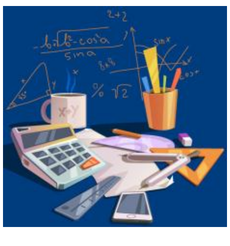
Maths

1AS

رياضيات

ملخصات الأستاذ مصطفى

للسنة الأولى ثانوي



I ❤ MAπH

Prof Mustapha
KHALDI

الفهرس

الأعداد والحساب

1. المجموعات الأساسية للأعداد:

① الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

هي أعداد لا تحتوي على إشارة و لا فاصلة و لا كسر و لا جذر و لا π مثل: ... $0;\ 1;\ 2;\ 3$

② الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$:

هي الأعداد الطبيعية + الأعداد السالبة (لا تحتوي على فاصلة و لا كسر و لا جذر و لا π)

مثل: $\dots -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\ \dots$

③ الأعداد العشرية $\mathbb{D}$:

- هي الأعداد الصحيحة النسبية + الأعداد التي تحتوي على فاصلة منتهية أي لا تتضمن دورا
- يمكن كتابتها على الشكل: $\boxed{\dfrac{p}{10^n}}$ أو $\boxed{\dfrac{p'}{2^{\alpha}\times 5^{\beta}}}$ حيث ($\{p;p'\}\in\mathbb{Z}$ و $\{n;\alpha;\beta\}\in\mathbb{N}$).
- لا تحتوي على جذر و لا π

مثال: $\dfrac{41}{8}\ ;\ 9,005\ ;\ \dfrac{53}{10^7}\ ;\ 0,2\ ;\ \dfrac{1}{4}\ ;\ 0,45$

④ الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$:

- هي الأعداد العشرية + الأعداد التي تتضمن دورا (أي فاصلة غير منتهية)
- كل عدد ناطق يقبل كتابة على الشكل $\dfrac{p}{q}$ (حيث p و q عددان صحيحان نسبيان و $q\neq 0$)

مثال: $\dfrac{1}{9}\ ;\ 3,\underline{24}2424\dots\ ;\ \dfrac{76}{111}\ ;\ 0,\underline{267}267267\dots\ ;\ \dfrac{34}{22}\ ;\ 2,\underline{3}3333\dots$

⑤ الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

هي أكبر مجموعة و تحتوي كل الأعداد السابقة $\mathbb{N}$ + $\mathbb{Z}$ + $\mathbb{D}$ + $\mathbb{Q}$ + الأعداد الصماء

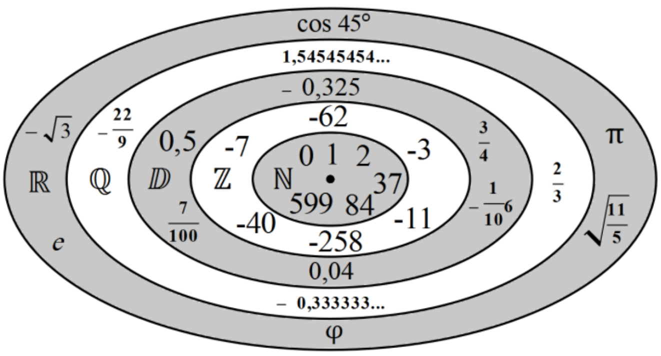
* **الأعداد الصماء:** هي الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بعدد كامل أو كسر كـ π و الجذور

◈ **الأعداد الأولية:** العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط

مثال: ... 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 ,101

(عكس العدد الأولي هو عدد مؤلف ويكتب على شكل جداء عوامل أولية)

✳مقارنة مجموعات الأعداد:



$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

Prof Mustapha
KHALDI

2. قوانين القوى:

	العلاقات العامة
1	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
2	$(a^m)^n = a^{m\times n}$
3	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4	$(a \times b)^m = a^m \times b^m$
5	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$
6	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

	العلاقات الخاصة
1	$a^1 = a$
2	$a^0 = 1$
3	$a^n \times a^{-n} = 1$
4	$\dfrac{a^n}{a^n} = 1$
5	إذا كان n زوجيا: $(-1)^n = 1$
6	إذا كان n فرديا: $(-1)^n = -1$
7	$(a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

3. الجذور التربيعية:

$a \geq 0$ و $b > 0$:

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- $b^2 = a \Rightarrow \sqrt{a} = b$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \geq 0$

4. القيمة المضبوطة، القيمة المقربة:

a) المدور

A عدد حقيقي مكتوب في شكله العشري، وليكن d رقمه العشري ذا الرتبة $p+1$

نسمي مدور A إلى 10^{-P} العدد الذي نحصل عليه كما يلي:

- إذا كان $d \geq 5$ نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p و نضيف 1 إلى هذا الرقم
- إذا كان $d < 5$ نأخذ العدد بأرقامه العشرية إلى الرقم العشري الذي رتبته p

b) الكتابة العلمية

هي كتابة عدد عشري بحيث يكون هناك رقم واحد غير معدوم قبل الفاصلة أو كتابته على الشكل $a \times 10^n$

حيث $a \in \mathbb{D}$ و $1 \leq a < 10$ و $n \in \mathbb{Z}$

c) رتبة مقدار

❶ نكتب العدد على الشكل العلمي

❷ نحتفظ بقوة 10 ثم ندور العدد إلى العدد الصحيح الأقرب منه (التدوير إلى الوحدة)

Prof Mustapha
KHALDI

5. الأولوية في الحساب:

① الحسابات داخل الأقواس
② الحسابات المتعلقة بالقوى و الجذور
③ عمليات الضرب و القسمة حسب ترتيب كتابتها
④ عمليات الجمع و الطرح حسب ترتيب كتابتها

6. من الكتابة العشرية الدورية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له

① نسمي العدد A و نكتبه على الشكل $A = a + x$ حيث a هو الجزء الصحيح و x هو الجزء العشري
② نكتب المعادلة "$x =$ الجزء العشري" ثم نضرب طرفيها في 10^n حيث n عدد أرقام الدور
③ نكتب العدد العشري الجديد كمجموع جزئيه الصحيح و العشري
④ نعوض الجزء العشري ب x ثم نحل المعادلة ذات المجهول x
⑤ أخيرا نعوض x في المعادلة $A = a + x$ ثم نحسب A

7. اختبار أولية عدد طبيعي

① نختبر قابلية قسمة العدد على كل من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي
② نتوقف عن عمليات القسمة عند أول باق معدوم أو عندما نصادف أول حاصل قسمة أصغر من القاسم
③ في الأخير إذا كان الباقي معدوم فإن العدد غير أولي وإلا فهو أولي.

8. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

① نقسم العدد على أصغر عدد أولي يكون قاسما له
② نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أولي يكون قاسما له
③ نكرر العملية ② حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي 1
كتابة جداء هذه القواسم هو تحليل العدد إلى جداء عوامل أولية

9. استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية

1.9. لحساب المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$ لعددين أو عدة أعداد

نحسب جداء العوامل الأولية الغير مشتركة و المشتركة لها مأخوذة مرة واحدة بأكبر أس

2.9. لحساب القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ لعددين أو عدة أعداد

نحسب جداء العوامل الأولية المشتركة لها مأخوذة مرة واحدة بأصغر أس

3.9. للإختزال (كتابة كسر على شكل غير قابل للإختزال)

نحلل كلا من البسط و المقام إلى جداء عوامل أولية ثم نطبق قوانين القوى لاختزال الكسر

<u>طريقة2:</u> نحسب $PGCD$ للبسط و المقام بقسمة خوارزمية إقليدس ثم نقسمهما عليه

10. معرفة هل الكسر عدد عشري أو ناطق

① نكتب الكسر عل شكل غير قابل للإختزال
② نحلل المقام إلى جداء عوامل أولية
③ إذا كان هذا التحليل لا يشمل إلا قوى 2 أو 5 فالعدد عشري و إلا فهو ناطق

Prof Mustapha
KHALDI

المقارنة، الترتيب، المجالات والحصر

1. المقارنة في $\mathbb{R}$

$$a > b \Rightarrow a - b > 0$$
$$a < b \Rightarrow a - b < 0$$
$$a = b \Rightarrow a - b = 0$$
$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

2. عمليات و قواعد على الترتيب

❶ الجمع

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$
$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

❷ الضرب

إذا كان $c > 0$ فإن: $a \leq b \Rightarrow a \times c \leq b \times c$

إذا كان $c < 0$ فإن: $a \leq b \Rightarrow a \times c \geq b \times c$

إذا كان $\{a; b; c; d\} \in \mathbb{R}^+$ فإن: $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a \times c \leq b \times d$

إذا كان $\{a; b; c; d\} \in \mathbb{R}^-$ فإن: $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a \times c \geq b \times d$

❸ التربيع

إذا كان $\{a; b\} \in \mathbb{R}^+$ فإن: $a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

إذا كان $\{a; b\} \in \mathbb{R}^-$ فإن: $a \leq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$

❹ الجذر

إذا كان $\{a; b\} \in \mathbb{R}^+$ فإن: $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

❺ المقلوب

إذا كان a و b عددان حقيقيان غير معدومين و من نفس الاشارة فإن:

$$a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

❻ القوة

$$a \geq 1 \Rightarrow a \leq a^2 \leq a^3$$
$$0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a \geq a^2 \geq a^3$$

3. المجالات

① رموز بعض المجالات

الرمز	المجال
$\mathbb{R}^+$	$[0; +\infty[$
$\mathbb{R}^-$	$]-\infty; 0]$
$\mathbb{R}^*$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{*+}$	$]0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{*-}$	$]-\infty; 0[$
$\mathbb{R} - \{a\}$	$]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$
$\mathbb{R} - \{a; b\}$	$]-\infty; a[\cup]a; b[\cup]b; +\infty[$

Prof Mustapha
KHALDI

② أنواع المجالات

المجال	الحصر	التمثيل
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$[a;+\infty[$	$x \geq a$	
$]a;+\infty[$	$x > a$	

③ تقاطع و اتحاد مجالين

تقاطع مجالين$\cap$: $I \cap J$ هي مجموعة الأعداد التي تنتمي إلى I و J (أي العناصر المشتركة بينهما فقط)

إتحاد مجالين$\cup$: $I \cup J$ هي مجموعة الأعداد التي تنتمي إلى I أو J (أي العناصر المشتركة و الغير مشتركة)

4. الحصر *

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad c \leq y \leq d$$

❶ المجموع:

$$a + c \leq x + y \leq b + d$$

❷ الجداء:

