https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — BAC MATHS — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

ملخص الدرس

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث:

$$b = ka$$

من التعريف:

- نقول كذلك: a قاسم للعدد b.
- أو نقول كذلك: b مضاعف للعدد a.
- نكتب a/b ونقرأ a يقسم b.

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$، للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

خواص:

①

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم b وكان b يقسم c فإن:

a يقسم c

②

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m :

a يقسم mb

③

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m :

ma يقسم mb

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

④

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n :

a يقسم $mb + nc$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة:

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم.

توجد ثنائية وحيدة $(q\,;r)$ من الأعداد الصحيحة حيث:

$a = bq + r$ و $0 \le r < b$

من المبرهنة:

- نسمي عملية البحث عن الثنائية $(q\,;r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.
- يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.
- يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b. فنحصل على:

$a = bq + r$ و $0 \le r < |b|$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a \cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b.

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a \cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ونرمز له بـ $PGCD(a\,;b)$.

- $PGCD(a\,;a) = a$.
- $PGCD(1\,;a) = 1$.
- $PGCD(0\,;a) = a$ (a غير معدوم).
- مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.
- مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

المادة: رياضيات الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب رياضي ـ تقني رياضي

خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

①

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. و r باقي قسمة a على b.

$PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

②

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

③

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد طبيعي غير معدوم.

$PGCD(ka\,;kb) = k \times PGCD(a\,;b)$

④

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. d قاسم مشترك للعددين a و b.

نضع:

$b = db'$ و $a = da'$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما.

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث:

$d = PGCD(|a|\,;|b|)$

خاصية:

a و b عددان صحيحان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.
$PGCD(ka\,;kb) = |k| \times PGCD(a\,;b)$

ملاحظة:

- a و b عددان صحيحان غير معدومين. إذا كان b يقسم a فإن:
$PGCD(a\,;b) = |b|$

الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n.
ونرمز بـ : $a \equiv b\ [n]$ ونقرأ: a يوافق b بترديد n.

ملاحظة:

- من أجل كل عدد صحيح x :
$x \equiv 0\ [1]$

مبرهنة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.
a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان:
$a - b$ مضاعف لـ n

نتيجة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.
a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n.

خواص:

①

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$.
كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب رياضي ــ تقني رياضي

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

②

n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا:

$$a \equiv a\ [n]$$

③

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$$b \equiv a\ [n]$$

④

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $b \equiv c\ [n]$ فإن:

$$a \equiv c\ [n]$$

⑤

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن:

$$a + c \equiv b + d\ [n]$$

⑥

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن:

$$ac \equiv bd\ [n]$$

⑦

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.

من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$$ka \equiv kb\ [n]$$

⑧

n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$$a^p \equiv b^p\ [n]$$

التعداد:

مبرهنة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$ مع $a \in \{0\,;1\,;2\,;\dots;n-1\}$

التعداد ذو الأساس x:

قاعدة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي): a يمثّل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي): من المبرهنة، a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x.

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$0 < q < x$ و $0 \leq r_a < x$ مع $a \in \{0\,;1\,;2\,;\dots;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي:

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$$

الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x.

ملاحظة:

- إذا كان $x = 10$ نكتب:

$$a = qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0$$

الأعداد الأولية:

تعريف:

القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$:

1 و n نفسه

ملخص محور الأعداد و الحساب   رياضي – تقني رياضي

ملاحظات:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم.
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو العدد 1.
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد.
- 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25.

خواص:

①

كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا.

②

كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث:
$a \leq \sqrt{n}$

③

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

طريقة:

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ أوليا أم لا، نحسب $\sqrt{n}$.
- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي.
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي، نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب.
- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف، ونقرّ أن n غير أولي.
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة، نقرّ أن n أولي.

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.

ملاحظة:

- نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية.

خاصية:

a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.
يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بِأُسٍّ إما مساوٍ وإما أصغر من أسّه في تحليل a.

طريقة:

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية.
إلى كل أسّ في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. M_a و M_b مجموعتا مضاعفات a و b على الترتيب.
$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b.
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.
ونرمز له بـ $PPCM(a\,;b)$.

- المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0.
- $PPCM(a\,;a) = a$.
- $PPCM(1\,;a) = a$.
- مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث:
$m = PPCM(|a|\,;|b|)$

المادة: رياضيات الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب رياضي ـ تقني رياضي

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$$PPCM(ka\,;kb) = |k| \times PPCM(a\,;b)$$

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأصغر أسّ.

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأكبر أسّ.

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساوٍ لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر.

$$PGCD(a\,;b) \times PPCM(a\,;b) = a \times b$$

مبرهنة بيزو:

مبرهنة:

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث:

$$au + bv = 1$$

المادة: رياضيات الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب رياضي – تقني رياضي

خواص:

①

إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث:

$au + bv = 1$

②

إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

③

إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

مبرهنة غوص:

مبرهنة:

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن:

a يقسم c

خواص:

①

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي.

إذا كان p يقسم الجداء ab فإن:

p يقسم a أو p يقسم b

②

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن:

a مضاعف للجداء bc

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات | BAC MATHS | الأستاذ: عبد الحميد

سلسلة التمارين | شعبة الرياضيات

سلسلة التمارين

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

﴿ دورة 2008 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$3x-21y=78$$

1) أ- بين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E)، فإن:

$$x\equiv 5\;[7]$$

2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E)، وتحقق:

$$5^x+5^y\equiv 3\;[7]$$

﴿ دورة 2009 - الموضوع الأول ﴾

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل:

$$A=\overline{5566}$$

1) أ- أنشر العبارة: $(5x^2+6)(x+1)$، ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن:

$$A=(5x^2+6)(2+2y)$$

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق:

$$\begin{cases}a+b=32\\a^2+b^2=584\end{cases}$$

﴿ دورة 2010 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر المعادلة:

$$7x+65y=2009\;...\;(1)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,,y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد: $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=2^{6n}-1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب- حل المعادلة ذات المجهول $(x\,,y)$:

$$(7u_1)x+(u_2)y=126567\;...\;(2)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

جـ- عين الثنائية $(x_0\,,y_0)$ حل المعادلة (2)، حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع: $y_0\geq 25$.

﴿ دورة 2010 - الموضوع الثاني ﴾

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين: $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبل القسمة على 13.

3) عين، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي p: $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ- من أجل: $p=3n$، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب- برهن أنه إذا كان: $p=3n+1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـ- عين، من أجل $p=3n+2$ باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

5) يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$$\begin{cases}a=\overline{1001001000}\\ \text{و}\\ b=\overline{1000100010000}\end{cases}$$

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

﴿ دورة 2011 - الموضوع الثاني ﴾

1) نعتبر المعادلة:

$$13x - 7y = -1 \ldots (E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

- حل المعادلة (E).

2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث:

$$\begin{cases} a \equiv -1\,[7] \\ a \equiv 0\,[13] \end{cases}$$

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي:

$$b = \overline{\alpha 00\beta 086}$$

حيث α و β عددان طبيعيان، مع: $\alpha \neq 0$.

- عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

﴿ دورة 2012 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$2011x - 1432y = 31 \ldots (1)$$

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد: $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0\,[7]$$

3) N عدد طبيعي يكتب: $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta\,;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

- عين α، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري.

﴿ دورة 2013 - الموضوع الأول ﴾

1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β، حيث:

$$\beta = n + 3 \text{ و } \alpha = 2n^3 - 14n + 2$$

أ- بين أن: $PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$.

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).

ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha\,;\beta)$؟

جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون: $PGCD(\alpha\,;\beta) = 5$

2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\,[11] \\ n \equiv 2\,[10] \end{cases}$$

﴿ دورة 2013 - الموضوع الثاني ﴾

1) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$2n + 27 \equiv 0\,[n+1]$$

ب- عين الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث:

$$(b-a)(a+b) = 24$$

جـ- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2) α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام دي الأساس 5 على الشكل:

$$\beta = \overline{3403} \text{ و } \alpha = \overline{10141}$$

أ- أكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب- عين الثنائية $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

3) أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$2013x - 1434y = 27$$

﴿ دورة 2014 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر المعادلة (E):

$$2013x - 1962y = 54$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب $PGCD(2013\,;1962)$.

ب- استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

جـ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن:

$$x \equiv 0\,[6]$$

د- استنتج حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ حيث: $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\,;y)$ حل للمعادلة (E).

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟

ب- عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث:

$$PGCD(a\,;b) = 18 \text{ و } 671a - 654b = 18$$

﴿ دورة 2015 - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد:

$$[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$$

2) أ- بين أن 89 عدد أولي.

ب- عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ- بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2.

- عين x و y علما أن:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8\,[22] \end{cases}$$

4) a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c.

أ- باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$PGCD(a\,;b^n) = 1$$

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).

جـ- استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

﴿ دورة 2015 - الموضوع الثاني ﴾

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في الحالة التالية مع التعليل.

3) a، b، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9. $\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a، b، c و d، يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ- العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11.

ب- العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ- العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

﴿ دورة 2016 - الموضوع الأول ﴾

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} ln(u_1) + ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

1) أحسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ- عبر عن u_n بدلالة n.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

ب- نضع: $S_n = ln(u_0) + ln(u_1) + ln(u_2) + \cdots + ln(u_n)$.
أحسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.
أ- بين أن: $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$.
ب- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$.
جـ- عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:
$PGCD(2S_n; a_n) = 7$

4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.
عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:
$$\begin{cases} b_n \equiv 0\ [7] \\ n \equiv 0\ [5] \end{cases}$$

6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:
$$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$$
يقبل القسمة على 7.

﴿ دورة 2016 - الموضوع الثاني ﴾

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.
ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:
$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$$
مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:
$$7x - 3y = 8$$
حيث x و y عددان طبيعيان.
أ- حل المعادلة (E).
ب- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).
- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟
- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.
جـ- جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:
$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\ [11]$$

﴿ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة العادية ﴾

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:
$$104x - 20y = 272 \ldots (E)$$
حيث x و y عددان صحيحان.
أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.
ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3\ [5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.
عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري.

3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$.
حيث $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$.

﴿ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:
$$63x + 5y = 159 \ldots (E)$$

1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن $x \equiv 3\ [5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.
جد العددين الطبيعيين α و β واكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد:
$$3^{x-y}+4n+1438^{2017}$$
القسمة على 5، حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

﴿ دورة 2017 - الموضوع الثاني - الدورة الاستثنائية ﴾

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=4u_n+1$.

1) أ- بين، من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

ب- تحقق، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:
$$v_n=u_n+\frac{1}{3}$$
أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

ب- عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:
$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{3n}$$
3) عين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$.

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n القسمة على 7 حيث:
$$A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$$

﴿ دورة 2018 - الموضوع الثاني ﴾

1) α و β عددان طبيعيان بحيث:
$$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$$
- عين العددين α و β ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة:
$$1009x-2017y=1$$
3) عين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:
$$\begin{cases}\alpha\equiv 2019\ [2017]\\ \alpha\equiv 2019\ [1009]\end{cases}$$
4) أ- n عدد طبيعي، أدرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:
$$L=\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{2018\ \text{مرة}}$$
- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات   BAC MATHS   الأستاذ: عبد الحميد

سلسلة التمارين   شعبة التقني رياضي

سلسلة التمارين

الأعـــداد و الـــحـــســـاب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

﴿ دورة جوان 2008 - الموضوع الأول ﴾

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1) a و b عددان طبيعيان حيث:

$$a = n - 2 \text{ و } b = 2n + 3$$

أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

جـ- عين قيم n التي يكون من أجلها: $PGCD(a\,;b) = 7$.

