المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية.
- دراسة سلوك ونهاية متتالية.
- معرفة واستعمال مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات والبرهان بالتراجع.

نشاط 1

اللمسة $\boxed{\text{ANS}}$ في الآلة الحاسبة :

اللمسة $\boxed{\text{ANS}}$ (تعني : Answer = réponse = إجابة) منفذ للدخول إلى ذاكرة خاصة (ذاكرة الإجابة) ، وتمثل الحفظ لآخر نتيجة في الحساب ، وبالتالي يمكن استغلالها في توليد متتاليات عددية .

- نستعمل اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ للتخزين في الذاكرة .
- نستعمل اللمسة $\boxed{\text{ANS}}$ لاستخراج القيمة المخزنة في الذاكرة .

1) أولا : نجري على الآلة الحاسبة ما يلي: $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{0}$
نحجز بذلك الحدّ الأول في الذاكرة أي 0
ثانيا : $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANS}}$ النتيجة التي نتحصل عليها هي 2
ثالثا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 4
رابعا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 6
وبتكرار الضغط على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ نحصل على مجموعة الأعداد الزوجية : 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، ...

2) أولا : نجري على الآلة الحاسبة ما يلي: $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{1}$
نحجز بذلك الحدّ الأول في الذاكرة أي 1
ثانيا : $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ANS}}$ النتيجة التي نتحصل عليها هي 3
ثالثا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 5
رابعا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 7
وبتكرار الضغط على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ نحصل على مجموعة الأعداد الفردية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، ...

3) أولا : نجري على الآلة الحاسبة ما يلي: $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{1}$
نحجز بذلك الحدّ الأول في الذاكرة أي 1
ثانيا : $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{*}$ $\boxed{\text{ANS}}$ النتيجة التي نتحصل عليها هي 2
ثالثا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 4
رابعا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي أي 8
وبتكرار الضغط على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ نحصل على مجموعة الأعداد :
1 ، 2 ، 4 ، 8 ، ...

4) (u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1) باستخدام آلة حاسبة :
وضّح الطريقة التي تسمح بالحصول على حدود المتتالية (u_n) .

2) باستخدام مجدول Excel :
أ- احسب حدود المتتالية (u_n) من أجل $n \in [0;26]$ ثم ارسم تمثيلها البياني.
ب- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
جـ- يظهر أن حدود المتتالية تستقر عند عدد حقيقي l ، عيّن العدد l .
د- هل يمكن تخمين نهاية المتتالية (u_n) ؟

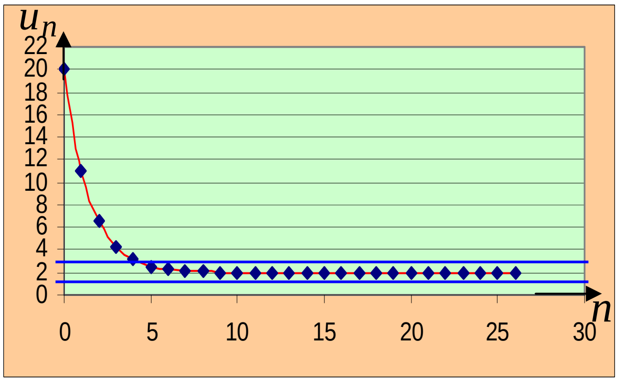
الحل :

1) استخدام آلة حاسبة :
الطريقة التي تسمح بالحصول على حدود المتتالية (u_n) :
أولا : نجري على الآلة الحاسبة ما يلي : $\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{ENTER}}$
نحجز بذلك الحدّ الأول في الذاكرة أي $u_0 = 20$
ثانيا : $\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{*}\ \boxed{\text{ANS}}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{ENTER}}$
النتيجة التي نتحصل عليها هي $0.5 \times (20) + 1 = 11$ أي $u_1 = 11$
ثالثا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي $u_2 = 6.5$
رابعا : يكفي أن ننقر على اللمسة $\boxed{\text{ENTER}}$ فنحصل على الحدّ الموالي $u_3 = 4.25$
وبتكرار الضغط على $\boxed{\text{ENTER}}$ نحصل على بقية حدود المتتالية (u_n)

2) استخدام مجدول Excel :

أ- حساب حدود المتتالية (u_n) من أجل $n \in [0;26]$ و رسم تمثيلها البياني :

n	u_n
0	20
1	11
2	6.5
3	4.25
4	3.125
5	2.5625
6	2.28125
7	2.140625
8	2.070313
9	2.035156
10	2.017578
11	2.008789
12	2.004395
13	2.002197
14	2.001099
15	2.000549
16	2.000275
17	2.000137
18	2.000069
19	2.000034
20	2.000017
21	2.000009
22	2.000004
23	2.000002
24	2.000001
25	2.000001
26	2.000000



ب- استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

من الشكل السابق أو الجدول المقابل نلاحظ أن المتتالية (u_n) في تناقص .

جـ- يظهر أن حدود المتتالية (u_n) تستقر عند 2 ابتداء من $n = 26$.

د- تخمين نهاية المتتالية (u_n) :

استعمال المجدول Excel يظهر تجمع كل حدود المتتالية ضمن مجال مركزه 2 ونصف قطره α حيث يظهر في الشكل أن كل النقط (n, u_n) موجودة ضمن الشريط المحدّد بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $y = 2 - \alpha$ وَ $y = 2 + \alpha$ ، وذلك مهما تغيّرت قيم العدد الحقيقي α .

نقول عندئذ إن المتتالية (u_n) تقبل نهاية 2 عندما يؤول n إلى $+\infty$ ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

في هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 2 .

نشاط 2 الغرض من هذا النشاط هو إبراز مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

نعرف في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ متتاليتين عدديتين T وَ W كما يلي :

t_n هي القيمة المقربة بالنقصان للعدد π حيث الجزء العشري يحتوي على n رقم .

w_n هي القيمة المقربة بالزيادة للعدد π حيث الجزء العشري يحتوي على n رقم .

الآلة الحاسبة تعطي $\pi \approx 3.141592654$.

من أجل $n \leq 9$ ، نحصل على الجدول الآتي :

n	t_n	w_n
0	3	4
1	3,1	3,2
2	3,14	3,15
3	3,141	3,142
4	3,1415	3,1416
5	3,14159	3,14160
6	3,141592	3,141593
7	3,1415926	3,1415927
8	3,14159265	3,14159266
9	3,141592654	3,141592655

لاحظ أن :
- T متزايدة تماما في $\mathbb{N}$
- W متناقصة تماما في $\mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (W - T) = 0$

في هذه الحالة نقول أن المتتاليتين T وَ W متجاورتان

لاحظ أيضا أن : $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < w_n < \dots < w_2 < w_1 < w_0$

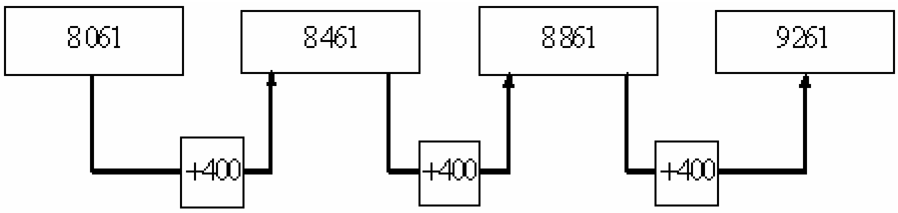
نشاط 3

قمنا بدراسة إحصائية لِعدد سكان مدينتين α وَ β من سنة 1998 إلى سنة 2001 ولخّصنا النتائج في الجدول التالي :

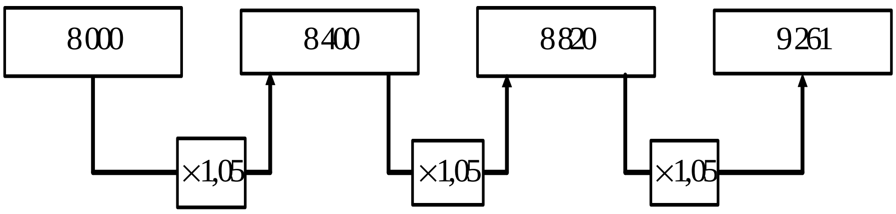
	عدد السكان في سنة			
	1998	**1999**	**2000**	**2001**
المدينة α	8 061	8 461	8 861	9 261
المدينة β	8 000	8 400	8 820	9 261

نلاحظ أن :

- عدد سكّان المدينة α لِسنة معطاة هو عدد سكّان السنة التي قبلها مضاف إليه 400



- عدد سكّان المدينة β لِسنة معطاة هو عدد سكّان السنة التي قبلها مضروب في 1,05 .



نقول إن :

- متتالية الأعداد 8061 ، 8461 ، 8861 وَ 9261 هي متتالية حسابية :
  - حدّها الأول $u_1=8061$.
  - أساسها $r=400$.
- متتالية الأعداد 8000 ، 8400 ، 8820 وَ 9261 هي متتالية هندسية :
  - حدّها الأول $v_1=8000$.
  - أساسها $q=1,05$.

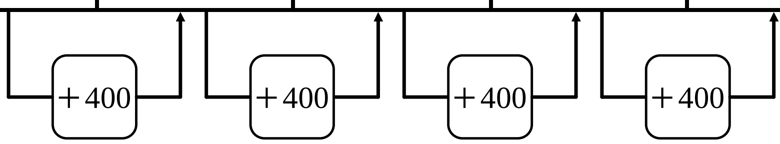
طريقة الحساب :

نقترح حساب عدد السكان في المدينتين α و β لسنتي 2005 و 2008 .

المدينة β	المدينة α
$v_n = v_1 \times q^{n-1}$	$u_n = u_1 + (n-1)r$
السنة 1998 هي السنة التي رتبتها $n=1$	السنة 1998 هي السنة التي رتبتها $n=1$
السنة 2005 هي السنة التي رتبتها $n=8$	السنة 2005 هي السنة التي رتبتها $n=8$
$v_8 = 8\,000 \times 1{,}05^7$ $v_8 = 11\,257$	$u_8 = 8\,061 + 7 \times 400$ $u_8 = 10\,861$
سكان المدينة β في سنة 2005 يصبح **11 257** نسمة	سكان المدينة α في سنة 2005 يصبح **10 861** نسمة
السنة 2008 هي السنة التي رتبتها $n=11$	السنة 2008 هي السنة التي رتبتها $n=11$
$v_{11} = 8\,000 \times 1{,}05^{10}$ $v_{11} = 13032$	$u_{11} = 8\,061 + 10 \times 400$ $u_{11} = 12\,061$
سكان المدينة β في سنة 2008 يصبح **13032** نسمة	سكان المدينة α في سنة 2008 يصبح **12 061** نسمة

التحقق من عدد السكان سنة 2005 :

	عدد السكان في سنة				
	2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
المدينة α	9 261	9 661	10 061	10 461	**10 861**



	عدد السكان في سنة				
	2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
المدينة β	9 261	9 724	10 210	10 721	**11 257**

$\times 1,05$ $\times 1,05$ $\times 1,05$ $\times 1,05$

توليد المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) باستعمال المجدول Excel :

أولا : توليد المتتالية (u_n) :

1) العمود B :

- في الخلية B1 : اكتب « الرتبة n ».
- في الخلية B2 : احجز « 1 » .
- في الخلية B3 : احجز « = B2 + 1 » ثم اضغط على Entrée .
- حدّد الخلية B3 بالنقر عليها .
- ضع المشيرة في الزاوية اليُمنى بمكان السحب ليصبح شكلها + .
- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 12 .
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل النتائج على الجدول .

2) العمود C :

- في الخلية C1 : اكتب « *Un* » .
- في الخلية C2 : احجز « 8061 »
- في الخلية C3 : احجز « = C2 + 400 » ثم اضغط على Entrée .
- حدّد الخلية C3 بالنقر عليها .
- ضع المشيرة في الزاوية اليُمنى بمكان السحب ليصبح شكلها + .
- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 12 .
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل النتائج على الجدول .