$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$ حيث $\{a;b;c;d;x;y\} \in \mathbb{R}^+$

*ملاحظة: لا توجد قاعدة عامة لعملية الطرح والقسمة ما بين حصرين لذلك نقوم بما يلي:

❸ الطرح: $x + (-y)$

a) نضرب الحصر المراد طرحه في (-1) فيصبح: $-d \leq -y \leq -c$

b) نجمع الحصرين طرفا لطرف: $a + (-d) \leq x + (-y) \leq b + (-c)$

❹ القسمة: $x \times \left(\frac{1}{y}\right)$ إذا كان $\{a;b;x\} \in \mathbb{R}^+$ و $\{c;d;y\} \in \mathbb{R}^{*+}$

a) نقوم بعملية المقلوب على الحصر المراد القسمة عليه فيصبح: $\frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c}$

b) نضرب الحصرين طرفا لطرف: $a \times \left(\frac{1}{d}\right) \leq x \times \left(\frac{1}{y}\right) \leq b \times \left(\frac{1}{c}\right)$

نغير اتجاه المتباينة (المتراجحة):

①عندما نضرب في عدد سالب

②عندما نقسم على عدد سالب

③مقلوب طرفين من نفس الإشارة

④مربع طرفين سالبين

⑤القيمة المطلقة لطرفين سالبين

Prof Mustapha
KHALDI

القيمة المطلقة والمسافة

I. القيمة المطلقة $|x|$

1) تعريف القيمة المطلقة:

● الهدف من القيمة المطلقة هو جعل جميع القيم **موجبة**

✳و منه نستنتج أن القيمة المطلقة تترك العدد الموجب لحاله بينما تسبق العدد السالب بإشارة $(-)$ ليصبح موجب.

مثال:

- $|3| = 3$
- $|-5| = -(-5) = 5$

✳ إذن القاعدة: بما أن x مجهول فهناك حالتان إما موجب أو سالب

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{لما} \quad x \geq 0 \ (\text{موجب}) \\ -x & \text{لما} \quad x \leq 0 \ (\text{سالب}) \end{cases}}$$

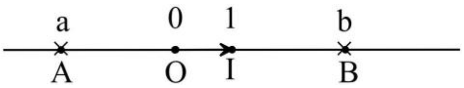
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & ; \ x \in [0; +\infty[\\ -x & ; \ x \in \ ]-\infty; 0] \end{cases}}$$

2) خواص القيمة المطلقة:

- $|x| = |-x|$
- $|x| \times |y| = |x \times y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad y \neq 0$
- $|x + y| < |x| + |y|$; إذا كان x و y مختلفين في الإشارة
- $|x + y| = |x| + |y|$; إذا كان x و y من نفس الإشارة
- $\sqrt{x^2} = |x|$

II. المسافة

1) المسافة بين نقطتين:



المسافة بين نقطتين A و B فاصلتهما a و b على الترتيب من مستقيم مزود بمعلم $(O; \vec{I})$ هي:

$$AB = |a - b| = |b - a|$$

2) المسافة بين عددين:

المسافة بين عددين x و y هي:

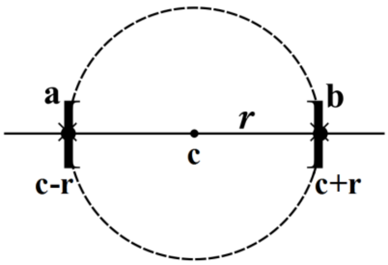
$$d(x; y) = |x - y| = |y - x|$$

Prof Mustapha
KHALDI

العلاقة بين المجال، الحصر، المسافة والقيمة المطلقة

❖ عناصر المجال: $[a;b]$

- مركزه: $c=\frac{a+b}{2}$
- طوله (قطره) $= b-a$
- نصف قطره: $r=\frac{b-a}{2}$
- حده: $a=c-r$
- حده: $b=c+r$



Prof Mustapha
KHALDI

❖ من أجل كل $x\in[a;b]$:

- $x\in[c-r;c+r]$
- $c-r\le x\le c+r$
- $d(x;c)\le r$
- $|x-c|\le r$

❖ الجدول:

القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$\lvert x-c\rvert\le r$	$d(x;c)\le r$	$a\le x\le b$	$x\in[a;b]$

❖ ملأ الجدول:

القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$\left\lvert x-\frac{a+b}{2}\right\rvert\le\frac{b-a}{2}$	$d\left(x;\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{b-a}{2}$	$a\le x\le b$	$x\in[a;b]$

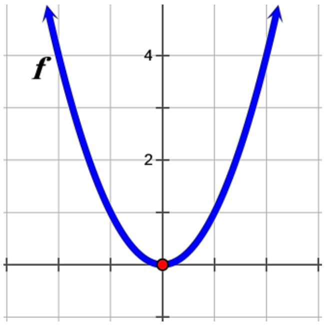
القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$\lvert x-c\rvert\le r$	$d(x;c)\le r$	$c-r\le x\le c+r$	$x\in[c-r;c+r]$

الطريقة:

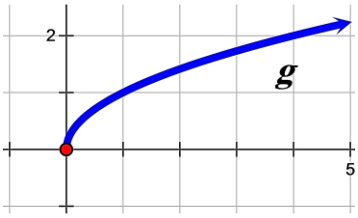
$$\begin{cases}c=\frac{a+b}{2}\\ r=\frac{b-a}{2}\end{cases}\quad ; \quad \begin{cases}a=c-r\\ b=c+r\end{cases}$$

مجموعة التعريف D

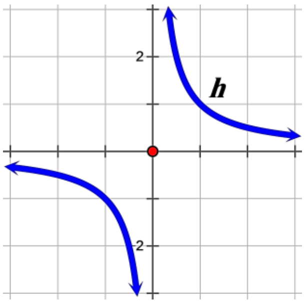
❶ بيانيا:



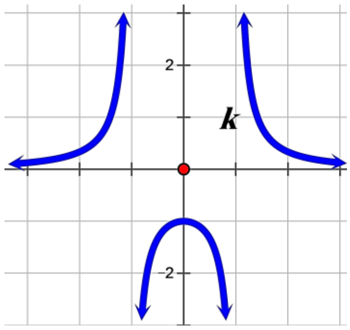
$D_f =]-\infty; +\infty[$



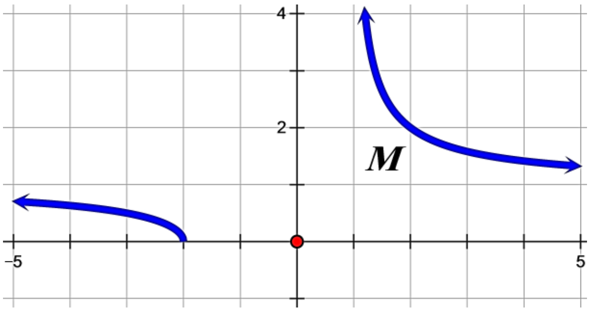
$D_g = [0; +\infty[$



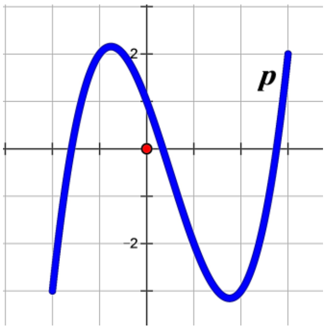
$D_h =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$



$D_k =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$



$D_M =]-\infty; -2] \cup]1; +\infty[$



$D_p = [-2; 3]$

❷ حسابيا:

Prof Mustapha
KHALDI

- لا جذر ولا كسر مثل: $f(x) = 6x^2 - 15x + 8$

نكتب: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

- كسر مثل $f(x) = \frac{x^2+7}{x-2}$ نكتب:

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ أي $D_f =]-\infty; 2[\cup]2;\ +\infty[$

- جذر مثل $f(x) = \sqrt{x-3}$ نكتب:

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$D_f = [3; +\infty[$

- كسر و جذر

مثال1: $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+5}}$ نكتب:

$x + 5 > 0$

$x > -5$

$D_f =]-5; +\infty[$

مثال2: $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{9}{x-6}$ نكتب:

$x + 4 \geq 0$ و $x - 6 \neq 0$

$x \geq -4$ و $x \neq 6$

$D_f =]-4; 6[\cup]6; +\infty[$

إذن القاعدة:

❶ لا كسر و لا جذر: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

❷ في الكسر نكتب: المقام $\neq 0$

❸ في الجذر نكتب: ما داخل الجذر ≥ 0

❹ في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر: D_f هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

❸ الملخص:

الدالة	مجموعة التعريف
$f(x) =$ كثير الحدود	$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{g(x)} + \dfrac{h(x)}{k(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ k(x) \neq 0\}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ h(x) > 0\}$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$	$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \ \wedge h(x) \neq 0\right\}$

حيث $g(x)$، $h(x)$ و $k(x)$ كلها دوال كثيرات حدود

❹ العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. ë و k عددان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f + k$	D_f
kf	D_f
$f + g$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$D_f \cap D_g$
$\dfrac{f}{g}$	$\{x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$
$f \circ g$ أي $f[g(x)]$	$D_{f\circ g} = \{x / \ x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\}$

Prof Mustapha
KHALDI

عموميات على الدوال

Prof Mustapha
KHALDI

I. تعاريف ومصطلحات

- الدالة ببساطة هي العبارة التي ترفق بكل عدد x صورة له y
- نرمز للدوال بالرمز $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ .... الخ
- تسمى $f(x)$ أو y حيث $f(x) = y$ الدالة أو الصورة أو الترتيبة
- يسمى x المتغير أو السابقة أو الفاصلة
- كل دالة معرفة على مجال يسمى مجموعة التعريف D

✱ملاحظة مهمة

يمكن للصورة أن يكون لها عدة سوابق لكن العكس غير صحيح للسابقة صورة وحيدة فقط

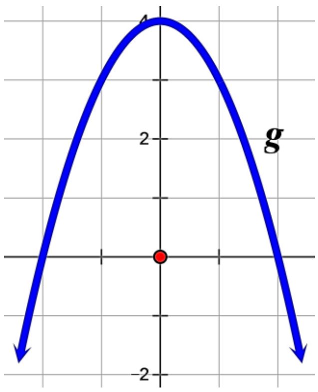
II. طرق تعريف الدوال

① دالة معرفة بدستور

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

- مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- صورة العدد 3 بالدالة f هي $f(3) = 3^2 + 2(3) + 1 = \boxed{16}$
- سوابق العدد 1 بالدالة f هي $f(x) = 1$ أي $x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftarrow x^2 + 2x = 0$
$\Leftarrow x(x+2) = 0 \Leftarrow x = \boxed{0}$ أو $x = \boxed{-2}$