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$$p = 2n^2 - 7n - 15 \text{ و } q = n^2 - 7n + 10$$

أ- بين أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p\,;q)$.

﴿ دورة جوان 2008 - الموضوع الثاني ﴾

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية:

$$4x - 9y = 319 \ldots (I)$$

1) - تأكد أن الثنائية $(82\,,1)$ حل للمعادلة (I).

- حل المعادلة (I).

2) عين الثنائيات $(a\,,b)$ الصحيحة، حلول المعادلة:

$$4a^2 - 9b^2 = 319 \ldots (II)$$

3) استنتج الثنائيات $(x_0\,,y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

﴿ دورة جوان 2010 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي:

$$n = \overline{11\alpha00}$$

حيث α عدد طبيعي.

1) عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2) عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3) نأخذ: $\alpha = 4$.

- أكتب العدد n في النظام العشري.

﴿ دورة جوان 2010 - الموضوع الثاني ﴾

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2) تحقق أن:

$$(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0\ [13]$$

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0\ [13]$$

﴿ دورة جوان 2011 - الموضوع الأول ﴾

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

2) في نظام التعداد ذي الأساس 7، يكون:

$$\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$$

3) باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 هو 6 حيث:

$$A = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2011}$$

﴿ دورة جوان 2011 - الموضوع الثاني ﴾

من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$$

1) تحقق أن: $4 \equiv -3\ [7]$ ثم بين أن: $A_3 \equiv 6\ [7]$.

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3) بين أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

﴿ دورة جوان 2012 - الموضوع الأول ﴾

1) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11.

2) ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:
$$(4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012})$$
يقبل القسمة على 11.

4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد:
$$(2011^{2012}+2n+2)$$
مضاعفا للعدد 11.

﴿ دورة جوان 2012 - الموضوع الثاني ﴾

نسمي (S) الجملة التالية:
$$\begin{cases} x\equiv 3[15] \\ x\equiv 6[7] \end{cases}$$
حيث x عدد صحيح $(x\in\mathbb{Z})$.

1) بين أن العدد 153 حل للجملة (S).

2) إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بين أن:
$$\left(x \text{ حل لـ } (S)\right) \text{ يكافئ } \left(\begin{cases} x-x_0\equiv 0[15] \\ x-x_0\equiv 0[7] \end{cases}\right)$$

3) حل الجملة (S).

4) يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

- إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا، ما عدد هذه الكتب؟

﴿ دورة جوان 2013 - الموضوع الثاني ﴾

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:
$$11x+7y=1$$

1) أ- عين الثنائية $(x_0\,;y_0)$، حل المعادلة (E) التي تحقق:
$$x_0+y_0=-1$$

ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق:
$$\begin{cases} S=11a+1 \\ S=7b+2 \end{cases}$$

أ- بين أن $(a\,;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2.

- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n<2013$.

﴿ دورة جوان 2014 - الموضوع الثاني ﴾

n و p عددان طبيعيان.

1) أدرس، حسب قيم n، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n.

2) نضع: $C_n=16n+9$ و $D_p=5^p$.

أ- بين أنه إذا كان $p=4k+2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق:
$$C_n=D_p$$

ب- عين n من أجل: $p=6$.

﴿ دورة جوان 2015 - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 13 للعدد:
$$[42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3]$$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}\,[13]$$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي حتى يكون:
$$(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0\,[13]$$

﴿ دورة جوان 2016 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x\,;y)$:
$$6x-7y=19\,...(E)$$
حيث x و y عددان صحيحان.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

1) جد الحل الخاص $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$، ثم حل المعادلة (E).

2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 24\ [7] \\ \lambda \equiv 5\ \ [6] \end{cases}$$

ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42.

3) عين جميع الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \leq 13$$

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020\ [7] \\ n \qquad\ \ \equiv 1437\ [6] \end{cases}$$

﴿ دورة جوان 2017 - الموضوع الثاني - الدورة العادية ﴾

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

$$4^{5k} \equiv 1\ [11]$$

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1$$

يقبل القسمة على 11.

4) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد:

$$2 \times 2017^{5n+2} + n - 3$$

قابلا للقسمة على 11.

﴿ دورة جوان 2017 - الموضوع الأول - الدورة الإستثنائية ﴾

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1$$

مضاعف للعدد 5.

4) عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد:

$$3^{4n} + 27^n - 4$$

قابلا للقسمة على 5.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات

الأستاذ: عبد الحميد

BAC MATHS

تمارين محلولة

شعبة رياضيات + تقني رياضي

تمارين محلولة

الأعـــداد و الـــحـــســـاب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

بكالوريا 2017 العادية – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية:

$$104x-20y=272\dots(E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 3\,[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.

عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري.

3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m-d=2017$$

حيث $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$.

الحل

$$104x-20y=272\dots(E)$$

1) أ- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104:

بتطبيق خوارزمية إقليدس، نشكل الجدول التالي:

حاصل القسمة	5	5
104	20	4
باقي القسمة	4	0

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 4.

ومنه:

القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 هو 4.

ونكتب:

$$PGCD(104\,;20)=4$$

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

$$104x-20y=272\dots(E)$$

لدينا:

$$PGCD(104\,;20)=4$$

والعدد 4 يقسم العدد 272.

لأن:

$$272=68\times 4$$

ومنه:

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن:

$$x\equiv 3\,[5]$$

إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) نكتب:

$104x-20y=272$

$4\times 26x-4\times 5y=4\times 68$

$26x-5y=68\dots(*)$

$26x=5y+68$

$26x=5y+65+3$

$26x=5(y+13)+3$

$26x=5y'+3$

$26x\equiv 3\,[5]$

حيث: $26\equiv 1\,[5]$.

ومنه:

$$x\equiv 3\,[5]$$

استنتج حلول المعادلة (E):

لدينا من 1) أ- أن:

$$x\equiv 3\,[5]$$

أي:

$$x=5k+3\;/\;k\in\mathbb{Z}$$

نعوض $x=5k+3$ في المعادلة $(*)$ فنكتب:

$26(5k+3)-5y=68$

$130k+78-5y=68$

$130k+10=5y$

$5\times 26k+5\times 2=5y$

نجد:

$$y=26k+2\;/\;k\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$(x;y)=\{(5k+3\,;26k+2)\}\ /\ k\in\mathbb{Z}$

2) تعيين α و β:

$$\begin{cases}\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}\\ \lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}\end{cases}$$

لدينا من جهة:

$\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$

حيث:

$0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$

ولدينا من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$

حيث:

$0\le\alpha\le5$ و $0\le\beta\le5$

ومنه:

$0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$

فنكتب من جهة:

$\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$

$\lambda=1\times4^0+0\times4^1+\beta\times4^2+\alpha\times4^3+\alpha\times4^4+1\times4^5$

$\lambda=1+0+16\beta+64\alpha+256\alpha+1024$

$\lambda=320\alpha+16\beta+1025\ ...(1)$

ونكتب من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$

$\lambda=1\times6^0+0\times6^1+\beta\times6^2+\alpha\times6^3+1\times6^4$

$\lambda=1+0+36\beta+216\alpha+1296$

$\lambda=216\alpha+36\beta+1297\ ...(2)$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$320\alpha+16\beta+1025=216\alpha+36\beta+1297$

$320\alpha-216\alpha+16\beta-36\beta=1297-1025$

$104\alpha-20\beta=272\ ...(3)$

حيث:

$0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$

لاحظ أن المعادلتين (3) و (E) متكافئتان.

ومنه:

حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي:

$(\alpha;\beta)=\{(5m+3\,;26m+2)\}\ /\ m\in\mathbb{N}$

لدينا:

$0\le\alpha\le3$

$0\le5m+3\le3$

$-3\le5m\le0$

$-\frac{3}{5}\le m\le0$

أي:

$m=0$

ومنه:

$\alpha=3$

ولدينا:

$0\le\beta\le3$

$0\le26m+2\le3$

$-2\le26m\le1$

$-\frac{1}{13}\le m\le\frac{1}{26}$

أي:

$m=0$

ومنه:

$\beta=2$

كتابة λ في النظام العشري:

نعوض $\alpha=3$ و $\beta=2$ في المعادلة (1) ثم نحقق من النتيجة بالتعويض في المعادلة (2) فنكتب:

$\lambda=320\alpha+16\beta+1025$

$\lambda=320\times3+16\times2+1025$

نجد:

$\lambda=2017$

التحقق:

$\lambda=216\alpha+36\beta+1297$

$\lambda=216\times3+36\times2+1297$

نجد:

$\lambda=2017$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

3) التحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي:

التحقق أن 2017 عدد أولي:

لدينا:

$$\sqrt{2017} = 44,91$$

بما أن $\sqrt{2017}$ غير طبيعي، نقسم 2017 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2017}$ على الترتيب.

أي:

نقسم 2017 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:

$$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$$

$2017 = 2 \times 1008 + 1$

$2017 = 3 \times 672 + 1$

$2017 = 5 \times 403 + 2$

$2017 = 7 \times 288 + 1$

$2017 = 11 \times 183 + 4$

$2017 = 13 \times 155 + 2$

$2017 = 17 \times 118 + 11$

$2017 = 19 \times 106 + 3$

$2017 = 23 \times 87 + 16$

$2017 = 29 \times 69 + 16$

$2017 = 31 \times 65 + 2$

$2017 = 37 \times 54 + 19$

$2017 = 41 \times 49 + 8$

$2017 = 43 \times 46 + 39$

لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة.

ومنه:

العدد 2017 أولي.

التحقق أن 1009 عدد أولي:

لدينا:

$$\sqrt{1009} = 31,76$$

بما أن $\sqrt{1009}$ غير طبيعي، نقسم 1009 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{1009}$ على الترتيب.

أي:

نقسم 1009 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:

$$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$$

$1009 = 2 \times 504 + 1$

$1009 = 3 \times 336 + 1$

$1009 = 5 \times 201 + 4$

$1009 = 7 \times 144 + 1$

$1009 = 11 \times 91 + 8$

$1009 = 13 \times 77 + 8$

$1009 = 17 \times 59 + 6$

$1009 = 19 \times 53 + 2$

$1009 = 23 \times 43 + 20$

$1009 = 29 \times 34 + 23$

$1009 = 31 \times 32 + 17$

لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة.

ومنه:

العدد 1009 أولي.

تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017$$

لدينا:

$$d = PGCD(a; b)$$

معناه:

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \end{cases}$$

حيث:

a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

ولدينا:

$$PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$$

أي:

$$d \times m = a \times b$$

بالتعويض نكتب:

$$d \times m = d \times a' \times d \times b'$$

نجد:

$$m = d \times a' \times b'$$

ولدينا حسب نص التمرين أن:

$$2m - d = 2017$$

بالتعويض:

$2\times d\times a'\times b'-d=2017$

$d(2a'b'-1)=1\times 2017$ (2017 عدد أولي)

نميز حالتين:

$\begin{cases} d=1 \\ \text{و} \\ 2a'b'-1=2017 \end{cases}$ أو $\begin{cases} d=2017 \\ \text{و} \\ 2a'b'-1=2017 \end{cases}$

الحالة الأولى: $d=1$

معناه:

$2a'b'-1=2017$

$2a'b'=2018$

$a'b'=1009$

$a'b'=1\times 1009$ (1009 عدد أولي)

نميز حالتين:

$\begin{cases} a'=1 \\ \text{و} \\ b'=1009 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a'=1009 \\ \text{و} \\ b'=1 \end{cases}$

قيم a' و b' هي:

$(a';b')=\{(1;1009),(1009;1)\}$

ومنه:

الثنائيتين $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d=1$ هما:

$(a;b)=\{(1;1009),(1009;1)\}$

الحالة الثانية: $d=2017$

معناه:

$2017(2a'b'-1)=2017$

$2a'b'-1=1$

$2a'b'=2$

$a'b'=1$

نميز حالة واحدة:

$\begin{cases} a'=1 \\ \text{و} \\ b'=1 \end{cases}$

قيم a' و b' هي:

$(a';b')=\{(1;1)\}$

ومنه:

الثنائية $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d=2017$ هي:

$(a;b)=\{(2017;2017)\}$

نتيجة:

الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$2m-d=2017$

هي:

$(a;b)=\{(1;1009),(1009;1),(2017;2017)\}$

نلخص نتائج السؤال 3) في الجدول التالي:

	الحالة الأولى		الحالة الثانية
d	1	1	2017
a'	1	1009	1
b'	1009	1	1
$a=da'$	1	1009	2017
$b=db'$	1009	1	2017
$m=da'b'$	1009	1009	2017
$2m-d$	2017	2017	2017

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

دورة 2017 الاستثنائية – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$63x + 5y = 159 \dots (E)$$

1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن: $x \equiv 3\,[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

القسمة على 5.

حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

الحل

$$63x + 5y = 159 \dots (E)$$

1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما:

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 63 و 5:

$$63 = 5 \times 12 + 3$$
$$5 = 3 \times 1 + 2$$
$$3 = 2 \times 1 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 1.

أي:

$$PGCD(63;5) = 1$$

ومنه:

العددان 63 و 5 أوليان فيما بينهما.

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

$$63x + 5y = 159 \dots (E)$$

لدينا:

$$PGCD(63;5) = 1$$

والعدد 1 يقسم العدد 159 (العدد 1 يقسم كل الأعداد).

ومنه:

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

2) نبرهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن:

$$x \equiv 3\,[5]$$

إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) نكتب:

$$63x + 5y = 159$$
$$63x = 159 - 5y$$
$$63x = 155 + 4 - 5y$$
$$63x = 5(31 - y) + 4$$
$$63x = 5y' + 4$$
$$63x \equiv 4\,[5] \quad / (PGCD(63;5) = 1)$$

حيث:

$$63x \equiv 3x\,[5]$$

فنكتب:

$$3x \equiv 4\,[5] \quad / (PGCD(3;5) = 1)$$

بضرب طرفي الموافقة في العدد 2 نكتب:

$$2 \times 3x \equiv 2 \times 4\,[5]$$
$$6x \equiv 8\,[5]$$

حيث:

$$8 \equiv 3\,[5] \text{ و } 6x \equiv x\,[5]$$

ومنه:

$$x \equiv 3\,[5]$$

استنتج حلول المعادلة (E):

لدينا من 2) أن:

$$x \equiv 3\,[5]$$

أي:

$$x = 5k + 3 \,/\, k \in \mathbb{Z}$$

نعوض $x = 5k + 3$ في المعادلة (E) فنكتب:

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

$63(5k+3)+5y=159$

$315k+189+5y=159$

$-315k-30=5y$

$-5\times 63k-5\times 6=5y$

نجد:

$$y=-63k-6\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x;y)=\{(5k+3;-63k-6)\}\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β:

$$\begin{cases}\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}\\ \lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}\end{cases}$$

لدينا من جهة:

$$\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$$

حيث:

$$0\le\alpha\le 6$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$$

حيث:

$$0\le\beta\le 4$$

فنكتب من جهة:

$\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$

$\lambda=\alpha\times 7^0+0\times 7^1+\alpha\times 7^2+5\times 7^3$

$\lambda=\alpha+0+49\alpha+1715$

$$\lambda=50\alpha+1715\ \dots(1)$$

ونكتب من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$

$\lambda=0\times 5^0+\beta\times 5^1+0\times 5^2+1\times 5^3+\beta\times 5^4$

$\lambda=0+5\beta+0+125+625\beta$

$$\lambda=630\beta+125\ \dots(2)$$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$50\alpha+1715=630\beta+125$

$630\beta-50\alpha=1715-125$

$630\beta-50\alpha=1590$

$10\times 63\beta-10\times 5\alpha=10\times 159$

$63\beta-5\alpha=159$

ونكتب:

$$63\beta+5(-\alpha)=159\ \dots(3)$$

ولدينا:

$$63x+5y=159\ \dots(E)$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases}\beta=x\\ \alpha=-y\end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases}\alpha=63m+6\\ \beta=5m+3\end{cases}\ /\ m\in\mathbb{N}$$

ومنه:

حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي:

$$(\alpha;\beta)=\{(63m+6\,;5m+3)\}\ /\ m\in\mathbb{N}$$

لدينا:

$0\le\alpha\le 6$

$0\le 63m+6\le 6$

$-6\le 63m\le 0$

$-\frac{6}{63}\le m\le 0$

أي:

$$m=0$$

ومنه:

$$\alpha=6$$

ولدينا:

$0\le\beta\le 4$

$0\le 5m+3\le 4$

$-3\le 5m\le 1$

$-\frac{3}{5}\le m\le\frac{1}{5}$

أي:

$$m=0$$

ومنه:

$$\beta=3$$

قيم α و β هي:

$$(\alpha;\beta)=\{(6;3)\}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

كتابة $\lambda + 2$ في النظام العشري:

نعوض $\alpha = 6$ في المعادلة (1) ثم تحقق من النتيجة بتعويض $\beta = 3$ في المعادلة (2) فنكتب:

$\lambda + 2 = 50\alpha + 1715 + 2$

$\lambda + 2 = 50 \times 6 + 1715 + 2$

نجد:

$$\lambda + 2 = 2017$$

التحقق:

$\lambda + 2 = 630\beta + 125 + 2$

$\lambda + 2 = 630 \times 3 + 125 + 2$

نجد:

$$\lambda + 2 = 2017$$

4) أ- دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5:

$n = 0: \ 3^0 \equiv 1\,[5]$

$n = 1: \ 3^1 \equiv 3\,[5]$

$n = 2: \ 3^2 \equiv 4\,[5]$

$n = 3: \ 3^3 \equiv 2\,[5]$

$n = 4: \ 3^4 \equiv 1\,[5]$

ومنه:

$n = 4p \quad : 3^{4p} \equiv 1\,[5]$

$n = 4p + 1: \ 3^{4p+1} \equiv 3\,[5]$

$n = 4p + 2: \ 3^{4p+2} \equiv 4\,[5]$

$n = 4p + 3: \ 3^{4p+3} \equiv 2\,[5]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$	$p \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل القسمة على 5 العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ يقبل القسمة على 5 معناه:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0\,[5]$$

حيث:

$(x; y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

فنكتب:

$3^{x-y} \equiv 3^{5k+3-(-63k-6)}\,[5]$

$3^{x-y} \equiv 3^{5k+3+63k+6}\,[5]$

$3^{x-y} \equiv 3^{68k+9}\,[5]$

$3^{x-y} \equiv 3^{68k} \times 3^9\,[5]$

$3^{x-y} \equiv (3^{4k})^{17} \times 3^{4\times2+1}\,[5]$

$3^{x-y} \equiv (1)^{17} \times 3\,[5]$

ومنه:

$$3^{x-y} \equiv 3\,[5]$$

ولدينا:

$1438 \equiv 3\,[5]$

$1438^{2017} \equiv 3^{2017}\,[5]$

$1438^{2017} \equiv 3^{4\times504+1}\,[5]$

ومنه:

$$1438^{2017} \equiv 3\,[5]$$

وحسب نص التمرين لدينا:

$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0\,[5]$

$3 + 4n + 3 \equiv 0\,[5]$

$4n + 6 \equiv 0\,[5]$

$4n + 1 \equiv 0\,[5]$

$4n \equiv -1\,[5]$

$4n \equiv 4\,[5] \ / \ PGCD(4;5) = 1$

$n \equiv 1\,[5]$

ونكتب:

$$n = 5t + 1$$

ومنه:

قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل القسمة على 5 العدد:

$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$

هي:

$$n = 5t + 1 \ / \ t \in \mathbb{N}$$

دورة 2016 – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} ln(u_1)+ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}$$

1) أحسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ- عبر عن u_n بدلالة n.

ب- نضع:

$$S_n=ln(u_0)+ln(u_1)+ln(u_2)+\cdots+ln(u_n)$$

أحسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n=n+3$.

أ- بين أن: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$.

ب- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n;a_n)$.

جـ- عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:

$PGCD(2S_n;a_n)=7$

4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1$.

عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n\equiv 0\,[7] \\ n\equiv 0\,[5] \end{cases}$$

6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:

$1437^{9n+1}-3\times 4^{12n+1}+52$

يقبل القسمة على 7.

الحل

لدينا:

$$\begin{cases} ln(u_1)+ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}$$

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما معناه:

$0<u_0<u_1<u_2<\cdots$

1) حساب u_1 و u_2:

لدينا:

$ln(u_1)+ln(u_2)=11$

$ln(u_1\times u_2)=11$

$ln(u_1\times u_2)=ln\,e^{11}$

$u_1\times u_2=e^{11}$

ومنه:

$$u_2=\frac{e^{11}}{u_1}$$

ولدينا:

$u_1+u_2=e^4(1+e^3)$

$u_1+\frac{e^{11}}{u_1}=e^4(1+e^3)$

${u_1}^2+e^{11}=e^4(1+e^3)u_1$

$${u_1}^2-e^4(1+e^3)u_1+e^{11}=0\ \ldots(*)$$

نحسب المميز Δ للمعادلة $(*)$:

$\Delta=[e^4(1+e^3)]^2-4e^{11}$

$\Delta=e^8(1+e^3)^2-4e^{11}$

$\Delta=e^8(e^6+2e^3+1)-4e^{11}$

$\Delta=e^8(e^6+2e^3+1-4e^3)$

$\Delta=e^8(e^6-2e^3+1)$

$\Delta=(e^4)^2(e^3-1)^2$

ومنه:

$$\Delta=[e^4(e^3-1)]^2$$

للمعادلة $(*)$ حلين متمايزين u_1' و u_1'' حيث:

$u_1'=\frac{e^4(1+e^3)-e^4(e^3-1)}{2}$

$u_1'=\frac{e^4(1+e^3-e^3+1)}{2}$

نجد:

$$u_1'=e^4$$

$u_1''=\frac{e^4(1+e^3)+e^4(e^3-1)}{2}$

$u_1''=\frac{e^4(1+e^3+e^3-1)}{2}$

نجد:

$$u_1''=e^7$$

● إذا كان:

$u_1' = e^4$

لدينا:

$$u_2' = \frac{e^{11}}{u_1'} = \frac{e^{11}}{e^4} = e^7$$

$u_2' = e^7$

لاحظ أن:

$u_1' < u_2'$

نقبل هذه الحالة لأن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما.