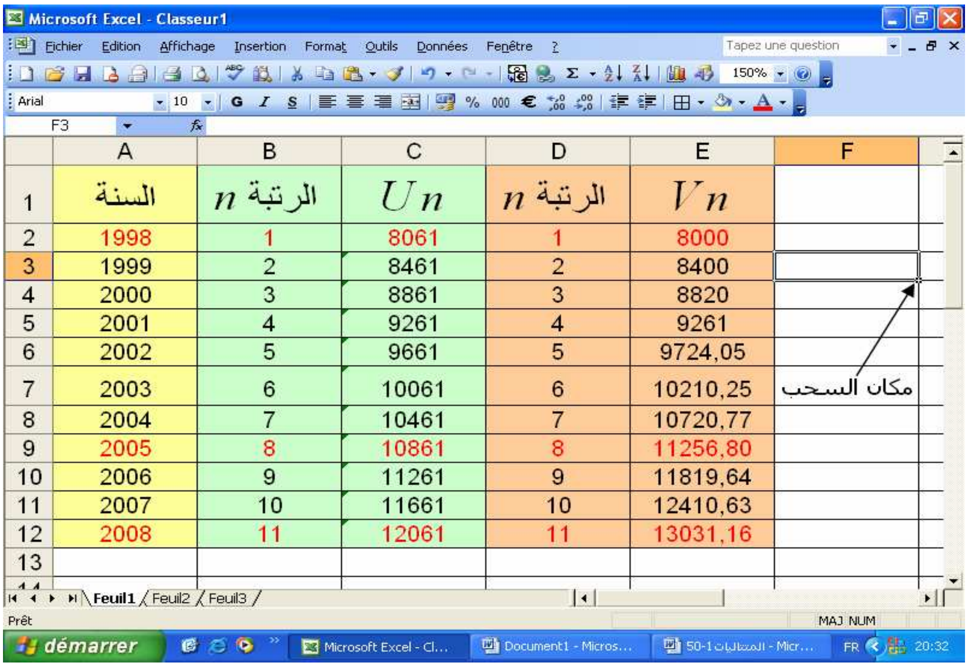
ثانيا : توليد المتتالية (v_n) :

1) العمود D :

- في الخلية D1 : اكتب « الرتبة *n* ».
- في الخلية D2 : احجز « 1 » .
- في الخلية D3 : احجز « = D2 + 1 » ثم اضغط على Entrée .
- حدّد الخلية D3 بالنقر عليها .
- ضع المشيرة في الزاوية اليُمنى بمكان السحب ليصبح شكلها + .
- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 12 .
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل النتائج على الجدول .

2) العمود E :

- في الخلية E1 : اكتب « *Vn* » .
- في الخلية E2 : احجز « 8000 »
- في الخلية E3 : احجز « = E2 * 1.05 » ثم اضغط على Entrée .
- حدّد الخلية E3 بالنقر عليها .
- ضع المشيرة في الزاوية اليُمنى بمكان السحب ليصبح شكلها + .
- اسحب إلى الأسفل من مكان السحب حتى السطر 12 .
- عندما نترك زرّ الفأرة تظهر كل النتائج على الجدول .



	A	B	C	D	E	F
1	السنة	الرتبة n	Un	الرتبة n	Vn	
2	1998	1	8061	1	8000	
3	1999	2	8461	2	8400	
4	2000	3	8861	3	8820	
5	2001	4	9261	4	9261	
6	2002	5	9661	5	9724,05	
7	2003	6	10061	6	10210,25	مكان السحب
8	2004	7	10461	7	10720,77	
9	2005	8	10861	8	11256,80	
10	2006	9	11261	9	11819,64	
11	2007	10	11661	10	12410,63	
12	2008	11	12061	11	13031,16	
13						

ملاحظة : باستعمال Excel وطريقة السحب يمكننا معرفة عدد السكان في كل من المدينتين α وَ β في سنة 2020 أو في سنة 3000 أو في أيّة سنة أخرى .

اتجاه تغيّر متتالية

لتكن (u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$.

- (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \le u_{n+1}$
- (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \ge u_{n+1}$
- (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا وفقط إذا كان : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = u_{n+1}$

طرق دراسة اتجاه تغيّر متتالية عددية : لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n) ، يمكن :

- **إما** دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$
- **إما** مقارنة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 (بالنسبة إلى متتالية حدّها العام موجب تماما)
- **إما** كتابة $u_n = f(n)$ ، ودراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

تمرين محلول : ادرس اتجاه تغيّر المتتاليات المعرفة بما يلي :

① $u_0 \in \mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

② من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{n}{2^n}$

③ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{n^2+5n+5}{n+4}$

الحل :

① لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) نقوم بحساب الفرق $u_{n+1} - u_n$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \ge 0$

إذن : (u_n) متتالية متزايدة على $\mathbb{N}$.

② بما أن الحدّ العام للمتتالية (v_n) موجب تماما من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، فلدراسة اتجاه تغيّرها يكفي حساب حاصل القسمة $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ومقارنته بالعدد 1 .

لدينا : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \dfrac{n+1}{2n}$ وبما أن : $1 - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n-1}{2n} \ge 0$

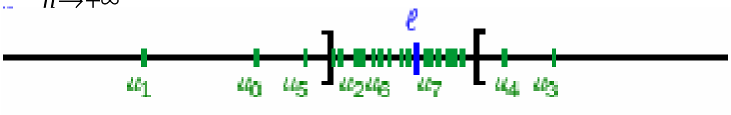
نستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \le 1$. إذن : (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

③ نضع : $f(x) = \dfrac{x^2+5x+5}{x+4}$. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ ومن أجل كل $x \ge 0$: $f'(x) = \dfrac{x^2+8x+15}{(x+4)^2}$ ، نستنتج أنه من أجل كل $x \ge 0$: $f'(x) > 0$

وبالتالي : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$. إذن : (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
(من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $n<n+1$ ومنه $f(n)<f(n+1)$ أي : $w_n<w_{n+1}$)

نهاية متتالية

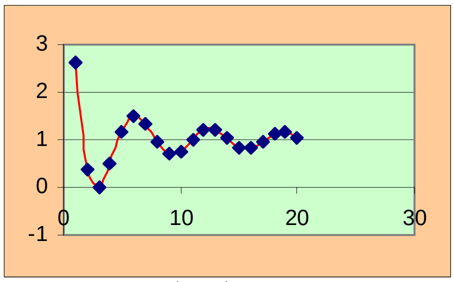
تعريف : نقول إن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l ، أو إنها تقبل l نهاية لها عندما يؤول n إلى $+\infty$ ، إذا كان من أجل كل مجال مفتوح يشمل l فإنه يشمل أيضا كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة . ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$



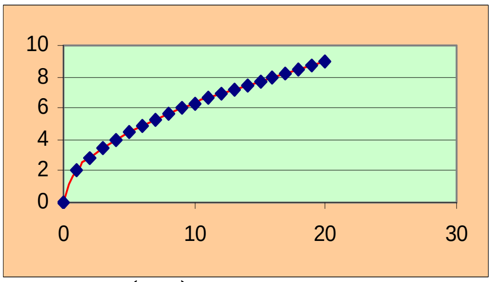
ملاحظات .

- لا نتكلم عن تقارب المتتالية (u_n) إلاّ إذا كانت نهايتها محدودة (عدد حقيقي ثابت) أمّا إذا كانت نهايتها غير محدودة ($+\infty$ أو $-\infty$) أو لا تقبل نهاية ففي هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) متباعدة .
- القول إن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد الحقيقي l يعود بنا إلى القول أن كل مجال مفتوح يشمل l فإنه يشمل أيضا كل حدود المتتالية ماعدا عدد محدد من بين حدودها .

أمثلة : $u_n = 1+\dfrac{3\cos n}{n}$ $\qquad$ $v_n = 2\sqrt{n}$

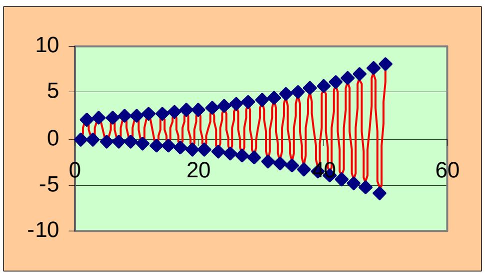


$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. (u_n) متقاربة نحو 1



$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. (v_n) متباعدة

$w_n = 1+(-1.04)^n$
(w_n) لا تقبل نهاية
(w_n) متباعدة



● نظرية الحدّ من الأسفل : (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان

إذا كان ابتداء من رتبة معيّنة ، $u_n \geq v_n$ وكانت $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

● نظرية الحدّ من الأعلى : (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان

إذا كان ابتداء من رتبة معيّنة ، $u_n \leq v_n$ وكانت $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

● نظرية الحصر : (u_n)، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية ، l عدد حقيقي

إذا كان ابتداء من رتبة معيّنة ، $v_n \leq u_n \leq w_n$ وكانت $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

تمرين محلول :

(u_n) متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{2\sin n + 3}{n+1}$.

احسب نهاية المتتالية (u_n) .

الحل :

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1 \leq \sin n \leq +1$

بضرب الأطراف الثلاثة بالعدد 2 نحصل على : $-2 \leq 2\sin n \leq +2$

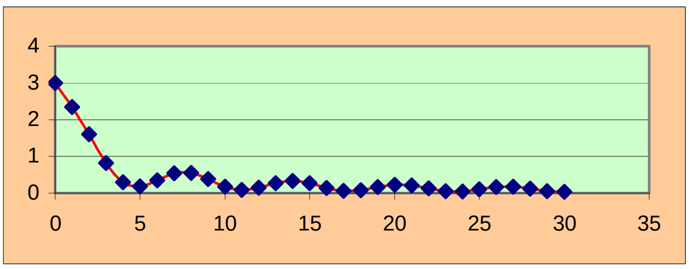
وبإضافة العدد 3 إلى الأطراف الثلاثة نجد : $1 \leq 2\sin n + 3 \leq 5$

وبقسمة جميع الحدود على العدد $n+1$ ينتج : $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{2\sin n + 3}{n+1} \leq \dfrac{5}{n+1}$

وبما أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{n+1} = 0$ وحسب نظرية الحصر نستنتج أن :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2\sin n + 3}{n+1} = 0$ أي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

إذن : المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0 .



المتتالية المحدودة

- نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le M$.
- نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي m إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge m$.
- نقول عن متتالية إنها محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل.
- كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

مثال : (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n = \dfrac{1-\sin n}{2}$

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \le \sin n \le +1$

بضرب الأطراف الثلاثة بالعدد -1 نحصل على : $-1 \le -\sin n \le +1$

بإضافة العدد $+1$ إلى الأطراف الثلاثة ينتج : $0 \le 1-\sin n \le +2$

بقسمة كل الأطراف على العدد 2 نجد : $0 \le \dfrac{1-\sin n}{2} \le 1$ أي : $0 \le u_n \le 1$

إذن : المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 ومن الأسفل بالعدد 0 .

في هذه الحالة نقول إن المتتالية (u_n) محدودة .

تمرين محلول 1 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ وبعلاقة التراجع :

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n \le 2$.

الحل : نسمي p_n الخاصية " $0 \le u_n \le 2$ "

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0 \le u_0 \le 2$ أي : $0 \le 1 \le 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 \le u_n \le 2$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا : $0 \le u_n \le 2$ ومنه : $2+0 \le 2+u_n \le 2+2$ أي : $2 \le 2+u_n \le 4$

وبما أن الدالة " الجذر التربيعي " متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن

$0 \le \sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4}$ ومنه : $0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2$ أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \le u_n \le 2$

وبالتالي : المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 ومحدودة من الأعلى بالعدد 2

نستنتج أن : المتتالية (u_n) محدودة .

تمرين محلول 2 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ وبعلاقة التراجع :

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n^2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.
2. استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
3. بيّن أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

الحل :

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n > 0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 > 0$ أي : $1 > 0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة .

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n > 0$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} > 0$

من فرضية التراجع $u_n > 0$ نستنتج أن : $2 + u_n^2 > 0$ (التربيع ثم إضافة 2)

ومن $u_n > 0$ وَ $2 + u_n^2 > 0$ نستنتج أن : $\dfrac{u_n}{2 + u_n^2} > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$ أي أن (u_n) محدودة من الأسفل .

2. استنتاج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2 + u_n^2} - u_n = \dfrac{u_n(-1 - u_n^2)}{2 + u_n^2}$

وبما أن : $u_n > 0$ وَ $2 + u_n^2 > 0$ وَ $-1 - u_n^2 < 0$

فإن : $\dfrac{u_n(-1 - u_n^2)}{2 + u_n^2} < 0$ أي : $u_{n+1} - u_n < 0$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

③ بما أن المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

حساب نهاية المتتالية (u_n) :

نفرض أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ وبالتالي تكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

من $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n^2}$ نستنتج أن : $l = \dfrac{l}{2+l^2}$ وبحل هذه المعادلة نجد : $l = 0$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

تمرين محلول3 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n .

① احسب u_1 و u_2 .

② أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .

③ أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 ، استنتج أن (u_n) متقاربة ثم اوجد نهايتها .

الحل :

① حساب u_1 و u_2 : $u_1 = \dfrac{5}{8}$ و $u_2 = \dfrac{89}{128}$.

② إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + 1) - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1)$

$$= \frac{1}{2}(u_n - 1)^2$$

وبما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\dfrac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geq 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \geq 0$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

③ إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 :

تذكير : نقول عن متتالية (u_n) إنها محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي M إذا وفقط إذا كان : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq M$.

