معادلة المماس (Δ) لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

3- ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4- m وسيط حقيقي. استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لدراسة حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x:

$$mx^2-2(3m-2)x+10m-12=0$$

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{-1} بـ:

$$f(x)=x-\frac{2}{x+1}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f .

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- أثبت أن المستقيم ذي المعادلة: $y=x$ ، مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C})$. عين معادلة للمستقيم المقارب الآخر.
- بين أن تقاطع المستقيمان المقاربان مركز تناظر لـ $(\mathscr{C})$.

2- عين إحداثيتي النقطتين A و B من $(\mathscr{C})$ بحيث يكون ميل المماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ عند هاتين النقطتين يساوي 3.

- اكتب معادلة لكل من المماسين (Δ) و (Δ') للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطتين A و B. ارسم (Δ) و (Δ').

3- عين نقاط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع المحورين ثم ارسم $(\mathscr{C})$.

4- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{-2,2} بـ:

$$f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x^2-4}$$ حيث α و β عددان حقيقيان

1- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ثم احسب $f'(x)$.

2- عين العددين الحقيقيين α و β علما بأن المنحني الممثل للدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس يشمل النقطة (4;1) وأنه يقبل مماسا ميله $(-\frac{3}{4})$ عند الفاصلة $x_0=0$.

في باقي التمرين نعتبر: $\alpha=3$ و $\beta=0$.

3- أثبت أن f دالة فردية. ليكن $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل للدالة f في مستو مزود بمعلم. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C})$؟

4- ادرس تغيرات الدالة f والمستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C})$.

- ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=1$.
- ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

5- ناقش حسابيا (جبريا) حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

لتكن M و M′ نقطتي تقاطع $(\mathscr{C})$ مع المستقيم $y=m$.

احسب بدلالة m إحداثيتي النقطة N منتصف القطعة [MM′].

تمرين5

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$g(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

1- بيّن أنّ: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ وأنّ: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=x-3+\sqrt{x^2+3}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. بيّن أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$.

2- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=g(x)$.

- استنتج إنشاء جدول تغيرات الدالة f .

3- بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مـــائلا (Δ) معادلتــه: $y=2x-3$. عين معادلة للمستقيم المقارب الآخر (Δ').

4- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x)=0$ ثم ارسم (Δ)،(Δ') و$(\mathscr{C})$.

5- m وسيط حقيقي. ناقـــش بيانيا حسب قيـــم m عدد نقاط تقاطع$(\mathscr{C})$ مع المستقيمات(Δ_m) التي معادلاتها: $y=2x+m$.

تمرين6

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$g(x)=x^3-3x-3$$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بيّن أنّ المعادلـــة: $g(x)=0$ تقـــبل حلا وحيدا α حيث: $2{,}1<\alpha<2{,}2$.

3- استنتج من أجل كل x من $\mathbb{R}$ إشارة $g(x)$.

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=x+\frac{3}{x}+\frac{3}{2x^2}$

ليكن$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب النهايتين: $\lim_{x\to0} f(x)$ و $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$ ثـــم فسّر النتيجتين بيانيا.

- ادرس وضعية$(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

2- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

- بيّن أنّ $f(\alpha)=\frac{12\alpha+9}{2\alpha^2}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف. ارسم المنحنى$(\mathscr{C})$.

4- بيّن أنّه يوجد مماس لـــ$(\mathscr{C})$ يوازي المستقيم $y=x$.

تمرين7

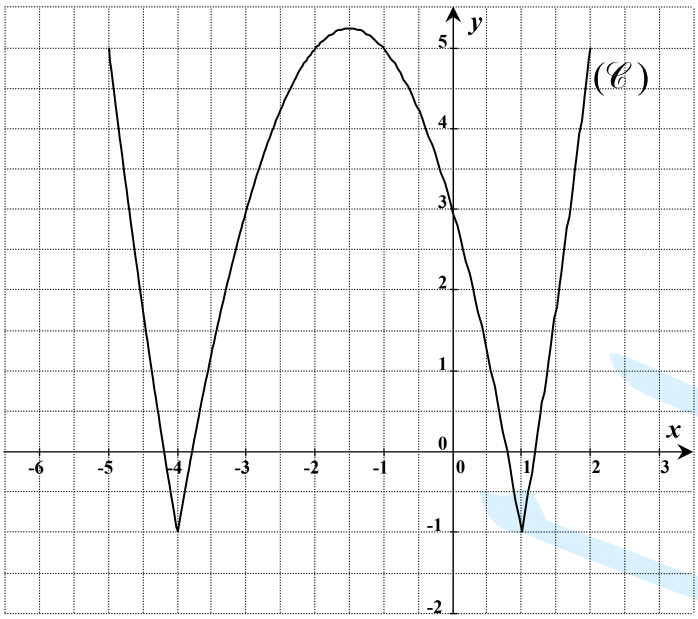
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-5,2]$ بـــ:

$$f(x)=\left|x^2+3x-4\right|-1$$

ليكن المنحني$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني المبين أسفله.

1- ادرس إشارة x^2+3x-4 ثم عرف الدالة f بمجالات.

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عنـــد -4 ، ثـــم عنـــد 1 . استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل أربعة أنصاف مماسات عنـــد نقطتين فاصلتيهما -4 و 1 ، يطلب كتابة معادلة لكل منها.



3- بقراءة بيانية أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

- استنتج عدد حلول المعادلة $f(x)=4$.

- خمّن وجود محور تناظر يطلب كتابة معادلته.

- احسب: $f(-3-x)-f(x)$ ثم أثبت صحة تخمينك.

4- حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة $f(x)=5$.

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ذو القعدة 1431 هـ

الدالة الأسية [I]

Fonction Exponentielle

تمرين1

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}-e^{x}-20=0$

2) $e^{x}+18e^{-x}=9$

3) $e^{2x+1}-3\sqrt{e^{2x+2}}=-e^{1+\ln 2}$

4) $2e^{5x}-13e^{3x}-7e^{x}=0$

5) $e^{3x}-3e^{2x}-e^{x}+3=0$

6) $e^{x}-(5+e)e^{\frac{x}{2}}+5e=0$

ln2 ، 0	ln6 ، ln3	ln5
2ln5 ، 2	ln3 ، 0	$\ln\sqrt{7}$

تمرين2

حل في $\mathbb{R}$ جمل المعادلات التالية:

1) $\begin{cases} 2e^{x}+3e^{y}=8 \\ 3e^{x}-2e^{y}=-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=1 \\ e^{2x+1}\times e^{y-1}=1 \end{cases}$

(-1 ; 2)	(0 ; ln2)

تمرين3

عيّن في كل حالة مجموعة تعريف الدّالة f ودالتها المشتقة في المجموعة التي تكون فيها قابلة للاشتقاق:

1) $f(x)=e^{x}+3e^{-x+2}-x$

2) $f(x)=e^{-2x}-e^{-3x}+4$

3) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}-3}$

4) $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

5) $f(x)=(x-1)e^{x}-x^{2}$

6) $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

7) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1}$

8) $f(x)=(x^{2}+x+1)e^{-\frac{x}{2}}$

9) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

10) $f(x)=\sqrt{-4e^{2x}+4e^{x}+3}$

تمرين4

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2}+1)e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} x+e^{\frac{2x}{x-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to0^{-}}(1-x)e^{\frac{1}{x}}+2$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-2e^{x}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+e^{x}-4$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x+1$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^{x}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^{x}}{x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+2}{e^{2x}-1}$

12) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+3}{e^{x}-1}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+x-1}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{x}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{2}+2x+2)e^{x}$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^{2}-4x)e^{-x}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2}-2e^{x}$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+1}{x^{2}+x+1}$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$

22) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}$

23) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^{2}}-1}{x^{2}}$

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}+2x}$

26) $\lim\limits_{x\to\ln3}\dfrac{e^{x}-3}{x-\ln3}$

27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^{2}}$

28) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{\frac{1}{x}}-x+1$ (ضع $X=\frac{1}{x}$)

تمرين5

ادرس تغيرات كل دالة ثم ارسم بيانها:

1) $f(x)=e^{1-x}-1$

2) $f(x)=e^{4x}-2e^{2x}$

3) $f(x)=\dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}-1}$

4) $f(x)=\dfrac{3e^{x}}{e^{x}+1}$

5) $f(x)=(x-2)e^{x}+2$

6) $f(x)=(2x^{2}+3x)e^{-x}$

7) $f(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}$

8) $f(x)=e^{x}-x-1$

9) $f(x)=2e^{x}-3e^{-x}-7x+2$

10) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1}$

11) $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

12) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x+1}$

13) $f(x)=x+1-\dfrac{1}{e^{x}-2}$

14) $f(x)=x+2-\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}$

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ذوالقعدة 1431 هـ

الدالة الأسية [II]

Fonction Exponentielle

تمرين1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

- اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.
- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- أثبت أن النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ω.
- ارسم المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

3- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $g'(x)=\dfrac{3(e^{2x}-1)^2}{2(1+e^{2x})^2}$
- احسب $g(0)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.
- ادرس إشارة $g(x)$ واستنتج وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ(T).

تمرين2

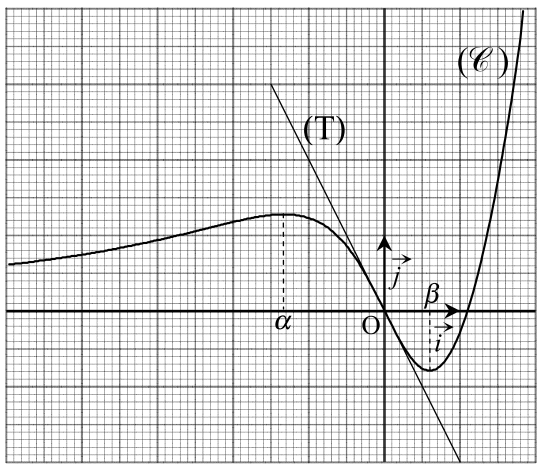
I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^x-x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها، ثم بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المبين أسفله، والمستقيم (T) هو المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند المبدأ.



1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2- حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{2x}-4e^x+3>0$ ثم استنتج إشارة الدالة $f(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

باستعمال القراءة البيانية:

3- أعط حصرا سعته 0,2 للعددين الحقيقيين α و β الموافقين للقيمتين الحديتين المحليتين للدالة f على $\mathbb{R}$.

4- عين قيم كل من: $f'(\alpha)$ ، $f'(0)$ و $f'(\beta)$.

5- ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمماس(T).

6- لتكن الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

- أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.
- استنتج جدول تغيرات الدالة h.

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=(x^2+x+2)e^{-x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ (نذكّر أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$ حيث n عدد طبيعي). استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يطلب كتابة معادلته.

2- أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) اكتب معادلة المماس(T) لـ$(\mathscr{C})$ عند $x_0=0$.

ج) بين أن المعادلة: $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;0]$. أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-1}.

3- أ) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

ب) ارسم المماس(T) والمنحني$(\mathscr{C})$.

4- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=[f(x)]^2$

أ) بين أن الدالة g عبارة عن مركب دالتين، إحداهما الدالة f أي: $g=uof$ ، يطلب تعيين الدالة u.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ج) أنشئ جدول تغيرات g انطلاقا من جدول تغيرات f .

5- m وسيط حقيقي. نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f_m(x)=(x^2+mx+2)e^{-x}$$

عين قيم m حتى تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين محليتين.

تمرين 4

I- a و b عددان حقيقيان ولتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$:
$g(x)=(ax+b)e^{x}-1$.

تعطى تغيرات الدالة g في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-1 \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

1- باستغلال الجدول بين أن $a=1$ و $b=-1$.

2- بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}27<\alpha<1{,}28$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:
$$f(x)=\frac{e^{x}-2x+1}{x}$$
ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

2- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين، وأنه يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه حامل محور التراتيب.

4- بين أن $f(\alpha)=-2+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0=1$.

6- احسب $f(-3)$، $f(-1)$، $f\left(\frac{1}{2}\right)$، $f(2)$ و $f(3)$ ثم ارسم المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم: $1cm$).

تمرين 5 (بكالوريا)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=2x+1-xe^{x-1}$$
ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$ (يمكن كتابة $xe^{x-1}=\frac{1}{e}xe^{x}$).

2- أثبت أن المستقيم Δ ذي المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $-\infty$، ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم Δ.

3- أ) احسب المشتقة f' والمشتقة الثانية f'' للدالة f.

ب) شكل جدول تغيرات f' مع تحديد نهاية f' عند $-\infty$.

ج) احسب $f'(1)$ واستنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

4- ليكن I المجال $[1{,}9\ ;\ 2]$. أثبت أنه على I ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

5- ارسم المستقيم Δ والمنحني $(\mathscr{C})$ (وحدة الرسم: $2cm$).

تمرين 6 (بكالوريا بتصرف)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:
$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$$

1- احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة g.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ f(0)=0 \end{cases}$$
ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=0$.

2- ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=0$ ثم بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نصفي مماسين Δ و Δ' يطلب كتابة معادلتيهما.

3- أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

4- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

(ضع $X=\frac{1}{x}$). استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني $(\mathscr{C})$.

6- ارسم Δ، Δ' والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول $4cm$)

7- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} h(x)=\dfrac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ h(0)=0 \end{cases}$$
ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

تحقق أن: $h(x)=-f(-x)$ ثم بين أن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متناظران بالنسبة للمبدأ. استنتج رسم المنحني $(\mathscr{C}')$.

إعداد: عبد المطلب

المعادلات التفاضلية ودوال القوى

Equation différentielle et Fonction puissance

تمرين 1

1- حل المعادلة التفاضلية التالية: $2y'+3y=0$.