② دالة معرفة بتمثيل بياني



مثال: الشكل المقابل يمثل تمثيل بياني لدالة g

- مجموعة تعريف الدالة g هي $D_g =]-3; 3[$
- صورة العدد 1 بالدالة g هي 3 و صورة 0 هي 4
- سوابق العدد 3 بالدالة g هي 1 و -1 وسوابق 0 هي 2 و -2
- العدد 5 ليس له سوابق بالدالة g

③ دالة معرفة بجدول تغيرات

x	0	4	9	$+\infty$
تغيرات h	0 ↗	2 ↗	3 ↗	

مثال: الجدول المقابل يمثل جدول تغيرات لدالة h

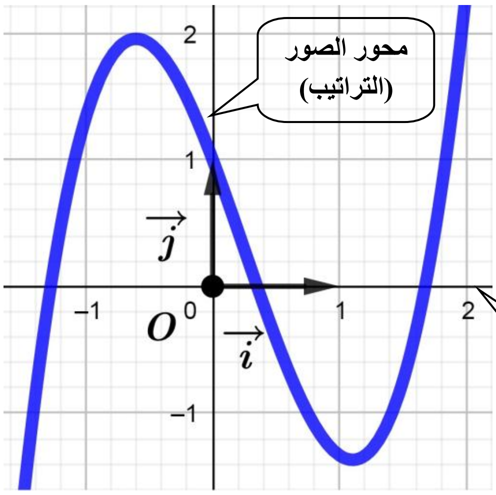
- مجموعة تعريف الدالة h هي $D_h = [0; +\infty[$
- صورة العدد 0 بالدالة h هي 0 و صورة 4 هي 2
- سابقة العدد 3 بالدالة h هي 9
- العدد -1 ليس له سوابق بالدالة h

④ دالة معرفة بجدول قيم

الطرود البريدية	
الوزن (Kg)	التعريفة (DA)
$]0; 5]$	25
$]5; 10]$	40
$]10; 15]$	62
$]15; 20]$	83
$]20; 30]$	110

مثال: يمثل الجدول المقابل تعريفات بريد الجزائر لسنة 2005
إذا رمزنا للطرود البريدية بالدالة h فإن:

- مجموعة تعريف الدالة h هي $D_h =]0; 30]$
- صورة 12 بالدالة h هي 62
- سوابق 83 هي كل الأعداد من المجال $]15; 20]$
- مثلا العدد 70 ليس له سوابق بالدالة h



III. التمثيل البياني لدالة

- التمثيل البياني أو المنحنى الممثل للدلة f في المعلم $(O;\vec{I},\vec{J})$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x \in D_f$ و $y = f(x)$
- نرمز إلى منحنى الدالة f بالرمز C_f
- نقول أن $y = f(x)$ هي معادلة C_f في المعلم $(O;\vec{I},\vec{J})$

✱تنبيه وملاحظة مهمة

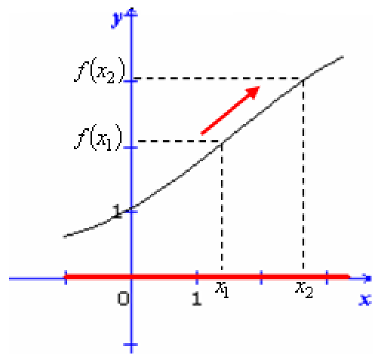
ما عدا الدوال الخطية، التآلفية والثابتة لا يمكن رسم أي دالة أخرى عن طريق الجدول المساعد أو النقاط المساعدة لأنه هناك العديد من الكيفيات للمرور من نقطة إلى أخرى فمن الضروري أن تعطى معلومات أخرى حول سلوك الدالة وسنتعلم في محور الدوال المرجعية إحدى الطرق الرئيسية لرسم الدوال.

IV. تغيرات الدالة

① دراسة اتجاه التغير: تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة

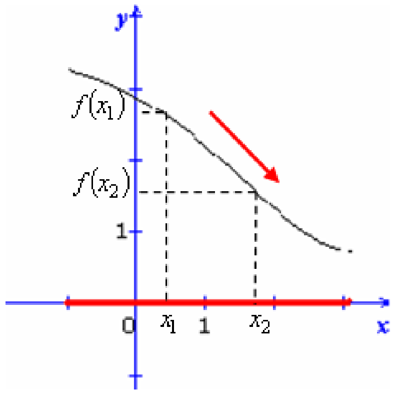
	إذا كان	و	فإن
❶	$x_1 < x_2$	$f(x_1) < f(x_2)$	f متزايدة
❷	$x_1 < x_2$	$f(x_1) > f(x_2)$	f متناقصة
❸		$f(x_1) = f(x_2)$	f ثابتة

Prof Mustapha
KHALDI



$f(x_1)$ ، $f(x_2)$ في نفس ترتيب x_1 ، x_2

الدالة المتزايدة تحفظ الترتيب



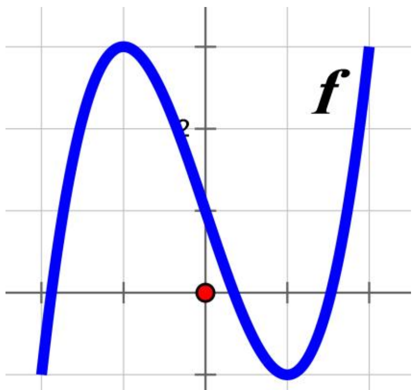
$f(x_1)$ ، $f(x_2)$ في عكس ترتيب x_1 ، x_2

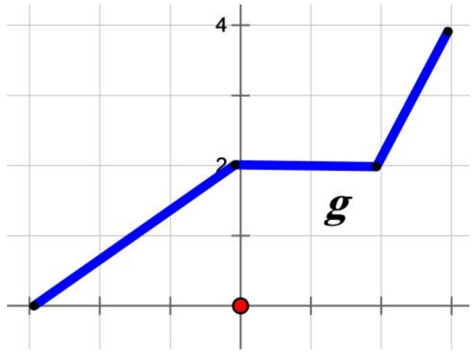
الدالة المتناقصة تعكس الترتيب

② جدول التغيرات: هو جدول نلخص فيه كل المعطيات عن الدوال كمجموعة التعريف واتجاه التغير والصور والسوابق والقيم الحدية...الخ

مثال: جدول التغيرات التالي يلخص المنحنى المقابل الممثل للدالة f

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3





✱الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما

مثال:

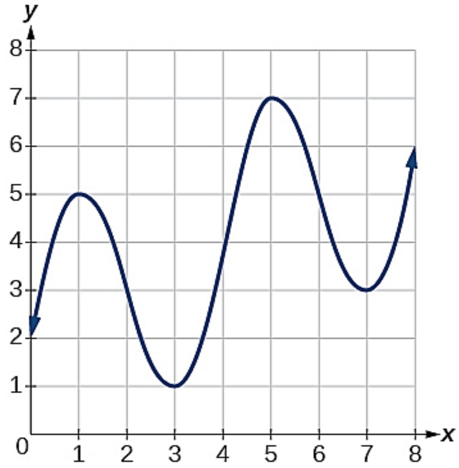
- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[-3;0]$
- الدالة g ثابتة على المجال $[0;2]$
- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[2;3]$

✱ لكن على المجال $[-3;3]$ نقول فقط أن الدالة g متزايدة

○ نفس المفهوم بالنسبة لمتناقصة ومتناقصة تماما

V]. القيم الحدية

① **القيمة الحدية العظمى:** هي أكبر صورة $f(a)$ تبلغها f عند سابقة a من D_f



نعبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي $(5;7)$
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي 7 عند 5
- أو القيمة الحدية الكبرى للدالة f هي $f(5)=7$

② **القيمة الحدية الصغرى:** هي أصغر صورة $f(b)$ تبلغها f عند سابقة b من D_f

نعبر عليها وفق المثال بثلاث صيغ فنقول:

- القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $(3;1)$
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي 1 عند 3
- أو القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $f(3)=1$

✱ملاحظة:

- يمكن للدالة أن تبلغ قيمتها العظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر من هذا المجال
- القيم الحدية دائما تكون عددا حقيقيا (بمعنى $-\infty$ و $+\infty$ لا يمكن أن يكونا قيم حدية)

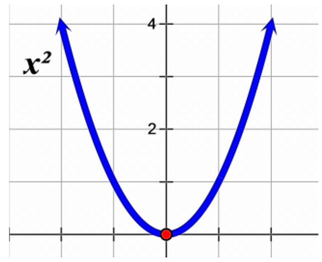
VI]. شفعية الدالة (أي زوجية أو فردية أم لا زوجية لا فردية)

① حسابيا

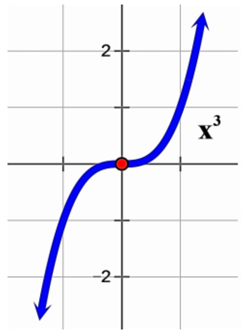
f زوجية $\Longleftarrow \begin{cases} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ \boxed{f(-x)=f(x)} \end{cases}$

f فردية $\Longleftarrow \begin{cases} D_f \text{ متناظرة بالنسبة إلى } 0 \\ \boxed{f(-x)=-f(x)} \end{cases}$

② بيانيا



الدالة الزوجية متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب



الدالة الفردية متناظرة بالنسبة للمبدأ

Prof Mustapha
KHALDI

③ **الدالة لا زوجية لا فردية:** هي الدالة التي لا يمكن كتابتها على الشكل $f(-x)=f(x)$ ولا على الشكل $f(-x)=-f(x)$ ومنحناها غير متناظر بالنسبة لمحور التراتيب و لا بالنسبة للمبدأ

✱ملاحظة: للبرهان أن دالة ما لا زوجية و لا فردية يكفي إيجاد عنصر a من D_f بحيث $f(-a)\neq f(a)$ و $f(-a)\neq -f(a)$ أو إثبات أن D_f غير متناظرة بالنسبة إلى 0