● إذا كان:

$u_1'' = e^7$

لدينا:

$$u_2'' = \frac{e^{11}}{u_1''} = \frac{e^{11}}{e^7} = e^4$$

$u_2'' = e^4$

لاحظ أن:

$u_1'' > u_2''$

نرفض هذه الحالة لأن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما.

ومنه:

$u_1 = e^4$ و $u_2 = e^7$

استنتاج قيمة الأساس q:

بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن:

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{e^7}{e^4} = e^3$$

$q = e^3$

2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ- التعبير عن u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها $q = e^3$ بالعبارة:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

حيث:

$$u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{e^4}{e^3} = e$$

$u_0 = e$

بالتعويض:

$$u_n = e \times (e^3)^n = e \times e^{3n} = e^{3n+1}$$

$u_n = e^{3n+1}$

ب- حساب S_n بدلالة n:

لدينا:

$$S_n = ln(u_0) + ln(u_1) + ln(u_2) + \cdots + ln(u_n)$$
$$S_n = ln(e) + ln(e^4) + ln(e^7) + \cdots + ln(e^{3n+1})$$
$$S_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n+1)$$

حيث:

S_n هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 3، يحسب كما يلي:

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} \times (1 + 3n + 1)$$

نجد:

$$S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.

أ- تبيان أن $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$:

لدينا:

$$2S_n = 2 \times \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$
$$2S_n = (n+1)(3n+2)$$
$$2S_n = 3n^2 + 5n + 2$$

نجري القسمة الإقليدية لـ $3n^2 + 5n + 2$ على $n + 3$:

$3n^2 + 5n + 2$	$n + 3$
$-3n^2 - 9n$	$3n - 4$
$-4n + 2$	
$4n + 12$	
14	

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

فنكتب:

$$2S_n = 3n^2 + 5n + 2$$

$$2S_n = (3n-4)(n+3) + 14$$

نجد:

$$2S_n = (3n-4)a_n + 14$$

معناه:

العدد 14 هو باقي قسمة $2S_n$ على a_n.

حسب الخاصية التالية:

> a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$.
> إذا كان r باقي قسمة a على b أي $a = bk + r$.
> فإن:
> $$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$$

فإن:

$$PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$$

ب- تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$:

لدينا من 3) أ- أن:

$$PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/2S_n \\ d/a_n \\ d/14 \end{cases}$$

القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$ هي القواسم الطبيعية لـ 14.

ومنه:

$$PGCD(2S_n; a_n) = d = D_{14} = \{1; 2; 7; 14\}$$

جـ- تعيين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:

$$PGCD(2S_n; a_n) = 7$$

معناه:

$$\begin{cases} 7/2S_n \\ و \\ 7/a_n \end{cases}$$

فنكتب:

$$7/a_n$$

$$a_n \equiv 0\,[7]$$

$$n + 3 \equiv 0\,[7]$$

$$n \equiv -3\,[7]$$

$$n \equiv 4\,[7]$$

ومنه:

$$n = 7k + 4 \,/\, k \in \mathbb{N}$$

4) دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7:

$n = 0 :\ 2^0 \equiv 1\,[7]$

$n = 1 :\ 2^1 \equiv 2\,[7]$

$n = 2 :\ 2^2 \equiv 4\,[7]$

$n = 3 :\ 2^3 \equiv 1\,[7]$

ومنه:

$n = 3p :\ 2^{3p} \equiv 1\,[7]$

$n = 3p+1 :\ 2^{3p+1} \equiv 2\,[7]$

$n = 3p+2 :\ 2^{3p+2} \equiv 4\,[7]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 في الجدول التالي:

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$	$p \in \mathbb{N}$
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0\,[7] \\ n \equiv 0\,[5] \end{cases}$$

لدينا:

$$b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n(n+3) - 2 \times \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n(n+3) - (n+1)(3n+2) + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n^2 + 9n - (3n^2 + 5n + 2) + 1437^{2016} + 1$$

$$b_n = 3n^2 + 9n - 3n^2 - 5n - 2 + 1437^{2016} + 1$$

نجد:

$$b_n = 4n + 1437^{2016} - 1$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ولدينا:

$1437 \equiv 2\,[7]$

$1437^{2016} \equiv 2^{2016}\,[7]$

$\equiv 2^{3\times 672}\,[7]$

$\equiv 1\,[7]$

فنكتب:

$b_n \equiv 0\,[7]$

$4n + 1437^{2016} - 1 \equiv 0\,[7]$

$4n + 1 - 1 \equiv 0\,[7]$

$4n \equiv 0\,[7]$

بما أن 7 و 4 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص،

نكتب:

$n \equiv 0\,[7]$

فتصبح لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases} n \equiv 0\,[7] \\ n \equiv 0\,[5] \end{cases}$$

بما أن 7 و 5 أوليان فيما بينهما فإن:

$n \equiv 0\,[7\times 5]$

أي:

$n \equiv 0\,[35]$

ومنه:

$n = 35k\ /\ k \in \mathbb{N}$

6) تبيان أن العدد $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7:

العدد $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على العدد 7 معناه:

$1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0\,[7]$

لدينا:

$1437 \equiv 2\,[7]$

$1437^{9n+1} \equiv 2^{9n+1}\,[7]$

$\equiv 2^{3n+1}\times 2^{6n}\,[7]$

$\equiv 2^{3n+1}\times (2^{3n})^2\,[7]$

$\equiv 2\times (1)^2\,[7]$

$1437^{9n+1} \equiv 2\,[7]$

ولدينا:

$4^{12n+1} \equiv (2^2)^{12n+1}\,[7]$

$\equiv 2^{24n+2}\,[7]$

$\equiv 2^{3n+2}\times 2^{21n}\,[7]$

$\equiv 2^{3n+2}\times (2^{3n})^7\,[7]$

$\equiv 4\times (1)^7\,[7]$

$4^{12n+1} \equiv 4\,[7]$

ولدينا:

$52 \equiv 3\,[7]$

فنكتب:

$1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3\times 4 + 3\,[7]$

$\equiv 2 - 12 + 3\,[7]$

$\equiv -7\,[7]$

$\equiv 0\,[7]$

ومنه:

العدد $1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على العدد 7.

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

دورة 2016 – شعبة الرياضيات – الموضوع الثاني

التمرين

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$$

مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية:

$$7x - 3y = 8$$

حيث x و y عددان طبيعيان.

أ- حل المعادلة (E).

ب- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟

- عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

جـ- جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\,[11]$$

الحل

1) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^n و 7^n على 11:

دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^n على 11:

$n = 0:\ 3^0 \equiv 1\,[11]$

$n = 1:\ 3^1 \equiv 3\,[11]$

$n = 2:\ 3^2 \equiv 9\,[11]$

$n = 3:\ 3^3 \equiv 5\,[11]$

$n = 4:\ 3^4 \equiv 4\,[11]$

$n = 5:\ 3^5 \equiv 1\,[11]$

ومنه:

$n = 5p:\ 3^{5p} \equiv 1\,[11]$

$n = 5p+1:\ 3^{5p+1} \equiv 3\,[11]$

$n = 5p+2:\ 3^{5p+2} \equiv 9\,[11]$

$n = 5p+3:\ 3^{5p+3} \equiv 5\,[11]$

$n = 5p+4:\ 3^{5p+4} \equiv 4\,[11]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 في الجدول التالي:

n	$5p$	$5p+1$	$5p+2$	$5p+3$	$5p+4$	$p \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	5	4	[11]

دراسة بواقي القسمة الإقليدية لـ 7^n على 11:

$n = 0:\ 7^0 \equiv 1\,[11]$

$n = 1:\ 7^1 \equiv 7\,[11]$

$n = 2:\ 7^2 \equiv 5\,[11]$

$n = 3:\ 7^3 \equiv 2\,[11]$

$n = 4:\ 7^4 \equiv 3\,[11]$

$n = 5:\ 7^5 \equiv 10\,[11]$

$n = 6:\ 7^6 \equiv 4\,[11]$

$n = 7:\ 7^7 \equiv 6\,[11]$

$n = 8:\ 7^8 \equiv 9\,[11]$

$n = 9:\ 7^9 \equiv 8\,[11]$

$n = 10:\ 7^{10} \equiv 1\,[11]$

ومنه:

$n = 10k:\ 7^{10k} \equiv 1\,[11]$

$n = 10k+1:\ 7^{10k+1} \equiv 7\,[11]$

$n = 10k+2:\ 7^{10k+2} \equiv 5\,[11]$

$n = 10k+3:\ 7^{10k+3} \equiv 2\,[11]$

$n = 10k+4:\ 7^{10k+4} \equiv 3\,[11]$

$n = 10k+5:\ 7^{10k+5} \equiv 10\,[11]$

$n = 10k+6:\ 7^{10k+6} \equiv 4\,[11]$

$n = 10k+7:\ 7^{10k+7} \equiv 6\,[11]$

$n = 10k+8:\ 7^{10k+8} \equiv 9\,[11]$

$n = 10k+9:\ 7^{10k+9} \equiv 8\,[11]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 في الجدول التالي:

n	$10k$	$10k+1$	$10K+2$	$10k+3$	$10k+4$	$k \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	1	7	5	2	3	[11]

n	$10k+5$	$10k+6$	$10K+7$	$10k+8$	$10k+9$	$k \in \mathbb{N}$
$7^n \equiv$	10	4	6	9	8	[11]

bouguetof.hamid@yahoo.fr https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

1) ب- نبرهن أن $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11:

العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11

معناه نبرهن أن:

$$2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}\equiv 0\,[11]$$

لدينا:

$2016\equiv 3\,[11]$

$2016^{5n+4}\equiv 3^{5n+4}\,[11]$

ومنه:

$$2016^{5n+4}\equiv 4\,[11]$$

(أنظر الجدول الأول أعلاه).

ولدينا:

$1437\equiv 7\,[11]$

$1437^{10n+4}\equiv 7^{10n+4}\,[11]$

ومنه:

$$2016^{5n+4}\equiv 3\,[11]$$

(أنظر الجدول الثاني أعلاه).

فنكتب:

$$\begin{aligned}2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}&\equiv 2\times 4+3\,[11]\\&\equiv 8+3\,[11]\\&\equiv 11\,[11]\\&\equiv 0\,[11]\end{aligned}$$

ومنه:

العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

2) أ- حل المعادلة (E):

$$7x-3y=8\ldots(E)$$

حيث x و y عددان طبيعيان.

الحل الخاص الظاهر للمعادلة (E) هو الثنائية $(2;2)$.

فنكتب الجملة التالية:

$$\begin{cases}7x-3y=8\\7(2)-3(2)=8\end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:

$$\begin{cases}7x-3y=8\\7(-2)-3(-2)=-8\end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب:

$$7x+7(-2)-3y-3(-2)=0$$

ونكتب:

$$7(x-2)-3(y-2)=0$$

نجد:

$$7(x-2)=3(y-2)\ldots(*)$$

لاحظ أن:

- العدد 3 يقسم $7(x-2)$.
- العدد 7 أولي مع العدد 3.

حسب مبرهنة غوص فإن:

العدد 3 يقسم $(x-2)$

أي:

$$x-2=3t\ /\ t\in\mathbb{N}$$

ومنه:

$$x=3t+2\ /\ t\in\mathbb{N}$$

نعوض $x=3t+2$ في المعادلة $(*)$:

$7(3t+2-2)=3(y-2)$

$7\times 3t=3(y-2)$

$7t=y-2$

نجد:

$$y=7t+2\ /\ t\in\mathbb{N}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x\,;y)=\{(3t+2;7t+2)\ /\ t\in\mathbb{N}\}$$

2) ب- إيجاد القيم الممكنة للعدد d:

حيث:

- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y.
- $(x;y)$ حلا للمعادلة (E).