- عين الحل f الذي يحقق: $f(0)=8$.

2- عين الدالة h حلا للمعادلة التفاضلية التالية:

$y'-2y+4=0$ بحيث h تنعدم عند $-\ln 3$.

$Ce^{-\frac{3}{2}x}$	$8e^{-\frac{3}{2}x}$	$-18e^{2x}+2$

تمرين 2

1- حل المعادلة التفاضلية التالية: (E) $y'-2y=0$.

2- نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: (F) $y'-2y=e^x$.

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ae^x+b$ حلا للمعادلة (F).

3- بين أن h هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا $f=g+h$ هي حلا للمعادلة (F). استنتج حلول المعادلة (F).

4- من بين حلول المعادلة (F) عين تلك التي تمثيلها البياني في معلم يمر من المبدأ.

Ce^{2x}	$-e^x$	$Ce^{2x}-e^x$	$e^{2x}-e^x$

تمرين 3

1- حل المعادلة التفاضلية التالية: (E) $y'+2y=0$.

2- نعتبر المعادلة التفاضلية: (F) $y'+2y=5\cos x$.

عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=a\cos x+b\sin x$ حلا للمعادلة (F).

3- بين أن f هي حل للمعادلة (F) إذا وفقط إذا $f-g$ هي حلا للمعادلة (E). استنتج حلول المعادلة (F).

Ce^{-2x}	$2\cos x+\sin x$	$Ce^{-2x}+2\cos x+\sin x$

تمرين 4

1- حل المعادلة التفاضلية التالية: (I) $2y'+y=0$.

2- نعتبر المعادلة التفاضلية: (II) $2y'+y=x^2+3x$.

بين الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2-x+2$ هي حلا للمعادلة التفاضلية (II).

3- بين أن h هي حل للمعادلة (II) إذا وفقط إذا $h-g$ هي حلا للمعادلة (I). استنتج حلول المعادلة (II).

4- من بين حلول المعادلة (II) عين تلك التي بيانها يقبل مماسا عند $x_0=0$ موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=x$.

$Ce^{-\frac{x}{2}}$	$Ce^{-\frac{x}{2}}+x^2-x+2$	$-4e^{-\frac{x}{2}}+x^2-x+2$

تمرين 5 Bac S France sept 2007

نعتبر المعادلتين التفاضليتين المعرفتين على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ:

(E) $y'+(1+\tan x)y=\cos x$ $\qquad$ (E_0) $y'+y=1$.

1- عين مجموعة حلول المعادلة (E_0).

2- f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $f(x)=g(x)\cos x$. بين أن الدالة f هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا الدالة g هي حلا للمعادلة (E_0).

3- عين الحل f لـ (E) بحيث $f(0)=0$.

$Ce^{-x}+1$	$(1-e^{-x})\cos x$

تمرين 6

لتكن $y(t)$ عدد ذرات الراديوم ($radium$) لمادة مشعة في اللحظة t (مقدرة بالسنوات) بحيث:

$y'(t)=-4{,}33\times10^{-4}y(t)$ و $y(0)=y_0$

1- اكتب عبارة $y(t)$ بدلالة y_0 و t.

2- احسب زمن نصف العمر للراديوم أي الزمن اللازم لتناقص نصف عدد ذرات الراديوم.

$y=y_0e^{-4{,}33\times10^{-4}t}$	1600 ans

تمرين 7

لتكن $y(t)$ عدد الجراثيم في مستعمرة في اللحظة t (مقدرة بالساعات) و $y'(t)$ سرعة تكاثر عدد الجراثيم في اللحظة t بحيث: $y'(t)=3y(t)$

1- إذا علمت أن عدد الجراثيم في اللحظة $t=0$ هو $N_0=1000$. ما هو عددها في اللحظة $t=1\text{h }30\text{mn}$ ؟

2- متى يصبح عدد الجراثيم مليون مرة عددها في $t=0$ ؟

$y=1000e^{3t}$	9×10^4	4h 36mn

تمرين 8

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

1) $3^{2x}-3^x-6=0$ $\qquad$ 2) $4^{x-1}-7\times2^x+24=0$

تمرين 9

ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم بيانها في معلم معين:

1) $f(x)=3^x$ $\qquad$ 2) $f(x)=2^x+2^{-x}$

الدالة اللّوغاريتمية [I]

Fonction logarithme

تمرين1

عيّن مجموعة تعريف الدّالة f حيث:

1) $f(x)=x-\ln(2x-3)$

2) $f(x)=x-1+\ln|2-x|$

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln x^2$

4) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-1}-\ln\sqrt{x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln(x^2-4)$

6) $f(x)=x+1+\ln(x-4)^2$

7) $f(x)=\ln(-x^2-x+2)$

8) $f(x)=2x-1+\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

9) $f(x)=\ln x+\ln(x-1)$

10) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

11) $f(x)=2x+3+\ln\left|1+\dfrac{3}{x}\right|$

12) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x+1)}$

13) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}-\ln(x^2+1)$

14) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-|\ln x|}$

تمرين2

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(2x-3)=\ln(x-3)+\ln 5$

2) $\ln(x^2-5)-\ln(4-x)=2\ln 2$

3) $\ln|x-4|+\ln(7-3x)=\ln 2$

4) $\ln x^2-\ln\sqrt{x}-6=0$

5) $(\ln x)^2-\dfrac{5}{2}\ln x+1=0$

6) $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

7) $(\ln x)^3+3(\ln x)^2-4=0$

8) $\ln(\sin x)+\ln(\cos x)=\ln\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

e^2 ، $\sqrt{e}$	e^4	2	3 ، -7	4
$\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$	e ، e^{-2}	e^3 ، e ، e^{-1} ، e^{-3}		

تمرين3

حل في $\mathbb{R}$ جمل المعادلات التالية:

1) $\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln 10\\ x+y=7\end{cases}$

2) $\begin{cases}\ln(x+1)+2\ln(y-2)=4\\ 3\ln(x+1)-\ln(y-2)=5\end{cases}$

3) $\begin{cases}\ln x+\ln y=1\\ \dfrac{3}{\ln x}-\dfrac{2}{\ln y}=2\end{cases}$

$(e^2-1\,;\,e+2)$	$(5\,;\,2)$ ، $(2\,;\,5)$
$(\sqrt{e}\,;\,\sqrt{e})$ ، $(e^3\,;\,e^{-2})$	

تمرين4

عيّن الدالة المشتقة للدّالة f في المجموعة التي تكون فيها قابلة للاشتقاق:

1) $f(x)=\ln(x^2+4x-5)$

2) $f(x)=2x-1+\ln|2x-1|$

3) $f(x)=\ln(-x)+\ln\sqrt{2x+3}$

4) $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x+1}$

5) $f(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{x+1}$

6) $f(x)=x\ln x-\ln(\ln x)$

7) $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

8) $f(x)=\sqrt{\ln x}+(\ln x)^2$

تمرين5

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(2x+3)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+x-2)$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\ln x}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-x$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1+\ln(-x)$ $\quad(X=-x)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1}{x}+\ln x$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$

10) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2} x+\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

11) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}2} x+\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left|\dfrac{x+1}{x^2-4}\right|$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+3)}{x}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$

17) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x^2-x$

18) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}$

19) $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}(1-x)\ln(1-x)$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-1)-\ln(x+2)$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2-\ln(x-1)$

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

23) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$

24) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}$

25) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}2}\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad(X=\dfrac{1}{x})$

27) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ذوالحجة 1431 هـ

الدالة اللّوغاريتمية [II]

Fonction logarithme

تمرين 1

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-3\,;1[$ بـ:

$$f(x)=a\ln(3+x)+b\ln(1-x)-2$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يقبل منحنى الدالة f عند النقطة $(0\,;-2+3\ln3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-3\,;1[$ بـ:

$$f(x)=3\ln(3+x)+\ln(1-x)-2$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-3}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)$. استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- هل المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف؟ برّر إجابتك.

2- (T) هو المماس لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0.
اكتب معادلة للمستقيم (T) إذا كان معامل توجيهه يساوي 1.

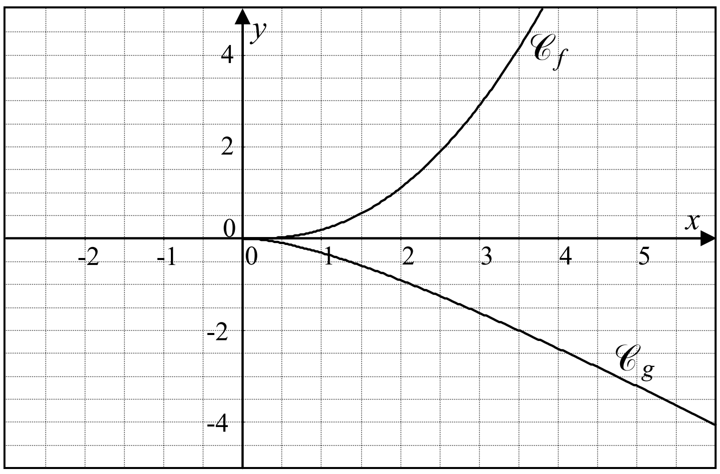
3- أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطتين فاصلتيهما α و β حيث: $-2<\alpha<-1$ و $0{,}5<\beta<1$.

- ارسم المستقيم (T) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 2cm)

4- ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m $(m>0)$ عدد جذور المعادلة: $f(x)=2\ln(3+x)-2+\ln m$

تمرين 2

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ بياني الدالتين f و g على $]0\,;+\infty[$.



1- ضع تخمينا بالنسبة لـ: أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) اتجاه تغير كل من f و g على $]0\,;+\infty[$.

ج) إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

2- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2} \quad \text{و} \quad g(x)=\ln(x+1)-x$$

أ) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير كل من f و g على $]0\,;+\infty[$.

ج) استنتج إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.
هل تخمينك السابق كان صحيحا؟

3- أ) استنتج من الأسئلة السابقة أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب فإن: $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(x+1)\le x$

ب) استنتج القيمة التقريبية إلى 10^{-3} بالزيادة للعدد $\ln(1{,}1)$.

تمرين 3

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x^2+2-2\ln x$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها، ثم بين أنه من أجل كل $x>0$ فإن: $g(x)>0$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y=\dfrac{x}{2}$.

ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. (يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$)

2- برهن أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها α حيث: $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

3- برهن أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيينها.

4- اكتب معادلة المماس (T) لـ $(\mathscr{C})$ والذي يوازي (Δ).

- هل المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا يشمل المبدأ؟ علل.
- ارسم (Δ)، (T) و $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول 2cm)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $mx-\ln x=0$.

6- h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln|x|}{x}$

أثبت أن h فردية ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C}')$ في المعلم السابق.

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1+\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1– احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

2– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3– ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=1$ مع تحديد نقطة تقاطعهما.

4– أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

5– تحقق أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$. ادرس إشارة $f(x)$.

6– احسب $f(2)$ و $f(4)$ ثم ارسم $(\mathscr{C})$. (الوحدة $2cm$)

7– لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(e^x)$.
احسب $h'(x)$ وذلك دُون كتابة عبارة $h(x)$.

تمرين5

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1– احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة f.

2– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3– أثبت أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل 3 مستقيمات مقاربة أحدهم (Δ) معادلته $y=x+1$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (Δ).

4– أثبت أن النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C})$.

5– ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول $1cm$)

6– برهن على وجود مماسين للمنحني $(\mathscr{C})$ معامل توجيه كل منهما يساوي $\frac{2}{3}$ ثم اكتب معادلتي هذين المماسين.

تمرين6

I– نعتبر الدالة g المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=4(\ln x-1)+x$$

1– ادرس اتجاه تغير الدالة g، شكل جدول تغيراتها.

2– بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}7<\alpha<1{,}8$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0\,;+\infty[$.

II– نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(\frac{x-4}{x}\right)\ln x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1– أثبت أنه من أجل كل $x>0$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0\,;+\infty[$.

2– احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. شكل جدول تغيرات f.

3– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\ln x$. ماذا يمكن قوله عن المنحني $(\mathscr{C})$ والمنحني $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $\ln$ ؟

– ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}')$.

4– بين أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-4)^2}{4\alpha}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

5– ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$. $\|\vec{j}\|=2\|\vec{i}\|=2cm$

تمرين7

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4\,;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-2\ln(1-2x) & -4\le x\le 0 \\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right) & x>0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1– احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. يمكن وضع $X=-2x$

– أثبت أن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}$.

– ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة f عند الصفر؟ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2– بين أن $f(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})$ لما $x>0$.

– استنتج أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $+\infty$.

3– ادرس تغيرات الدالة f على $[-4\,;+\infty[$.

– بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلين، أحدهما معدوم والآخر α يطلب حصره بـ $\frac{-n-1}{2}$ و $\frac{-n}{2}$. n عدد طبيعي.

– ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول $2cm$)

4– نعتبر الدالة g_m المعرفة على $[-4\,;0]$ بـ:

$g_m(x)=1+mf(x)$ (m وسيط حقيقي غير معدوم)

بين أن جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة g_m تشمل نقطتين ثابتتين $(0\,;1)$ و $(\alpha\,;1)$.

إعداد: عبد المطلب

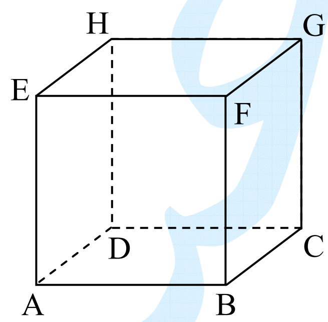
بوزريعة: محرم 1432 هـ

الجداء السلمي

Produit scalaire

تمرين1

ABCDEFGH مكعب ضلعه a.