VII]. حل معادلات ومتراجحات بيانيا

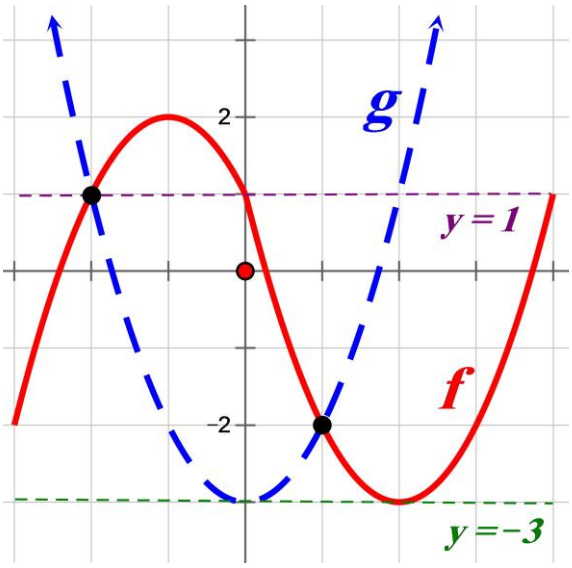
$f(x) = g(x) \Leftarrow$ فواصل نقط **تقاطع** C_f مع C_g

$f(x) > g(x) \Leftarrow$ المجال من x أين يكون C_f **فوق** C_g

$f(x) < g(x) \Leftarrow$ المجال من x أين يكون C_f **تحت** C_g

مثال شامل:

$D_f = [-3;4]$ و $D_g = [-2,5;2,5]$



$f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{-2;1\}$

$f(x) \geq g(x) \Rightarrow x \in [-2;1]$

$f(x) > g(x) \Rightarrow x \in]-2;1[$

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in [-3;-2] \cup [1;4]$

$f(x) < g(x) \Rightarrow x \in]-3;-2[\cup]1;4[$

$f(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2;0;4\}$

$f(x) \geq 1 \Rightarrow x \in [-2;0]$

$f(x) < 1 \Rightarrow x \in [-3;-2[\cup]0;4]$

$g(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2;2\}$

$g(x) > 1 \Rightarrow x \in [-2,5;-2[\cup]2;2,5]$

$g(x) \leq 1 \Rightarrow x \in [-2;2]$

$f(x) = -3 \Rightarrow x = 2$

$g(x) = -3 \Rightarrow x = 0$

$f(x) \geq -3 \Rightarrow x \in [-3;4]$

$g(x) > -3 \Rightarrow x \in [-2,5;0[\cup]0;2,5]$

$f(x) \leq -3 \Rightarrow x = 2$

$g(x) < -3 \Rightarrow S = \emptyset$

$f(x) \geq 3 \Rightarrow S = \emptyset$

$g(x) \leq -4 \Rightarrow S = \emptyset$

* نرمز للمجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$ أو بالرمز $\{\}$

VIII]. إشارة الدالة

① حسابيا

f موجبة $\Leftarrow f(x) > 0$

f سالبة $\Leftarrow f(x) < 0$

f معدومة $\Leftarrow f(x) = 0$

② بيانيا

f موجبة $\Leftarrow$ C_f فوق محور الفواصل

f سالبة $\Leftarrow$ C_f تحت محور الفواصل

f معدومة $\Leftarrow$ C_f يقطع محور الفواصل

IX]. تقاطع دالة مع محوري الاحداثيات

- C_f يقطع محور الفواصل $\Leftarrow \boxed{f(x) = 0}$
- C_f يقطع محور التراتيب $\Leftarrow \boxed{x = 0}$

Prof Mustapha
KHALDI

الدالة التآلفية

Prof Mustapha
KHALDI

I]. الشكل العام (الدستور): $\boxed{f(x) = ax + b}$

✱ يسمى a معامل التوجيه و b الترتيب إلى المبدأ

✱ إذا كان $b = 0$ تسمى f دالة خطية

✱ إذا كان $a = 0$ تسمى f دالة ثابتة

II]. تعريف

f تآلفية $\Leftrightarrow$ النسبة $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ ثابتة من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x و x'

معناه: f تآلفية $\Leftrightarrow$ تزايد الصور متناسب مع تزايد التراتيب

III]. التمثيل البياني

التمثيل البياني لدالة التآلفية هو المستقيم الذي معامل توجيهه a و يشمل النقطة $(0; b)$

	العبارة العامة	التمثيل البياني
الدالة الخطية	$f(x) = ax$	يمر من المبدأ
الدالة التآلفية	$f(x) = ax + b$	لا يمر من المبدأ (يمر من b على محور التراتيب)
الدالة الثابتة	$f(x) = b$	يوازي محور الفواصل

IV]. حساب معامل التوجيه (الميل) a:

- دالة خطية: $a = \frac{f(x)}{x}$
- دالة تآلفية: $\boxed{a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$, مع $x_2 \neq x_1$

V]. ايجاد العبارة الجبرية لدالة تآلفية بيانيا

مثال: (الشكل 1)

- لا تمر من المبدأ إذن دالة تآلفية

ومنه: $f(x) = ax + b$

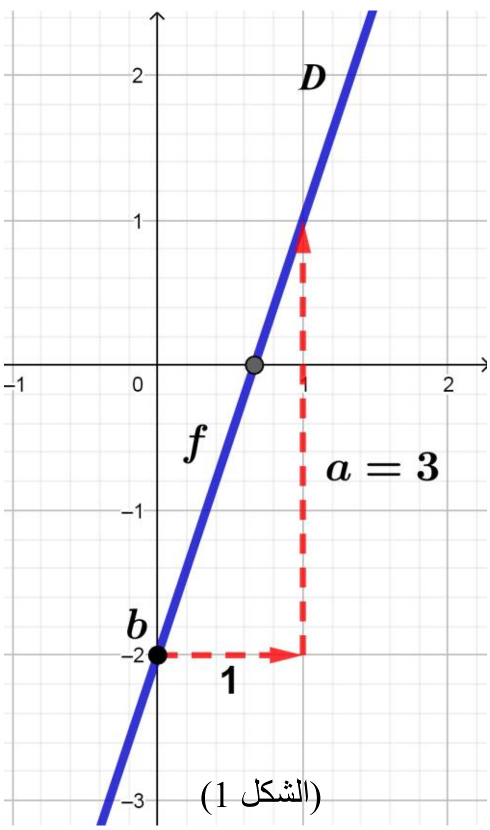
- الترتيب إلى المبدأ هو المعامل b

إذن $b = -2$

- نتقدم بوحدة إلى اليمين انطلاقا من b ثم نصعد أو نهبط لنصل إلى المستقيم (D)
  - اذا نصعد ف a موجب
  - اذا نهبط ف a سالب

إذن $a = 3$

و منه: $f(x) = 3x - 2$



(الشكل 1)

* التمثيل البياني للدالة $f(x)$ هو المستقيم (D) معادلته هي: $y = 3x - 2$

Prof Mustapha
KHALDI

VI]. اتجاه تغير دالة تآلفية

- إذا كان $\boxed{a > 0}$ فإن f متزايدة تماما
- إذا كان $\boxed{a < 0}$ فإن f متناقصة تماما

VII]. جدول تغيرات دالة تآلفية

إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

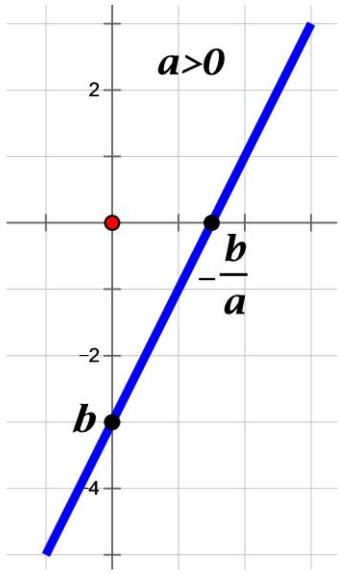
إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

VIII]. إشارة $ax + b$

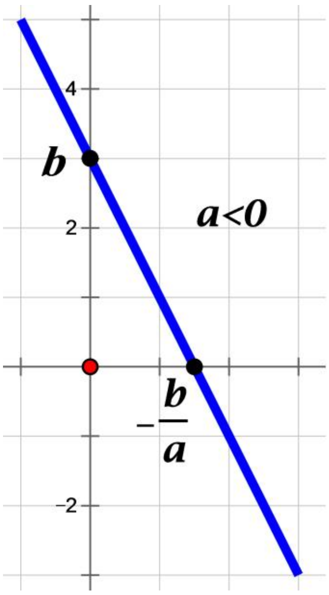
إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	$-$	0	$+$



إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	$+$	0	$-$



IX]. إشارة جداء عبارة من الشكل $(ax + b)(cx + d)$ أو حاصل قسمة من الشكل $\frac{ax+b}{cx+d}$

مثال1: $f(x) = (2x + 3)(1 - x)$

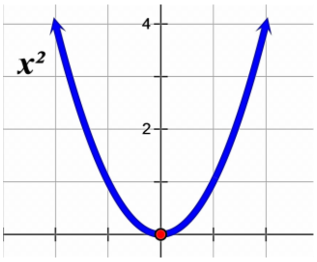
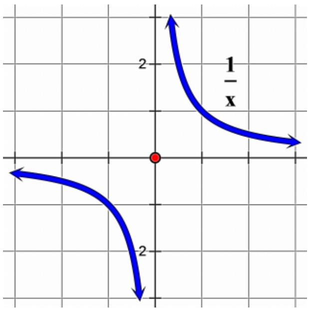
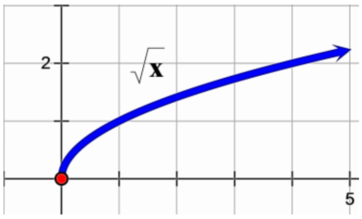
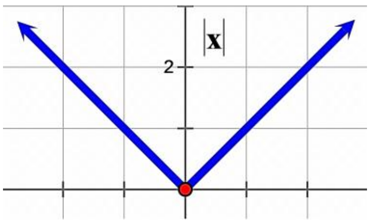
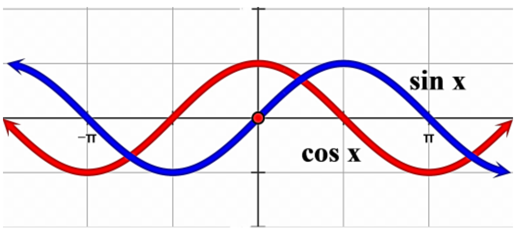
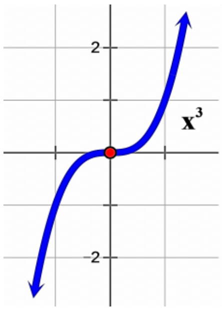
x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مثال2: $g(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Prof Mustapha KHALDI