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 1$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n \leq 1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 \leq 1$ أي : $\frac{1}{2} \leq 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \leq 1$ ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \leq 1$

لدينا : $u_n \leq 1$ (من فرضية التراجع) وبما أن الدالة مربع متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$

نستنتج أن : $u_n^2 \leq 1$ وبعد إضافة العدد 1 إلى الطرفين ثم قسمة الطرفين على 2

نحصل على : $\frac{1}{2}(u_n^2+1) \leq \frac{1}{2}(1+1)$ أي : $u_{n+1} \leq 1$

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \leq 1$ (هذا يعني أن (u_n) محدودة من الأعلى)

● استنتاج أن (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال 2 وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ومن السؤال 3 وجدنا أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ، نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

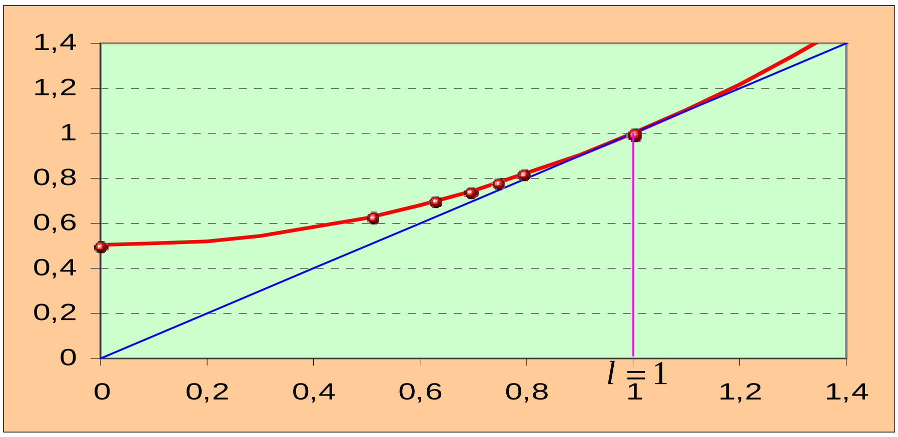
● حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

المتتالية (u_n) متقاربة ، نسمي l نهايتها .

بما أن $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2+1)$ ، وبما أن الدالة $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$ مستمرة على $\mathbb{R}$

فإن : $l = \frac{1}{2}(l^2+1)$ ومنه : $l^2 - 2l + 1 = 0$ وبالتالي : $l = 1$

إذن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$



المتتاليتان المتجاورتان

تعريف

نقول عن متتاليتين إنهما متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة ، والفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

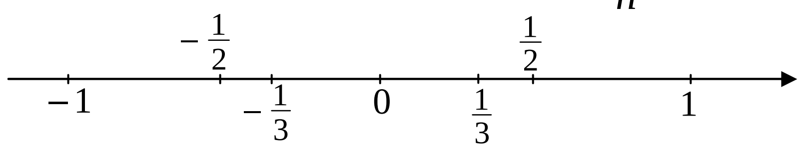
بتعبير آخر :

نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

- (u_n) متتالية متزايدة
- (v_n) متتالية متناقصة
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

مثال : المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n = -\dfrac{1}{n}$ و $v_n = \dfrac{1}{n}$ متجاورتان .



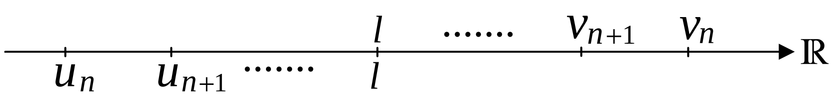
خواص

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين في $\mathbb{N}$.

إذا كانت (u_n) و (v_n) متجاورتين تكونان متقاربتين وتكون لهما نفس النهاية ، وبالإضافة إلى ذلك ، إذا كانت هذه النهاية هي العدد الحقيقي l يكون :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$

توضيح :



تمرين محلول 1 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، كما يلي :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

الحل :

● إثبات أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان :

• لدينا : $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ و $u_{n+1}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$

ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ ، وبما أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\frac{1}{(n+1)^2}>0$

فإن : $u_{n+1}-u_n>0$. إذن : (u_n) متتالية متزايدة .

• ولدينا : $v_n=u_n+\frac{1}{n}$ وَ $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{n+1}$

ومنه : $v_{n+1}-v_n=\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)=(u_{n+1}-u_n)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

ومنه : $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{-1}{n(n+1)^2}$

وبما أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$ فإن : $v_{n+1}-v_n<0$

إذن : (v_n) متتالية متناقصة .

• ولدينا : $v_n-u_n=\frac{1}{n}$ إذن : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$

خلاصة : لأن الشروط الثلاثة محققة نستنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين محلول 2:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ $u_0=1$ و $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ وَ $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$.

1. احسب u_1 وَ v_1 .
2. من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرّف المتتالية (w_n) بـ $w_n=v_n-u_n$

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة w_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (w_n) .

جـ- اكتب كلا من $u_{n+1}-u_n$ وَ $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n .

د- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

③ نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $t_n = 3u_n + 10v_n$
برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

④ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$

الحل :

① حساب u_1 وَ v_1 :

$$v_1 = \frac{u_0 + 4v_0}{5} = \frac{1+4\times 2}{5} = \frac{9}{5} \ \text{،}\ u_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{1+2\times 2}{3} = \frac{5}{3}$$

② أ- البرهان أن (w_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون المتتالية (w_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث يكون :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = q \times w_n$

ب- إثبات أن (w_n) متتالية هندسية :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$

$$= \frac{5(u_n + 2v_n) - 3(u_n + 4v_n)}{15} = \frac{2u_n - 2v_n}{15}$$

ومنه : $w_{n+1} = \frac{2(u_n - v_n)}{15} = \frac{2}{15} w_n$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$ وَ حدّها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

ب- كتابة عبارة w_n بدلالة n : $w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$

• حساب نهاية المتتالية (w_n) :

نعلم أنه إذا كان $-1 < q < +1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ ، نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

جـ- كتابة $u_{n+1} - u_n$ بدلالة w_n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n$

$$= \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$$

$$= \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3} w_n$$

إذن : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} w_n$

• كتابة $v_{n+1}-v_n$ بدلالة w_n :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+4v_n}{5}-v_n$$
$$=\frac{u_n+4v_n-5v_n}{5}$$
$$=\frac{-(v_n-u_n)}{5}=-\frac{1}{5}w_n$$

إذن : $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{5}w_n$

د- استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان :

• من $w_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n$ و $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}w_n$ نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة

• من $w_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n$ و $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{5}w_n$ نستنتج أن المتتالية (v_n) متناقصة

• من السؤال 2 الفرع ب وجدنا أن : $\lim_{n\to+\infty} w_n=0$ أي : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

إذن : (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ نستنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .

3 البرهان أن (t_n) متتالية ثابتة :

تذكير : [المتتالية (t_n) ثابتة] يكافئ [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $t_{n+1}-t_n=0$]

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$t_{n+1}-t_n=(3u_{n+1}+10v_{n+1})-(3u_n+10v_n)$$
$$=\left[3\left(\frac{u_n+2v_n}{3}\right)+10\left(\frac{u_n+4v_n}{5}\right)\right]-(3u_n+10v_n)$$
$$=u_n+2v_n+2u_n+8v_n-3u_n-10v_n=0$$

إذن : (t_n) متتالية ثابتة .

4 حساب المجموع S_n بدلالة n :

من $w_n=v_n-u_n$ و $t_n=3u_n+10v_n$ نستنتج أن : $u_n=\frac{1}{13}t_n-\frac{10}{13}w_n$

وبما أن (t_n) متتالية ثابتة فإن : $t_n=t_0=10v_0+3u_0=23$

ومن السؤال 2 الفرع ب وجدنا أن : $w_n=\left(\frac{2}{15}\right)^n$ ((w_n) متتالية هندسية)

وبالتالي : $u_n = \frac{1}{13}t_n - \frac{10}{13}w_n = \frac{23}{13} - \frac{10}{13}w_n$

وعليه فإن : $s_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$

$$= \left(\frac{23}{13} - \frac{10}{13}w_0\right) + \left(\frac{23}{13} - \frac{10}{13}w_1\right) + \cdots + \left(\frac{23}{13} - \frac{10}{13}w_n\right)$$

$$= \left(\frac{23}{13} + \frac{23}{13} + \ldots + \frac{23}{13}\right) - \frac{10}{13}(w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$

$$= \frac{23}{13}(n+1) - \frac{10}{13}\left(1 \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{15}}\right)$$

$$= \frac{23}{13}(n+1) - \frac{150}{169}\left[1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\right]$$

إذن : $s_n = \frac{23}{13}(n+1) - \frac{150}{169}\left[1-\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1}\right]$

المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية

المتتالية (u_n)	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بإضافة نفس العدد الثابت (الأساس) $u_{n+1}=u_n+r$	ننتقل من حدّ إلى الحدّ الذي يليه بالضرب بنفس العدد الثابت (الأساس) $u_{n+1}=u_n\times q$
الحدّ العام	$u_n=u_p+(n-p)\times r$ $u_n=u_0+n.r$ $u_n=u_1+(n-1)r$	$u_n=u_p\times q^{n-p}$ $u_n=u_0\times q^n$ $u_n=u_1\times q^{n-1}$
خاصية ثلاثة حدود متتابعة	$a+c=2b$	$a\times c=b^2$
المجموع	$S_n=u_p+\cdots+u_{p+n}$ $=\frac{n+1}{2}\cdot\left(u_p+u_{p+n}\right)$ $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ $=\frac{n+1}{2}\cdot\left(u_0+u_n\right)$ $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ $=\frac{n}{2}\cdot\left(u_1+u_n\right)$	$S_n=u_p+\cdots+u_{p+n}$ $=u_p\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ $=u_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ $=u_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

- نهاية متتالية هندسية :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدّها الأول u_0 فإن حدّها العام u_n

يُعطى بالعلاقة : $u_n = u_0 \times q^n$. ومنه النتائج التالية :

- الحالة الأولى : إذا كان $q > 1$ تكون $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

ومنه : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty & \text{إذا كان } u_0 > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty & \text{إذا كان } u_0 < 0 \end{cases}$ (المتتالية (u_n) متباعدة)

- الحالة الثانية : إذا كان $q = 1$ تكون $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$ (المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد u_0)

- الحالة الثالثة : إذا كان $-1 < q < 1$ تكون $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0)

- الحالة الرابعة : إذا كان $q \leq -1$ فإن (u_n) لا تقبل نهاية .

(المتتالية (u_n) متباعدة)

نتيجة :

تكون متتالية هندسية متقاربة إذا وفقط إذا كان أساسها ينتمي إلى المجال $]-1 ; +1]$

تمرين محلول 1 : (بكالوريا 2006 **تونس** . الشعبة : تسيير واقتصاد)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 3 + \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ- برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج أن $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

جـ- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الحل :

① أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n > 1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 > 1$ أي : $2 > 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n > 1$ ، ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} > 1$

لدينا : $u_n > 1$ (من فرضية التراجع) ، وبما أن الدالة مقلوب دالة متناقصة نستنتج

أن : $\frac{1}{u_n} < 1$ ، وبضرب الطرفين في العدد -1 ينتج : $-\frac{1}{u_n} > -1$

وبإضافة العدد 2 إلى الطرفين نحصل على : $2 - \frac{1}{u_n} > 1$ أي : $u_{n+1} > 1$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$

ومن السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 1$ ومنه : $(u_n - 1)^2 > 0$

وبالتالي : $-(u_n - 1)^2 < 0$

نستنتج أن : $\frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$ أي : $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ - استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال ① الفرع - أ- وجدنا أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 1$ أي أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ، ومن السؤال ① الفرع - ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة ، نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

② أ- البرهان أن (v_n) متتالية حسابية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n+r$

لدينا : $v_{n+1}-v_n=\left(3+\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)-\left(3+\frac{1}{u_n-1}\right)=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$

وبتعويض u_{n+1} بـ $2-\frac{1}{u_n}$ ثم التبسيط وتوحيد المقامات نجد : $v_{n+1}-v_n=1$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ وحدّها الأول $v_0=4$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+nr=4+n$

استنتاج أن $u_n=\frac{n+2}{n+1}$:

لدينا : $v_n=3+\frac{1}{u_n-1}$ ومنه : $v_n-3=\frac{1}{u_n-1}$ وبالتالي : $u_n-1=\frac{1}{v_n-3}$

وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد : $u_n=\frac{1}{v_n-3}+1$

وبتعويض v_n بـ $4+n$ ينتج : $u_n=\frac{1}{n+4-3}+1=\cdots=\frac{n+2}{n+1}$

إذن : $u_n=\frac{n+2}{n+1}$

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

بتطبيق قواعد حساب النهايات نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

تمرين محلول 2 : (بكالوريا أجنبية)

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1 \end{array}\right\}$$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 . هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟

2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-2n+6$.