1- احسب الجداء السلمي بدلالة a لكل من:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF}$.

2- بين أن $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG}=0$ و أن $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB}=0$. استنتج أن المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BEG).

3- عين طبيعة المثلث DBG واحسب مساحته.(a=2cm)

$2\sqrt{3}\ cm^2$	a^2	$2a^2$	$2a^2$	0	$-a^2$	a^2	0

تمرين2

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نعتبر النقاط: $A(2;-1;1)$ ، $B(3;-1;0)$ ، $C(1;-1;0)$ و $D(2;5;1)$.

1- احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\|\overrightarrow{CA}\|$ و $\|\overrightarrow{CB}\|$. استنتج بالراديان قيمة الزاوية $\widehat{ACB}$.

2- احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\|\overrightarrow{AB}\|$ و $\|\overrightarrow{AC}\|$. استنتج طبيعة المثلث ABC. احسب مساحته.

3- بيّن أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

4- احسب حجم رباعي الوجوه ABDC.

2 u.v	1 u.a	$\frac{\pi}{4}$

تمرين3

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نعتبر النقاط: $A(3;-2;0)$ ، $B(-1;0;4)$ ، $C(1;-4;8)$ و $D(5;-6;4)$.

1- بيّن أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ وأن المستقيم (AB) يعامد (BC).

2- احسب $\|\overrightarrow{AB}\|$ و $\|\overrightarrow{BC}\|$. استنتج طبيعة الشكل ABCD.

3- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABCD).

$2x+2y+z=2$

تمرين4

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نعتبر النقاط: $A(1;0;2)$ ، $B(0;3;-3)$ و $C(-1;1;2)$.

1- بين أن النقاط A ، B و C تعين مستويا.

2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\mathscr{P}_1$ الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له.

3- اكتب معادلة ديكارتية لـ $\mathscr{P}_2$ الذي يشمل A ، B و C.

4- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\mathscr{P}_3$ الذي يوازي المستوي ذي المعادلة: $x+y=3$ ويشمل النقطة C.

5- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $\mathscr{P}_4$ منصف القطعة [AB].

$-2x+6y-10z-13=0$	$x+y=0$	$x+2y+z-3=0$	$x+2y-5z+9=0$

تمرين5

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نعتبر النقطتين: $A(2;1;3)$ و $B(-1;-2;0)$. في نفس المعلم لتكن المستويات التالية: $\mathscr{P}_1: x+y+z=2$ ، $\mathscr{P}_2: x+2z=0$ و $\mathscr{P}_3: 2x-y-z=4$.

1- عين إحداثيات الأشعة الناظمية: $\vec{n}_1$ ، $\vec{n}_2$ و $\vec{n}_3$ للمستويات $\mathscr{P}_1$ ، $\mathscr{P}_2$ و $\mathscr{P}_3$ على الترتيب.

2- بين أن $\mathscr{P}_1$ و $\mathscr{P}_3$ متعامدان. هل $\mathscr{P}_1$ يوازي $\mathscr{P}_2$؟ علل.

3- بيّن أن المستقيم (AB) يعامد المستوي $\mathscr{P}_1$.

4- احسب البعد بين النقطة A و $\mathscr{P}_1$ وبين النقطة A و $\mathscr{P}_3$.
استنتج البعد بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع $\mathscr{P}_1$ مع $\mathscr{P}_3$.

$2\sqrt{2}$ ، $\frac{4}{\sqrt{6}}$ ، $\frac{4}{\sqrt{3}}$

تمرين6 بكالوريا الجزائر 2008

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقط: $A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$
والمستوي (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$.

1- المستوي (P) هو:
ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD)

2- شعاع ناظمي للمستوي (P) هو:
ج1) $\vec{n}_1(1,2,1)$ ، ج2) $\vec{n}_2(-2,0,6)$ ، ج3) $\vec{n}_3(2,0,-1)$

3- المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي:
ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

تمرين 7

اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة في كل حالة مما يلي:

S_1: كرة مركزها $\Omega(1;0;-2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

S_2: كرة مركزها $\Omega(0;1;1)$ وتشمل النقطة $A(2;0;-3)$.

S_3: كرة قطرها $[AB]$ حيث $A(-1;-2;0)$ و $B(0;1;2)$.

S_4: كرة مركزها $\Omega(1;2;0)$ والمماسية للمستوي $x+2y=0$.

$x^2+y^2+z^2-2x-4y=0$	$x^2+y^2+z^2+x+y-2z-2=0$	$x^2+y^2+z^2-2y-2z-19=0$	$x^2+y^2+z^2-2x+4z+2=0$

تمرين 8

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقاط: $\Omega(1;0;1)$ ، $A(-1;2;-1)$ ، $B(3;2;3)$

والمستوي $\mathscr{P}$ الذي معادلته: $x-y+z+4=0$.

1− احسب بعد النقطة Ω عن المستوي $\mathscr{P}$.

2− اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها Ω والمماسية للمستوي $\mathscr{P}$.

3− بين أن النقطة A تنتمي إلى المستوي $\mathscr{P}$.

4− احسب المسافة ΩA. استنتج نقطة تماس (S) و $\mathscr{P}$.

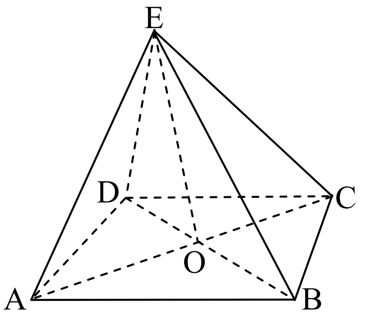
5− اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathscr{P}'$ المماس للكرة (S) عند النقطة B.

6− عين مركز ونصف قطر كرة (S') معادلتها الديكارتية: $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z-1=0$. هل (S') تقطع $\mathscr{P}$؟ علّل.

$x+y+z-8=0$	$x^2+y^2+z^2-2x-2z-10=0$	$2\sqrt{3}$

تمرين 9

ABCDE هرم قاعدته المربع ABCD الذي مركزه O بحيث: $EA=EB=EC=ED=2a$ و $OA=a$.



1− بيّن أن المستقيم (EO) يعامد المستوي (ABCD).

2− عين المجموعات (E_1) ، (E_2) و (E_3) للنقط M بحيث:

$$(E_1)\quad MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=8a^2$$

$$(E_2)\quad \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\left\|\overrightarrow{ME}\right\|$$

$$(E_3)\quad \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)\cdot\overrightarrow{ME}=0$$

كرة قطرها [OE]	المستوي محور [OE]	كرة مركزها O و $r=a$

تمرين 10

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن النقاط: $A(0;0;2)$ ، $B(1;2;3)$ و $C(-1;-1;0)$.

1− عين G مرجح الجملة: $\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$.

2− نعتبر الشعاع: $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

بين أن $\vec{u}$ مستقل عن النقطة الكيفية M. بين أن $\vec{u}(3;4;5)$.

3− عين المجموعتين (E) و (F) للنقط M بحيث:

$$(E)\quad \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

$$(F)\quad \left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)=0$$

المستوي الذي يمر من G وشعاعه الناظمي $\vec{u}$	كرة مركزها G و $r=\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$G(\frac{3}{2};\frac{5}{2};4)$

تمرين 11

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير من أجل ما يلي:

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقاط: $A(1;2;0)$ ، $B(0;3;0)$ ، $C(-1;0;-2)$

والمستوي $\mathscr{P}$ الذي معادلته: $x+y-2z-3=0$.

1− المعادلة الديكارتية للمستوي(ABC) هي المستوي $\mathscr{P}$.

2− المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathscr{P}'$ العمودي على المستوي $\mathscr{P}$ والذي يشمل النقطتين A و B هي $x+y+z-3=0$.

3− المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

4− سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0;-1;1)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$ مماسية للمستوي $\mathscr{P}$.

5− المسقط العمودي للنقطة $D(1;2;2)$ على المستوي(ABC) هي النقطة $E\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$.

6− حجم رباعي الوجوه ABCD يساوي $\frac{4}{3}$.

7− مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ هي سطح الكرة التي مركزها $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};0\right)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{2}$.

2 صحيح	6 صحيح	3 خطأ	5 صحيح	1 صحيح	7 خطأ	4 خطأ

إعداد: عبد المطلب — بوزريعة: محرم 1432 هـ

المستقيمات والمستويات

Droites et Plans dans l'espace

تمرين 1

ليكن الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم d_1 الذي يشمل النقطة $A(2;1;-1)$ و $\vec{u}(1;-2;3)$ شعاع توجيه له.

2- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم d_2 الذي يشمل النقطتين $B(3;2;2)$ و $C(2;3;-1)$. هل d_2 يشمل $D(3;2;0)$؟

3- عين إحداثيات النقطة I تقاطع المستقيمين d_1 و d_2.

4- نعتبر المستقيم d_3 الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2\lambda+1 \\ y=4\lambda-3 \\ z=\lambda+5 \end{cases}$$ λ عدد حقيقي

هل d_1 و d_3 متوازيان؟ متقاطعان؟ ليسا من نفس المستوي؟

$(0;5;-7)$	$(-\alpha+3;\alpha+2;-3\alpha+2)$	$(t+2;-2t+1;3t-1)$

تمرين 2

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستويات التالية: $\mathcal{P}_1: x-2y+z-3=0$ ، $\mathcal{P}_2: -2x+y+z=0$ و $\mathcal{P}_3: x+y+z-6=0$.

1- بين أن المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ يتقاطعان. عين التمثيل الوسيطي للمستقيم $\mathcal{D}$ تقاطع المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$.

2- بين أن $\mathcal{P}_3$ و $\mathcal{D}$ يتقاطعان في نقطة I يطلب تعيينها.

3- استنتج مما سبق مجموعة حلول الجملة التالية:

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ -2x+y+z=0 \\ x+y+z-6=0 \end{cases}$$

$(2;1;3)$	$(t-1;t-2;t)$

تمرين 3

فسر هندسيا الجملتين التاليتين واستنتج مجموعة الحلول في $\mathbb{R}^3$.

$$S_1 \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \\ 4x+2y-2z=7 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 3x-y-z=-2 \\ -x+5y+3z=0 \end{cases}$$

$(0;-3;5)$	ϕ

تمرين 4 *Bac S France 2007*

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر المستويين: $\mathcal{P}: x+2y-z+1=0$ و $\mathcal{P}': -x+y+z=0$.
لتكن النقطة $A(0;1;1)$.

1- بين أن المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ متعامدان.

2- نعتبر المستقيم d الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}+t \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$$ t عدد حقيقي

بين أن المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ يتقاطعان وفق المستقيم d.

3- احسب بعد النقطة A عن كل من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$.

4- استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم d.

$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{6}$

تمرين 5 *Bac S Nouvelle-Calédonie 2007*

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1- اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له.

2- لتكن النقاط: $A(1;2;-3)$، $B(-3;1;4)$ و $C(2;6;-1)$.

أ) بين أن النقاط A، B و C تعين مستويا.

ب) تأكد أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $2x-y+z+3=0$.

ج) لتكن النقطة $I(-5;9;4)$. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$ الذي يشمل النقطة I وعمودي على المستوي (ABC).

د) عين إحداثيات النقطة J، تقاطع $\mathcal{D}$ مع المستوي (ABC).

هـ) استنتج المسافة بين النقطة I والمستوي (ABC).

$2\sqrt{6}$	$J(-1;7;6)$	$(2t-5;-t+9;t+4)$

تمرين 6 *Bac S Polynésie 2008*

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط: $A(1;2;3)$، $B(0;1;4)$، $C(-1;-3;2)$، $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1- أ) بين أن النقط A، B و C ليست على استقامية.

ب) بين أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج) اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC).

2- نعتبر المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$$ t عدد حقيقي

بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

3- لتكن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC). بين أن النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC.

$E(0;0;3)$	$2x-y+z-3=0$

تمرين 7 *Bac S Antilles-Guyane 2007*

في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين: $A(3;0;6)$ و $I(0;0;6)$ ، نسمي (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و I. نعتبر المستويين التاليين: $(P): 2y+z-6=0$ ، $(Q): y-2z+12=0$.

1- بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

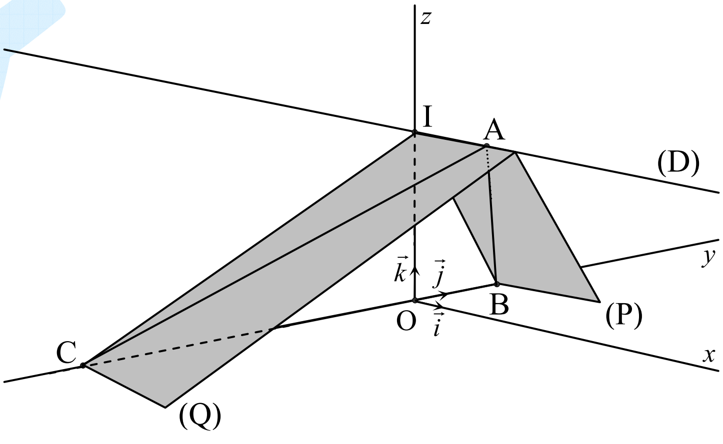
2- بين أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3- بين أن المستويين (P) و(Q) يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ وحدّد إحداثيات النقطتين B و C، تقاطع المستويين (P) و(Q) على الترتيب مع $(O;\vec{j})$.

4- بيّن أن معادلة المستوي (T) الذي يشمل النقطة B وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AC}$ هي $x+4y+2z-12=0$.

5- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA). بيّن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تحديدها.

6- ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC؟ علّل.