الدوال المرجعية

الدالة المرجعية	الشكل المرجعي	التمثيل البياني للدالة المرجعية
مربع $f(x) = x^2$ (زوجية)	$f(x) = a(x+b)^2 + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = ax^2$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
مقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ (فردية)	$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = \frac{a}{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
جذر تربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ (لا زوجية لا فردية)	$f(x) = a\sqrt{x+b} + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = a\sqrt{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
قيمة مطلقة $f(x) = \|x\|$ (زوجية)	$f(x) = a\|x+b\| + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = a\|x\|$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
الدالتان $\sin x$ (فردية) و $\cos x$ (زوجية)	$f(x) = a\sin(x+b) + c$ $g(x) = a\cos(x+b) + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = a\sin x$ أو $y = a\cos x$ 2) نرسم المنحنى الجديد C إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	
مكعب $f(x) = x^3$ (فردية)	$f(x) = a(x+b)^3 + c$ لرسم الدالة: 1) نرسم المنحنى $y = ax^3$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;c)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;c)$	

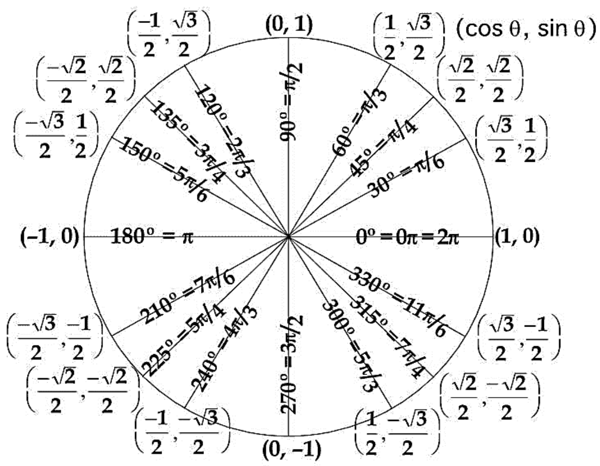
الدالة "جيب" والدالة "جيب التمام" ①

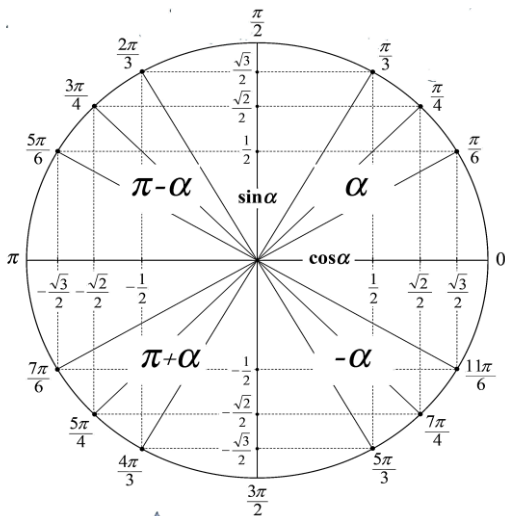
Prof Mustapha KHALDI

جدول زوايا شهيرة

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الدائرة المثلثية





$$\sin\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مبرهنات

$$-1 \le cosx \le 1$$

$$-1 \le sinx \le 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos(-x) = \cos x \Longrightarrow cos \text{ زوجية}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \Longrightarrow sin \text{ فردية}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos y = \cos x \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ y = -x + 2k\pi \end{cases}$$

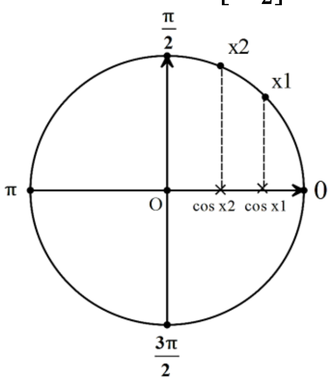
$$\sin y = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$$

Prof Mustapha
KHALDI

الدالة "جيب" والدالة "جيب التمام" ②

اتجاه تغير الدالة $cos\ x$:

1) على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

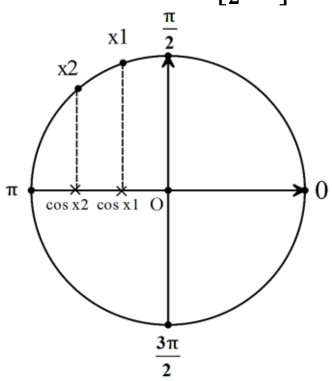


إذا كان: $x_1 < x_2$

فإن: $cos\ x_1 > cos\ x_2$ (حسب الاسقاط العمودي)

و منه الدالة $cos\ x$ متناقصة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2) على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$



إذا كان: $x_1 < x_2$

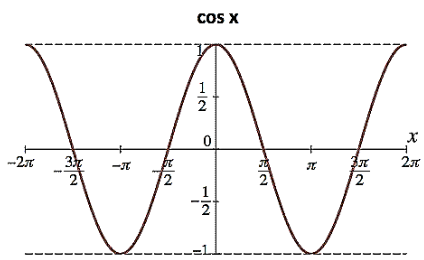
فإن: $cos\ x_1 > cos\ x_2$ (حسب الاسقاط العمودي)

و منه الدالة $cos\ x$ متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

جدول تغيرات الدالة $cos\ x$:

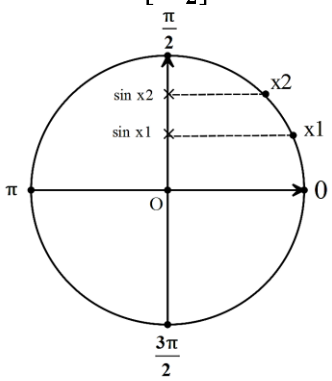
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

بيان الدالة " $cos\ x$ "



اتجاه تغير الدالة $sin\ x$:

1) على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

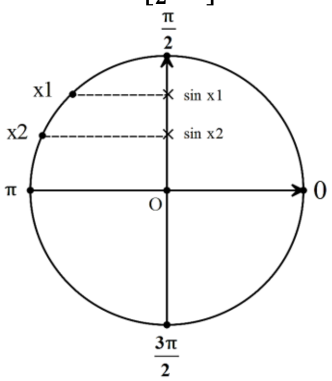


إذا كان: $x_1 < x_2$

فإن: $sin\ x_1 < sin\ x_2$ (حسب الاسقاط الأفقي)

و منه الدالة $sin\ x$ متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2) على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$



إذا كان: $x_1 < x_2$

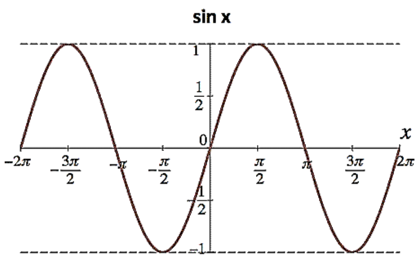
فإن: $sin\ x_1 > sin\ x_2$ (حسب الاسقاط الأفقي)

و منه الدالة $sin\ x$ متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

جدول تغيرات الدالة $sin\ x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0

بيان الدالة " $sin\ x$ "



المعادلات والمتراجحات

I. المتطابقات الشهيرة (مراجعة)

1) المتطابقات الشهيرة للنشر:

$$(a+b)^2 = (a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b)$$

$$(a-b)^2 = (a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b)$$

$$(a-b)(a+b) = (a)^2 - (b)^2$$

2) المتطابقات الشهيرة للتحليل:

$$(a)^2 + (b)^2 + 2(a)(b) = (a+b)^2$$

$$(a)^2 + (b)^2 - 2(a)(b) = (a-b)^2$$

$$(a)^2 - (b)^2 = (a-b)(a+b)$$

II. ترابط الدوال المؤدية من x إلى $f(x)$

ننتقل من x إلى $f(x)$ بتطبيق دالتين على التوالي: <u>الدالة التآلفية</u> ثم <u>الدالة المرجعية</u> المناسبة

<u>مثال 1:</u>

$$f(x) = (2x-1)^2$$

$$x \xrightarrow{u} 2x-1 \xrightarrow{v} (2x-1)^2$$

إذن $\boxed{u(x) = 2x-1}$ و $\boxed{v(x) = x^2}$

و منه $f(x) = v[u(x)] = v(2x-1) = (2x-1)^2$

<u>مثال 2:</u>

$$g(x) = 3(x+5)^2 - 7$$

$$x \xrightarrow{u} x+5 \xrightarrow{v} 3(x+5)^2 - 7$$

إذن $\boxed{u(x) = x+5}$ و $\boxed{v(x) = 3x^2 - 7}$

ومنه $g(x) = v[u(x)] = v(x+5) = 3(x+5)^2 - 7$

<u>مثال 3:</u>

$$h(x) = \frac{1}{x-4} + 6$$

$$x \xrightarrow{u} x-4 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-4} + 6$$

إذن $\boxed{u(x) = x-4}$ و $\boxed{v(x) = \frac{1}{x} + 6}$

ومنه $h(x) = v[u(x)] = v(x-4) = \frac{1}{x-4} + 6$

<u>مثال 4:</u>

$$g(x) = \sqrt{x+3} - 2$$

$$x \xrightarrow{u} x+3 \xrightarrow{v} \sqrt{x+3} - 2$$

إذن $\boxed{u(x) = x+3}$ و $\boxed{v(x) = \sqrt{x} - 2}$

ومنه $g(x) = v[u(x)] = v(x+3) = \sqrt{x+3} - 2$

Prof Mustapha
KHALDI

III. معادلات يؤول حلها إلى حل معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد

- $A(x) \times B(x) = 0 \implies A(x) = 0$ أو $B(x) = 0$
- $[A(x)]^n = 0 \implies A(x) = 0$
- $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \implies \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

IV. إشارة معادلة من الدرجة الأولى $ax + b$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

- $A(x) \times B(x) \geq 0 \implies$ استنتاج الحل من جدول الاشارة
- $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \implies \begin{cases} A(x) \times B(x) \geq 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$

