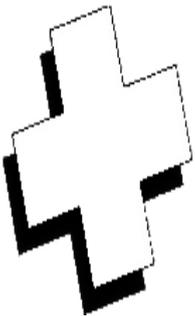
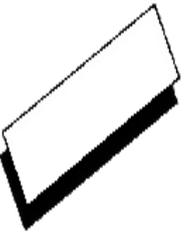




# تعلم الرياضيات



• نهايات الدوال:  $x \mapsto \sqrt{x}$

01	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
02	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
03	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

• إذا كان  $n$  عددا فرديا:

01	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
02	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
03	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
04	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

• نهايات الدوال الناطقة عند  $\pm\infty$ :

نهاية دالة ناطقة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  هي نهاية حاصل قسمة حديها الأكبر درجة في البسط والمقام.

• نهايات الدوال:  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

01	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
02	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
03	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

• إذا كان  $n$  عددا زوجيا:

01	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
02	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
03	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
04	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• نهايات الدوال كثير حدود عند  $\pm\infty$ :

نهاية دالة كثير حدود عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  هي نهاية حدها الأكبر درجة.

• نهايات الدوال المثلثية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	---

• نهايات الدوال من النوع:  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	→	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$
$l \geq 0$		$\sqrt{l}$
$+\infty$		$+\infty$

ملاحظة:

هذه النهايات تبقى صالحة:

- عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار.
- عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$ .



## • النهايات والترتيب:

$\begin{cases} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \approx x_0} u(x) = l \\ \lim_{x \approx x_0} v(x) = l \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
$\begin{cases}  f(x) - l  \leq v(x) \\ \lim_{x \approx x_0} v(x) = 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
$\begin{cases} f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \approx x_0} v(x) = -\infty \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
$\begin{cases} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \approx x_0} u(x) = +\infty \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

ملاحظة:

هذه النهايات تبقى صالحة:

- عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار.
- عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$ .

## • العمليات على النهايات:

- نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$l$	$l$	$l$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$	$l'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) + v(x)]$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$l$	$l < 0$		$l > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$	$l'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) \times v(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- نهاية قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$	$l$	$l$	$l < 0$		$l > 0$		$-\infty$	$+\infty$	$0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{l}{l'}$	$0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار وعند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$ .