أ- احسب v_0، v_1، v_2 وَ v_3 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

جـ- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

د- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

③ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$

الحل :

① حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = -\frac{1}{2} \quad ، \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad u_3 = \frac{7}{8}$$

المتتالية (u_n) غير حسابية (مثال مضاد : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$)

المتتالية (u_n) غير هندسية (مثال مضاد : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$)

② أ- حساب v_0 ، v_1 ، v_2 و v_3 :

$$v_0 = u_0 - 2\times 0 + 6 = 7 \quad ، \quad v_1 = u_1 - 2\times 1 + 6 = \frac{7}{2}$$

$$v_2 = u_2 - 2\times 2 + 6 = \frac{7}{4} \quad ، \quad v_3 = u_3 - 2\times 3 + 6 = \frac{7}{8}$$

ب- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q.v_n$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \left[\frac{1}{2}u_n + n - 1\right] - 2(n+1) + 6$

$$= \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وَ حدّها الأول $v_0 = 7$

جـ- كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$

• استنتاج u_n بدلالة n : $u_n = v_n + 2n - 6 = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$

د- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} 7\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ وَ $\lim_{n\to+\infty}(2n-6)=+\infty$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

③ حساب المجموع S_n :

لدينا : $u_n=v_n+2n-6$ ، وبوضع : $w_n=2n-6$ نجد : $u_n=v_n+w_n$

ونعلم أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وَ حدّها الأول $v_0=7$

ويمكن التحقق أن (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وَحدّها الأول $w_0=-6$

ومنه : $S_n=u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n=(v_0+w_0)+(v_1+w_1)+\cdots+(v_n+w_n)$

$$=(v_0+v_1+\ldots+v_n)+(w_0+w_1+\ldots+w_n)$$

$$=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{n+1}{2}(w_0+w_n)$$

حيث :

$$v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=14\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

وَ $\frac{n+1}{2}(w_0+w_n)=\frac{n+1}{2}(-6+2n-6)=(n+1)(n-6)$

إذن : $S_n=14-\frac{7}{2^n}+(n-6)(n+1)$

بكالوريات محلولة

تمرين 1 (بكالوريا 2007 تكنولوجيا)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0=\frac{1}{4}$ ، $u_1=\frac{1}{2}$ و $4u_{n+2}=7u_{n+1}-3u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة : $v_n=u_{n+1}-u_n$

1. احسب u_2 و v_0 .
2. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.
3. احسب المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.
4. عبّر عن u_n بدلالة S_n مستعينا بالعبارة $v_n=u_{n+1}-u_n$ ، ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n . احسب نهاية u_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل :

1. حساب u_2 و v_0 : $u_2=\frac{11}{16}$ و $v_0=\frac{1}{4}$
2. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$. نستنتج أن : $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$

3. $$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}=v_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4. باستعمال العبارة $v_n=u_{n+1}-u_n$ نجد : $u_n=S_n+\frac{1}{4}$

- عبارة u_n بدلالة n : $u_n=\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

• حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: نعلم أنه إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ إذن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{5}{4}$

التمرين 2 (Bac Réunion juin 2007)

ليكن a عددا حقيقيا حيث $-1<a<0$. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=a$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2+u_n$.

1. ادرس رتابة المتتالية (u_n) .
2. أ- لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^2+x$.
ادرس اتجاه تغيّر الدالة h . استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;0[$ ، العدد $h(x)$ ينتمي أيضا إلى المجال $]-1;0[$.
ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1<u_n<0$.
3. ادرس تقارب المتتالية (u_n) . عيّن ، إن وجدت ، نهايتها .

الحل :

1. دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) نقوم بحساب الفرق $u_{n+1}-u_n$.

لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n^2+u_n-u_n=u_n^2$ ومنه : $u_{n+1}-u_n\geq 0$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة وبالتالي فهي رتيبة .

2. أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة h :

الدالة h دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود وَ دالتها المشتقة $h'(x)=2x+1$

وبالتالي فإن الدالة h متزايدة على المجال $[-\frac{1}{2};+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;-\frac{1}{2}]$ وتقبل نهاية صغرى من أجل $x=-\frac{1}{2}$

• الاستنتاج :

بما أن الدالة h متناقصة على المجال $]-1;-\frac{1}{2}]$ فإن :

$h(-1)<h(x)\leq h\left(-\frac{1}{2}\right)$ أي : $-\frac{1}{4}\leq h(x)<0$

وبما أن الدالة h متزايدة على المجال $]-\frac{1}{2};0[$ فإن :

$h\left(-\frac{1}{2}\right)\leq h(x)< h(0)$ أي : $-\frac{1}{4}\leq h(x)<0$

وبالتالي : من أجل كل x من $]-1;0[$ فإن $-\frac{1}{4}\leq h(x)<0$

وبما أن : $[-\frac{1}{4};0[\subset]-1;0[$ نستنتج أنه من أجل كل x من $]-1;0[$ فإن العدد $h(x)$ ينتمي أيضا إلى المجال $]-1;0[$.

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1<u_n<0$:

نسمي p_n الخاصية " $-1<u_n<0$ "

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $-1<u_0<0$ أي : $-1<a<0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $-1<u_n<0$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $-1<u_{n+1}<0$

لدينا : $-1<u_n<0$ ومنه : $0<-u_n<1$ (ضرب الأطراف بالعدد السالب -1)

ولدينا : $-1<u_n<0$ ومنه : $0<u_n+1<1$ (إضافة العدد 1 لجميع الأطراف)

نستنتج أن : $0<-u_n(u_n+1)<1$ وبالتالي : $-1<u_n(u_n+1)<0$

أي : $-1<u_{n+1}<0$. ومنه : p_{n+1} صحيحة

- إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-1<u_n<0$.

3 تقارب المتتالية (u_n) :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال 1 وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

ومن السؤال 2 الفرع - ب - وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1<u_n<0$

أي أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l .

- إيجاد العدد l :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$

من العلاقة : $u_{n+1}=u_n^2+u_n$ نستنتج أن : $l=l^2+l$ ومنه : $l=0$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

تمرين 3 (بكالوريا 2006 علوم دقيقة)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{7u_n+2}{u_n+8}$.

① عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

② نفرض أن : $u_0=0$.

أ- احسب u_1 ، u_2 .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0\leq u_n<1$.

ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

③ لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) لمّا يؤول n إلى $+\infty$

جـ- احسب كلا من S_n وَ π_n حيث :

$$S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n \quad \text{وَ} \quad \pi_n=v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_n$$

الحل :

① تعيين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تذكير : [المتتالية (u_n) ثابتة] يكافئ [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n=0$]

أي أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $u_{n+1}=u_n=\cdots=u_0$.

بحل المعادلة $u_0=\dfrac{7u_0+2}{u_0+8}$ نجد : $u_0\in\{-2;1\}$

② أ- حساب u_1 ، u_2 : $u_1=\dfrac{7u_0+2}{u_0+8}=\dfrac{1}{4}$ وَ $u_2=\dfrac{7u_1+2}{u_1+8}=\dfrac{15}{33}$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n<1$:

نسمي p_n الخاصية " $0\leq u_n<1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0 \le u_0 \le 1$ أي : $0 \le 0 < 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 \le u_n < 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0 \le u_{n+1} < 1$

لدينا : $0 \le u_n < 1$ ومنه : $7 \times 0 \le 7u_n < 7 \times 1$ (ضرب الحدود بالعدد 7)

وبإضافة العدد 2 إلى الحدود الثلاثة نجد : $2 \le 7u_n + 2 < 9$ ... (1)

من جهة أخرى : $0 \le u_n < 1$ ومنه : $8 \le u_n + 8 < 9$ (إضافة العدد 8)

وبما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ فإن $\frac{1}{8} \ge \frac{1}{u_n + 8} > \frac{1}{9}$ ...(2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $0 \le u_{n+1} < 1$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 1$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $0 \le u_n < 1$ يعني أن المتتالية (u_n) محدودة .

ملاحظة : للبرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n < 1$

يمكن برهان ذلك على مرحلتين :

• المرحلة الأولى : البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge 0$

• المرحلة الثانية : البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$

• دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8} - u_n = \frac{7u_n + 2 - u_n^2 - 8u_n}{u_n + 8}$$

$$= \frac{-(u_n^2 + u_n - 2)}{u_n + 8} = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 8}$$

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n < 1$

نستنتج أن : $u_n - 1 < 0$ ، $u_n + 2 > 0$ وَ $u_n + 8 > 0$

وبالتالي : $\frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 8} > 0$ أي : $u_{n+1} - u_n > 0$

• إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3 أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{7u_n+2}{u_n+8}+2}{\frac{7u_n+2}{u_n+8}-1}=\cdots=\frac{9u_n+18}{6u_n-6}=\cdots=\frac{3}{2}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{3}{2}$ وحدّها الأول $v_0=-2$.

ب- كتابة u_n بدلالة n :

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن عبارة حدّها العام هي : $v_n=v_0\cdot q^n=-2\left(\frac{3}{2}\right)^n$

ونعلم أن : $v_n=\frac{u_n+2}{u_n-1}$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n+2}{v_n-1}=\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

من السؤال السابق وجدنا أن : $u_n=\frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n+2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n-1}$ نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

يمكن استعمال النتيجة التالية : نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حاصل قسمة حدّها الأعلى درجة من البسط على حدّها الأعلى درجة من المقام .

جـ- حساب المجموع S_n :

$$S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=4\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

• حساب الجداء π_n :

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n = v_0 \times (v_0 \times q^1)(v_0 \times q^2) \times \cdots \times (v_0 \times q^n)$$
$$= (v_0)^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n} = (-2)^{n+1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

تمرين 4 (Bac 2006 Mauritanie)

(u_n) متتالية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 6 \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1. احسب u_1 و u_2 .
2. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$
أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .
3. أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$
4. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

الحل :

1. حساب u_1 و u_2 : $u_1 = 4$ ، $u_2 = \frac{14}{5}$
2. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :
من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q.v_n$

من المساواة : $5u_{n+1} - 2u_n = 6$ نستنتج أن : $u_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n + 3)$
وبالتالي : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{2}{5}(u_n + 3) - 2 = \frac{2}{5}(u_n - 2) = \frac{2}{5}v_n$
إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 2 = 5$

3. أ- كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n$

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n = v_n + 2 = 5\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$

ب- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$$

$$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + 2 + \cdots + 2) = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + 2(n+1)$$

لدينا :

إذن : $s_n=\frac{25}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]+2(n+1)$

④ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نعلم أنه إذا كان $-1<q<+1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$ و عليه فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=+\infty$

تمرين 5 (Bac Réunion Juin 2006)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

الجزء الأول :

① ادرس تغيّرات الدالة f .

② لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أ- ارسم المنحنى (c) الممثل للدالة f والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ ، ثم أنشئ النقطتين M_1 و M_2 اللتين فاصلتيهما u_1 و u_2 على الترتيب .

ب- اقترح تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n) .

جـ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq e$.

د- أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو عدد حقيقي L من المجال $[e\,;+\infty[$.

الجزء الثاني :

نذكر أن الدالة f مستمرة على المجال $]1\,;+\infty[$.

① بدراسة نهاية المتتالية $(f(u_n))$ ، أثبت أن $f(L)=L$.

② استنتج قيمة L .

الحل :

① دراسة تغيّرات الدالة f :

• النهايات : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1\times\ln x - x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{-1+\ln x}{(\ln x)^2}$.

• إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $-1+\ln x$.

$f'(x)=0$ يكافئ $x=e$ ومنه : $f(e)=e$

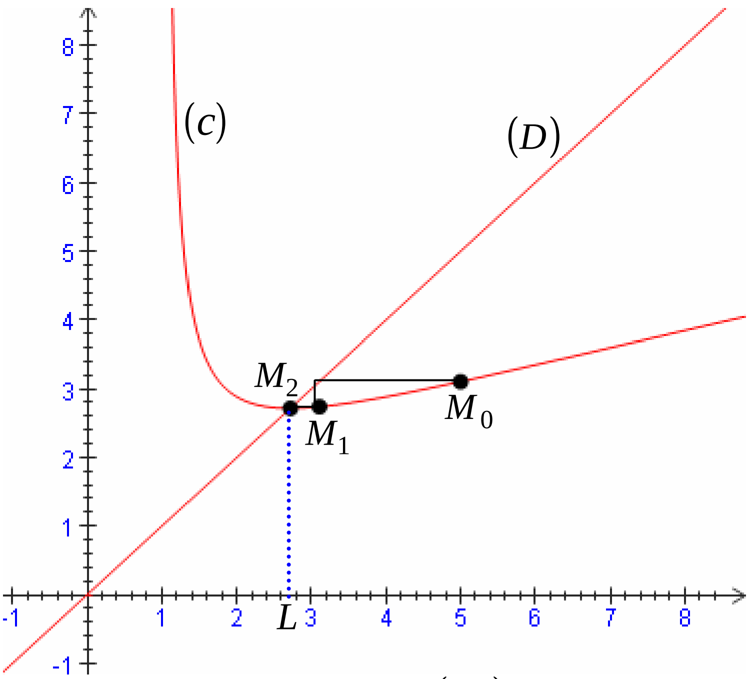
$f'(x)>0$ يكافئ $x>e$ أي : $x\in\,]e\,;+\infty[$

$f'(x)<0$ يكافئ $x<e$ أي : $x\in\,]1\,;e[$

• جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

2 أ- الرسم :



ب- اقتراح تخمين حول سلوك المتتالية (u_n) :

يمكن التخمين أن المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (c) والمستقيم (D) .

جـ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq e$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n \geq e$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 \geq e$ أي : $5 \geq e$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n \geq e$ ، ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} \geq e$

لدينا : $u_n \geq e$ (من فرضية التراجع) ، وبما أن الدالة دالة f متزايدة على المجال $[e\,;+\infty[$ نستنتج أن : $f(u_n) \geq f(e)$. لكن : $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(e) = e$

وعليه فإن : $u_{n+1} \geq e$. ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \geq e$ (هذا يعني أن (u_n) محدودة من الأسفل)

د- إثبات أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو عدد حقيقي L من المجال $[e\,;+\infty[$:

تذكير : كل متتالية محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال 2 الفرع - ج - وجدنا أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ، وبالتالي لكي تكون متقاربة يكفي أن نبرهن أنها متناقصة .

