

## النهايات والاستمرارية

### 1- نهايات دوال مألوفة

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty}  x  = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty}  x  = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = -\infty (a > 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = +\infty (a > 0)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} [ax + b] = +\infty (a < 0)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [ax + b] = -\infty (a < 0)$

### 2- التفسير الهندسي للنهايات

النهاية	تفسيرها الهندسي
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$	$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = a$ بجوار $\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$	$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty (\mp\infty)$	$(C_f)$ قد يقبل مستقيم مقارب مائل له معادلة من الشكل $y = ax + b$ بجوار $\pm\infty$

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = ax + b$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $\pm\infty$

### 3- العمليات على النهايات

فيما يلي يمثل  $a$  عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$

أ- نهاية مجموع دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح.ع.ت

ب- نهاية جداء دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l \neq 0$	$\infty$	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$\infty$	$\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l \times l'$	$\infty$	$\infty$	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة الجداء

ج- نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l \neq 0$	$\infty$	$\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\infty$	$0$	$l'$	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$0$	$\infty$	$\infty$	ح.ع.ت

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة حاصل قسمة

### 4- بعض طرق إزالة حالات عدم التعيين

- 1- الاختزال
- 2- التحليل
- 3- المرافق
- 4- العدد المشتق
- 5- المقارنة
- 6- الحصر

### 5- الاستمرارية

تعريف:

$f$  مستمرة عند قيمة  $x_0$  معناه  $f(x_0)$  معرفة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$f$  مستمرة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  معناه  $f$  مستمرة عند كل قيمة  $x_0$  من هذا المجال.

### 6- تطبيقات مبرهنة القيم الوسطى

حالة 1:

$f$  معرفة، مستمرة ورتبية تماما على المجال  $[a, b]$

$k$  عدد حقيقي محصور تماما بين  $f(a)$  و  $f(b)$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقطع مستقيم معادلته  $y = k$  في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]a, b[$

حالة 2:

$f$  معرفة، مستمرة ورتبية تماما على المجال  $[a, b]$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  في المجال  $]a, b[$

ملاحظة:

إذا كان المجال غير محدود مثلا  $[a, +\infty[$  فإننا نكتب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  بدلا من الصورة  $f(b)$  أي:

$$f(a) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$$