فنكتب:

$$PGCD(x;y)=PGCD(3t+2;7t+2)=d$$

أي:

$$\begin{cases} d / 3t+2 \\ \text{و} \\ d / 7t+2 \end{cases}$$

حسب الخواص يمكن أن نكتب:

$$\begin{cases} d / 7\times(3t+2) \\ \text{و} \\ d / -3\times(7t+2) \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} d / 21t+14 \\ \text{و} \\ d / -21t-6 \end{cases}$$

وحسب الخواص أيضا نكتب:

$$d / 21t+14-21t-6$$

نجد:

$$d / 8$$

ومنه:

القيم الممكنة لـ d هي القواسم الطبيعية للعدد 8.

$$d = D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$$

تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$:

$$PGCD(x; y) = PGCD(3t+2; 7t+2) = 4$$

أي:

$$\begin{cases} 4 / 3t+2 \\ \text{و} \\ 4 / 7t+2 \end{cases}$$

حسب الخواص يمكن أن نكتب:

$$\begin{cases} 4 / -2(3t+2) \\ \text{و} \\ 4 / 7t+2 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} 4 / -6t-4 \\ \text{و} \\ 4 / 7t+2 \end{cases}$$

وحسب الخواص أيضا نكتب:

$$4 / -6t-4+7t+2$$

نجد:

$$4 / t-2$$

ونكتب:

$$t-2 = 4t'$$

أي:

$$t = 4t'+2$$

لدينا:

$$\begin{cases} x = 3t+2 = 3(4t'+2)+2 = 12t'+6+2 \\ y = 7t+2 = 7(4t'+2)+2 = 28t'+14+2 \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} x = 12t'+8 \\ y = 28t'+16 \end{cases}$$

● إذا كان t' عددا زوجيا ($t' = 2\lambda$).

فإن:

$$PGCD(x; y) = 8 \text{ (مرفوض)}$$

● إذا كان t' عددا فرديا ($t' = 2\lambda+1$).

فإن:

$$PGCD(x; y) = 4 \text{ (مقبول)}$$

ومنه:

$$t' = 2\lambda+1$$

فنكتب:

$$\begin{cases} x = 12t'+8 = 12(2\lambda+1)+8 = 24\lambda+20 \\ y = 28t'+16 = 28(2\lambda+1)+16 = 56\lambda+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 24\lambda+20 \\ y = 56\lambda+44 \end{cases}$$

ومنه:

الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$ هي:

$$(x; y) = \{(24\lambda+20; 56\lambda+44) / \lambda \in \mathbb{N}\}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

2) جـ- إيجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\,[11]$$

لدينا:

$2016 \equiv 3\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 3^{7x}\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 3^{7(3t+2)}\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 3^{21t+14}\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 3^{4(5t+3)+t+2}\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 3^{(5t+3)^4} \times 3^2 \times 3^t\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 5^4 \times 3^2 \times 3^t\,[11]$

$2016^{7x} \equiv 9 \times 9 \times 3^t\,[11]$

$$2016^{7x} \equiv 4 \times 3^t\,[11]$$

ولدينا:

$1437 \equiv 7\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 7^{3y}\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 7^{3(7t+2)}\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 7^{21t+6}\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 7^{2(10t+3)+t}\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 7^{(10t+3)^2} \times 7^t\,[11]$

$1437^{3y} \equiv 2^2 \times 7^t\,[11]$

$$1437^{3y} \equiv 4 \times 7^t\,[11]$$

ومنه:

$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\,[11]$

$4 \times 3^t + 4 \times 7^t \equiv 0\,[11]$

$4(3^t + 7^t) \equiv 0\,[11]$

بما أن 11 و 4 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص:

$$3^t + 7^t \equiv 0\,[11]$$

يمكن الاستعانة بجدول البواقي التالي:

$t =$	10α	$10\alpha+1$	$10\alpha+2$	$10\alpha+3$	$10\alpha+4$
$3^t \equiv$	1	3	9	5	4
$7^t \equiv$	1	7	5	2	3
$3^t+7^t \equiv$	2	10	3	7	7

$10\alpha+5$	$10\alpha+6$	$10\alpha+7$	$10\alpha+8$	$10\alpha+9$	$\alpha \in \mathbb{N}$
1	3	9	5	4	[11]
10	4	6	9	8	[11]
0	7	4	3	1	[11]

من الجدول:

إذا كان:

$$t \equiv 10\alpha + 5$$

فإن:

$3^t \equiv 3^{10\alpha+5}\,[11]$

$3^t \equiv 3^5 \times 3^{10\alpha}\,[11]$

$3^t \equiv 3^5 \times (3^{5\alpha})^2\,[11]$

$3^t \equiv 1 \times (1)^2\,[11]$

$$3^t \equiv 1\,[11]$$

وأيضا:

$7^t \equiv 7^{10\alpha+5}\,[11]$

$$7^t \equiv 10\,[11]$$

ومنه:

$3^t + 7^t \equiv 1 + 10\,[11]$

$3^t + 7^t \equiv 11\,[11]$

$$3^t + 7^t \equiv 0\,[11]$$

فنكتب:

$$\begin{cases} x = 3t+2 = 3(10\alpha+5) + 2 = 30\alpha + 15 + 2 \\ y = 7t+2 = 7(10\alpha+5) + 2 = 70\alpha + 35 + 2 \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} x = 30\alpha + 17 \\ y = 70\alpha + 37 \end{cases}$$

ومنه:

الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\,[11]$$

هي:

$$(x\,;y) = \{(30\alpha + 17\,; 70\alpha + 37)\ /\ \alpha \in \mathbb{N}\}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

دورة 2018 – شعبة الرياضيات – الموضوع الثاني

التمرين

1) α و β عددان طبيعيان بحيث:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$$

- عين العددين α و β ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة:

$$1009x-2017y=1$$

3) عين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases}\alpha\equiv 2019\ [2017]\\ \alpha\equiv 2019\ [1009]\end{cases}$$

4) أ- n عدد طبيعي، أدرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

بـ- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:

$$L=\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{2018\ \text{مرة}}$$

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

الحل

1) تعيين العددين α و β:

لدينا:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4035\\ \alpha-\beta=1\end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف ينتج:

$$2\alpha=4036$$

ومنه:

$$\alpha=2018$$

نعوض $\alpha=2018$ في المعادلة الثانية ينتج:

$$2018-\beta=1$$

ومنه:

$$\beta=2017$$

تبيان أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما:

نبرهن أن:

$$PGCD\left(\frac{\alpha}{2};\beta\right)=PGCD(1009;2017)=1$$

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2017 و 1009:

$$2017=1\times1009+1008$$

$$1009=1\times1008+1$$

$$1008=1\times1008+0$$

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 1.

أي:

$$PGCD(1009;2017)=1$$

ومنه:

العددان 2017 و 1009 أوليان فيما بينهما.

2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة:

$$1009x-2017y=1\ldots(E)$$

الحل الخاص الظاهر للمعادلة (E) هو الثنائية $(2;1)$.

فنكتب الجملة التالية:

$$\begin{cases}1009x-2017y=1\\ 1009(2)-2017(1)=1\end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:

$$\begin{cases}1009x-2017y=1\\ 1009(-2)-2017(-1)=-1\end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب:

$$1009x+1009(-2)-2017y-2017(-1)=0$$

ونكتب:

$$1009(x-2)-2017(y-1)=0$$

نجد:

$$1009(x-2)=2017(y-1)\ldots(*)$$

لاحظ أن:

- العدد 2017 يقسم $1009(x-2)$.
- العدد 2017 أولي مع العدد 1009.

حسب مبرهنة غوص فإن:

العدد 2017 يقسم $(x-2)$

أي:

$$x-2=2017k\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

$$x=2017k+2\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

نعوض $x=2017k+2$ في المعادلة $(*)$:

$$1009(2017k+2-2)=2017(y-1)$$
$$1009\times2017k=2017(y-1)$$
$$1009k=y-1$$

نجد:

$$y=1009k+1\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x\,;y)=\{(2017k+2\,;1009k+1)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

3) تعيين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases}\alpha\equiv2019\ [2017]\\ \alpha\equiv2019\ [1009]\end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases}\alpha=2017k_1+2019\\ \alpha=1009k_2+2019\end{cases}\ \cdots(\mathrm{I})$$

بالمطابقة نجد:

$$2017k_1=1009k_2\ \dots(*)$$

معناه:

1009 يقسم $2017k_1$

من 1) لدينا:

2017 و 1009 أوليان فيما بينهما

ومنه: (حسب مبرهنة غوص)

1009 يقسم k_1

أي:

$$k_1=1009t_1$$

بتعويض $k_1=1009t_1$ في المعادلة $(*)$ نجد:

$$k_2=2017t_2$$

نعوض k_1 و k_2 في المعادلة $(*)$ نجد:

$$t_1=t_2=\lambda$$

أي:

$$\begin{cases}k_1=1009\lambda\\ k_2=2017\lambda\end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة (I):

$$\alpha=2017\times1009\lambda+2019$$

ومنه:

$$\alpha=2035153\lambda+2019\ /\ \lambda\in\mathbb{Z}$$

ملاحظة:

يمكن التحقق بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة (I):

$$\alpha=1009\times2017\lambda+2019$$

ومنه:

$$\alpha=2035153\lambda+2019\ /\ \lambda\in\mathbb{Z}$$

4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9:

$$n=0\ :\ 7^0\ \equiv1\ [9]$$
$$n=1\ :\ 7^1\ \equiv7\ [9]$$
$$n=2\ :\ 7^2\ \equiv4\ [9]$$
$$n=3\ :\ 7^3\ \equiv1\ [9]$$

نلاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 3.

فنكتب:

$$n=3m\ :\ 7^{3m}\equiv1\ [9]$$
$$n=3m+1:\ 7^{3m+1}\equiv7\ [9]$$
$$n=3m+2:\ 7^{3m+2}\equiv4\ [9]$$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 في الجدول التالي:

$n=$	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	$m\in\mathbb{N}$
$7^n\equiv$	1	7	4	[9]

4) ب- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9:

حيث:

L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:

$$L=\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{2018\text{ مرة}}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

لدينا:

$L = \overline{111 \dots 1}^{7}$

$L = 1 \times 7^0 + 1 \times 7^1 + 1 \times 7^2 + \cdots + 1 \times 7^{2017}$

$L = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^{2017}$

حيث:

L هو مجموع 2018 حدا من حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول $7^0 = 1$ وأساسها $q = 7$.

يعطى L كما يلي:

$$L = 1 \times \frac{7^{2018} - 1}{7 - 1}$$

نجد:

$$L = \frac{7^{2018} - 1}{6}$$

ونكتب:

$42L = 42 \times \frac{7^{2018} - 1}{6}$

$42L = 7(7^{2018} - 1)$

نجد:

$$42L = 7^{2019} - 7$$

لاحظ أن:

$$2019 = 3 \times 673$$

العدد 2019 يكتب على الشكل $3m$ حيث $m = 673$.