$H(2,4;0;4,8)$	$(3t;0;6t)$	$C(0;-12;0)$ ، $B(0;3;0)$

تمرين 8

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

− نعتبر المستقيم $\mathscr{D}$ الذي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=3-2t \end{cases} \quad t \text{ عدد حقيقي}$$

− نعتبر النقطتين: $A(2;1;3)$ و $B(5;-2;2)$.

− نعتبر المستوي $\mathscr{P}$ الذي معادلته $x+3z-5=0$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير على ما يلي:

1- النقطة A تنتمي إلى المستقيم $\mathscr{D}$.

2- النقطة A تنتمي إلى المستوي $\mathscr{P}$.

3- المستقيم $\mathscr{D}$ والمستوي $\mathscr{P}$ يتقاطعان في $I(8;-1;-1)$.

4- المستقيم (AB) والمستوي $\mathscr{P}$ متوازيان.

5- مجموعة النقط M من الفضاء حيث $MA=MB$ هي $\mathscr{P}$.

6- تقاطع المستوي $\mathscr{P}$ مع سطح الكرة التي مركزها A وتشمل النقطة B هي دائرة.

7- المستقيم $\mathscr{D}$ يوازي المحور $(O;\vec{i})$.

3 صحيح	6 صحيح	2 خطأ	4 صحيح	1 صحيح	5 خطأ	7 خطأ

تمرين 9 *Bac S Centres étrangers 2008*

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط: $A(2;1;-1)$، $B(-1;2;4)$، $C(0;-2;3)$ ، $D(1;1;-2)$ والمستوي $\mathscr{P}: x-2y+z+1=0$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير على ما يلي:

1- النقاط A، B و C تعين مستويا.

2- المستقيم (AC) ينتمي إلى المستوي $\mathscr{P}$.

3- المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD) هي: $x+8y-z-11=0$.

4- التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) هو:

$$\begin{cases} x=2k \\ y=-2+3k \\ z=3-4k \end{cases} \quad k \text{ عدد حقيقي}$$

5- المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

6- المسافة بين النقطة C والمستوي $\mathscr{P}$ تساوي $4\sqrt{6}$.

7- سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسية للمستوي $\mathscr{P}$.

8- النقطة $E\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي $\mathscr{P}$.

3 صحيح	7 صحيح	1 صحيح	5 خطأ	8 صحيح	4 صحيح	6 خطأ	2 خطأ

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: محرم 1432 هـ

الأعداد المركبة

Nombres Complexes

تمرين1

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=(1+2i)^2(3+4i)+(1-i)^3+20$$

$$z_2=\frac{1+18i}{3+4i}+\frac{7-26i}{3-4i}-\frac{-2+15i}{i}$$

$$z_3=\left[\left(-\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]^2$$

$$z_4=\frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\,i}{1+\sqrt{2}\,i-i}\qquad z_5=\left(\frac{5+7i}{-7+5i}\right)^{2011}$$

i	$1+i$	$-4(2+\sqrt{3})i$	$-7-2i$	$-7-2i$

تمرين2

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $z.\bar{z}+2z-3\bar{z}-31-25i=0$

2) $z^2+4\bar{z}-5=0$

3) $(z+\bar{z})^2+2i\,z.\bar{z}-4i=0$

$\pm\sqrt{2}\,i$	$1\ ;\ -5\ ;\ 2-\sqrt{7}\,i\ ;\ 2+\sqrt{7}\,i$	$-2+5i\ ;\ 3+5i$

تمرين3

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب بحيث:

1) $|z-1+i|=|z+1|$

2) $|iz-3-2i|=3$

3) $z+\bar{z}=|z|$

$(y=\sqrt{3}\,x)\cup(y=-\sqrt{3}\,x)\ x\geq 0$	$r=3$ ؛ $\Omega(2,-3)$	$4x-2y-1=0$

تمرين4

في المستوي المركب، لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z العدد المركب Z حيث:

$$Z=2z.\bar{z}+iz-(2+i)\bar{z}-7+2i$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري.

2- عين وارسم المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا. (وحدة الطول 2cm)

3- عين وارسم المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

$r=2$ ؛ $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$y=-1$

تمرين5

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$، لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq 2$ العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z+2}{z-2}$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري.

2- عين المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، والمجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3- لتكن النقطة M' صورة Z. عين المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون: O، M، M' على استقامة واحدة.

$(y=0)\cup[r=2\sqrt{2}$ ؛ $\Omega(-2,0)]$	$r=2$ ؛ $O(0,0)$	$y=0$

تمرين6

في المستوي المركب لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq -i$ العدد المركب Z حيث:

$$Z=\frac{z-2-i}{z+i}$$

1- عين $\mathrm{Re}(Z)$ و $\mathrm{Im}(Z)$.

2- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث:

- يكون Z عددا حقيقيا.
- يكون Z عددا تخيليا صرفا.
- تكون: $|Z|=\sqrt{2}$.

$r=4$ ؛ $\Omega(-2,-3)$	$r=\sqrt{2}$ ؛ $\Omega(1,0)$	$y=x-1$

تمرين7

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$، لاحقة النقطة M هي العدد المركب: $z=x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب $z\neq i$ العدد المركب $f(z)$:

$$f(z)=\frac{2z-i}{iz+1}$$

1- عين وأنشئ المجموعة E للنقط M من المستوي حتى يكون $f(z)$ عددا حقيقيا موجبا. (وحدة الطول 4cm)

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $\overline{f(\bar{z})}=\frac{7}{4}i$.

$z=3i$	$[r=\frac{1}{4}$ ؛ $\Omega(0,\frac{3}{4})]\cap(x>0)$

تمرين8

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية:

$z_4=5$ ، $z_3=3+i\sqrt{3}$ ، $z_2=-\sqrt{3}+i$ ، $z_1=2+2i$

$z_7=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i\right)^5$ ، $z_6=(1-\sqrt{3})i$ ، $z_5=-8i\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_{10}=\dfrac{3\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ ، $z_9=\dfrac{-1-i}{1+i\sqrt{3}}$ ، $z_8=(1-i\sqrt{3})(1+i)$

$z_{13}=\alpha i\ (\alpha\in\mathbb{R})$ ، $z_{12}=\dfrac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$ ، $z_{11}=\dfrac{4e^{i\pi}}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

$z_{15}=-2(\cos\theta+i\sin\theta)\ (\theta\in\mathbb{R})$ ، $z_{14}=\alpha i\ (\alpha\in\mathbb{C})$

$z_{16}=\sin 2\theta+2i\sin^2\theta\ \ (0<\theta<\pi)$

$z_{17}=1-\tan^2\theta+2i\tan\theta\ \ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$

$z_{18}=\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\ \ (-\pi/2<\theta<\pi/2)$

$z_7\left[32,-\frac{5\pi}{4}\right]$	$z_6\left[\sqrt{3}-1,-\frac{\pi}{2}\right]$	$z_5\left[8,-\frac{\pi}{3}\right]$	$z_2\left[2,\frac{5\pi}{6}\right]$
$z_{11}\left[\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]$	$z_{10}\left[3,\frac{3\pi}{4}\right]$	$z_9\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{11\pi}{12}\right]$	$z_8\left[2\sqrt{2},\frac{-\pi}{12}\right]$
$z_{18}[1,2\theta]$	$z_{16}[2\sin\theta,\theta]$	$z_{14}\left[r,\theta+\frac{\pi}{2}\right]$	$z_{12}\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$

تمرين9

اكتب على الشكل الجبري والأسي الأعداد المركبة التالية:

$z_2=-\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_4=\dfrac{\left(\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2.e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3e^{i\frac{3\pi}{2}}}$ ، $z_3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$

-2i	$-8-8\sqrt{3}i$	$1-i$	$-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$
$2e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

تمرين10

ليكن Z عدد مركب معرف كما يلي:

$$Z=\frac{(\sqrt{2}-1)+i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+i}$$

1- اكتب Z على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي.

2- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا.

3- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n تخيليا صرفا.

4- اكتب على الشكل الأسي ثم على الشكل الجبري العـــدد المركب z حيث: $Z\times z=4\sqrt{2}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$-2\sqrt{3}+2i$	$4e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$4k+2$	$4k$	$\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$	$1+i$

تمرين11

z_1 ، z_2 ، z_3 ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$ ، $z_1=1+i$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_1 و z_2.

2- اكتب z_3 على الشكل الجبري وعلى الشكل المثلثي.

3- استنتج قيمتي: $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

4- بين أن: $\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{\overline{z_1}}{\sqrt{2}}\right)^n=2\cos\dfrac{n\pi}{4}$ ، $n\in\mathbb{N}$

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{7\pi}{12}\right]$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

تمرين12

z_1 ، z_2 ، Z ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$Z=\dfrac{z_1^{\,5}}{z_2^{\,4}}$ ، $z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ ، $z_1=1-i$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_1 ، z_2 ، $z_1^{\,5}$ و $z_2^{\,4}$.

- استنتج الشكل الجبري لكل من $z_1^{\,5}$ و $z_2^{\,4}$.

2- عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب Z.

3- احسب طويلة وعمدة العدد Z ثم استنتج قيمة: $\tan\frac{\pi}{12}$.

4- عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا موجبا.

$\left[64,-\frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[4\sqrt{2},-\frac{5\pi}{4}\right]$	$\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$
$24k$	$2-\sqrt{3}$	$\left[\frac{\sqrt{2}}{16},\frac{\pi}{12}\right]$	$\frac{-4+4i}{-32+32\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}+1}{32}+i\frac{\sqrt{3}-1}{32}$

تمرين13

z_1 ، z_2 ، z_3 ثلاثة أعداد مركبة معرفة بما يلي:

$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$ ، $z_2=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_1=(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$

1- عين طويلة وعمدة كل من z_2 و z_3 ثم z_1.

2- استنتج قيمتي: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3- احسب العددين: $\left(\dfrac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ و $\left(\dfrac{z_1+z_2}{\sqrt{2}\,z_3}\right)^{1432}$.

4- اكتب على الشكل الأسي الجذور التكعيبية للعدد: $2z_3$

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	-1	$\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12}\right]$	$\left[\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right]$	$\left[2,\frac{2\pi}{3}\right]$
$\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$		

تمرين14

نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$z^3-4(1+i)z^2+12iz+8-8i=0$$

1– برهن أن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب حسابه.

2– عين العددين المركبين a و b بحيث يمكن كتابة المعادلة (E) على شكل: $(z-2)(z-2i)(az+b)=0$.

3– استنتج حلول المعادلة (E).

4– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A، B و C النقاط التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=2i$ ، $z_C=2+2i$.

عين طبيعة المثلث ABC واحسب إحداثيتي مركز ثقله.

$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$	2+2i	2i	2

تمرين15

نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$z^3+2(1+i)z^2+(9+4i)z+18i=0$$

1– برهن أن (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب حسابه، ثم عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يمكن كتابة (E) على شكل: $(z-z_0)(az^2+bz+c)=0$.

2– استنتج الحلين الآخرين: z_1 و z_2 حيث $\operatorname{Im}(z_1)<0$.

3– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B صورتي العددين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب. عين طبيعة المثلث OAB.

$-1+2\sqrt{2}\,i$	$-1-2\sqrt{2}\,i$	-2i

تمرين16

$f(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$$f(z)=z^3-3\sqrt{2}z^2+6z-18\sqrt{2}$$

1– احسب $f(3\sqrt{2})$ ثم عين العدد الحقيقي a بحيث:

$$f(z)=(z-3\sqrt{2})(z^2+a)$$

2– حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $f(z)=0$. نرمز إلى z_1 ، z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ حيث z_1 الحل الحقيقي و $\operatorname{Im}(z_2)<0$.

3– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقاط A ، B و C صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ على الترتيب. عين طبيعة المثلثين ABC و OAB.

$\sqrt{6}i$	$-\sqrt{6}i$	$3\sqrt{2}$	$a=6$

تمرين17

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) التالية:

$$(iz+3+4i)(z^2-8z+25)=0$$

نرمز لحلول المعادلة (E) بـ z_0 ، z_1 و z_2 حيث: $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$ و $\operatorname{Im}(z_0)=\operatorname{Im}(z_1)$.

2– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقاط من هذا المستوي لواحقها z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب. بين أن النقاط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$، يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r. أنشئ المثلث ABC والدائرة $(\mathscr{C})$.

r = 5 ; ω(0,0)	4 – 3i	4 + 3i	-4 + 3i

تمرين18

1– حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$z^2-2mz+m^2+1=0$$

z مجهول و m وسيط حقيقي.

2– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن M_1 و M_2 نقطتان لاحقتاهما على الترتيب العددين المركبين: $z_1=m-i$ و $z_2=m+i$.

• عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع.

• عين قيم m حتى تكون O، M_1 و M_2 في استقامية.

0	$\pm\sqrt{3}$	m + i	m − i

تمرين19

$f(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$$f(z)=z^4+(2-i)z^3+z^2+(12-i)z+20-10i$$

1– بين أن المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا $z_0=-2$.

2– عين كثير الحدود $(g(z)=z^3+az^2+bz+c)$ حيث: $f(z)=(z-z_0)\times g(z)$ (a ، b و c أعدادا مركبة)

3– اكتب $\overline{g(z)}$ بدلالة $\bar{z}$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق z، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $g(z)=0$ إذا علمت أنها تقبل حلين مترافقين z_1 و $\bar{z}_1$. الحلّ z_1 يحقّق $\operatorname{Im}(z_1)<0$.

4– المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقاط M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 صور الأعداد المركبة z_0 ، z_1 ، z_2 و z_3 حلول $f(z)=0$ على الترتيب. أنشئ الرباعي $M_0M_1M_2M_3$ واحسب مساحته.