• البرهان أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا : $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n}$$

من السؤال 2 الفرع - جـ - وجدنا أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n \geq e$

وبالتالي فإن : $\ln u_n \geq 1$ و $1-\ln u_n \leq 0$ ، نستنتج أن : $\dfrac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n} \leq 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \leq 0$. ومنه : المتتالية (u_n) متناقصة .

خلاصة : المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e ، إذن فهي متقاربة نحو عدد حقيقي L حيث $L \geq e$.

الجزء الثاني :

1 إثبات أن $f(L) = L$:

الدالة f مستمرة على المجال $]1\,;+\infty[$ والمتتالية (u_n) متقاربة نحو L ، نستنتج أن المتتالية $(f(u_n))$ متقاربة نحو $f(L)$. وهذا يعني أن المتتالية (u_{n+1}) متقاربة نحو $f(L)$. لكن المتتاليتين (u_n) ، (u_{n+1}) متقاربتان نحو نفس النهاية .

إذن : $f(L) = L$

2 استنتاج قيمة L :

باعتماد نتيجة السؤال السابق ، وبالإضافة إلى ذلك فإن المعادلة $f(x)=x$ تؤول إلى $\ln x=1$ ومنه : $x=e$. إذن : نهاية المتتالية (u_n) هي : $L=e$

تمرين 6 (Bac Antilles Guyane septembre 2005)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0=1$ وبعلاقة التراجع التالية :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1 أ- برهن أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n\geq 0$.

ب- استنتج أنه من أجل كل $n\geq 4$ ، $u_n\geq n-2$.

جـ- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2 نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n=4u_n-8n+24$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$

جـ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=x_n+y_n$ حيث (x_n) متتالية هندسية وَ (y_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس والحدّ الأول لكل منهما .

د- استنتج بدلالة n عبارة المجموع $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$.

الحل :

1 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n\geq 0$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n\geq 0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0\geq 0$ أي : $1\geq 0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n\geq 0$ ، ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}\geq 0$

لدينا : $u_n\geq 0$ وبضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}u_n\geq 0$ ... (1)

ولدينا : $n\geq 3$ وبإضافة العدد -1 إلى الطرفين نجد : $n-1\geq 2$ ... (2)

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نحصل على : $\frac{1}{2}u_n+n-1\geq 2\geq 0$

نستنتج أن : $u_{n+1}\geq 0$ (العلاقة "$\geq$" متعدية) . ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n\geq 0$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $u_n \geq n-2$:

من أجل كل $n \geq 4$ فإن $n-1 \geq 3$ ، وحسب السابق نستنتج أن : $u_{n-1} \geq 0$

وبضرب الطرفين في العدد $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}u_{n-1} \geq 0$ ، وبإضافة $n-2$ للطرفين

ينتج : $\frac{1}{2}u_{n-1} + n - 2 \geq n-2$ أي : $\left[\frac{1}{2}u_{n-1} + n - 1\right] - 1 \geq n-2$

نستنتج أن : $u_n \geq n-2$

جـ- استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل $n \geq 4$ فإن $u_n \geq n-2$

وبما أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$ نستنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2 أ- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا : $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24$

$$= 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12$$
$$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = 28$

ب- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$:

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = 28$

فإن حدّها العام هو : $v_n = v_0 \times q^n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n$

من العلاقة : $v_n = 4u_n - 8n + 24$ نستنتج أن : $u_n = \frac{1}{4}v_n + 2n - 6$

ومنه : $u_n = \frac{1}{4} \times 28\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. إذن : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$

جـ- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = x_n + y_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 = x_n + y_n$ حيث :

• $x_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، (x_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأول $x_0 = 7$

• $y_n = 2n - 6$ ، (y_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدّها الأول $y_0 = -6$

د- استنتج S_n بدلالة n : $S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n$

المجموع S_n هو مجموع مجموعين (مجموع حدود م.هـ + مجموع حدود م.ح)

تمرين 7 (بكالوريا 2004 شعبة التكنولوجيا)

نعتبر متتالية عددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$.

② أ- أثبت أنه يوجد عدد طبيعي m ، تكون من أجله المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + mn - 1$ ، متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

③ لتكن في المستوي النقط A ، B ، C و K التي تحقق العلاقة :

$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \lambda\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ حيث λ وسيط حقيقي .

عيّن λ حتى تكون النقطة K مرجحا للجملة المثقلة $\{(A; s_0), (B; s_1), (C; s_2)\}$

الحل :

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول يساوي $u_0 = 2$ ، الطرف الثاني يساوي $2^0 - 2 \times 0 + 1 = 2$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}=2^{-(n+1)}-2(n+1)+1$

لدينا من التعريف : $u_n-2u_{n+1}=2n+3$ ومنه : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-n-\frac{3}{2}$

ولدينا من فرضية التراجع : $u_n=2^{-n}-2n+1$

وبالتالي : $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(2^{-n}-2n+1\right)-n-\frac{3}{2}=2^{-1}\times 2^{-n}-n+\frac{1}{2}-n-\frac{3}{2}$

$$=2^{-n-1}-2n-1=2^{-(n+1)}-2(n+1)+1$$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=2^{-n}-2n+1$.

2 أ- وجود العدد الطبيعي m :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}+m(n+1)-1=\left(\frac{1}{2}u_n-n-\frac{3}{2}\right)+mn+m-1$

$$=\frac{1}{2}u_n+(m-1)n-\frac{5}{2}+m$$

من جهة أخرى : $q.v_n=q(u_n+mn-1)=q.u_n+qmn-q$

من المساواة : $v_{n+1}=q.v_n$ نستنتج أن :

$$\frac{1}{2}u_n+(m-1)n-\frac{5}{2}+m=q.u_n+qmn-q$$

ومنه : $\boxed{q=\frac{1}{2}}$ وَ $\boxed{m=2}$

إذن : إذا كان $m=2$ تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0=1$

ب- حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

إذن : $\boxed{s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

3 تعيين العدد الحقيقي λ :

النقطة K مرجح للجملة المثقلة $\{(A;s_0),(B;s_1),(C;s_2)\}$ يعني :

$s_0 \cdot \overrightarrow{KA} + s_1 \cdot \overrightarrow{KB} + s_2 \cdot \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ أي : $1\overrightarrow{KA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{7}{4}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

وبضرب الطرفين بالعدد 2 نحصل على : $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \frac{7}{2}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

من العلاقتين : $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \lambda\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ و $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \frac{7}{2}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$

نستنتج أن : $\boxed{\lambda = \frac{7}{2}}$

تمرين 8 (بكالوريا 2004 **تونس** . الشعبة : علوم تجريبية)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

1 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة .

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها .

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

جـ- احسب من جديد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الحل :

1 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$:

نسمي p_n الخاصية " $1 < u_n < 2$ "

- التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $1 < u_0 < 2$ أي : $1 < \frac{3}{2} < 2$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $1 < u_n < 2$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $1 < u_{n+1} < 2$

لدينا : $1 < u_n < 2$ (من فرضية التراجع) وبإضافة العدد -1 للحدود الثلاثة ينتج :

$1-1 < u_n - 1 < 2-1$ أي : $0 < u_n - 1 < 1$

وبما أن الدالة " الجذر التربيعي" متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ نستنتج أن :

$\sqrt{0} < \sqrt{u_n - 1} < \sqrt{1}$ أي : $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$

وبإضافة العدد 1 للحدود الثلاثة نحصل على : $1 < u_{n+1} < 2$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

ب- إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة :

تذكير : (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ يعني :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n > 0$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)$

$$= \left(\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)\right) \times \frac{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)\right)\left(\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)\right)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$= \frac{(u_n - 1) - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)} = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$

نستنتج أن : $u_n - 1 > 0$ ، $2 - u_n > 0$ وَ $\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1) > 0$

وبالتالي : $\frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)} > 0$ أي : $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة

هي متتالية متقاربة .

من السؤال 1 الفرع - أ - وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1<u_n<2$

ومن السؤال 1 الفرع - ب - وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l .

- إيجاد العدد l :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية l ، فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

من العلاقة : $u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n-1}$ نستنتج أن : $l = 1+\sqrt{l-1}$

ومنه : $\begin{cases} (l-1)^2 = l-1 \\ l-1 \geq 0 \end{cases}$ وبحل هذه الجملة نجد : $l=1$ أو $l=2$

لكن من السؤلين السابقين وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة وأنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $1<u_n<2$ ((u_n) محدودة من الأعلى) ، نستنتج أن : $\boxed{l=2}$

2 أ- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}-1) = \ln\sqrt{u_n-1} \\ &= \ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(u_n-1) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدّها الأول $v_0 = -\ln 2$.

ب- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن عبارة حدّها العام : $v_n = v_0\cdot q^n = -\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : $v_n=\ln(u_n-1)$ ومنه : $u_n-1=e^{v_n}$ أي : $u_n=1+e^{v_n}$

وبما أن : $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ و $\lim_{x\to 0} e^x=1$ نستنتج أن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=2}$

تمرين 9 (بكالوريا 2004 **تونس** . الشعبة : تسيير واقتصاد)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي :
$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.
2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة وأنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1-u_n}{2u_n}$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$.

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الحل :

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$:

نسمي p_n الخاصية " $0<u_n<1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0<u_0<1$ أي : $0<\dfrac{1}{3}<1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $0<u_n<1$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0<u_{n+1}<1$

لدينا : $0<u_n<1$ ومنه : $3\times 0<3u_n<3\times 1$ (ضرب الحدود بالعدد 3) ...(1)

من جهة أخرى : $0<u_n<1$ ومنه : $1+2\times 0<1+2u_n<1+2\times 1$

(ضرب الحدود الثلاثة بالعدد 2 ثم إضافة العدد 1 إلى الحدود الثلاثة)

ومنه : $1<1+2u_n<3$ ، وبما أن الدالة " مقلوب " متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ فإن

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{1+2u_n}<1 \quad ...(2)$$

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $0<u_{n+1}<1$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ملاحظة : للبرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$

يمكن برهان ذلك على مرحلتين :

• المرحلة الأولى : البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$

• المرحلة الثانية : البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<1$

المرحلة الأولى : البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n>0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0>0$ أي : $\frac{1}{3}>0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n>0$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}>0$

من فرضية التراجع : $u_n>0$ وبضرب الطرفين بالعدد 3 ينتج : $3u_n>0$ ...(1)

من فرضية التراجع : $u_n>0$ وبضرب الطرفين بالعدد 2 ينتج : $2u_n>0$

وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نحصل على : $1+2u_n>1$

لكن : $1+2u_n>1>0$ وبالتعدّي نجد : $1+2u_n>0$ ومنه : $\frac{1}{1+2u_n}>0$ ...(2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $3u_n\times\frac{1}{1+2u_n}>0$ ومنه : $u_{n+1}>0$

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ ... (I)

المرحلة الثانية : البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<1$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n<1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 < 1$ أي : $\frac{1}{3} < 1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n < 1$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} < 1$

من فرضية التراجع : $u_n < 1$ وبضرب الطرفين بالعدد 3 ينتج : $3u_n < 3$ ...(1)

من فرضية التراجع : $u_n < 1$ وبضرب الطرفين بالعدد 2 ينتج : $2u_n < 2$

وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نحصل على : $1+2u_n < 3$

وبما أن الدالة ″ مقلوب ″ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$ فإن $\frac{1}{1+2u_n} > \frac{1}{3}$ ...(2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $u_{n+1} < 1$

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$ ... (II)

خلاصة : من (I) وَ (II) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

أي أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن الأسفل .

2 أ- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n}$

$$= \frac{u_n(3-1-2u_n)}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$$

ب- استنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة :

من السؤال 1 وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$

نستنتج أن : $u_n > 0$ ، $1 - u_n > 0$ وَ $1+2u_n > 0$

وبالتالي : $\frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$ أي : $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة .

• استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال 1 وجدنا أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و من السؤال 2 الفرع

- ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة ، نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3 أ- البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$:

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=q.v_n$

لدينا : $v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}}$ وبتعويض u_{n+1} بـ $\frac{3u_n}{1+2u_n}$ ثم بعد توحيد المقامات

والتبسيط نحصل على : $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0=1$.

ب- كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0 \cdot q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

• استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=\frac{1-u_n}{2u_n}$ ومنه : $u_n=\frac{1}{2v_n+1}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$

جـ- حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

تذكير : إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

تمرين 10 (بكالوريا 2004 المغرب . الشعبة : علوم تجريبية - دورة استدراكية)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} \end{cases}$$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1 أ- بيّن أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ- استنتج أن (u_n) متقاربة .