فنكتب:

$7^{2019} \equiv 7^{3m}\ [9]$

$7^{2019} \equiv 1\ [9]$

$7^{2019} - 7 \equiv 1 - 7\ [9]$

$42L \equiv -6\ [9]$

نجد:

$$42L \equiv 3\ [9]$$

ومنه:

باقي قسمة العدد $42L$ على 9 هو 3.

تعلم الرياضيات

دورة 2016 – شعبة التقني رياضي – الموضوع الأول

التمرين

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x\,;y)$:

$$6x-7y=19\ \dots(E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

1) جد الحل الخاص $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث: $x_0=y_0$، ثم حل المعادلة (E).

2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases}\lambda\equiv 24\,[7]\\ \lambda\equiv 5\ \ [6]\end{cases}$$

ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42.

3) عين جميع الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x+y-1|\le 13$$

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases}n-5^n\equiv 2020\,[7]\\ \quad\ n\equiv 1437\,[6]\end{cases}$$

الحل

1) إيجاد الحل الخاص $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E):

$$6x-7y=19\ \dots(E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

لدينا:

$$x_0=y_0$$

نعوض x بـ x_0 و y بـ x_0 في المعادلة (E):

$$6x_0-7x_0=19$$
$$-x_0=19$$

نجد:

$$\begin{cases}x_0=-19\\ y_0=-19\end{cases}$$

ومنه:

الحل الخاص للمعادلة (E) بحيث $x_0=y_0$ هو:

$$(x_0\,;y_0)=\{(-19\,;-19)\}$$

حل المعادلة (E):

لدينا الجملة التالية:

$$\begin{cases}6x-7y=19\\ 6(-19)-7(-19)=19\end{cases}$$

حيث x و y عددان صحيحان.

بضرب طرفي المعادلة الثانية في العدد -1 ينتج:

$$\begin{cases}6x-7y=19\\ 6(19)-7(19)=-19\end{cases}$$

بجمع المعادلتين طرف لطرف نكتب:

$$6x+6(19)-7y-7(19)=0$$

ونكتب:

$$6(x+19)-7(y+19)=0$$

نجد:

$$6(x+19)=7(y+19)\ \dots(*)$$

بما أن:

العدد 7 يقسم $6(x+19)$

وأيضا:

العدد 7 أولي مع العدد 6

فإن: (حسب مبرهنة غوص)

العدد 7 يقسم $(x+19)$

أي:

$$x+19=7k\ \ /\ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

$$x=7k-19\ \ /\ k\in\mathbb{Z}$$

نعوض $x=7k-19$ في المعادلة $(*)$:

$$6(7k-19+19)=7(y+19)$$
$$6\times 7k=7(y+19)$$
$$6k=y+19$$

نجد:

$$y=6k-19\ /\ t\in\mathbb{Z}$$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x\,;y)=\{(7k-19\,;6k-19)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

2) استنتاج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases}\lambda \equiv 24\,[7]\\ \lambda \equiv 5\quad[6]\end{cases}$$

معناه:

$$\begin{cases}\lambda = 7k_1 + 24\\ \lambda = 6k_2 + 5\end{cases} \dots (\mathrm{I})$$

بالمطابقة:

$$7k_1 + 24 = 6k_2 + 5$$

أي:

$$6k_2 - 7k_1 = 24 - 5$$

نجد:

$$6k_2 - 7k_1 = 19$$

من 1) نستنتج أن حلول هذه المعادلة هي:

$$\begin{cases}k_2 = 7k' - 19\\ k_1 = 6k' - 19\end{cases} / \, k' \in \mathbb{Z}$$

نعوض $k_1 = 6k' - 19$ في المعادلة الأولى من الجملة (I):

$\lambda = 7k_1 + 24$

$\lambda = 7(6k' - 19) + 24$

$\lambda = 42k' - 133 + 24$

نجد:

$$\lambda = 42k' - 109 \,/\, k' \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة:

نصل إلى نفس النتيجة إذا عوضنا $k_2 = 7k' - 19$ في المعادلة الثانية من الجملة (I).

تعيين باقي قسمة العدد λ على 42:

لدينا من 2) أن:

$$\lambda = 42k' - 109$$

فنكتب:

$\lambda \equiv -109\,[42]$

$\lambda \equiv -67\,[42]$

$\lambda \equiv -25\,[42]$

نجد:

$$\lambda \equiv 17\,[42]$$

ومنه:

باقي قسمة العدد λ على 42 هو 17.

3) تعيين جميع الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \le 13$$

معناه:

$-13 \le x + y - 1 \le 13$

$-13 \le 7k - 19 + 6k - 19 - 1 \le 13$

$-13 \le 13k - 39 \le 13$

$39 - 13 \le 13k \le 13 + 39$

$26 \le 13k \le 52$

$\frac{26}{13} \le k \le \frac{52}{13}$

نجد:

$$2 \le k \le 4$$

قيم k هي:

$$k = \{2\,;3\,;4\}$$

نلخص قيم x و y في الجدول التالي:

k	2	3	4
$x = 7k - 19$	-5	2	9
$y = 6k - 19$	-7	-1	5

ومنه:

الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x + y - 1| \le 13$$

هي:

$$(x\,;y) = \{(-5\,;-7)\,,(2\,;-1)\,,(9\,;5)\}$$

4) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7:

$n = 0:\ 5^0 \equiv 1\,[7]$

$n = 1:\ 5^1 \equiv 5\,[7]$

$n = 2:\ 5^2 \equiv 4\,[7]$

$n = 3:\ 5^3 \equiv 6\,[7]$

$n = 4:\ 5^4 \equiv 2\,[7]$

$n = 5:\ 5^5 \equiv 3\,[7]$

$n = 6:\ 5^6 \equiv 1\,[7]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 6.

تعلم الرياضيات

فنكتب:

$n = 6m \quad : 5^{6m} \equiv 1\,[7]$

$n = 6m + 1 : 5^{6m+1} \equiv 5\,[7]$

$n = 6m + 2 : 5^{6m+2} \equiv 4\,[7]$

$n = 6m + 3 : 5^{6m+3} \equiv 6\,[7]$

$n = 6m + 4 : 5^{6m+4} \equiv 2\,[7]$

$n = 6m + 5 : 5^{6m+5} \equiv 3\,[7]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 في الجدول التالي:

$m \in \mathbb{N}$	$6m+5$	$6m+4$	$6m+3$	$6m+2$	$6m+1$	$6m$	$n =$
[7]	3	2	6	4	5	1	$5^n \equiv$

4) ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020\,[7] \\ n \equiv 1437\,[6] \end{cases}$$

حسب الموافقة الثانية من الجملة:

$n \equiv 1437\,[6]$

$n \equiv 3\,[6]$

نجد:

$$n = 6\alpha + 3 \,/\, \alpha \in \mathbb{N}$$

حسب الموافقة الأولى من الجملة:

$n - 5^n \equiv 2020\,[7]$

$n - 5^n \equiv 4\,[7]$

$6\alpha + 3 - 5^{6\alpha+3} \equiv 4\,[7]$

$6\alpha + 3 - 6 \equiv 4\,[7]$

$6\alpha - 3 \equiv 4\,[7]$

$6\alpha \equiv 7\,[7]$

$6\alpha \equiv 0\,[7]$

بما أن 7 و 6 أوليان فيما بينهما فإنه حسب مبرهنة غوص:

$$\alpha \equiv 0\,[7]$$

ونكتب:

$$\alpha = 7p \,/\, p \in \mathbb{N}$$

بالتعويض نكتب:

$n = 6\alpha + 3$

$n = 6 \times 7p + 3$

نجد:

$$n = 42p + 3 \,/\, p \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020\,[7] \\ n \equiv 1437\,[6] \end{cases}$$

هي:

$$n = 42p + 3 \,/\, p \in \mathbb{N}$$

دورة 2013 – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث:

$$\alpha = 2n^3 - 14n + 2 \text{ و } \beta = n + 3$$

أ- بين أن:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$$

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب- ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha\,,\beta)$؟

جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha\,,\beta) = 5$$

2) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\,[11] \\ n \equiv 2\,[10] \end{cases}$$

الحل

1) أ- تبيان أن $PGCD(\alpha\,,\beta) = PGCD(\beta\,,10)$:

لدينا:

$$\begin{cases} \alpha = 2n^3 - 14n + 2 \\ \beta = n + 3 \end{cases}$$

نجري القسمة الإقليدية لـ $2n^3 - 14n + 2$ على $n + 3$:

$$\begin{array}{r|l} 2n^3 - 14n + 2 & n + 3 \\ \hline -2n^3 - 6n^2 & 2n^2 - 6n + 4 \\ \hline -6n^2 - 14n + 2 & \\ 6n^2 + 18n & \\ \hline 4n + 2 & \\ -4n - 12 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

فنكتب:

$$\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$$

نضع:

$$k = 2n^2 - 6n + 4$$

ومنه:

$$\alpha = \beta k + (-10)$$

نذكر الخاصية التالية:

> a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$.
> إذا كان r باقي قسمة a على b أي $a = bk + r$.
> فإن:
> $$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$$

ملاحظة:

يمكن تمديد هذه الخاصية إلى الأعداد الصحيحة.

ومنه: (حسب الخاصية)

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$$

طريقة أخرى:

نضع:

$$PGCD(\alpha\,,\beta) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ \text{و} \\ d/\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/2n^3 - 14n + 2 \\ \text{و} \\ d/(n+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/(2n^2 - 6n + 4)(n+3) - 10 \ldots \times (-1) \\ \text{و} \\ d/(n+3) \ldots \times (2n^2 - 6n + 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d/-(2n^2 - 6n + 4)(n+3) + 10 \\ \text{و} \\ d/(2n^2 - 6n + 4)(n+3) \end{cases}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

تذكر الخاصيتين التاليتين:

> d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.
> إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n:
> d يقسم $m\alpha$ و d يقسم $n\beta$

> d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.
> إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n:
> d يقسم $m\alpha + n\beta$

ومنه: (حسب الخاصيتين)

$$d / -(2n^2-6n+4)(n+3)+10+(2n^2-6n+4)(n+3)$$

نجد:

$$d / 10$$

بما أن:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \\ d/10 \end{cases}$$

فإن:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$$

1) ب- إيجاد القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha\,,\beta)$:

نضع:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = d$$

ولدينا من 1) أ- أن:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$$

أي:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d/\alpha \\ d/\beta \\ d/10 \end{cases}$$

القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha\,;\beta)$ هي القواسم الطبيعية لـ 10.

ومنه:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = d = \{1\,;2\,;5\,;10\}$$

تعلم الرياضيات

1) جـ- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha\,,\beta) = 5$$

معناه:

$$5/\beta$$

أي:

$$5/n+3$$

ونكتب:

$$n+3 \equiv 0\,[5]$$
$$n \equiv -3\,[5]$$
$$n \equiv 2\,[5]$$

أي:

$$n = 5p+2\,/\,p \in \mathbb{N}$$

● إذا كان p عددا زوجيا ($p = 2\lambda$).

فإن:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = 5 \text{ (مقبول)}$$

● إذا كان p عددا فرديا ($p = 2\lambda + 1$).