V. المتطابقات الهامة

$$(a+b)^3 = (a)^3 + 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 + (b)^3$$

$$(a-b)^3 = (a)^3 - 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 - (b)^3$$

$$(a+b)^4 = (a)^4 + 4(a)^3(b) + 6(a)^2(b)^2 + 4(a)(b)^3 + (b)^4$$

$$(a-b)^4 = (a)^4 - 4(a)^3(b) + 6(a)^2(b)^2 - 4(a)(b)^3 + (b)^4$$

$$(a+b)^5 = (a)^5 + 5(a)^4(b) + 10(a)^3(b)^2 + 10(a)^2(b)^3 + 5(a)(b)^4 + (b)^5$$

$$(a-b)^5 = (a)^5 - 5(a)^4(b) + 10(a)^3(b)^2 - 10(a)^2(b)^3 + 5(a)(b)^4 - (b)^5$$

VI. حل معادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c$

① حساب المميز

$$\boxed{\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)}$$

Prof Mustapha
KHALDI

② الشكل النموذجي

$$ax^2 + bx + c = \boxed{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

③ ملخص حل واشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$			
إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
فإن المعادلة	لا تقبل حلول	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	تقبل حلين متمايزين $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
إشارتها	x: $-\infty$ … $+\infty$ E: إشارة a	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ E: إشارة a 0 إشارة a	x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ E: إشارة a 0 عكس إشارة a 0 إشارة a
تحليلها	لا تقبل تحليلا	$E = a(x - x_0)^2$	$E = a(x - x_1)(x - x_2)$

④ المميز المختصر: (إذا كان b زوجي)

$b' = \frac{b}{2}$			
$\Delta' = (b')^2 - (a)(c)$			
إذا كان	$\Delta' < 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' > 0$
فإن المعادلة	لا تقبل حلول	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b'}{a}$	تقبل حلين متمايزين $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Prof Mustapha
KHALDI

ملاحظات

- إذا كان $a + b + c = 0$ فإن:

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

- إذا كان $a - b + c = 0$ فإن:

$$x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

- جداء ومجموع حلي معادلة من الدرجة 2:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Prof Mustapha
KHALDI

مركز تناظر

✓ طريقة 1: $W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow f(2a-x)+f(x)=2b$

✓ طريقة 2: $W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Leftarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$W(a\,;\,b)$ مركز تناظر $\Longleftarrow \begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)-b$$

2) إثبات أن Y دالة فردية.

محور تناظر

✓ طريقة 1: $x=a$ محور تناظر $\Leftarrow f(2a-x)=f(x)$

✓ طريقة 2: $x=a$ محور تناظر $\Leftarrow f(a+x)=f(a-x)$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$x=a$ محور تناظر $\Longleftarrow \begin{cases} x=a+X \\ y=Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)$$

2) إثبات أن Y دالة زوجية.

الإحصاء ①

Prof Mustapha
KHALDI

I. قيم

❶ الجدول

القيم	✱ ترتب القيم في الجدول ترتيبا تصاعديا	
التكرار	(عدد الأفراد: التلاميذ، العمال، العلامات...)	
التكرار النسبي (التواتر) f	$\frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{التكرار الكلي}}$	
التكرار المجمع الصاعد	تكرار القيمة + تكرار القيم الأصغر منها	
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{التكرار الكلي}}$	
التكرار المجمع النازل	طريقتين	تكرار القيمة + تكرار القيم الأكبر منها
		أو مجموع التكرارات ـ تكرار القيم الأصغر منها
التواتر المجمع النازل	$\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{التكرار الكلي}}$	

❷ الوسط الحسابي $(\overline{x})$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$

مجموع جداءات القيم بتواترها

أو

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$$

$\frac{\text{مجموع جداءات القيم بتكراراتها}}{\text{التكرار الكلي}}$

❸ **المدى** = أكبر قيمة – أصغر قيمة

❹ المنوال (Mod): هي القيمة الموافقة لأكبر تكرار

❺ الوسيط (Med):

N: هوالمجموع (التكرار الكلي)

✓ إذا كان N فرديا: أي $N = 2p + 1$

- رتبة الوسيط هي $p + 1$ أو $\frac{N+1}{2}$
- الوسيط هي القيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي رتبة الوسيط

✓ إذا كان N زوجيا: أي $N = 2p$

من التكرار المجمع الصاعد:

- الوسيط = نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتهما p و $p + 1$

= نصف مجموع القيمتين اللتين رتبتهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2} + 1$

✱ملاحظة: يمكن استنتاج قيمة ورتبة الوسيط من تقاطع منحنيي ت.م.ص و ت.م.ن

Prof Mustapha
KHALDI

II. فئات

1 الجدول

الفئات $[a; b[$ أو $a \leq x < b$	✱ ترتب الفئات في الجدول ترتيبا تصاعديا
مراكز الفئات	$\frac{\text{الحد الأول للفئة} + \text{الحد الأخير}}{2}$ أي $\frac{a+b}{2}$
التكرار	(**عدد الأفراد:** التلاميذ، العمال، العلامات...)
التكرار النسبي (التواتر) f	$\frac{\text{تكرار القيمة}}{\text{التكرار الكلي}}$
التكرار المجمع الصاعد	**تكرار القيمة + تكرار القيم الأصغر منها**
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{\text{التكرار المجمع الصاعد}}{\text{التكرار الكلي}}$
التكرار المجمع النازل	طريقتين: **تكرار القيمة + تكرار القيم الأكبر منها** أو **مجموع التكرارات - تكرار القيم الأصغر منها**
التواتر المجمع النازل	$\frac{\text{التكرار المجمع النازل}}{\text{التكرار الكلي}}$

2 الوسط الحسابي $(\overline{x})$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=k} f_i x_i$$

مجموع جداءات مراكز الفئات بتواترها

أو

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$$

$\frac{\text{مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها}}{\text{التكرار الكلي}}$

3 **المدى** = أكبر حد في السلسلة − أصغر حد في السلسلة

4 **مدى الفئة (طول الفئة)** l = الحد الأكبر − الحد الأصغر

5 **الفئة المنوالية** (Mod)**: هي الفئة الموافقة لأكبر تكرار**

6 رتبة الوسيط P:

✓ إذا كان N فرديا: أي $N = 2p + 1$ ⟸ رتبة الوسيط هي $P = p + 1$ أو $P = \frac{N+1}{2}$

✓ إذا كان N زوجيا: أي $N = 2p$ ⟸ رتبة الوسيط هي $P = \frac{N}{2}$

7 **الفئة الوسيطية:** هي الفئة الأولى التي تكرارها المجمع **الصاعد** أكبر أو يساوي رتبة الوسيط

8 الوسيط: $\boxed{m = a + \frac{r}{d} \times l}$

حيث: m: هو الوسيط
a: هي بداية الفئة الوسيطية
r: رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية
d: تكرار الفئة الوسيطية
l: طول الفئة الوسيطية

✱ طريقة لحساب r : $\boxed{r = P - (\text{ت. م. ص للفئة السابقة})}$ حيث P هو رتبة الوسيط في السلسلة

الإحصاء ②

I. الميزة الإحصائية

- الميزة الإحصائية (الطبع الاحصائي)
  - **ميزة نوعية:** عندما لا يمكن التعبير عن القيم بعدد كلون العينين
  - **ميزة كمية (متغير احصائي):** عندما تكون القيم عددية
    - **مستمر:** يمكن قياس قيمه مثل قامات أو أوزان التلاميذ
    - **متقطع:** يمكن عد وحصر قيمه كعدد الاخوة

II. المؤشرات

① **مؤشرات الموقع:** هي المنوال والوسيط والوسط الحسابي

② **مؤشر التشتت:** هو المدى

III. تذبذب العينات والمحاكاة

- **عيّنة إحصائيّة:** هي سلسلة إحصائية تتكون من نتائج تجربة أجريت n مرة (مثل رمي قطعة نقدية 15 مرة)
- **تذبذب العيّنات:** عندما ننجز تجربة n مرة، نتحصل على عينة مقاسها n، وعندما نعيد نفس التّجربة n مرة في نفس الظروف نجد عينة أخرى مقاسها n. تسمى هذه الظاهرة تذبذب العينات
- **تجربة عشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها مسبقا
- **المحاكاة:** محاكاة تجربة عشوائية يعني اختيار نموذج لهذه التّجربة

مثال:

- التّجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات.
- نموذج لهذه التّجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد.
- تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات: برمي زهر نرد غير مزيّف 10 مرّات. نرفق الوجوه 2، 4، 6 بالنتيجة "بنت" والوجوه 1، 3، 5 بالنتيجة "ولد".

✱ خواص الوسط الحسابي:

- $\overline{x+a} = \overline{x} + a$
- $\overline{x \times a} = \overline{x} \times a$

- **الوسط الحسابي:** نرمز له بالرمز $\overline{X}$
- **المنوال:** نرمز له بالرمز Mod
- **الوسيط:** نرمز له بالرمز Med
- **التكرار الكلي:** نرمز له بالرمز N

Prof Mustapha
KHA-LDI

Prof Mustapha KHALDI

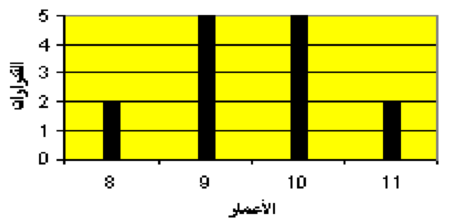
التمثيلات البيانية

✳ أهمية التمثيلات تكمن في أنها طريقة مختصرة وشاملة تزودنا بمعلومات بسرعة وبصورة أوضح.