2 أ- بيّن أن $u_{n+1}\le\frac{1}{3}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الحل :

1 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n > 0$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0 > 0$ أي : $1 > 0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n > 0$ ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} > 0$

لدينا : $u_n > 0$ (من فرضية التراجع) وبما أن الدالة مكعب متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

نستنتج أن : $u_n^3 > 0$ ...(1)

ولدينا : $u_n > 0$ (من فرضية التراجع) وبما أن الدالة مربع متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$

نستنتج أن : $u_n^2 > 0$ وبعد ضرب الطرفين بالعدد 3 ثم إضافة العدد 1 للطرفين

نحصل على : $3u_n^2 + 1 > 1 > 0$ ونستنتج أن : $3u_n^2 + 1 > 0$ ...(2)

من (1) و(2) نستنتج أن : $\dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$ ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$ (هذا يعني أن (u_n) محدودة من الأسفل)

ب- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^3}{3u_n^2+1} - u_n = \dfrac{u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1}$

$$= \frac{-2u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} = \frac{-u_n\left(2u_n^2+1\right)}{3u_n^2+1}$$

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$

نستنتج أن : $-u_n < 0$ ، $2u_n^2 + 1 > 0$ وَ $3u_n^2 + 1$

وبالتالي : $\dfrac{-u_n\left(2u_n^2+1\right)}{3u_n^2+1} < 0$ أي : $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ- استنتاج أن (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة أو محدودة من الأسفل ومتناقصة هي متتالية متقاربة .

من السؤال ① الفرع - أ- وجدنا أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ،
ومن السؤال ① الفرع - ب- وجدنا أن المتتالية (u_n) متناقصة ،
نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

②أ- إثبات أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$:

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $3u_n^2 + 1 \geq 3u_n^2$ ومنه : $\dfrac{1}{3u_n^2 + 1} \leq \dfrac{1}{3u_n^2}$

وبضرب الطرفين بالعدد الموجب تماما u_n^3 نحصل على : $\dfrac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \leq \dfrac{u_n^3}{3u_n^2}$

ومنه : $\dfrac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \leq \frac{1}{3}u_n$. إذن : $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- استنتاج أن $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$:

ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n \leq \frac{1}{3}u_{n-1} \\ u_{n-1} \leq \frac{1}{3}u_{n-2} \\ \vdots \\ u_2 \leq \frac{1}{3}u_1 \\ u_1 \leq \frac{1}{3}u_0 \end{cases}$$

بضرب جميع الحدود طرف في طرف ينتج :

$$u_n \times u_{n-1} \times \cdots \times u_2 \times u_1 \leq \frac{1}{3}u_{n-1} \times \frac{1}{3}u_{n-2} \times \cdots \times \frac{1}{3}u_1 \times \frac{1}{3}u_0$$

وبعد الاختزال وتعويض u_0 بالعدد 1 نجد : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

تمرين 11 (Bac France Juin 2004)

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \end{array}\right\}$$

① ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

②أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > n^2$.

ب- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

③ خمّن عبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن بالتراجع صحة هذه العبارة .

الحل :

① دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=2n+3$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ((u_n) رتيبة تماما على $\mathbb{N}$)

② أ- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>n^2$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n>n^2$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $u_0>0^2$ أي : $1>0$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n>n^2$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_n>n^2$

لدينا : $u_n>n^2$ (فرضية التراجع) ، وبإضافة $2n+3$ إلى الطرفين نجد :

$u_n+2n+3>n^2+2n+3$ أي : $u_{n+1}>n^2+2n+3$

وبملاحظة أن : $n^2+2n+3=n^2+2n+1+2=(n+1)^2+2$

نستنتج أن : $u_{n+1}>(n+1)^2$. ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>n^2$

ب- حساب نهاية المتتالية (u_n) :

من السؤال السابق وجدنا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>n^2$

وبما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ نستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

③ تخمين عبارة u_n بدلالة n : من التعريف $u_{n+1}=u_n+2n+3$

لدينا : $u_0=1$ ، $u_1=u_0+2\times0+3=1+3=4$

$u_2=u_1+2\times1+3=4+2+3=9$ و $u_3=u_2+2\times2+3=9+4+3=16$

لاحظ أن الأعداد 1 ، 4 ، 9 ، 16 ، ... هي مربعات تامة

ويمكن أن نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=(n+1)^2$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=(n+1)^2$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n=(n+1)^2$ "

• التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو $u_0=1$ ، الطرف الثاني هو $(0+1)^2=1$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n=(n+1)^2$ ،

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1}=(n+2)^2$

لدينا : $u_{n+1}=u_n+2n+3$ ، ومن فرضية التراجع : $u_n=(n+1)^2$

وبالتالي : $u_{n+1}=(n+1)^2+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=(n+1)^2$.

تمرين 12 (Bac Inde Avril 2004)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

أ- احسب u_1 ، u_2 و u_3 (اكتب النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال) .

ب- قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) والحدود الأربعة الأولى للمتتالية (w_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=\dfrac{n}{n+1}$

جـ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=w_n$.

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية ذات الحدّ العام v_n حيث $v_n=\ln(\dfrac{n}{n+1})$.

أ- أثبت أن : $v_1+v_2+v_3=-\ln 4$.

ب- ليكن s_n المجموع المعرف من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$$s_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

- اكتب s_n بدلالة n .
- عيّن نهاية المجموع s_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل :

1 أ- حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2} \text{ ، } u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{2}{3} \text{ و } u_3 = \frac{1}{2-u_2} = \frac{3}{4}$$

ب- حساب w_0 ، w_1 ، w_2 و w_3 :

$$w_0 = \frac{0}{0+1} = 0 \text{ ، } w_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ ، } w_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \text{ و } w_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

إذن : $u_0 = w_0$ ، $u_1 = w_1$ ، $u_2 = w_2$ ، $u_3 = w_3$ و $u_4 = w_4$

جـ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = w_n$:

نسمي p_n الخاصية " $u_n = w_n$ "

- التحقق من صحة p_0 :

الطرف الأول هو $u_0 = 0$ ، الطرف الثاني هو $w_0 = 0$

وبالتالي فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني . إذن : p_0 صحيحة

- نفرض أن p_n صحيحة أي : $u_n = w_n$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $u_{n+1} = w_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ ، ومن فرضية التراجع : $u_n = w_n$

وبالتالي : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-w_n}$ ، لكن $w_n = \dfrac{n}{n+1}$ (من تعريف المتتالية (w_n))

وعليه فإن : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-w_n} = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \cdots = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$

ومنه : p_{n+1} صحيحة

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = w_n$.

② أ- إثبات أن $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$:

$$v_1+v_2+v_3=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$$

ب- كتابة s_n بدلالة n :

$$s_n=v_1+v_2+\cdots+v_n=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\right)=\ln\frac{1}{n+1}=-\ln(n+1)$$

إذن : $s_n=-\ln(n+1)$

جـ- حساب نهاية المجموع s_n عندما يؤول n إلى $+\infty$:

نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=-\infty$

تمرين 13 (Bac Inde Avril 2003)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=a & \text{حيث } a \text{ عدد حقيقي من المجال }]0\,;\,1[\\ u_{n+1}=(2-u_n).u_n & \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} . \end{cases}$$

① نفرض في هذا السؤال أن : $a=\frac{1}{8}$.

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحني (p) الممثل للدالة f المعرفة في المجال $[0\,;2]$ بـ $f(x)=x(2-x)$ ، والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x$

• استخدم (p) و (d) لتمثيل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 التي فواصلها u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على الترتيب . (وحدة الطول $8\,cm$)

② نفرض في هذا السؤال أن a عدد حقيقي كيفي من المجال $]0\,;\,1[$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0<u_n<1$.

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ- ماذا تستنتج ؟

③ نضع $a=\frac{1}{8}$ ، ونعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n=1-u_n$.

أ- احسب v_0 و v_1 .

ب- اكتب عبارة v_{n+1} بدلالة v_n ثم استنتج v_n بدلالة n .

جـ- استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .

د- احسب نهاية المتتالية (v_n) ، ثم نهاية المتتالية (u_n) .

الحل :

① أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=\frac{15}{64}$ و $u_2=\frac{1695}{4096}$.

ب- رسم المنحني (p) و تمثيل النقط : انظر الشكل في نهاية الحل .

② أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0<u_n<1$:

نسمي p_n الخاصية " $0<u_n<1$ "

• التحقق من صحة p_0 :

لدينا : $0<u_0<1$ أي : $0<\frac{1}{8}<1$ وهي محققة . إذن : p_0 صحيحة .

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $0<u_n<1$

ونبرهن أن p_{n+1} صحيحة أي : $0<u_{n+1}<1$

من فرضية التراجع $0<u_n<1$ ، وبإضافة العدد -1 نجد $-1<u_n-1<0$

ومنه : $0<(u_n-1)^2<1$ ، وبالضرب بالعدد -1 نجد $-1<-(u_n-1)^2<0$

وبإضافة العدد $+1$ نجد $0<-(u_n-1)^2+1<1$ ، وبملاحظة أن :

$u_{n+1}=(2-u_n)u_n=-(u_n-1)^2+1$ نستنتج أن : $0<u_{n+1}<1$.

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0<u_n<1$.

ب- البرهان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=(2-u_n)-u_n=(1-u_n)u_n$

ومن السؤال السابق وجدنا أن $0<u_n<1$ ومنه [$u_n>0$ و $1-u_n>0$]

نستنتج أن الجداء موجب تماما أي $(1-u_n)u_n>0$ وبالتالي : $u_{n+1}-u_n>0$

إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- الاستنتاج : من السؤال 3 الفرع -أ- نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومن السؤال 3 الفرع - ب - وجدنا أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، وبالتالي نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3 أ- حساب v_0 و v_1 : $v_0 = \frac{7}{8}$ ، $v_1 = \frac{49}{64}$

ب- عبارة v_{n+1} بدلالة v_n :

لدينا : $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - (2 - u_n)u_n = (1 - u_n)^2$

إذن : $\boxed{v_{n+1} = v_n^2}$

استنتاج v_n بدلالة n :

لدينا : $v_{n+1} = v_n^2$ ومنه : $v_1 = v_0^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}$

$$v_2 = v_1^2 = (v_0^2)^2 = v_0^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^2}$$

$$v_3 = v_2^2 = (v_0^4)^2 = v_0^8 = \left(\frac{7}{8}\right)^8 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^3}$$

$$v_4 = v_3^2 = (v_0^8)^2 = v_0^{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^4}$$

إذن : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ- استنتاج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n :

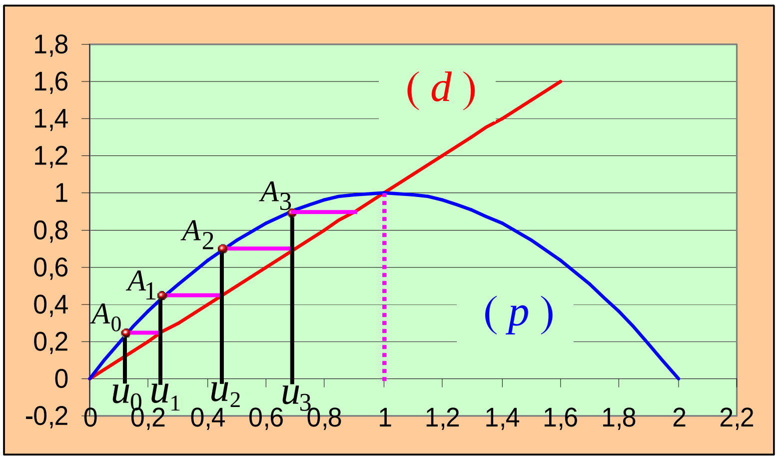
لدينا : $v_n = 1 - u_n$ إذن : $u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

د- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نعلم أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ و $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^p = 0$

ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right) = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right) = 1$

إذن : $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$



تمرين 14 (بكالوريا 2000 شعبة التكنولوجيا)

(u_n) متتالية عددية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $2u_{n+1}=u_n+2000$.

1 ما هي قيمة الحدّ u_0 التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة ؟

2 نفرض أن (u_n) غير ثابتة ، و نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي :

$v_n=\frac{1}{2}u_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي .

عيّن العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3 نفرض أن : $u_0=3000$ و $\alpha=1000$.

أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n$

الحل :

(u_n) متتالية عددية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $2u_{n+1}=u_n+2000$.

1 قيمة الحدّ u_0 التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة :

تذكير : [المتتالية (u_n) ثابتة] يكافئ [من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n=0$]

أي أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن $u_{n+1}=u_n=\cdots=u_0$.

بحل المعادلة $2u_0 = u_0 + 2000$ نجد : $\boxed{u_0 = 2000}$

2 تعيين العدد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا : $v_n = \frac{1}{2}u_n - \alpha$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \alpha$

لدينا : $2u_{n+1} = u_n + 2000$ ومنه : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1000$

وبالتالي : $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n + 1000\right) - \alpha = \frac{1}{4}u_n + 500 - \alpha$ ... (1)

ولدينا : $q \times v_n = q\left(\frac{1}{2}u_n - \alpha\right) = \frac{q}{2}u_n - q\alpha$ .... (2)

من (1) وَ (2) نستنتج أن : $\frac{q}{2}u_n - q\alpha = \frac{1}{4}u_n + 500 - \alpha$

وبالمطابقة نجد : $\boxed{\alpha = 1000}$ وَ $\boxed{q = \frac{1}{2}}$

3 نفرض أن : $u_0 = 3000$ وَ $\alpha = 1000$.