فإن:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = 10 \text{ (مرفوض)}$$

ومنه:

$$p = 2\lambda\,/\,\lambda \in \mathbb{N}$$

فنكتب:

$$n = 5 \times 2\lambda + 2$$

نجد:

$$n = 10\lambda + 2\,/\,\lambda \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha\,,\beta) = 5$$

هي:

$$n = 10\lambda + 2\,/\,\lambda \in \mathbb{N}$$

توضيح:

p	0	1	2	3	4	5
$n = 5p+2$	2	7	12	17	22	27
$\alpha = 2n^3 - 14n + 2$	−10	590	3290	9590	20990	38990
$\beta = n+3$	5	10	15	20	25	30
$d = PGCD(\alpha\,;\beta)$	5	10	5	10	5	10

2) أ- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11:

$n=0:\ 4^0\equiv 1\,[11]$
$n=1:\ 4^1\equiv 4\,[11]$
$n=2:\ 4^2\equiv 5\,[11]$
$n=3:\ 4^3\equiv 9\,[11]$
$n=4:\ 4^4\equiv 3\,[11]$
$n=5:\ 4^5\equiv 1\,[11]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 5.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$n=5m\ :\ 4^{5m}\equiv 1\,[11]$
$n=5m+1:\ 4^{5m+1}\equiv 4\,[11]$
$n=5m+2:\ 4^{5m+2}\equiv 5\,[11]$
$n=5m+3:\ 4^{5m+3}\equiv 9\,[11]$
$n=5m+4:\ 4^{5m+4}\equiv 3\,[11]$

نلخص بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 في الجدول التالي:

$n=$	$5m$	$5m+1$	$5m+2$	$5m+3$	$5m+4$	$m\in\mathbb{N}$
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3	[11]

2) ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0\,[11]\\ n\equiv 2\,[10]\end{cases}$$

الموافقة الثانية من الجملة:

$$n\equiv 2\,[10]$$

أي:

$$n=10t+2$$

الموافقة الأولى من الجملة:

$$4^{5n}+4^n+n\equiv 0\,[11]$$

ونكتب:

$(4^5)^n+4^n+n\equiv 0\,[11]$
$1^n+4^n+n\equiv 0\,[11]$
$1+4^n+n\equiv 0\,[11]$

نعوض n بـ $10t+2$ فنكتب:

$1+4^{10t+2}+10t+2\equiv 0\,[11]$
$4^{2(5t+1)}+10t+3\equiv 0\,[11]$
$(4^{5t+1})^2+10t+3\equiv 0\,[11]$
$(4)^2+10t+3\equiv 0\,[11]$
$5+10t+3\equiv 0\,[11]$
$10t+8\equiv 0\,[11]$
$10t\equiv -8\,[11]$
$10t\equiv -19\,[11]$
$10t\equiv -30\,[11]$

بما أن 11 و 10 أوليان فيما بينهما، فإنه يمكن قسمة طرفي الموافقة على العدد 10:

$t\equiv -3\,[11]$
$t\equiv 8\,[11]$

أي:

$$t=11k'+8$$

نعوض t بـ $11k'+8$ في عبارة n فنكتب:

$$n=10(11k'+8)+2$$

نجد:

$$n=110k'+82$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases}4^{5n}+4^n+n\equiv 0\,[11]\\ n\equiv 2\,[10]\end{cases}$$

هي:

$$n=110k'+82\ /\ k'\in\mathbb{N}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

التمرين

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5.

2) نضع:

$$A = 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}$$

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5 حيث n عدد طبيعي.

3) بين أن العدد 131 أولي.

4) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$$

حيث: $d = PGCD(a\,;b)$ و $m = PPCM(a\,;b)$.

ب- عين قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$ ثم استنتج الثنائيات $(a\,;b)$.

الحل

1) دراسة بواقي قسمة العدد 2^n على 5:

لدينا:

$n = 0 :\ 2^0 \equiv 1\,[5]$

$n = 1 :\ 2^1 \equiv 2\,[5]$

$n = 2 :\ 2^2 \equiv 4\,[5]$

$n = 3 :\ 2^3 \equiv 3\,[5]$

$n = 4 :\ 2^4 \equiv 1\,[5]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$n = 4k \quad :\ 2^{4k} \equiv 1\,[5]$

$n = 4k+1 :\ 2^{4k+1} \equiv 2\,[5]$

$n = 4k+2 :\ 2^{4k+2} \equiv 4\,[5]$

$n = 4k+3 :\ 2^{4k+3} \equiv 3\,[5]$

بواقي قسمة العدد 2^n على 5 هي:

$$r = \{1\,;2\,;3\,;4\}$$

نلخص بواقي قسمة العدد 2^n على 5 في الجدول التالي:

$k \in \mathbb{N}$	$4k+3$	$4k+2$	$4k+1$	$4k$	n
$[5]$	3	4	2	1	$2^n \equiv$

2) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5:

حيث:

$$A = 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}$$

لدينا:

$2017 \equiv 2\,[5]$

$2017^{4n+3} \equiv 2^{4n+3}\,[5]$

حسب الجدول أعلاه:

$2^{4n+3} \equiv 3\,[5]$

ومنه:

$$2017^{4n+3} \equiv 3\,[5]$$

ولدينا:

$2016 \equiv 1\,[5]$

$2016^{8n} \equiv 1^{8n}\,[5]$

ومنه:

$$2016^{8n} \equiv 1\,[5]$$

ولدينا:

$2014 \equiv 4\,[5]$

$2014 \equiv 2^2\,[5]$

$2014^{2n+1} \equiv (2^2)^{2n+1}\,[5]$

$2014^{2n+1} \equiv 2^{4n+2}\,[5]$

حسب الجدول أعلاه:

$2^{4n+2} \equiv 4\,[5]$

ومنه:

$$2014^{4n+2} \equiv 4\,[5]$$

فنكتب:

$A \equiv 2017^{4n+3} - 2 \times 2016^{8n} + 2014^{2n+1}\,[5]$

$A \equiv 3 - 2 \times 1 + 4\,[5]$

$A \equiv 3 - 2 + 4\,[5]$

$A \equiv 5\,[5]$

$$A \equiv 0\,[5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 5 هو 0.

تعلم الرياضيات

bouguetof.hamid@yahoo.fr https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

3) البرهان أن العدد 131 أولي:

لدينا:

$\sqrt{131} \simeq 11{,}44$

بما أن $\sqrt{131}$ غير طبيعي، نقسم 131 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{131}$ على الترتيب.

أي:

نقسم 131 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:

$\{2; 3; 5; 7; 11\}$

فنكتب:

$131 \equiv 1\ [2]$
$131 \equiv 2\ [3]$
$131 \equiv 1\ [5]$
$131 \equiv 5\ [7]$
$131 \equiv 10\ [11]$

لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة.

ومنه:

العدد 131 أولي.

4) أ- تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$$

حيث:

$m = PPCM(a\,; b)$ و $d = PGCD(a\,; b)$

لدينا:

$d = PGCD(a\,; b)$

معناه:

$$\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} \ /\ PGCD(a'; b') = 1$$

ولدينا:

$PGCD(a\,; b) \times PPCM(a\,; b) = a \times b$

أي:

$d \times m = a \times b$

بالتعويض نكتب:

$d \times m = d \times a' \times d \times b'$

نجد:

$m = d \times a' \times b'$

بالتعويض في المعادلة الأولى من الجملة السابقة نكتب:

$da'db' = 5da'b'$

نجد:

$d = 5$

بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة السابقة نكتب:

$3da'b' + 7d = 2^n - 48$
$d(3a'b' + 7) = 2^n - 48$
$5(3a'b' + 7) = 2^n - 48$
$2^n = 5(3a'b' + 7) + 48$
$2^n = 5k' + 48$

معناه:

$2^n \equiv 48\ [5]$

أي:

$2^n \equiv 3\ [5]$

من جدول البواقي نجد:

$n = 4k + 3$

ومنه:

الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$\begin{cases} 3m + 7d = 2^n - 48 \\ ab = 5m \end{cases}$$

هي:

$n = 4k + 3\ /\ k \in \mathbb{N}$

4) ب- تعيين قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$:

لديا:

$7 < n < 15$
$7 < 4k + 3 < 15$
$7 - 3 < 4k < 15 - 3$
$4 < 4k < 12$
$\frac{4}{4} < k < \frac{12}{4}$
$1 < k < 3$

نجد:

$k = 2$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

نعوض قيمة $k = 2$ في عبارة $n = 4k + 3$ نجد:

$$n = 11$$

ومنه:

$n = 11$ هي قيمة n بحيث يكون $7 < n < 15$.

استنتاج الثنائيات $(a\,;b)$:

حسب المعادلة الثانية من الجملة السابقة نكتب:

$$3da'b' + 7d = 2^n - 48$$
$$d(3a'b' + 7) = 2^n - 48$$

حيث:

$d = 5$ و $n = 11$

فنكتب بالتعويض:

$$5(3a'b' + 7) = 2^{11} - 48$$
$$5(3a'b' + 7) = 2048 - 48$$
$$5(3a'b' + 7) = 2000$$
$$3a'b' + 7 = \frac{2000}{5}$$
$$3a'b' + 7 = 400$$
$$3a'b' = 400 - 7$$
$$3a'b' = 393$$
$$a'b' = \frac{393}{3}$$
$$a'b' = 131$$

من 3) لدينا أن:

العدد 131 أولي.

فنكتب:

$$a'b' = 1 \times 131$$

نميز حالتين:

$$\begin{cases} a' = 1 \\ \text{و} \\ b' = 131 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a' = 131 \\ \text{و} \\ b' = 1 \end{cases}$$

قيم a' و b' هي:

$$(a'; b') = \{(1; 131), (131; 1)\}$$

ولدينا:

- إذا كان $a' = 1$ و $b' = 131$:

بالتعويض:

$$\begin{cases} a = da' = 5 \times 1 \\ b = db' = 5 \times 131 \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 655 \end{cases}$$

- إذا كان $a' = 131$ و $b' = 1$:

بالتعويض:

$$\begin{cases} a = da' = 5 \times 131 \\ b = db' = 5 \times 1 \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} a = 655 \\ b = 5 \end{cases}$$

ومنه:

الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية من أجل $n = 11$ هي:

$$(a; b) = \{(5\,; 655)\,, (655\,; 5)\}$$

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

التمرين

(a_n) و (b_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = 2b_n + 3 \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

2) هل العددان a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما؟

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5.

4) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$2a_n - b_n = 5$$

ب- استنتج عبارة b_n بدلالة n.

جـ- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n\,, b_n)$.

د- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(a_n\,, b_n) = 5$$

الحل

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

لدينا:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \end{cases}$$

لتكن $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\begin{cases} a_0 = 3 \ \left(\text{من المعطيات}\right) \\ \text{و} \\ 2^{0+1} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

لاحظ أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني.

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_{n+1} = 2^{n+2} + 1$ »

لدينا من الفرضية:

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$
$$2 \times a_n = 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 1$$
$$2a_n = 2^{n+1+1} + 2$$
$$2a_n = 2^{n+2} + 2$$
$$2a_n - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1$$
$$2a_n - 1 = 2^{n+2} + 1$$
$$a_{n+1} = 2^{n+2} + 1$$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^{n+1} + 1$ »

2) البحث إن كان a_n أولي مع a_{n+1}:

لدينا من المعطيات أن:

$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

أي:

$$2a_n - a_{n+1} = 1$$

ونكتب:

$$(2)a_n + (-1)a_{n+1} = 1$$

تذكر مبرهنة بيزو:

> يكون عددان a_n و a_{n+1} أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث:
>
> $$ua_n + va_{n+1} = 1$$

تعلم الرياضيات

bouguetof.hamid@yahoo.fr — https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ — مع تحيات الأستاذ عبد الحميد

ومنه: (حسب مبرهنة بيزو)

العددان a_n و a_{n+1} أوليان فيما بينهما.