7,5 u.a	-2+i	1+2i	1-2i	-2

تمرين 20

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة 1cm)

1- أنشئ النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=2-i$ ، $z_C=3+2i$

2- احسب لاحقتي الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

3- فسر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

- بين أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC.

4- عين لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثم احسب نصف قطرها r. ارسم (Γ).

5- عين لاحقة النقطة D حتى يكون ABDC مربعا.

$z_D=4$	$r=\frac{\sqrt{10}}{2}$	$z_I=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$

تمرين 21

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_C=-2i$

1- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب: $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مركز ثقله G.

2- لتكن النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب.

- عين z_D لاحقة النقطة D.
- مثّل الرباعي ABCD ثم عين بدقّة طبيعته. الوحدة 1cm

3- اكتب على الشكل الأسي العدد المركب: $\frac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}$.

- بين أن $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)$ ثم استنتج أن النقاط B، O و D على استقامة واحدة.

$2e^{i\pi}$	$z_D=-\sqrt{3}+i$	$G(\sqrt{3},-1)$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$

تمرين 22 (بكالوريا)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، الوحدة 1cm. لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=2\sqrt{3}$ ، $z_C=2i$

1- مثّل النقاط A، B و C على ورقة مليمترية.

2- عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A.

3- أ) احسب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية: z_A-z_C ، z_B-z_A و z_B-z_C. استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ، حدد نصف قطر هذه الدائرة.

ج) بين أن النقطة O تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4- لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

أ) بين أن $z_D=\sqrt{3}-i$.

ب) احسب لاحقة المنتصف M للقطعة [AD].

ج) بين أن الرباعي ABDC مستطيل.

$z_M=\sqrt{3}+i$	$z_K=\sqrt{3}+i$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

تمرين 23

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1- نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ و $z_B=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

أ) عين اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O.

ب) عين اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة [AC].

ج) عين اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I.

د) أنشئ النقاط A، B، C، D و I. (الوحدة 1cm)

2- أ) فسر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$.

ب) تحقق أن العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

ج) ماذا يمكن قوله عن القطعتين [AC] و [BD]؟

3- ماهي طبيعة الرباعي ABCD؟ احسب مساحته.

4- بيّن أن النقاط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب حساب لاحقة مركزها ω ونصف قطرها r.

5- لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لحامل محور الفواصل.

أ) عين z_E لاحقة النقطة E.

ب) احسب الجداء: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BE}$.

ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة $(\mathscr{C})$؟

$z_E=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	$z_D=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_I=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$z_C=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

تمرين 24

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، (وحدة الرسم 2cm). عين هندسيا ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z في كل حالة من الحالات التالية:

1) $|z-2-3i|=1$

2) $|z+1|=|z-1+2i|$

3) $|(1+i)\bar{z}|=3\sqrt{2}$

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: صفر 1432 هـ

التحويلات النقطية

Transformations ponctuelles

تمرين1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب العددين المركبين: $z_A=1$ و $z_B=2+2i$.

1- عيّن z_C لاحقة النقطة C، صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

2- عيّن z_D لاحقة النقطة D، صورة النقطة C بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A ونسبته 3–.

3- عيّن z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

4- أنشئ النقط: A ، B ، C ، D و E. وحدة الرسم 1cm.

5- احسب $\frac{z_E-z_B}{z_D-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BDE.

i	*-2-2i*	*-2+6i*	*2-2i*

تمرين2

نعتبر التحويل النقطي T من المستوي الذي يرفق بالنقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=iz+3-i$

1- عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

2- عيّن A' و B' صورتي النقطتين A(1;3) و B(-1;1) على الترتيب بالتحويل T. استعمل المدور لإنشاء A' و B'.

3- ليكن (Δ) مستقيم معادلته: $y=x+2$. اكتب معادلة المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بواسطة التحويل T.

4- عيّن $(\mathscr{C}')$ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ التي قطرها [AB] ، بواسطة التحويل T. أنشئ (Δ) ، (Δ') ، $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

R=$\sqrt{2}$; ω(1;-1)	*y′=-x′*	*$\frac{\pi}{2}$; Ω(2;1)*

تمرين3

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب -2 ، $2i$ و $1+3i$.

1- نعتبر التحويل T الذي مركزه B ويحوّل النقطة A إلى النقطة C. عيّن العبارة المركبة لهذا التحويل وعناصره المميزة ثم بيّن أن النقط: A ، B و C على استقامة واحدة.

2- عيّن مركز وزاوية الدوران r حيث: $r(A)=O$ و $r(O)=B$.

$\frac{\pi}{2}$; Ω(-1; 1)	*$z'=-\frac{1}{2}z+3i$*

تمرين4 (بكالوريا بتصرف)

المستوي (P) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1- حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة (E): $z^3-8=0$

2- نعتبر في المستوي (P) النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$

اكتب z_A و z_C على الشكل المثلثي. عيّن طبيعة ABC.

3- نعتبر التطبيق f من المستوي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z′ حيث: $z'=e^{\frac{2i\pi}{3}}z$.

أ) عين الطبيعة الهندسية للتطبيق f.

ب) عين صورتي النقطتين A و C بـ f.

استنتج صورة المستقيم (AC) بـ f.

f(C)=B و f(A)=C

تمرين5 *Bac S Antilles-Guyane 2010*

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث الوحدة 1cm.

1- من أجل $M\neq\Omega$ ، نذكّر أن النقطة M' هي صورة النقطة M بالدوران r الذي مركزه Ω وزاويته θ إذا وفقط إذا:

$$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M & (1)\\ (\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta\,[2\pi] & (2)\end{cases}$$

أ) لتكن z ، z' و ω لواحق النقاط M ، M' و Ω على الترتيب. ترجم (1) و (2) بعبارتي الطويلة والعمدة.

ب) استنتج عبارة z' بدلالة z ، θ و ω.

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$z^2-4\sqrt{3}z+16=0$$

3- لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب $a=2\sqrt{3}-2i$ و $b=2\sqrt{3}+2i$.

أ) اكتب a و b على الشكل الأسي.

ب) مثّل النقطتين A و B.

ج) بيّن أنّ OAB مثلث متساوي الأضلاع.

4- لتكن C نقطة لاحقتها $c=-8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. مثّل النقطتين C و D.

بيّن أن لاحقة النقطة D هي $d=4\sqrt{3}+4i$.

5- بيّن أن D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ويطلب تحديد نسبته.

6- بيّن أنّ OAD مثلث قائم.

تمرين 6 Bac S Amérique du Nord 2007

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الرسم 4cm). لتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A=i$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1- ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. نسمي C صورة B بواسطة التحويل r. أ) اكتب العبارة المركبة للتحويل r. ب) بين أن لاحقة C هي $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ج) اكتب z_B و z_C على الشكل الجبري.

د) أنشئ النقط A، B و C.

2- لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 2، 1-، و 2 على الترتيب.

أ) بين أن لاحقة D هي $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. أنشئ النقطة D.

ب) بين أن A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3- ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. نسمي E صورة D بواسطة التحويل h. أ) اكتب العبارة المركبة للتحويل h. ب) بين أن لاحقة E هي $z_E=\sqrt{3}$. أنشئ E.

4- أ) احسب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$. اكتب النتيجة بالشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة المثلث CDE.

تمرين 7

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، (وحدة الرسم 2cm). لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=2+2i$ و $z_B=-1+3i$. ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة A ونسبته 3-، و ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. نضع $s=roh$.

1- عين طبيعة التحويل s وعناصره المميزة.

2- بين أن صورة A بـ r هي C ذات اللاحقة $z_C=-2$.

3- لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,1)\,;\,(B,-2)\,;\,(C,3)\}$.

• عين وأنشئ المجموعتين (E_1) و (E_2) للنقط M بحيث:

$$(E_1)\qquad \left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{5}$$

$$(E_2)\qquad \left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|$$

• بين أن المجموعة (E_1) تشمل النقطتين O و C.

محور [AG]	دائرة $r=\sqrt{5}$, $\Omega(-1;-2)$	$z'=3iz+4-6i$

تمرين 8

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، (وحدة الرسم 1cm). لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=3-i$ و $z_B=4-3i$. نعتبر التطبيق f من هذا المستوي الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن A لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{z-4+3i}{z-3+i}$.

1- حلّ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $z'=z-i$.

2- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة العدد المركب z'، ثم عين وأنشئ المجموعة (E_1) للنقط M بحيث: $|z'|=1$.

3- أ) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب z'.

ب) عين وأنشئ المجموعة (E_2) للنقط M حتى يكون z' حقيقيا ثم المجموعة (E_3) للنقط M حتى يكون z' تخيليا صرفا.

دائرة قطرها [AB]	المستقيم (AB)	محور [AB]	$2+i\ ;\ 2-i$

تمرين 9

في كل سؤال، اختر جوابا واحدا صحيحا. (برّر إجابتك)

1- النقطة M التي تنتمي إلى دائرة مركزها A(0;-1) ونصف قطرها $r=3$ لاحقتها z تحقق:

أ) $|z+i|^2=3$ ب) $|z+i|=3$ ج) $|z-i|=3$

2- في المستوي المركب، لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=2$ و $z_B=3-2i$. لتكن (E) مجموعة النقط M بحيث: $|z-2|=|z-3+2i|$.

أ) (E) هي محور القطعة [AB]. ب) (E) هي القطعة [AB]. ج) (E) هي دائرة مركزها A و قطرها [AB].

3- ليكن العدد المركب: $z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

α) الشكل الأسي للعدد المركب z^2 هو:

أ) $z^2=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ ب) $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ج) $z^2=4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

β) الشكل الأسي للعدد المركب z هو:

أ) $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ب) $z=2e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ج) $z=2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

4- لتكن النقط A، B و C بحيث: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

أ) ABC مثلث متساوي الأضلاع. ب) ABC مثلث متساوي الساقين وقائم. ج) A، B و C على استقامة واحدة.

5- في المستوي المركب، لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=1$ ، $z_C=4-i$. العبارة المركبة للتشابه المباشر s بحيث: $s(A)=B$ و $s(B)=C$ هي:

أ) $z'=(1+i)z+3-2i$ ب) $z'=(1-i)z+3-2i$ ج) $z'=(1+i)z-3+2i$

ج β3	ب 1	أ 5	أ 2	ج α3	ب 4

إعداد: عبد المطلب

الاستدلال بالتراجع

Raisonnement par récurrence

تمرين1

برهن بالتراجع أنه:

1- من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2+5+8+\dots\dots\dots+3n+2=\dfrac{(n+1)(3n+4)}{2}$

2- من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\times 2^2+2\times 4^2+3\times 6^2+\dots\dots\dots+n(2n)^2=\left[n(n+1)\right]^2$

3- من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ فإن: $1\times 2^0+4\times 2^1+7\times 2^2+\dots\dots+(3n-2)2^{n-1}=5+(3n-5)2^n$

4- من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $(\alpha\neq 1)$ $1+\alpha^1+\alpha^2+\dots\dots\dots+\alpha^n=\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$

5- من أجل كل عدد طبيعي n فإن: 7^n-1 مضاعف للعدد 6.

6- من أجل كل عدد طبيعي $n>0$ فإن: $5^{4n}-3^{3n}$ مضاعف للعدد 13.

7- من أجل كل عدد طبيعي $n>1$ فإن: $4^n>3n+1$.

8- من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ فإن: $2^n\leq 2n!$. نذكر أن: $n!=1\times 2\times 3\times\dots\times n$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=(x+1)e^x$.

1- عين f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f.

2- أعط تخمينا للمشتق النوني للدالة f وليكن $f^{(n)}(x)$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

3- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ فإن: $f^{(n)}(x)=(x+n+1)e^x$.

تمرين3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

1- عين f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f.

2- أعط تخمينا للمشتق النوني للدالة f وليكن $f^{(n)}(x)$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

3- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ فإن: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n.(n+1)!}{x^{n+2}}$.

إعداد: عبد المطلب

المتتاليات العددية
Suites numériques

بوزريعة: ربيع الأول 1432 هـ

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

تمرين1

عين الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 و u_2 لمتتالية حسابية والمعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

−4 ، 1 ، 6	6 ، 1 ، −4

تمرين2

لتكن a ، b و c حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما بحيث تحقق:
$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 62 \end{cases}$$
عين الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود a ، b و c.

7 ، 2 ، −3	5

تمرين3

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 3$ وبمجموع حدودها الأربعة الأولى: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -18$.

1− عين أساس هذه المتتالية وحدها العاشر.

2− اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3− احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + ... + u_{10}$

−195	8 − 5n	−42	−5

تمرين4

(u_n) متتالية حسابية حيث: $u_3 = 2$ و $u_5 = 8$.

1− عين الأساس r لهذه المتتالية وحدها الأول u_1.

2− احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 95$.

10	$\frac{n(3n-11)}{2}$	−4	3

تمرين5

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ حيث:
$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$$

1− احسب الحد u_5 علما أنه موجب ثم احسب u_0 .

2− احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $8S_n \geq 945$.

$3 \leq n \leq 12$	$\frac{(n+1)(-5n+80)}{2}$	40	15

تمرين6

عين الحدود الثلاثة الأولى v_1 ، v_2 ، v_3 لمتتالية هندسية حدودها موجبة والمعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} v_1 \times v_2 \times v_3 = 1 \\ v_1 + v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases}$$

0,5 ، 1 ، 2

تمرين7

(v_n) متتالية هندسية حيث:
$$\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$$
أثبت أن $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ثم احسب v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 و v_5.