أ- كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n = 500\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب- احسب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1000\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

تمرين 15 (بكالوريا 2000 علوم الطبيعة والحياة)

(v_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} v_0 = 14 \\ v_{n+1} = 4v_n + 3 \end{cases}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

نضع : $u_n = v_n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1 أ- بيّن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ وَ $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

2 نعتبر المجموع S_n حيث $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$.

احسب s_n بدلالة n .

③ ليكن العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=15\left(4^{2n+2}-1\right)$.

عيّن تبعا للعدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7 .

الحل :

①أ- إثبات أن (u_n) متتالية هندسية :

تذكير : تكون (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=q.u_n$

لدينا : $u_{n+1}=v_{n+1}+1$ ومن تعريف المتتالية (v_n) : $v_{n+1}=4v_n+3$

ومنه : $u_{n+1}=v_{n+1}+1=(4v_n+3)+1=4(v_n+1)=4u_n$

إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=4}$ وحدّها الأول $\boxed{u_0=v_0+14=15}$

ب- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

بما أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدّها الأول $u_0=15$ فإن حدّها العام

$u_n=u_0\times q^n=15\times 4^n$ ومنه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$

وبما أن $u_n=v_n+1$ فإن $v_n=u_n-1=15\times 4^n-1$ ومنه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty}$

② حساب s_n بدلالة n :

$$s_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=u_0^2+(u_0q)^2+\left(u_0q^2\right)^2+\cdots+(u_0q^n)^2$$

$$=u_0^2\left(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}\right)=u_0^2\left((q^2)^0+(q^2)^1+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^n\right)$$

$$=u_0^2\times\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}=(15)^2\times\frac{1-(16)^{n+1}}{1-16}=15\left[(16)^{n+1}-1\right]$$

إذن : $\boxed{s_n=15\left(16^{n+1}-1\right)}$

③ ليكن العدد الطبيعي a_n حيث $a_n=15\left(4^{2n+2}-1\right)$.

• دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7 :

لدينا : $15\equiv 1[7]$ و $4^{2n+2}=4^{2(n+1)}=16^{n+1}$

من جهة أخرى : $16^{n+1}\equiv 2^{n+1}\equiv 2\times 2^n\ [7]$

وبالتالي : $15\left(4^{2n+2}-1\right)\equiv 2\times 2^n-1[7]$ أي : $a_n\equiv 2\times 2^n-1[7]$

• دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

لدينا : $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ وَ $2^3 \equiv 1[7]$

ومنه : $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ وَ $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ (من أجل كل k من $\mathbb{N}$)

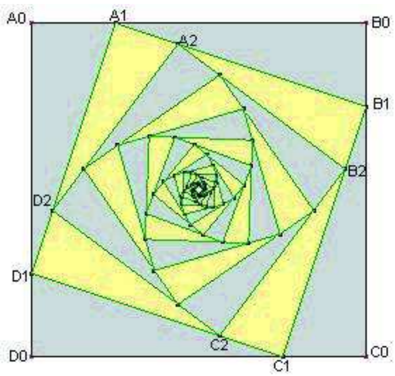
إذا كان $n = 3k$ فإن $a_n \equiv 2\times 2^{3k} - 1 \equiv 2\times 1 - 1 \equiv 2-1[7]$ أي : $a_n \equiv 1[7]$

إذا كان $n = 3k+1$ فإن $a_n \equiv 2\times 2^{3k+1} - 1 \equiv 2\times 2 - 1[7]$ أي: $a_n \equiv 3[7]$

إذا كان $n = 3k+2$ فإن $a_n \equiv 2\times 2^{3k+2} - 1 \equiv 2\times 4 - 1[7]$ أي : $a_n \equiv 0[7]$

إذن : بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7 هي $\{0,1,3\}$.

تمرين 16:



انطلاقا من مربع $A_0B_0C_0D_0$ طول ضلعه $1m$

ننشئ مربعا $A_1B_1C_1D_1$ حيث $A_0A_1 = \frac{1}{4}A_0B_0$

ثم مربعا ثالثا $A_2B_2C_2D_2$ حيث $A_1A_2 = \frac{1}{4}A_1B_1$

نواصل بهذه الطريقة عملية إنشاء المربعات .

① نرمز بـ l_n إلى طول ضلع المربع $A_nB_nC_nD_n$.

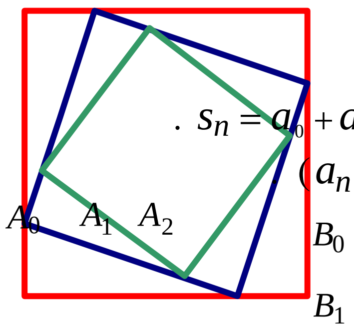
أ- احسب l_0 ، l_1 وَ l_2 .

ب- استنتج عبارة l_n بدلالة n .

جـ- احسب بدلالة n المجموع p_n حيث :

$p_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

② نرمز بـ: a_n إلى مساحة المربع $A_nB_nC_nD_n$.



أ- احسب a_0 ، a_1 وَ a_2 .

ب- استنتج عبارة a_n بدلالة n .

جـ- احسب بدلالة n المجموع s_n حيث $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

③ ادرس اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (l_n) وَ (a_n)

④ ادرس تقارب المتتاليتين (l_n) وَ (a_n) .

الحل :

D_2 B_2

D_1

D_0 C_2 C_1 C_0

1 أ- حساب l_0 ، l_1 وَ l_2 :

- لدينا : $l_0 = A_0B_0 = 1$
- تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم $A_1B_0B_1$:

$$A_1B_1{}^2 = A_1B_0{}^2 + B_0B_1{}^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{10}{16}$$

ومنه : $l_1 = A_1B_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

- تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم $A_2B_1B_2$:

$$A_2B_2{}^2 = A_2B_1{}^2 + B_1B_2{}^2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{16}\right)^2 = \frac{100}{256} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^4$$

ومنه : $l_2 = A_2B_2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$

ب- استنتاج عبارة l_n بدلالة n :

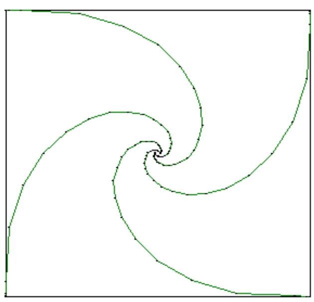
(l_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$ وحدّها الأول $l_0 = 1$

ومنه : $l_n = a_0 \times q^n = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^n$.

جـ- حساب المجموع p_n بدلالة n :

(p_n) هو مجموع n حدّا الأولى من متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

وَ حدها الأول $A_0A_1 = \dfrac{1}{4}$ ومنه :



$$p_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$$

$$= A_0A_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{4} \times \frac{\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right) - 1}$$

(2) أ- حساب a_0 ، a_1 وَ a_2 :

$a_0=(l_0)^2=1$ ، $a_1=(l_1)^2=\frac{5}{8}$ و $a_2=(l_2)^2=\left(\frac{5}{8}\right)^2$

ب- استنتاج عبارة a_n بدلالة n : (a_n) متتالية هندسية أساسها $q'=\frac{5}{8}$ وحدّها الأول $a_0=1$ ومنه :

$$a_n=a_0\times(q')^n=\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

جـ- حساب المجموع s_n بدلالة n :

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=a_0\times\frac{(q')^{n+1}-1}{q'-1}=\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}\right]$$

(3) دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (l_n) :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$l_{n+1}-l_n=\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n$$

$$=\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n\left(\frac{\sqrt{10}}{4}-1\right)$$

نستنتج أن المتتالية (l_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

- دراسة اتجاه تغيّر المتتالية (a_n) :

من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}-\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

$$=\left(\frac{5}{8}\right)^n\cdot\left(\frac{5}{8}-1\right)=-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

نستنتج أن المتتالية (a_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

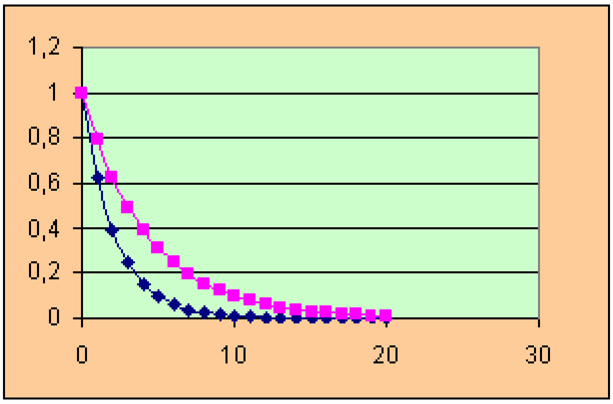
(4) تقارب المتتاليتين (l_n) وَ (a_n) :

n	10	20	30	40	50
l_n	0.09536	0.00909	0.00086	0.00000	0.00000
a_n	0.00909	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 0$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

وبالتالي فإن المتتاليتين (l_n) وَ (a_n) متقاربتان نحو العدد 0 .

● الرسم :



واضح من التمثيل البياني لكل من المتتاليتين (l_n) وَ (a_n) أنهما متقاربتان نحو العدد 0 .

بكالوريات غير محلولة

تمرين 1 (Bac Nouvelle Calédonie Mars 2005)

الجزء الأول :

A_0 وَ B_0 نقطتان متمايزتان من مستقيم ، نعرّف النقطتين A_1 وَ B_1 كما يلي :

A_1 منتصف القطعة $[A_0B_0]$ وَ B_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A_0\,;1),(B_0\,;2)\}$

(1) علم النقط A_1 ، B_1 ، A_2 وَ B_2 من أجل $A_0B_0 = 12\,cm$.

ما هو التخمين الذي يمكن وضعه على النقط A_n وَ B_n عندما يصبح n كبيرا ؟

(2) نزود المستقيم (A_0B_0) بمعلم $(A_0\,;\,\vec{i})$ حيث $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

نعتبر النقطتين A_n وَ B_n اللتين فاصلتاهما u_n وَ v_n على الترتيب .

بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ وَ $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

الجزء الثاني :

نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) المعرفتين من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} v_0=12 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$$

① برهن أن المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $w_n=v_n-u_n$ هي متتالية هندسية متقاربة وأن كل حدودها موجبة .

② برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .

③ استنتج من السؤالين السابقين أن المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) متقاربتان وأن لهما نفس النهاية .

④ نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $t_n=2u_n+3v_n$ برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

الجزء الثالث :

اعتمادا على النتائج المحصل عليها من الجزأين السابقين ، حدّد نهاية النقط A_n وَ B_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

تمرين 2 (Bac Noumea 2005)

نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) المعرفتين من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=u_{n-1}+\dfrac{1}{n} \end{cases} \quad \text{وَ} \quad \begin{cases} v_0=4 \\ v_n=u_n-\ln n \end{cases}$$

① أ- احسب u_2 ، u_3 وَ u_4 .

ب- برهن أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

② أ- برهن أنه من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\dfrac{1}{x}dx\leq\dfrac{1}{k}$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 :

$$u_n-1\leq \ln n\leq u_n-\frac{1}{n} \quad \text{وَ} \quad 0\leq v_n\leq 1$$

③ أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

ب- استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

4 برهن أن المتتالية (v_n) متقاربة . يرمز l إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا نبحث عن حساب l) . احسب نهاية المتتالية (u_n) .

تمرين 3 (بكالوريا 2005 الكامرون)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{1}{2}\left(n^2+n\right) \end{cases}$$

1 أ- احسب u_1 ، u_2 وَ u_3 .

ب- نضع $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$.

اكتب T_n-T_{n-1} بدلالة u_n ، ثم بدلالة n .

جـ- استنتج أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=n$.

2 نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$v_0=1$ وَ $v_n=\frac{1}{3^{3n}}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ- احسب v_1 ، v_2 وَ v_3 .

ب- اكتب عبارة v_{n+1} بدلالة v_n .

جـ- استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

3 نضع $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}$.

أ- اكتب S_n بدلالة n .

ب- احسب نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

تمرين 4 (Bac Antilles Guyane juin 2004)

نعرف المتتاليتين (a_n) وَ (b_n) بما يلي :

$a_0=1$ ، $b_0=7$ وَ من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n) \end{cases}$

ليكن (D) مستقيما مزودا بمعلم $(O\,;\,\vec{i})$. من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، نعتبر النقطتين

A_n و B_n اللتين فاصلتاهما a_n و b_n على الترتيب .

① علم النقط A_0 ، B_0 ، A_1 ، B_1 ، A_2 و B_2 .

② لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $u_n = b_n - a_n$

- برهن أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .
- اكتب عبارة u_n بدلالة n .

③ قارن بين a_n و b_n . ادرس اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (a_n) و (b_n).

- فسّر هندسيا هذه النتائج .

④ برهن أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان .

⑤ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $v_n = b_n + a_n$.

- برهن أن (v_n) متتالية ثابتة .
- استنتج أن كل القطع المستقيمة $[A_nB_n]$ لها نفس المنتصف I .