ونكتب:

$$PGCD(a_n\,;a_{n+1})=1$$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5:

لدينا:

$n=0:\ 2^0\equiv 1\,[5]$

$n=1:\ 2^1\equiv 2\,[5]$

$n=2:\ 2^2\equiv 4\,[5]$

$n=3:\ 2^3\equiv 3\,[5]$

$n=4:\ 2^4\equiv 1\,[5]$

لاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$n=4k\quad :\ 2^{4k}\equiv 1\,[5]$

$n=4k+1:\ 2^{4k+1}\equiv 2\,[5]$

$n=4k+2:\ 2^{4k+2}\equiv 4\,[5]$

$n=4k+3:\ 2^{4k+3}\equiv 3\,[5]$

بواقي قسمة العدد 2^n على 5 هي:

$$r=\{1\,;2\,;3\,;4\}$$

نلخص بواقي قسمة العدد 2^n على 5 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k\in\mathbb{N}$
$2^n\equiv$	1	2	4	3	[5]

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5:

لدينا:

$$\begin{cases}2017\equiv 2\,[5]\\ 1438=4\times 359+2=4k+2\ /\ k=359\end{cases}$$

فنكتب:

$2017\equiv 2\,[5]$

$2017^{1438}\equiv 2^{1438}\,[5]$

$2017^{1438}\equiv 2^{4k+2}\,[5]$

من جدول البواقي لدينا:

$$2^{4n+2}\equiv 4\,[5]$$

نجد:

$$2017^{1438}\equiv 4\,[5]$$

ومنه:

باقي القسمة الإقليدية للعدد 2017^{1438} على 5 هو 4.

4) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2a_n-b_n=5$$

لدينا من المعطيات:

$$\begin{cases}a_0=3\\ a_{n+1}=2a_n-1\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}b_0=1\\ b_{n+1}=2b_n+3\end{cases}$$

لتكن $Q(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_n-b_n=5$ »

التحقق من صحة الخاصية $Q(0)$:

لدينا من أجل $n=0$:

$$(\text{من المعطيات})\quad 2a_0-b_0=2\times 3-1=6-1=5$$

لاحظ أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني.

ومنه:

الخاصية $Q(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $Q(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_n-b_n=5$ »

ونبرهن أن الخاصية $Q(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_{n+1}-b_{n+1}=5$ »

لدينا من الفرضية:

$2a_n-b_n=5$

$2\times(2a_n-b_n)=2\times 5$

$2(2a_n)-2b_n=10$

$2(2a_n)-2b_n-3=10-3$

$2(2a_n)-(2b_n+3)=7$

$$2(2a_n) - 2 - (2b_n + 3) = 7 - 2$$
$$2(2a_n - 1) - (2b_n + 3) = 5$$
$$2a_{n+1} - b_{n+1} = 5$$

ومنه:

الخاصية $Q(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي n : $2a_n - b_n = 5$ »

4) بـ- استنتاج عبارة b_n بدلالة n:

لدينا من 4) أ- أن:

$$2a_n - b_n = 5$$

أي:

$$b_n = 2a_n - 5$$

ولدينا من 1) أن:

$$a_n = 2^{n+1} + 1$$

نعوض a_n بـ $2^{n+1} + 1$ في عبارة b_n فنكتب:

$$b_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5$$
$$b_n = 2 \times 2^{n+1} + 2 - 5$$
$$b_n = 2^{n+1+1} - 3$$

ومنه:

$$b_n = 2^{n+2} - 3$$

4) جـ- تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n, b_n)$:

نضع:

$$PGCD(a_n, b_n) = d$$

معناه:

$$\begin{cases} d / a_n \\ \text{و} \\ d / b_n \end{cases}$$

ونكتب حسب الخواص:

$$\begin{cases} d / 2a_n \\ \text{و} \\ d / -b_n \end{cases}$$

ونكتب أيضا:

$$d / 2a_n - b_n$$

نجد:

$$d / 5$$

القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n; b_n)$ هي القواسم الطبيعية لـ 5.

ومنه:

$$PGCD(a_n; b_n) = d = D_5 = \{1 ; 5\}$$

تذكر الخاصيتين التاليتين:

> d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.
> إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n:
> d يقسم $m\alpha$ و d يقسم $n\beta$

> d و α و β ثلاثة أعداد صحيحة و d غير معدوم.
> إذا كان d يقسم العددين α و β فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n:
> d يقسم $m\alpha + n\beta$

4) د- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(a_n, b_n) = 5$$

معناه:

$$\begin{cases} d / a_n \\ \text{و} \\ d / b_n \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} a_n \equiv 0\ [5] \\ b_n \equiv 0\ [5] \end{cases}$$

بالتعويض:

$$\begin{cases} 2^{n+1} + 1 \equiv 0\ [5] \\ 2^{n+2} - 3 \equiv 0\ [5] \end{cases}$$

من الموافقة الأولى:

$$2^{n+1} + 1 \equiv 0\ [5]$$
$$2^{n+1} \equiv -1\ [5]$$
$$2^{n+1} \equiv 4\ [5]$$
$$2 \times 2^n \equiv 4\ [5]$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

بما أن 5 و 2 أوليان فيما بينهما فإن:

$$2^n \equiv 2\ [5]$$

من جدول البواقي لدينا:

$$2^{4k+1} \equiv 2\ [5]$$

بالمطابقة ينتج:

$$n = 4k + 1\ /\ k \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$PGCD(a_n\,; b_n) = 5$$

هي:

$$n = 4k + 1\ /\ k \in \mathbb{N}$$

ملاحظة:

نصل إلى نفس النتيجة انطلاقا من الموافقة الثانية كما يلي:

$$2^{n+2} - 3 \equiv 0\ [5]$$

$$2^{n+2} \equiv 3\ [5]$$

$$2^2 \times 2^n \equiv 3\ [5]$$

$$4 \times 2^n \equiv 3\ [5]$$

$$4 \times 2^n \equiv 8\ [5]$$

بما أن 5 و 4 أوليان فيما بينهما فإن:

$$2^n \equiv 2\ [5]$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

تمرين مقترح خارج دورات البكالوريا

التمرين

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0\,[10]$$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث:
$$10 < n \leq 25 \text{ و } 7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0\,[10]$$

4) A العدد الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 3 على الشكل $\overline{xx02102}^3$ ويكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $\overline{y67y}^9$.

أ- عين x و y.

ب- أكتب A في النظام العشري.

جـ- أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

الحل

1) دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10:

لدينا:

$n = 0:\ 3^0 \equiv 1\,[10]$

$n = 1:\ 3^1 \equiv 3\,[10]$

$n = 2:\ 3^2 \equiv 9\,[10]$

$n = 3:\ 3^3 \equiv 7\,[10]$

$n = 4:\ 3^4 \equiv 1\,[10]$

نلاحظ أن:

دور بواقي القسمة هو 4.

فنكتب:

من أجل كل عدد طبيعي n:

$n = 4k \quad : 3^{4k} \equiv 1\,[10]$

$n = 4k+1 : 3^{4k+1} \equiv 3\,[10]$

$n = 4k+2 : 3^{4k+2} \equiv 9\,[10]$

$n = 4k+3 : 3^{4k+3} \equiv 7\,[10]$

بواقي قسمة العدد 3^n على 10 هي:

$r = \{1\,;3\,;7\,;9\}$

نلخص بواقي قسمة العدد 3^n على 10 في الجدول التالي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

2) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:
$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0\,[10]$$

لدينا:

$$\begin{aligned}33 &\equiv 3\,[10]\\ 33^{16n+2} &\equiv 3^{16n+2}\,[10]\\ &\equiv 3^2 \times 3^{16n}\,[10]\\ &\equiv 9 \times 3^{4\times4n}\,[10]\\ &\equiv 9 \times (3^4)^{4n}\,[10]\\ &\equiv 9 \times (1)^{4n}\,[10]\\ &\equiv 9 \times 1\,[10]\\ &\equiv 9\,[10]\end{aligned}$$

ومنه:

$$33^{16n+2} \equiv 9\,[10]$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}109 &\equiv 9\,[10]\\ 109 &\equiv 3^2\,[10]\\ 109^{8n+1} &\equiv (3^2)^{8n+1}\,[10]\\ &\equiv 3^{16n+2}\,[10]\\ &\equiv 9\,[10]\end{aligned}$$

ومنه:

$$109^{8n+1} \equiv 9\,[10]$$

بالتعويض:

$$\begin{aligned}33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 &\equiv 9 - 2 \times 9 - 11\,[10]\\ &\equiv 9 - 18 - 11\,[10]\\ &\equiv -20\,[10]\\ &\equiv -10\,[10]\\ &\equiv 0\,[10]\end{aligned}$$

ومنه:

$$33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0\,[10]$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

3) تعيين الأعداد الطبيعية n حيث:

$$10 < n \leq 25 \quad \text{و} \quad 7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0\,[10]$$

لدينا:

$7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0\,[10]$

$7 \times 3 \times 3^{n} - 1 \equiv 0\,[10]$

$21 \times 3^{n} - 1 \equiv 0\,[10]$

$3^{n} - 1 \equiv 0\,[10]$

$3^{n} \equiv 1\,[10]$

نلاحظ من الجدول أن $3^{n} \equiv 1\,[10]$ إذا كان $n = 4k$.

لدينا:

$10 < n \leq 25$

$10 < 4k \leq 25$

$\frac{10}{4} < k \leq \frac{25}{4}$

$2{,}5 < k \leq 6{,}25$

ومنه:

$$k \in \{3\,;4\,;5\,;6\}$$

قيم n موضحة في الجدول التالي:

k	3	4	5	6
$n = 4k$	12	16	20	24

4) أ- نعين x و y:

A العدد الذي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 3 على الشكل $\overline{xx02102}^{3}$ ويكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $\overline{y67y}^{9}$.

لدينا:

$$\begin{cases} A = \overline{xx02102}^{3}\,;\ 0 < x < 3 \\ A = \overline{y67y}^{9}\,;\ 0 < y < 9 \end{cases}$$

من جهة:

$$A = 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 0 \times 3^4 + x \times 3^5 + x \times 3^6$$

ومن جهة أخرى:

$$A = y \times 9^0 + 7 \times 9^1 + 6 \times 9^2 + y \times 9^3$$

أي:

$$\begin{cases} A = 972x + 65 \\ A = 730y + 549 \end{cases}$$

بالمطابقة نجد:

$$972x - 730y = 484$$

نلخص قيم x و y في الجدول التالي:

$972x - 730y = 484$			
x	1	2	$0 < x < 3$
y	$\notin \mathbb{N}$	2	$0 < y < 9$

ومنه:

$$(x\,;y) = \{(2\,;2)\}$$

4) ب- كتابة A في النظام العشري:

لدينا:

$A = 972x + 65$

$A = 972 \times 2 + 65$

نجد:

$$A = 2009$$

4) جـ- كتابة A في النظام ذي الأساس 7:

$$\begin{array}{r|l} 2009 & 7 \\ \hline 0 & 287 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 287 & 7 \\ \hline 0 & 41 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 41 & 7 \\ \hline 6 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \hline 5 & 0 \end{array}$$

ومنه:

$$A = \overline{5600}^{7}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

جميع الحقوق محفوظة
– BAC –
عبد الحميد