−1 ، 2 ، −4 ، 8 ، −16	−16 ، 8 ، −4 ، 2 ، −1

تمرين8

عين الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 و v_5 لمتتالية هندسية متناقصة تماما حيث:
$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 140 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 35 \end{cases}$$

5 ، 10 ، 20 ، 40 ، 80

تمرين9

(v_n) متتالية هندسية حيث: $v_3 = 3$ و $v_6 = \frac{81}{8}$.

1− عين الأساس q لهذه المتتالية وحدها الأول v_1.

2− اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3− احسب المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

$\frac{8}{3}[(\frac{3}{2})^n - 1]$	$\frac{4}{3}(\frac{3}{2})^{n-1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

تمرين10

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}$:
$$u_n = \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1}$$

1− بين أن (u_n) متتالية حسابية. احسب أساسها r و u_0.

2− نضع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

بين أن: $S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)}$

3− نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{u_n}$

بين أن (v_n) متتالية هندسية. احسب أساسها q و v_0.

4− نضع: $P_n = v_0 \times v_1 \times ... \times v_{n-1}$. بين أن: $P_n = e^{S_n}$

$v_0 = e^{\alpha - 1}$	$q = e^{\frac{1}{\alpha+1}}$	$u_0 = \alpha - 1$	$r = \frac{1}{\alpha+1}$

البرهان بالتراجع، تغيرات متتالية وتقاربها

تمرين 11

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+20}$

1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 0$ فإن $4\leq u_n<5$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 12

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{2}$

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n<3$.

2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

4- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n=3-2^{-n+2}$.

تمرين 13

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-2}{2u_n-1}$

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n>1$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

4- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $u_n=\dfrac{2n+2}{2n+1}$.

تمرين 14

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_1=\dfrac{5}{8}$ و $u_{n+1}=\dfrac{{u_n}^2+1}{2}$

1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ فإن $0<u_n<1$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 15

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$

1- احسب u_1، u_2، u_3 ثم أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

تمرين 16 *Bac S France 2004*

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=u_n+2n+3$

1- ادرس رتابة المتتالية (u_n).

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>n^2$.

- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3- أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n، ثم برهن تخمينك.

تمرين 17 *Bac S La Réunion 2007*

a عدد حقيقي حيث $-1<a\leq 0$. نعتبر المتتالية u المعرفة بـ $u_0=a$، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=u_n^2+u_n$.

1- ادرس اتجاه تغير المتتالية u.

2- أ) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^2+x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h. استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;0[$، $h(x)$ ينتمي كذلك إلى المجال $]-1;0[$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_n<0$.

3- ادرس تقارب المتتالية u. احسب نهايتها.

تمرين 18

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بـ: $u_n=\ln(n+1)-\ln n$

1- برهن أنه من أجل كل $n\geq 1$ فإن $0<u_n\leq\ln 2$.

2- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما. يمكن دراسة اتجاه تغير الدالة $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$ على $[1\,;+\infty[$.

3- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين 19

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ نعتبر: $u_n=n^2-2n+5$، $v_n=ne^{-2n+1}$، $w_n=n-\ln(n+2)$ و $x_n=\dfrac{n\cos n}{2n^2+1}$

1- ادرس اتجاه تغير كل من (u_n)، (v_n) و (w_n).

2- بين أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 أي $v_n>0$.

3- ادرس تقارب كل من (u_n)، (v_n)، (w_n) و (x_n).

تمرين 20

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0=1\ ,\ u_1=3 \\ 3u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n \end{cases}$

1- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، $u_n=4-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

تمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ارسم البيان $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

- مثل على المحور $(O; \vec{i})$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 ؛ مبرزا خطوط الرسم ثم خمّن تغيرات المتتالية (u_n) ونهايتها.

2- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n - 2$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- ادرس تغيرات (u_n) ثم حسب نهايتها لما $n \to +\infty$.

$l = 2$	$2+2^{-n+1}$	2^{-n+1}	$q = \frac{1}{2}$

تمرين 22

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة تماما معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n \neq 2$.

2- f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{x}$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- ادرس تغيرات f ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$. (وحدة الطول 2cm).

- مثل على المحور $(O; \vec{i})$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 دون حساب، مبرزا خطوط الرسم ثم خمّن نهاية المتتالية (u_n).

3- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- احسب نهاية u_n لما $n \to +\infty$.

$l = 2$	$\frac{2(-2)^{n+1}+1}{(-2)^{n+1}-1}$	$(-2)^{n+1}$	$q = -2$

تمرين 23

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_1 = 19$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - 1$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = n(u_n - 1) - 2$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3- ادرس تغيرات المتتالية (v_n).

4- احسب المجموع: $S_n = \sum_{p=1}^{n} v_p = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$2^{n+4} - 16$	$\frac{2^{n+3}+n+2}{n}$	2^{n+3}	$q = 2$

تمرين 24

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$. $0 < \alpha < 1$

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n + \frac{2}{\alpha - 1}$

1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n > 0$.

2- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q.

3- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

4- احسب نهاية u_n لما $n \to +\infty$.

5- احسب المجموعين: $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} v_p$ و $S'_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$

$S'_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha^n - 1)}{(\alpha-1)^2} - \frac{2n}{\alpha - 1}$	$l = \frac{2}{1-\alpha}$	$q = \alpha$

تمرين 25

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 3 \\ 3u_{n+1} - 4u_n = -u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

2- احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

3- أثبت أن: $S_n = u_n - u_0$. استنتج عبارة u_n بدلالة n.

$4-3^{-n+1}$	$3-3^{-n+1}$

تمرين 26

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

1- برهن أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما.

2- عين العددين α و β بحيث: $u_n = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{\beta}{2n-1}$

3- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

- احسب نهاية S_n لما $n \to +\infty$.

$l = \frac{1}{2}$	$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$	$u_n = \frac{-1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)}$

تمرين27

(u_n) متتالية عدديـة معرفة بحـدها الأول $u_0 = 3\alpha + 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $2u_{n+1} = u_n + 4\alpha$.

1− عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة.

في باقي التمرين نفرض أن (u_n) غير ثابتة ونضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 2\beta$.

2− أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتاليـة هندسـية يطلب حساب أساسها q وحدها الأول v_0.

3− اكتب عبارة u_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4− ادرس تغيرات المتتالية (v_n). ناقش حسب قيم α.

5− احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

$2(1-\alpha)(1-2^{-n-1})+4\alpha(n+1)$	$(1-\alpha)2^{-n}+4\alpha$	$\beta=2\alpha$	1

تمرين28 *Bac S Inde 2004*

1− (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

أ) احسب الحدود u_1، u_2 و u_3. عبر عن كل حد على شكل كسر غير قابل للاختزال.

ب) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتاليـة u والحـدود الأربعة الأولى للمتتالية w المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = w_n$.

2− لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

أ) برهن أن $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

− احسب نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

$S_n = -\ln(n+1)$

تمرين29

(u_n) متتاليـة عدديـة حدودها موجبة، معرفة بحـدها الأول $u_1 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n > 1$: $(u_n)^2 e = u_{n-1}$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \dfrac{1+\ln u_n}{2}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1− برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q و v_1.

2− اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3− احسب المجموع: $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} v_p$ والجداء: $P_n = \prod\limits_{p=1}^{n} u_p$

− احسب نهاية S_n ونهاية P_n لما $n \to +\infty$.

$e^{8-2^{-n+3}-n}$	$4-2^{-n+2}$	$e^{2^{-n+3}-1}$	2^{-n+2}	2	$\frac{1}{2}$

المتتاليتان المتجاورتان

تمرين30

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

1− بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2− احسب النهاية المشتركة لهما.

تمرين31

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \frac{1}{2\times1} + \frac{1}{4\times3} + \frac{1}{6\times5} + ... + \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$$

1− بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2− احسب u_4 و v_4. استنتج أن نهايتيهما $0,63 < l < 0,74$.

تمرين32 *Examen USTHB (Fev 2009)*

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1− احسب u_1، v_1، u_2 و v_2.

2− لتكن المتتالية (w_n) معرفة، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $w_n = v_n - u_n$

أ) برهن أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (w_n).

3− **أ)** ادرس تغيرات المتتاليتين (u_n) و (v_n).

ب) بين أن هاتين المتتاليتين متجاورتين. ماذا تستنتج؟

4− لتكن (t_n) متتالية معرفة بـ: $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$، $n \in \mathbb{N}$.

بين أن (t_n) ثابتة. استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n).

$l = \frac{11}{3}$	$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إعداد: عبد المطلب

الدوال الأصلية

Calcul de Primitives

تمرين 1

عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.

1) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+7$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ ؛ $I=]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{3x^4+2x^3-4x^2+5}{x^2}$ ؛ $I=\mathbb{R}^*$

4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ؛ $I=]1;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+6)^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ؛ $I=\mathbb{R}-\{-2\}$

6) $f(x)=4x(x^2+4)^2+x^3(x^4+3)^3$ ؛ $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=(x^2-1)^2+\dfrac{3}{(2-x)^2}$ ؛ $I=\mathbb{R}-\{2\}$

8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}+\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$ ؛ $I=]-\infty;-1[$

9) $f(x)=2\sin x-5\cos(x+1)$ ؛ $I=\mathbb{R}$

10) $f(x)=6\sin(3x+\pi)+3\cos(2x+\pi)$ ؛ $I=\mathbb{R}$

11) $f(x)=\cos x(\sin x+2)$ ؛ $I=\mathbb{R}$

12) $f(x)=\sin x\sqrt{\cos x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

13) $f(x)=\sin x\cos^3 x$ ؛ $I=\mathbb{R}$

14) $f(x)=\sin 2x\cos 2x$ ؛ $I=\mathbb{R}$

15) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x+\cos x+2}}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

16) $f(x)=2\sin^2 x-4\cos^2 x$ ؛ $I=\mathbb{R}$

17) $f(x)=\cos^2 x\sin^3 x$ ؛ $I=\mathbb{R}$

18) $f(x)=\tan x(1+\tan^2 x)$ ؛ $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

تمرين 2

عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.

1) $f(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=e^{2x+1}-2x$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{e^{3x}+e^{2x}+3}{e^x}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=1+\dfrac{e^x}{e^x+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^{-x}\sqrt{e^{-x}+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$ ؛ $I=\mathbb{R}^*$

8) $f(x)=3^{x-1}+3^{-x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

9) $f(x)=2x-1+\dfrac{3}{x}$ ؛ $I=\mathbb{R}^*$

10) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{2x-4}$ ؛ $I=]2;+\infty[$

11) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ؛ $I=]1;2[$

12) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x^2}$ ؛ $I=]0;+\infty[$

13) $f(x)=\dfrac{3x+3}{x^2+2x+2}+\dfrac{1}{2-x}$ ؛ $I=]2;+\infty[$

14) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$ ؛ $I=\left]\dfrac{-\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right[$

15) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$ ؛ $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

16) $f(x)=\tan 2x+\dfrac{1}{\tan 2x}$ ؛ $I=\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$

17) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\ln x}$ ؛ $I=]1;+\infty[$

18) $f(x)=\dfrac{x-1+\ln(x+1)}{x+1}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

تمرين 3

بين في كل حالة أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

1) $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+3})$ ؛ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

2) $F(x)=x^2\sin x+2x\cos x$ ؛ $f(x)=(x^2+2)\cos x$

تمرين 4

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x\ln(1+e^x)$.

1- بين أن: $f(x)-f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-e^x$

2- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

إعداد: عبد المطلب

الحساب التكاملي

Calcul Intégrale

تمرين 1

احسب التكامل I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $I=\int_{1}^{2}(2x^3+x^2-2x-1)\,dx$

2) $I=\int_{-1}^{3}(2x+1)(x^2+x-4)^2\,dx$

3) $I=\int_{7}^{\sqrt{7}}x\sqrt{2x^2+2}\,dx$

4) $I=\int_{4}^{7}\left[\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{1}{(2x-5)^2}\right]dx$

5) $I=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

6) $I=\int_{-3\ln 2}^{-\ln 3}\frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}+1}}\,dx$

7) $I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2-3x+1}\,dx$ لاحظ وجود ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ فإن: $\frac{5x^2-6x+2}{2x^2-3x+1}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{2x-1}$.

8) $I=\int_{0}^{3}(|x-2|-1)\,dx$ (استعمل علاقة شال)

9) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}2(\cos x+\sin 2x)\,dx$

10) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\sin^2 x\,dx$

11) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\tan 2t}{\cos^2 2t}\,dt$

12) $I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin 2x}{x^2+1}\,dx$

13) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 x\,dx$ يمكن كتابة $\cos^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$. (العبارة الخطية)

$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}(5-\ln 3+5\ln 2)$	2	$\ln 2$	$\frac{23}{36}$	-156	192	$\frac{35}{6}$
$\frac{3\pi}{16}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\sqrt{2}+1$			

تمرين 2

باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل I في كل حالة:

1) $I=\int_{-2}^{0}(x+3)e^x\,dx$

2) $I=\int_{0}^{\pi}(x+1)\sin x\,dx$

3) $I=\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x}\,dx$

4) $I=\int_{4}^{40}\frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

5) $I=\int_{1}^{2}\ln\frac{x}{x+1}\,dx$

6) $I=\int_{1}^{e}x^n\ln x\,dx$

7) $I=\int_{-1}^{0}(2x^2+3x)e^{-x}\,dx$ (كامل مرتين)

8) $I=\int_{0}^{\pi}(x^2+3x-5)\sin(2x+\pi)\,dx$ (كامل مرتين)

9) $I=\int_{1}^{e}(\ln x)^2\,dx$

10) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}e^x\sin x\,dx$

$2e-7$	$\frac{n\,e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$	$4\ln 2-3\ln 3$	210	$\frac{4}{15}$	$\pi+2$	2
$\frac{1}{2}$	$e-2$	$\frac{\pi(\pi+3)}{2}$				

تمرين 3

f دالة معرفة على $]-\infty\,;\frac{5}{2}]$ بـ: $f(x)=x\sqrt{-2x+5}$

g دالة معرفة بـ: $g(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{-2x+5}$

1- عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث من أجل كل $x<\frac{5}{2}$ تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f.