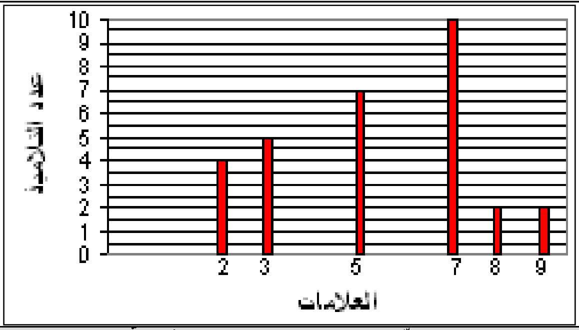
أنواع التمثيلات البيانية

المخطط بالأعمدة ✳قيم✳ (طبع احصائي متقطع)

مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم ثابت)



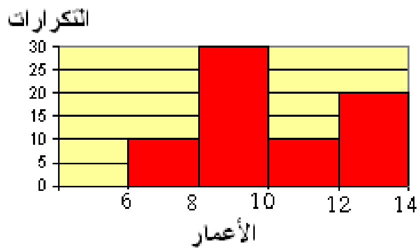
مخطط بالأعمدة (الفارق بين القيم غير ثابت)



المدرج التكراري ✳فئات✳ (طبع احصائي مستمر)

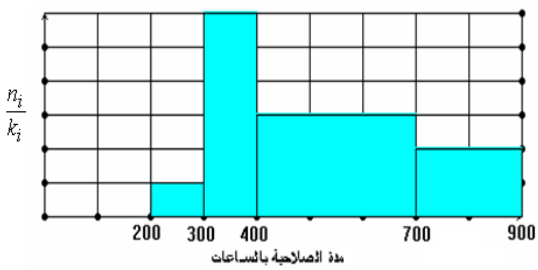
مدرج التّكرارات (الفئات متساوية الطّول)

"مساحة كل مستطيل متناسبة مع التكرار"



مدرج التّكرارات (الفئات مختلفة الطّول)

1. نمثل أصغر فئة طولها a وتكرارها n بمستطيل بعداه a و n
2. أي فئة أخرى طولها a_i و تكرارها n_i نمثلها بمستطيل بعداه a_i و الارتفاع $\frac{n_i}{k_i}$ حيث $k_i = \frac{a_i}{a}$



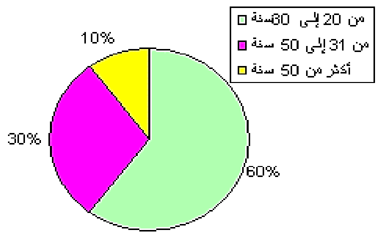
المخطط الدائري

$$\alpha = 360 \times \frac{n_i}{N}$$

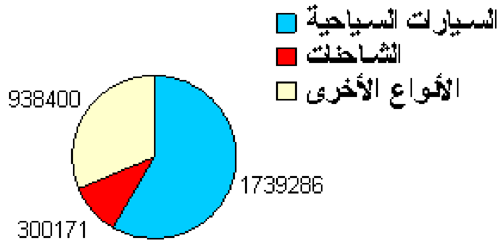
أو

$$\alpha = 360 \times f_i$$

مخطط دائري (تمثيل بالنسب المئوية)

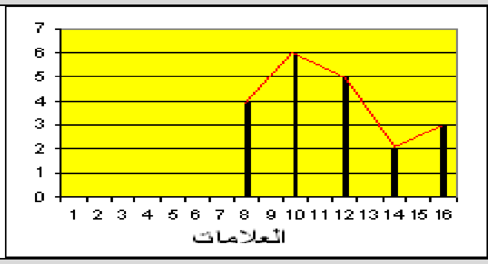


مخطط دائري (تمثيل بالتكرارات)

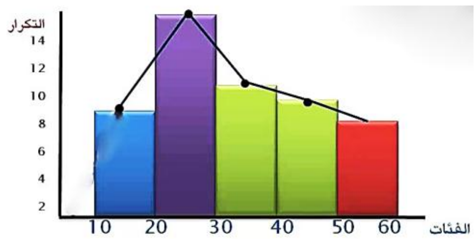


مضلع التكرارات

مضلع التكرارات باللون الأحمر (قيم)

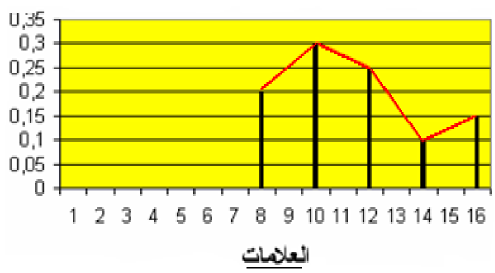


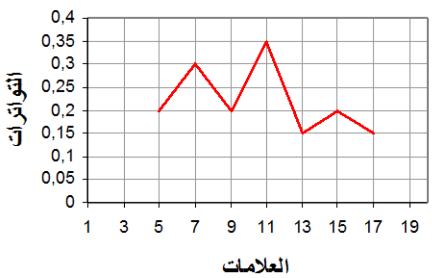
مضلع التكرارات باللون الأسود (فئات)



مضلع التوترات

مضلع التوترات باللون الأحمر





الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية

I. مراجعة

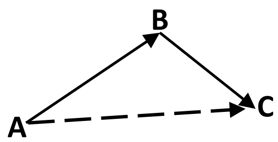
الشعاعان المتساويان	الشعاعان المتعاكسان
• لهما نفس الطول • لهما نفس المنحى (متوازيان) • لهما نفس الإتجاه	• لهما نفس الطول • لهما نفس المنحى (متوازيان) • متعاكسان في الإتجاه

- $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (مجموع شعاعان متعاكسان $= \vec{0}$)
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| =$ طويلة شعاع $=$ طول شعاع $=$ الطول AB
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الاحداثيات $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ معناه $[AD]$ و $[BC]$ لهما نفس المنتصف

II. مجموع شعاعين

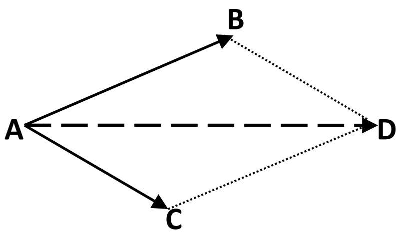
1) نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني (علاقة شال):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



2) بداية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



III. الارتباط الخطي لشعاعين

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ حيث $k \in \Re$

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$)

IV. استقامية ثلاث نقاط A, B, C

- A, B, C على استقامة واحدة $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$
- A, B, C على استقامة واحدة $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

Prof Mustapha
KHALDI

المعلم للمستوي

I. مراجعة

$A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$

1	حساب إحداثيي الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
2	حساب إحداثيي M منتصف القطعة $[AB]$	$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
3	حساب الطول AB (المسافة بين نقطتين A و B)	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
4	حساب طول شعاع $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

II. العلاقة بين شعاعين

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

1	تساوي شعاعين	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
2	مجموع شعاعين	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
3	إحداثيي الشعاع $k\overrightarrow{AB}$	$k\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k\,x \\ k\,y \end{pmatrix}$
4	الارتباط الخطي لشعاعين (شرط توازي شعاعين)	$\boxed{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0} \Leftrightarrow \boxed{xy' - x'y = 0}$ $\boxed{xy' = x'y}$

III. الأساس و المعلم للمستوي

إذا كان $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ و A نقطة معلومة فإن:

- $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ أساس
- $\left(A, \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي

IV. إحداثيي نقطة $A(x_A\,;\,y_A)$ في معلم جديد مبدؤه $M(x_M\,;\,y_M)$

$$\begin{cases} X_A = x_A - x_M \\ Y_A = y_A - y_M \end{cases}$$

Prof Mustapha
KHALDI

معادلة مستقيم

Prof Mustapha
KHALDI

I. مفاهيم أساسية

◈ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◈ (AB) و(CD) لهما نفس معامل التوجيه $\Leftrightarrow$ $(AB)//(CD)$

II. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$\boxed{ax+by+c=0}$	$\boxed{y=ax+b}$
معامل توجيهه (الميل)	$-\dfrac{a}{b}$	a
شعاع توجيهه	$\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

✱ معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ هو $\boxed{a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$

III. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

IV. المعادلة المكافئة:

يمكن الانتقال من المعادلة $\boxed{ax+by+c=0}$ إلى المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ بتغيير أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

مثال: كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x-y-4=0 \Leftrightarrow -2x+y+4=0 \Leftrightarrow -6x+3y+12=0$$

$$\Leftrightarrow -12x+6y+24=0 \Leftrightarrow 12x-6y-24=0 \Leftrightarrow y=2x-4$$

V. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

I. طريقة ① (الارتباط الخطي)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$B(4;5)\ ;\ A(1;-1)$

❶ حساب مركبة $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\5-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M\in(AB)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\end{pmatrix}$$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix}3 & x-1\\6 & y+1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3(y+1)-6(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{-6x+3y+9=0}$$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

✓ طريقة ② (معامل التوجيه)

مثال: إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$B(4;5)\ ;\ A(1;-1)$

❶ حساب معامل التوجيه a

$$a=\frac{5-(-1)}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

و منه معادلة (AB) هي: $y=2x+b$

❷ نحسب المعامل b بتعويض احداثيي A أو B في المعادلة

نعوض A تصبح المعادلة $-1=2(1)+b$

$\Rightarrow b=-3$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

أو من الشكل: $\boxed{2x-y-3=0}$

*بفهم المعادلة المكافئة يتمكن التلميذ من الاستيعاب الكامل للدرس وتصبح له الحرية التامة في اختيار الطريقة المناسبة له

Prof Mustapha KHALDI

2) مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

✓ طريقة ③ (الارتباط الخطي)

مثال: $\vec{v}\binom{3}{4}$; $E(2;1)$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (D)$

❷ نحسب مركبة $\overrightarrow{EM}$

$$\overrightarrow{EM}\binom{x-2}{y-1}$$

❸ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{EM}$ و $\vec{v}$

$$\vec{v} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x-2 \\ 4 & y-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y-1) - 4(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x + 3y + 5 = 0}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

✓ طريقة ④ (استخلاص المعاملات)

مثال: $\vec{v}\binom{3}{4}$; $E(2;1)$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

لدينا $\vec{v}\binom{3}{4}$ شعاع توجيه من الشكل $\vec{v}\binom{-b}{a}$

و منه نستنتج أن $\begin{cases} -b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = -3} \\ \boxed{a = 4} \end{cases}$

أي معادلة (D) من الشكل $4x - 3y + c = 0$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض E في المعادلة $4x - 3y + c = 0$

$$\Rightarrow 4(2) - 3(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -5}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

3) مستقيم يشمل نقطة ويوازي مستقيم

✓ طريقة ⑤ (الارتباط الخطي)

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x + 2y - 6 = 0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ نستخلص شعاع التوجيه $\vec{u}$ للمستقيم (D)

$$\vec{u}\binom{-b}{a} \Rightarrow \boxed{\vec{u}\binom{-2}{5}}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (\Delta)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{FM} \Leftarrow \overrightarrow{FM}\binom{x+3}{y-4}$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{FM}$

$\boxed{(D) \mathbin{/\!/} (\Delta) \Leftarrow \vec{u} \text{ و } \overrightarrow{FM} \text{ مرتبطان خطيا}}$

$$\vec{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x+3 \\ 5 & y-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y-4) - 5(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 2y - 7 = 0}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$

✓ طريقة ⑥ (استنتاج المعاملات)

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x + 2y - 6 = 0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ $(D) \mathbin{/\!/} (\Delta) \Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس معامل وشعاع التوجيه.