⑥ بيّن أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متقاربتان واحسب نهاية كل منهما .

- فسّر هندسيا هذه النتيجة .

تمرين 5 (Bac Nouvelle Calédonie Novembre 2004)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

① احسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 .

② لتكن (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $w_n = v_n - u_n$.

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$.

ب- اكتب عبارة w_n بدلالة n ، وعيّن نهاية المتتالية (w_n) .

③ بعد دراسة اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، برهن أنهما متجاورتان.

④ نعتبر الآن المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

أ- برهن أن (t_n) متتالية ثابتة .

ب- استنتج نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

تمرين 6 (بكالوريا 1998 علوم الطبيعة والحياة)

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3} \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n \end{cases}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n < 1$.

برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

أ- عيّن العدد الحقيقي α بحيث : $f(\alpha) = \alpha$.

ب- نضع ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = u_n - \alpha$.

- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 7 (بكالوريا 1998 **تونس** . الشعبة : علوم تجريبية)

ليكن α عددا حقيقيا ينتمي إلى المجال $]0;1[$. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n - \alpha} \end{cases}$$

(1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge 1$.

ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعيّن نهايتها .

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n و α . استنتج عبارة u_n بدلالة n و α.

جـ- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين 8 (بكالوريا أجنبية)

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) ، (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$u_0=9 \text{ ، } u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3 \text{ و } v_n=u_n+6$$

1 أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n .

جـ- نعتبر المجموع $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

احسب S_n بدلالة n واستنتج حساب المجموع $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

د- استنتج نهاية كل من المجموعين S_n و S'_n .

2 نعرف المتتالية (w_n) بـ $w_n=\ln(v_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- برهن أن (w_n) متتالية حسابية .

ب- احسب بدلالة n المجموع $S''_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S''_n$

3 ليكن الجداء $p_n=v_0\times v_1\times\cdots\times v_n$.

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(p_n)$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

تمرين 9 (بكالوريا أجنبية)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة في $\mathbb{N}$ بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=e \text{ ، العدد } e \text{ هو أساس اللوغاريتم النيبيري} \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n} \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n . \end{cases}$$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بما يلي : $v_n=\ln u_n$.

1 أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

2 من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n$

و $p_n=u_0\times u_1\times\cdots\times u_n$.

أ- أثبت أن : $p_n=e^{S_n}$.

ب- اكتب عبارة S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n .

جـ- عيّن نهاية المتتالية (s_n) ثم استنتج نهاية المتتالية (p_n).

تمرين 10 (بكالوريا أجنبية)

لتكن f الدالة المعرفة من أجل $x > \frac{1}{2}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

① برهن أن ، من أجل كل $x > 1$ ، $f(x) > 1$.

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

② نعتبر المتتاليتين (v_n) وَ (w_n) المعرفتين كما يلي :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{و} \quad w_n = \ln(v_n)$$

أ- برهن أن المتتاليتين (v_n) وَ (w_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n .

ب- برهن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

جـ- اكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n .

③ أ- استنتج أن : $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 11 :

أراد فلاح أن يزرع في بستانه مجموعة من الأشجار على شكل حلزون كما يُوضحه الشكل . لهذا وجب عليه معرفة طول هذا الحلزون حتى يُقدّر عدد الأشجار التي يمكن زرعها . هذا الحلزون مُكوّن من أنصاف الدوائر بالكيفية التالية :

A_2 مركز نصف الدائرة c_0 ذات القطر $[A_0A_1]$.

A_3 مركز نصف الدائرة c_1 ذات القطر $[A_1A_2]$.

A_4 مركز نصف الدائرة c_2 ذات القطر $[A_2A_3]$.

نواصل بهذه الكيفية إنشاء أنصاف الدوائر c_n .

نفرض أن $A_0A_1 = 100\,m$.

① نسمّي l_n طول نصف الدائرة c_n .

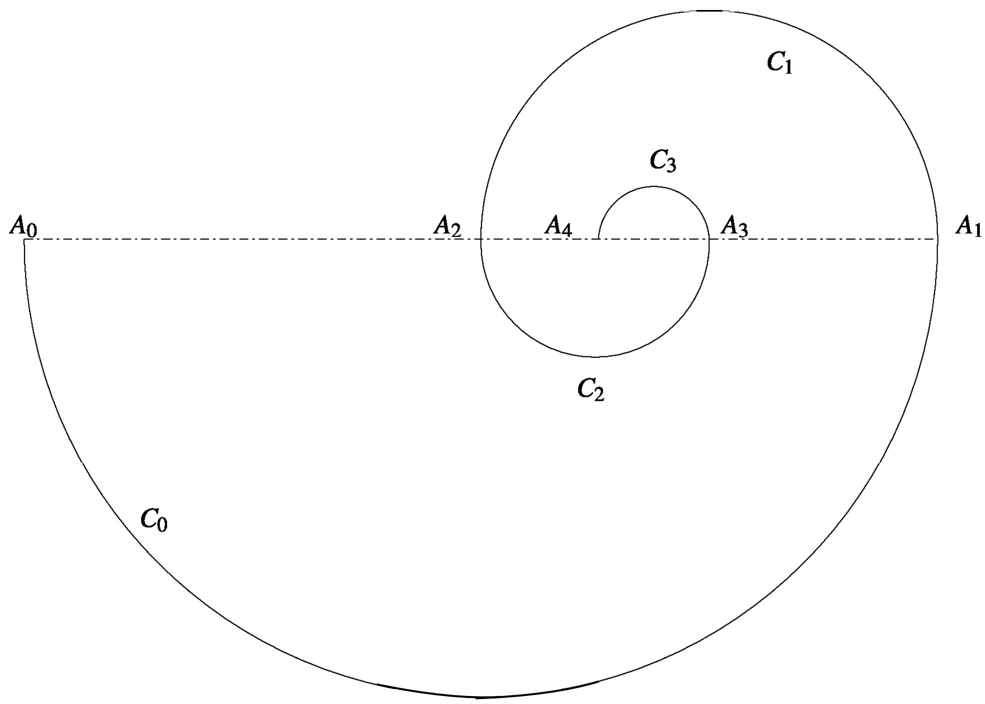
أ- احسب l_0 ، l_1 ، l_2 وَ l_3 .

ب- استنتج l_{n+1} بدلالة l_n ثم حدّد طبيعة المتتالية (l_n) .

جـ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $l_n = 50\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

② قرّر الفلاح أن يرسم أنصاف الدوائر الثمانية c_0 ، c_1 ، ... ، c_7 فقط .

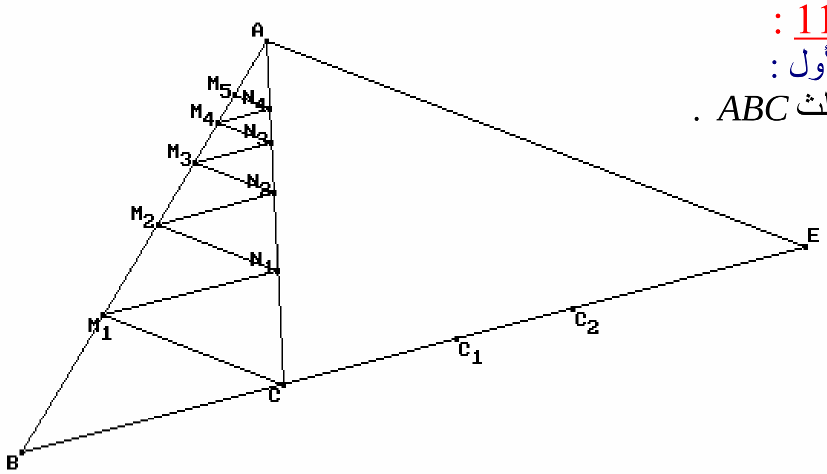
احسب L طول الحلزون الناتج عن أنصاف هذه الدوائر الثمانية .



تمرين 11 :

الجزء الأول :

ليكن المثلث ABC .



① أنشئ النقطتين M_1 و N_1 حيث : $\overrightarrow{AM_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

② ما هي الفرضيات التي تعطينا نفس الشكل ؟

- باستعمال مرجح النقط .
- باستعمال التحاكي .
- باستعمال معلم .

③ المستقيم الموازي لـ(CM_1) و يشمل N_1 يقطع المستقيم (AB) في M_2

والمستقيم الموازي لـ(BC) و يشمل M_2 يقطع المستقيم (AC) في N_2 .

نعرّف بنفس الطريقة السابقة النقط M_3 ، N_3 ، M_4 ، N_4 و هكذا ...

أ- عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{AM_2}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

ب- عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{AM_3}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

④ عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{AM_8}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

اكتب M_8 كمرجح للنقطتين A و B .

⑤ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{AM_n}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

⑥ النقط M_n تقترب من النقطة A .

برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن النقطة M_{n+1} تقع بين النقطتين M_n و A

- ابتداء من أية رتبة يكون $0<\left(\frac{2}{3}\right)^n<10^{-3}$ ؟

7) برهن أن M_n هي مركز المسافتين المتساويتين للجملة :

$$\left\{\left(A,3^n-2^n\right),\left(B,2^n\right)\right\}$$

8) المستقيم الموازي لـ(CM_1) ويشمل النقطة A يقطع المستقيم (BC) في E ، المستقيم (M_2N_1) يقطع (BC) في C_1 ، المستقيم (M_3N_2) يقطع (BC) في النقطة C_2 و هكذا ...

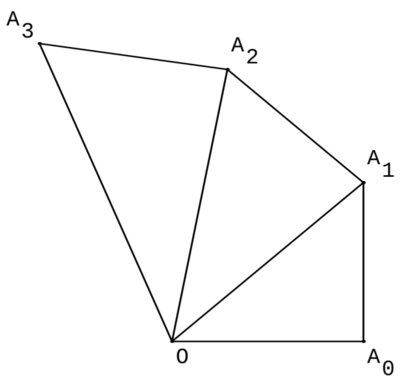
أ- عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{BE}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

ب- برهن أن $\overrightarrow{BE}=\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right].\overrightarrow{BC}$

(يمكن الاستعانة بعلاقة شال أي : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\cdots$)

جـ- استنتج رتابة المتتالية (S_n) حيث :

$$S_n=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$



الجزء الثاني :

- OA_0A_1 مثلث قائم في A_0 و متساوي الساقين حيث $OA_0=A_0A_1=1$ ،
- OA_1A_2 مثلث قائم في A_1 و متساوي الساقين حيث $OA_1=A_1A_2=1$ ، و هكذا ...

1 نضع ، من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $c_n=OA_n$

أ- عبّر عن c_n بدلالة n .

ب- برهن أن المتتالية (c_n) متزايدة تماما .

جـ- ابتداء من أية قيمة للعدد الطبيعي n يكون $c_n>10^6$ ؟

2 من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ نسمّي a_n قياس بالدرجات للزاوية $A_{n-1}OA_n$.

احسب a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 و a_5 .

3 نضع $u_n=\cos(a_n)$.

أ- عبّر عن u_n بدلالة n .

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

جـ- استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$ (يمكن الاستعانة بآلة حاسبة أو بمجدول Excel)

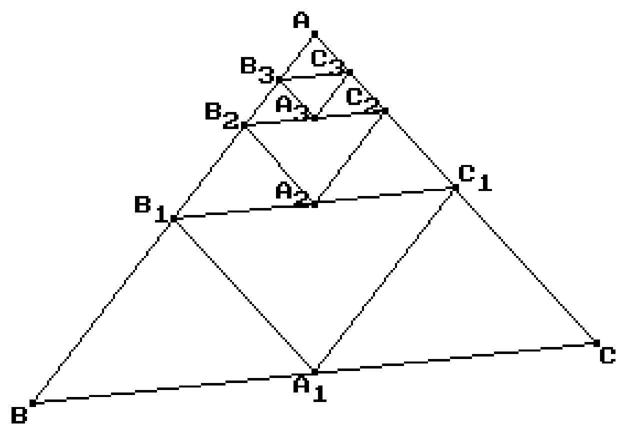
- يمكن إعادة الأسئلة السابقة من أجل $v_n = \sin(a_n)$.

4 برهن أن المتتالية (a_n) متناقصة تماما .

5 ابتداء من أية رتبة يكون $a_n < 1^\circ$ ؟

الجزء الثالث :

- ABC مثلث .
- A_1 ، B_1 ، C_1 منتصفات أضلاع $[BC]$ ، $[AB]$ وَ $[AC]$ على الترتيب
- A_2 ، B_2 ، C_2 منتصفات أضلاع $[B_1C_1]$ ، $[A_1B_1]$ وَ $[A_1C_1]$ على الترتيب ، وهكذا...



1 نسمّي S مساحة المثلث ABC ، S_n مساحة المثلث $A_n B_n C_n$.

برهن أن $S_1 = \frac{1}{4} S$ ، ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n$.

2 نسمّي T_1 مساحة شبه المنحرف BB_1C_1C ،

T_2 مساحة شبه المنحرف $B_1B_2C_2C_1$ وهكذا ...

برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{1}{3} T_n$.

3 استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{1}{3}$.