2- استنتج حساب التكامل التالي: $I=\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$

3- احسب القيمة المتوسطة μ لـ f على $[-2\,;2]$.

$-\frac{19}{30}$	$-\frac{38}{15}$	$-\frac{5}{3}$ ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$

تمرين 4

نعتبر التكاملين: $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\,dx$ و $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x\,dx$

1- احسب: $I+J$ و $I-J$.

2- استنتج حساب قيمتي: I و J.

$\frac{\pi^2+4}{16}$ ، $\frac{\pi^2-4}{16}$	$-\frac{1}{2}$ ، $\frac{\pi^2}{8}$

تمرين 5

n عدد طبيعي. نعتبر التكامل: $I_n=\int_{0}^{1}x^n\sin\pi x\,dx$

1- ادرس تغيرات I_n.

2- احسب: I_0 و I_1.

3- أوجد علاقة بين I_n و I_{n-2}. (كامل بالتجزئة مرتين)

4- استنتج حساب قيمتي: I_2 و I_3.

$\frac{1}{\pi}-\frac{6}{\pi^3}$	$\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}$	$I_n=\frac{1}{\pi^2}[\pi-n(n-1)I_{n-2}]$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$

إعداد: عبد المطلب

بوزريعة: ربيع الثاني 1432 هـ

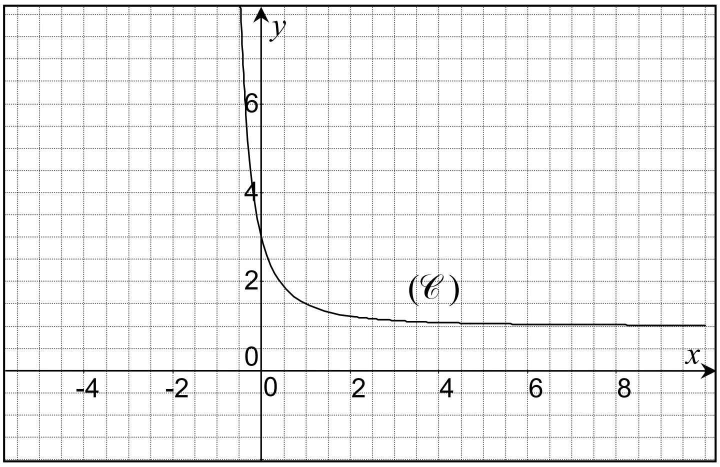
حساب المساحات

Calculs d'aires

تمرين 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس المبين أسفله.



1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$ فإن: $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$.

2- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=3$ و $y=0$.

3- احسب $\mathrm{I}=\int_0^3 \frac{2}{(x+1)^2}dx$. أعط تفسيرا بيانيا لـ I.

1,5 u.a	*2,5 u.a*

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty\,;2]$ بـ:

$$f(x)=(x^2-x-1)e^x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا يطلب كتابة معادلته.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) عين نقاط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع المحورين ثم ارسم $(\mathscr{C})$.

2- g دالة معرفة بـ: $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.
عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث من أجل كل $x\le 2$ تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f.

3- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ ، $x=1$.

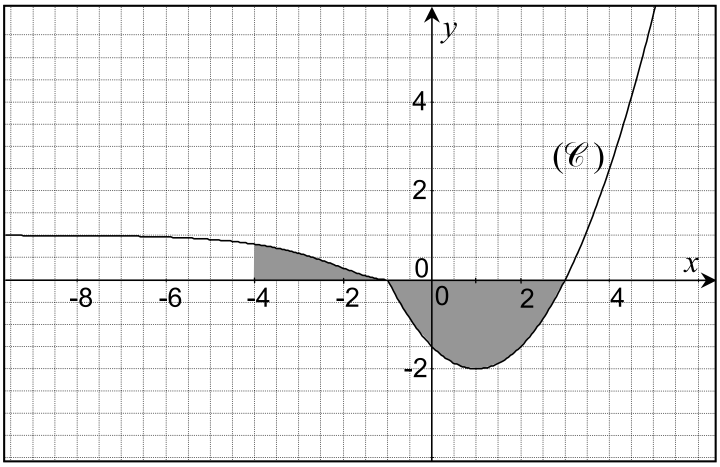
4- احسب $\mathrm{I}=\int_{-2}^0 f(x)dx$. هل I يعبّر عن مساحة؟ علل.

$2-12e^{-2}$	*2 u.a*	*2 ; −3 ; 1*

تمرين 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{2} & x\ge -1\\ xe^{x+1}+1 & x\le -1\end{cases}$ وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني المبين أسفله.



1- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $\int_{-4}^{-1} xe^{x+1}dx$.

2- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-4$ و $x=3$.

$\frac{19+15e^{-3}}{3}$ u.a ≈ 6,58 u.a	*$-2+5e^{-3}$*

تمرين 4

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-\frac{4}{e^x-1}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته $y=x$.

– ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

– ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2- برهن أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند نقطة فاصلتها α حيث: $1,3<\alpha<1,4$. ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

3- عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ فإن: $f(x)=ax+b+\frac{ce^x}{e^x-1}$

4- احسب المساحة $A(\lambda)$ $(\lambda>\ln 2)$ لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $\ln 2\le x\le\lambda$ و $f(x)\le y\le x$. احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

– بيّن أن $A(\alpha)=-4(\alpha+\ln\alpha-3\ln 2)$. احصر $A(\alpha)$.

4ln2 u.a	*4[-λ+ln2+ln(e^λ-1)] u.a*

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1\,;\,1]$ بـ:

$$f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}+x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C})$.

2- احسب $\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}(x+1)\sqrt{x+1}\,dx$. فسر بيانيا I.

0,4 u.a

تمرين 6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x^2+2x-1 \qquad g(x)=x^2+x-2$$

1- شكل جدول تغيرات كل من f و g ثم ارسم بدقة بيانيهما $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس حيث وحدة الطول 2cm.

2- ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ$(\mathscr{C}')$. حدد نقطتي تقاطعهما.

3- احسب بـ cm^2 المساحة $\mathcal{A}$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي بحيث: $g(x)\leq y\leq f(x)$.

$4{,}5\ cm^2$

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1+2\ln x}{x}$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب كتابة معادلتيهما.

- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور الفواصل.
- ارسم المنحني $(\mathscr{C})$. وحدة الطول 2cm.

2- احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\frac{1}{e}$ و $x=\sqrt{e}$.

$5\ cm^2$

تمرين 8

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2\cos^2 x-2\cos x-1{,}5$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم بيانها $(\mathscr{C})$.

2- احسب المساحة $\mathcal{A}$ لمجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث:

$-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$ و $f(x)\leq y\leq -f(x)$.

$\frac{4\pi}{3}+5\sqrt{3}\ u.a$

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x+1}{x}+\ln x$$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس النهايات، اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. احسب $f(2)$ و $f(6)$ ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

2- n عدد طبيعي غير معدوم. احسب المساحة u_n للحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=n$ و $x=n+1$.

- احسب: $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

(n+2)ln(n+1) – (n+1)ln(n)	(n+2)ln(n+1)

تمرين 10 *Bac S Antilles-Guyane 2005*

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ:

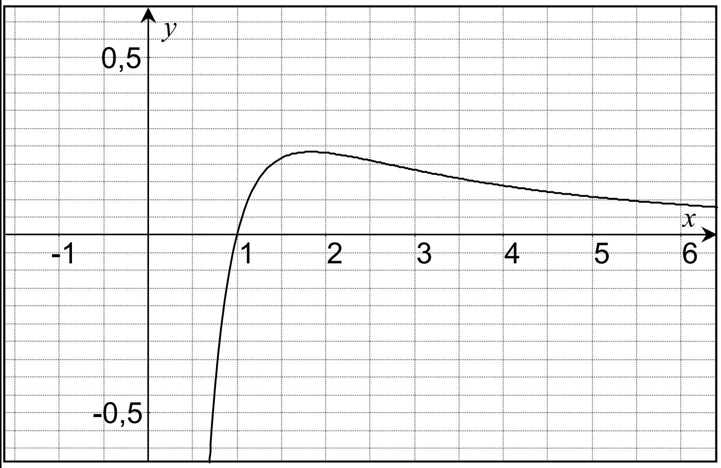
$$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$$

1- بيّن أنه من أجل كل $x>1$، $\frac{\ln x}{x^2}\leq f(x)\leq\frac{\ln x}{x}$.

2- أ) احسب $\mathrm{I}=\int_2^4\frac{\ln x}{x}dx$ و $\mathrm{J}=\int_2^4\frac{\ln x}{x^2}dx$ (يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب J).

ب) استنتج حصرا لـ $\mathrm{K}=\int_2^4 f(x)\,dx$.

3- الشكل التالي يمثل منحنى الدالة f (الوحدة هي 1cm على محور الفواصل و 4cm على محور التراتيب). نعتبر مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $2\leq x\leq 4$ و $0\leq y\leq f(x)$. نرمز بـ $\mathcal{A}$ إلى مساحتها.



باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2- ب)، أعط حصرا لـ $\mathcal{A}$ بـ cm^2.

$\frac{3(\ln 2)^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1<\mathcal{A}<2{,}883\ cm^2$

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

تمرين1

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن مجموعهما يساوي 99 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 11.

(55،44)	(77،22)	(88،11)	(44،55)	(22،77)	(11،88)

تمرين2

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن جداءهما يساوي 2700 وقاسمهما المشترك الأكبر يساوي 6.

(150،18)	(450،6)	(18،150)	(6،450)

تمرين3

1− حلل العدد الطبيعي 975 إلى جداء عوامل أولية.

2− عين عددين طبيعيين a و b أوليان فيما بينهما حيث:

$$a\times b=975 \quad \text{و} \quad a>b$$

(39،25)؛(75،13)؛(325،3)؛(975،1)	$13\times5\times5\times3$

تمرين4

عين عددين طبيعيين a و b إذا علمت أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 13 وأكبر هذين العددين يساوي 117.

(104،117)	(91،117)	(65،117)	(52،117)	(26،117)	(13،117)
(117،104)	(117،91)	(117،65)	(117،52)	(117،26)	(117،13)

تمرين5

1− حلل العدد الطبيعي 1432 إلى جداء عوامل أولية.

2− عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} x^2-y^2=5728 \\ PGCD(x,y)=2 \end{cases}$$

(362،354) ؛ (718،714)	$179\times2\times2\times2$

تمرين6

α و β عددان طبيعيان.

1− عين مجموعة الأزواج (α,β) بحيث $\alpha\times\beta=51$.

2− استنتج مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

أ) $x^2-y^2=51$

ب) $x.y+2x-51=0$

ج) $x.y-3x+3y=60$

(26،25) ؛ (10،7)	(17،3) ؛ (3،17) ؛ (51،1) ؛ (1،51)
(14،6) ؛ (0،20) ؛ (48،4)	(17،1) ؛ (3،15) ؛ (1،49)

تمرين7

عين كل الثنائيات $(x\,,y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق:

1) $(x-1)(2y-3)=11$

2) $4x^2-y^2=36$

3) $x^2y+xy^2+2=0$

4) $x^2+5y^2=45$

(-5،8) ؛ (-5،-8) ؛ (5،-8) ؛ (5،8) ؛ (-3،0) ؛ (3،0)	(-10،1) ؛ (0،-4) ؛ (12،2) ؛ (2،7)
(0،-3) ؛ (-5،-2) ؛ (-5،2) ؛ (5،-2) ؛ (5،2) ؛ (0،3)	(2،-1) ؛ (-1،2) ؛ (-1،-1)

تمرين8

1− حلل العدد 608 إلى جداء عوامل أولية.

2− α و β عددان طبيعيان.

نضع: $a=\alpha+2\beta$ و $b=2\alpha+3\beta$

بين أن $PGCD\,(a\,,b)=PGCD\,(\alpha\,,\beta)$

3− عين مجموعة الأزواج الطبيعية $(x\,,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} (x+2y)(2x+3y)=9728 \\ PGCD(x,y)=4 \end{cases}$$

(28،24)	$19\times2\times2\times2\times2\times2$

تمرين9

n ، a و b أعداد طبيعية. عين قيم العدد n بحيث a يقسم b في كل حالة من الحالات التالية:

1) $a=n+1$ و $b=n+5$ حيث $n\geq0$.

2) $a=n-1$ و $b=2n+3$ حيث $n>1$.

3) $a=n-2$ و $b=n^2+3n+4$ حيث $n>2$.

16 ، 9 ، 4 ، 3	6 ، 2	3 ، 1 ، 0

تمرين10

n عدد طبيعي غير معدوم. ليكن: $a=3n-2$ و $b=n+5$

1− عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

2− عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون الكسر $\frac{a}{b}$ قابلا للاختزال (العددان a و b غير أوليان فيما بينهما).

3− عين قيم n حتى يكون الكسر $\frac{a}{b}$ عددا طبيعيا.

4− أثبت أن العددين: $a+6$ و $2b-7$ أوليان فيما بينهما.

12	17k+12	17 ، 1

تمرين11

نعتبر العددين: $a=3n-1$ و $b=5n-4$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

1- ليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ a و b. عين قيم d.

2- بين أنه إذا كان $d=7$، فإن العدد 7 يقسم العدد $n+2$.

3- عين قيمتي a و b حتى يكون $d=7$.

7 ، 1	b=35k-14 ; a=21k-7

تمرين12

n عدد صحيح. نضع: $a=n-2$ و $b=2n^2-7n+17$.

1- عين قيم العدد n بحيث b يقبل القسمة على a.

2- ليكن $(\mathscr{C})$ منحني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$-{2} بـ:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+17}{x-2}$$

عين نقط المنحني $(\mathscr{C})$ التي إحداثياها أعدادا صحيحة.

(3،14) ؛ (13،24) ؛ (1،-12) ؛ (-9،-22)

تمرين13

n عدد طبيعي. نضع: $a=n+3$ و $b=2n^2+7n+4$.

1- بين أن العدد a يقسم العدد $2n^2+7n+3$.

2- استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3- عين قيم العدد n بحيث a يقسم العدد $b+7$.

5 ، 1

تمرين14

n عدد طبيعي.

1- بين أن العددين: $a=n^2+5n+6$ و $b=n^2+6n+8$ يقبلان القسمة على $n+2$.

2- بين أن $n+2$ هو القاسم المشترك الأكبر لـ a و b.

3- عين قيم العدد n بحيث العدد $c=2n^2+5n+11$ يقبل القسمة على $n+2$.

4- استنتج أن العدد c غير قابل للقسمة على a و b.

7 ، 1

تمرين15 بكالوريا 2008 تقني رياضي

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1- a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$.

أ) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب) بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

ج) عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

2- نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$$p=2n^2-7n-15 \quad و \quad q=n^2-7n+10$$

أ) بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب) عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

7 ، 1	7k-5	d=n-5 أو d=7(n-5)

تمرين16

1- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 8044 و 4022.

2- عين أصغر عدد طبيعي x ، متكون من أربعة أرقام بحيث: باقي قسمة العدد 4024 على x هو 2 ، و باقي قسمة العدد 8048 على x هو 4.

2011

تمرين17

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتاليين أوليان فيما بينهما.

2- بين أنه إذا كان a و b عددين أوليين فيما بينهما، فإن $a+b$ و $a\times b$ كذلك أوليان فيما بينهما.

3- استنتج أن الكسر $\dfrac{2n+1}{n^2+n}$ غير قابل للاختزال.$(n\in\mathbb{N})$

4- عين قيمة العدد n حتى يكون $\dfrac{2n+1}{n^2+n}=\dfrac{15}{56}$.

7

تمرين18 بكالوريا

n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العددين $\mathrm{N}=9n+1$ و $\mathrm{M}=9n-1$.

1- نفرض أن n زوجي. نضع $n=2p$، حيث p عدد طبيعي غير معدوم.

أ) بين أن M و N عددان فرديان.

ب) بملاحظة أن $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$ ، عين $PGCD(\mathrm{M};\mathrm{N})$.

2- نفرض أن n فردي. نضع $n=2p+1$، حيث p عدد طبيعي.

أ) بين أن M و N عددان زوجيان.

ب) بملاحظة أن $\mathrm{N}=\mathrm{M}+2$ ، عين $PGCD(\mathrm{M};\mathrm{N})$.

3- n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر العدد $81n^2-1$.

أ) عبر عن $81n^2-1$ بدلالة M و N.

ب) بين أنه إذا كان n زوجي فإن $81n^2-1$ فردي.

ج) بين $81n^2-1$ مضاعف لـ 4 إذا وفقط إذا n فردي.

عبد المطلب

إعداد: عبد المطلب

تقني رياضي

الموافقات في $\mathbb{Z}$

Congruence

تمرين1

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5.

2- ما هو باقي قسمة العدد 123^{456} على 5؟

3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد: $48^{4n+3}-2\times 9^{2n+1}+1$ مضاعفا للعدد 5.

4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $3^{4n}+3^n-4$ قابلا للقسمة على 5.

4k+1	1

تمرين2 بكالوريا 2010 تقني رياضي

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2- تحقق أن: $(10^{2008})^2+10^{2008}+1\equiv 0\ [13]$.

3- عين قيم n بحيث يكون: $10^{2n}+10^n+1\equiv 0\ [13]$.

6k+4 ; 6k+2

تمرين3

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9.

2- ليكن: $a=925^{34}$ و $b=88^{3n+2}$

أ) عين باقي قسمة العدد: $2a-3b-39$ على 9.

ب) عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $a-b+3n\equiv 0\ [9]$.

3- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $7^{2n}+7^n+7\equiv 0\ [9]$.

3k+2	8

تمرين4

1- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11.

2- عين قيم الأعداد الطبيعية n بحيث يكون:

أ) $100^n+97^{n+1}+5$ مضاعفا للعدد 11.

ب) $9^{5n+2}+n^2-16$ مضاعفا للعدد 11.

3- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد: $\alpha=2\times 10^n+2012^{1433}-10$ على 11.

9 أو 2	11k+10 ; 11k+1	5k+3

تمرين5

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 4^n و 5^n على 7.

2- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*$ فإن: $39^{3n+2}+40^{6n-5}\equiv 0\ [7]$.

3- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة كل من العددين 4^n و 5^n على 7 هو 1.

4- حل في $\mathbb{N}$: $1432^x+1433^x+1434^x\equiv 0\ [7]$.

6k+4 ; 6k+2	6k

تمرين6

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9.

2- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $24^{98n}+25^{99n}+26\equiv 0\ [9]$.

3- عين قيم n بحيث يكون: $-8^{2n+1}+n^2-3n\equiv 5\ [9]$.

4- عين الأعداد الصحيحة λ التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases}5^{6n+2}+4\lambda\equiv 0\ [9]\\ -13<\lambda\leq 30\end{cases}$$

λ={-4,5,14,23}	9k+8 ; 9k+4

تمرين7

1- نعتبر العددان الطبيعيان: $a=\overline{413}^{(5)}$ و $b=\overline{102}^{(3)}$.

أ) اكتب كل من a و b في النظام العشري.

ب) احسب في النظام ذي الأساس 7 العددين $a+b$ و $a\times b$.

2- عين العدد x في الحالتين التاليتين:

أ) $\overline{12}^{(x)}\times\overline{34}^{(x)}=\overline{452}^{(x)}$ ب) $\overline{xxx}^{(9)}=\overline{52\alpha}^{(11)}$

7	6	$\overline{3315}^{(7)}$	$\overline{230}^{(7)}$	108	11

تمرين8 بكالوريا 2010 تقني رياضي

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n=\overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي.

1- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3- نأخذ $\alpha=4$ اكتب العدد n في النظام العشري.

2940	4	4	4 , 1

إعداد: عبد المطلب

تقني رياضي

القواسم والمضاعفات

Diviseurs et multiples communs

تمرين1

1- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $3x-8y=1$.
لاحظ أن الزوج $(3,1)$ حلها الخاص.

2- من بين حلول هذه المعادلة عين تلك التي تحقق:
$$y^2-x=5$$

3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة الجملة التالية:
$$\begin{cases}21x-56y=7\\ -5\le x<27\end{cases}$$

(8k+3,3k+1)	(11,4)	(-5,-2);(3,1);(11,4);(19,7)

تمرين2

1- عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد التالية:
2189 ، 1393 ، 398.

2- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $2189x+1393y=398$
لاحظ أن الزوج $(-3,\alpha)$ حلها الخاص، حيث α عدد صحيح يطلب تعيينه.

3- من بين حلول المعادلة السابقة عين تلك التي تحقق:

أ) $x<11$ و $y<18$

ب) $x^2+6y-39<0$

(7k-3,-11k+5)	(-10,16);(-3,5);(4,-6)	(4,-6);(11,-17)

تمرين3

1- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E): $85x-51y=0$

2- من بين حلول المعادلة (E) عين الثنائيات (x,y) والتي تحقق: $|x-y|\le 4$

3- حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلتين التاليتين:

أ) $85x-51y=867$

ب) $85x+51y=867$

(3k,5k)	(-6,-10);(-3,-5);(0,0);(3,5);(6,10)
(3k,5k-17) k≥4	(9,2);(6,7);(3,12);(0,17)

تمرين4

1- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية:
$$95(x-2)=76(y+1)\quad ...\quad [I]$$

2- من بين حلول المعادلة [I] عين الثنائيات (α,β) والتي تحقق: $\alpha^2\equiv\beta[5]$.

3- حل في مجموعة الأعداد الطبيعية الجملة التالية:
$$\begin{cases}5(2-x)=-4(y+1)\\ x^2-y^2\ge 0\end{cases}$$

(4k+2,5k-1)	(20k'+2,25k'-1);(20k'-2,25k'-6)	(14,14);(10,9);(6,4)

تمرين5 بكالوريا

1- أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين x و y حيث: $993x-170y=143$

أ) عين الحل الخاص (x_0,y_0)، للمعادلة (E) بحيث: $x_0+y_0=6$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

3- أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $(a-1)$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب.

(1,5)	(170k+1,993k+5)	2001

تمرين6

1- عين الأعداد الصحيحة x بحيث: $7x\equiv-19[9]$

2- استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة:
$$7x-9y=-19\quad ...\quad [I]$$

3- من بين حلول المعادلة [I] عين تلك التي تحقق:
$x\equiv 0[y]$ (أي y يقسم العدد x)

4- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha5}$ في نظام العد ذي الأساس 7، ويكتب $\overline{1\beta3}$ في نظام العد ذي الأساس 9. عين α و β ثم اكتب n في النظام العشري.

9k+5	(9k+5, 7k+6)	(-4,-1)	n=138 , β=6 , α=5

تمرين7

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة:
$$7x+13y=119\quad ...\quad [I]$$

1- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة [I] فإن y مضاعف للعدد 7. استنتج جميع حلول المعادلة [I].

2- عين الأعداد الطبيعية α ، β و γ (غير معدومة) حيث:
$$\overline{\alpha\gamma1}^{(6)}+\overline{1\beta3\beta}^{(8)}=\overline{32\gamma\alpha}^{(7)}$$

(-13k+17,7k)	γ=5 , β=7 , α=4

تمرين8

1- بين أن العددين 27 و 22 أوليان فيما بينهما.

- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين عددين صحيحين a و b يحققان: $27a+22b=1$

2- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $405x-330y=15$

3- استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حل الجملة التالية:

$$\begin{cases}\lambda \equiv 0\,[27]\\ \lambda \equiv 1\,[22]\end{cases}$$

594k′+243	(22k+9,27k+11)	(9,-11)

تمرين9

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلتين:

$$2011x'-2010y'=-1\ \ .\ .\ .\ [\text{I}]$$

$$2011x-2010y=3\ \ .\ .\ .\ [\text{II}]$$

1- أثبت أن عددين طبيعيين متتابعين أوليان فيما بينهما.

2- عين حلا خاصا للمعادلة [I].

استنتج حلا خاصا للمعادلة [II].

3- حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة [II].

4- لتكن (x,y) حلول المعادلة [II] في مجموعة الأعداد الطبيعية و d القاسم المشترك الأكبر لـ (x,y).

- ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

- عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة [II] بحيث يكون x و y غير أوليين فيما بينهما.

(6030l+3,6033l+3)	3 ,1	(2010k+3,2011k+3)	(3,3)	(-1,-1)

تمرين10

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة:

$$4\alpha-7\beta=3\ \ .\ .\ .\ [\text{I}]$$

1- عين حلا خاصا لهذه المعادلة وليكن (α_0,β_0) حيث $0<\alpha_0<7$ ثم استنتج جميع حلولها.

2- استنتج مما سبق حلول المعادلة التالية:

$$68x-119y=102\ \ .\ .\ .\ [\text{II}]$$

حيث x و y عددان طبيعيان.

3- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y حلول المعادلة [II]. ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

4- عين كل الثنائيات (α,β) حلول المعادلة [I] بحيث يكون $PGCD\,(\alpha\,;\beta)=1$.

(7k′+12,4k′+6) k′≥-1	(7k+6,4k+3) k≥0	(6,3)
(21l+13;12l+7);(21l+20,12l+11) l≥0	6,3;2;1	

تمرين11 بكالوريا

1- حلل العدد الطبيعي 1995 إلى جداء عوامل أولية.

2- عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية والتي تحقق: $x+7y=1995$ و $PGCD\,(x\,;y)=19$.

(1862,19);(1729,38);(1463,76);(931,152);(532,209);(266,247)

تمرين12

x و y عددان طبيعيان؛ d قاسمهما المشترك الأكبر و m مضاعفهما المشترك الأصغر. عين كل الثنائيات (x,y) في كل حالة من الحالات التالية:

1- $\begin{cases}d=3\\ m=120\end{cases}$ **2-** $\begin{cases}m-d=9\\ x\le y\end{cases}$

3- $\begin{cases}x+y=30\\ m+6d=45\end{cases}$ **4-** $\begin{cases}-d+m=y+18\\ d\ge 9\end{cases}$

(9,18);(3,12);(2,5);(1,10)	(24,15);(120,3);(15,24);(3,120)
(18,27);(36,9);(54,18)	(27,3);(3,27)

تمرين13 جامعة التكوين المتواصل

1- أ) حلل العدد الطبيعي 1996 إلى جداء عوامل أولية.

ب) عين مجموعة قواسم العدد 1996.

بين أن جداء قواسم 1996 هو $8(998)^3$.

ج) أوجد العددين الطبيعيين الذي مربع كل منهما يقسم العدد 1996.

2- عين كل الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m^2+49d^2=1996$، حيث m هو المضاعف المشترك الأصغر لـ x و y و d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y. ملاحظة: 499 عدد أولي.

(30,2);(10,6);(6,10);(2,30)	2 ; 1	1996,998,499,4,2,1

تمرين14

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنفون إلى 3 أصناف: مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) ومجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئا (صنف c). إذا علمت أن المبلغ الإجمالي المدفوع هو 285 دج، احسب عدد الركاب من كل صنف.

1 ; 3 ; 12

عبد المطلب