$\Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس المعاملين a و b

و منه معادلة (Δ) من الشكل $\boxed{5x + 2y + c = 0}$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض F في المعادلة $5x + 2y + c = 0$

$$\Rightarrow 5(-3) + 2(4) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$

$(D) \mathbin{/\!/} (\Delta) \Leftarrow (D)$ و (Δ) لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

4) مستقيم معرف بنقطة ومعامل توجيه

✓ طريقة ⑦ (استخلاص المعاملات)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ \boxed{b = 2} \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل $-3x + 2y + c = 0$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

إذن معادلة (K) هي $\boxed{-3x + 2y + 8 = 0}$

✓ طريقة ⑧ (تعويض معامل التوجيه)

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ نعوض معامل التوجيه في المعادلة $y = ax + b$

إذن معادلة (K) من الشكل $y = \frac{3}{2}x + b$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح $5 = \frac{3}{2}(6) + b$

$$\Rightarrow \boxed{b = -4}$$

و منه معادلة (K) هي $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 4}$

أو من الشكل $\boxed{3x - 2y - 8 = 0}$

حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)

I. طريقة الجمع

تعتمد طريقة الجمع على التخلص من إحدى المجهولين x أو y لتصبح معادلة ذات مجهول واحد

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 3x + 6y - 15 = 0 & \dots ① \\ 2x - 4y + 6 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

للتخلص من المجهول x يجب ضرب المعادلة ① في (2) و المعادلة ② في (-3) ليصبح معاملا المجهول x متعاكسين، فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 12y - 30 = 0 & \dots ③ \\ -6x + 12y - 18 = 0 & \dots ④ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ③ + ④ نجد: $24y - 48 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{y = 2}$

بالتعويض في المعادلة ① أو ② نجد $\boxed{x = 1}$

و منه الثنائية $(1;2)$ هي حل للجملة و النقطة $(1;2)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين

II. طريقة التعويض

نستعمل طريقة التعويض غالبا عندما يكون معامل أحد المجاهيل $= 1$

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 5x - 4y + 6 = 0 & \dots ① \\ -2x + y + 3 = 0 & \dots ② \end{cases}$$

من المعادلة ② نستنتج أن: $y = \boxed{2x - 3} \dots ③$

بتعويض y في المعادلة ① نجد:

$$5x - 4(2x - 3) + 6 = 0$$

$$\Longrightarrow 5x - 8x + 12 + 6 = 0$$

$$\Longrightarrow -3x = -18$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 6}$$

نعوض x في المعادلة ③ نجد:

$$y = 2(6) - 3 \Longrightarrow \boxed{y = 9}$$

و منه الثنائية $(6;9)$ هي حل للجملة و النقطة $(6;9)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين.

III. طريقة المحدد (Det) [الوضع النسبي لمستقيمين]

* تعتبر طريقة المحدد طريقة كاملة لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين أي:

- متوازيان منفصلان
- متوازيان متطابقان
- متقاطعان مع إيجاد نقطة التقاطع

Prof Mustapha
KHALDI

الطريقة:

(D) مستقيم معادلته $ax + by = c$

(D') مستقيم معادلته $a'x + b'y = c'$

$$(*) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

لمعرفة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D') نستعمل المحدد det

$$\boxed{det = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b}$$

إذا كان	$det = 0$	$det \neq 0$
فإن	الجملة $(*)$ تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلول	الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد
التفسير الهندسي	(D) و (D') إما متوازيان متطابقان أو متوازيان غير متطابقان	(D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة

* في حالة $det \neq 0$ إحداثيي نقطة التقاطع هي:

$$\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det}} \quad ; \quad \boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det}}$$

✓ ملاحظة:

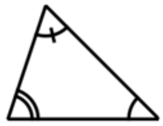
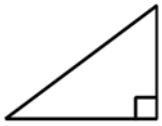
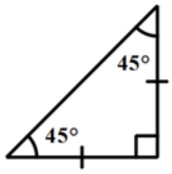
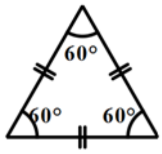
(D') ينطبق على (D) $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

$(D') // (D)$ و منفصلين $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$

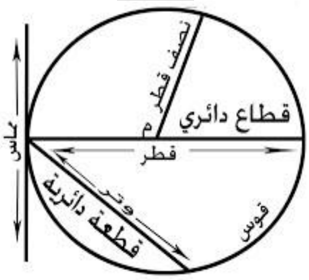
الهندسة المستوية

Prof Mustapha
KHALDI

I. المثلثات

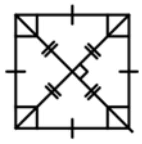
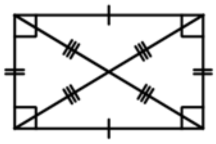
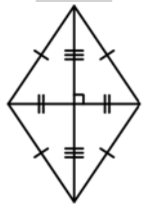
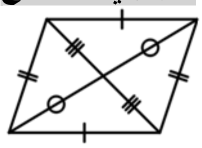
	الشكل	خواصه
المثلثات	المثلث الكيفي 	❶ مجموع زواياه الداخلية = 180° ❷ مجموع زواياه الخارجية = 360°
	المثلث القائم 	❶ مجموع زواياه = 180° ❷ له ضلعان متعامدان ❸ لديه زاوية قائمة = 90° ❹ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان ❺ طول المتوسط المتعلق بالوتر = نصف طول الوتر (الوتر هو أكبر ضلع و يقابل الزاوية القائمة)
	المثلث متساوي الساقين 	❶ مجموع زواياه = 180° ❷ له ضلعان متقايسان ❸ زاويتا القاعدة متقايستان ❹ الارتفاع المتعلق بالقاعدة هو منصف زاوية الرأس ويقطع القاعدة في المنتصف
	المثلث القائم ومتساوي الساقين 	❶ مجموع زواياه = 180° ❷ له ضلعان متعامدان و متقايسان ❸ لديه زاوية قائمة = 90° ❹ زاويتا القاعدة متقايستان = 45° ❺ مربع الوتر = مجموع مربع الضلعان القائمان ❻ الارتفاع المتعلق بالوتر هو منصف الزاوية القائمة ويقطع الوتر في المنتصف
	المثلث متقايس الأضلاع 	❶ مجموع زواياه = 180° ❷ كل أضلاعه متقايسة ❸ كل زواياه متقايسة = 60° ❹ كل الارتفاعات تنصف الزاوية المنطلقة منها وتقطع الضلع المقابل لها في المنتصف

II. الدائرة

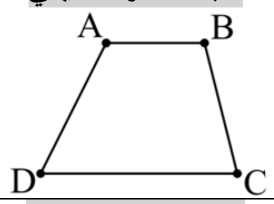
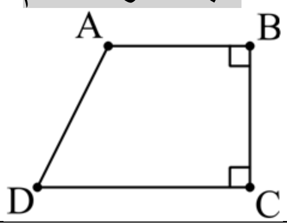
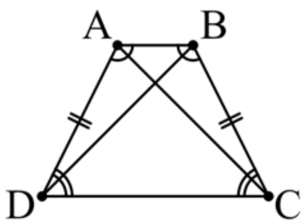
الدائرة	
	❶ الدائرة تشكل زاوية قدرها 360° ❷ إذا كان AB قطر للدائرة و M نقطة من محيط الدائرة فإن ABM مثلث قائم في M (مهما كان موضع M) ❸ جميع أقطارها متساوية ❹ جميع أنصاف أقطارها متساوية

Prof Mustapha
KHALDI

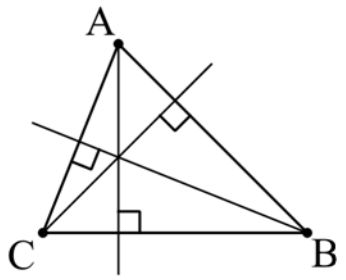
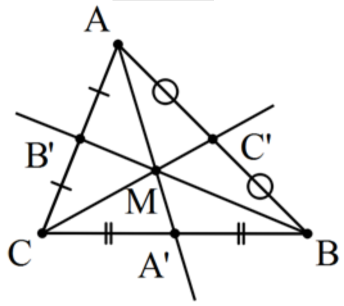
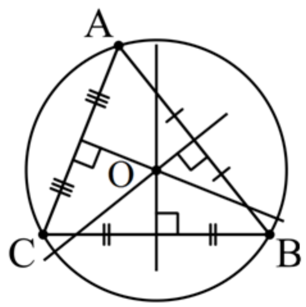
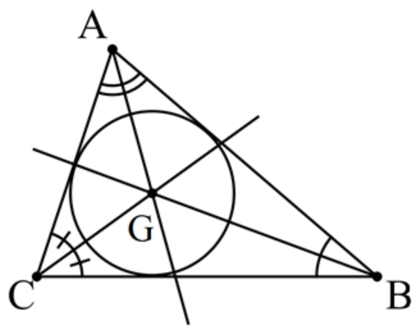
III. متوازيات الأضلاع

<table>
<tr><th colspan="2">الشكل</th><th>خواصه وشروطه</th></tr>
<tr><td rowspan="4">متوازيات الأضلاع</td><td>المربع
</td><td>❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان
❷ كل أضلاعه متقايسة
❸ له أربع زوايا قائمة
❹ قطراه متساويان
❺ قطراه متعامدان
❻ قطراه متناصفان
❼ كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما</td></tr>
<tr><td>المستطيل
</td><td>❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان
❷ كل ضلعان متقابلان متقايسان
❸ له أربع زوايا قائمة
❹ قطراه متساويان
❺ قطراه متناصفان</td></tr>
<tr><td>المعين
</td><td>❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان
❷ كل أضلاعه متقايسة
❸ كل زاويتان متقابلتان متقايستان
❹ قطراه متعامدان
❺ قطراه متناصفان
❻ كل قطر ينصف الزاويتين المتعلق بهما</td></tr>
<tr><td>متوازي الأضلاع
</td><td>❶ كل ضلعان متقابلان متوازيان
❷ كل ضلعان متقابلان متقايسان
❸ كل زاويتان متقابلتان متقايستان
❹ قطراه متناصفان
❺ ضلعان متقابلان متقايسان ومتوازيان</td></tr>
</table>

IV. الشبه منحرف

<table>
<tr><th colspan="2">الشكل</th><th>خواصه</th><th>خ مشتركة</th></tr>
<tr><td rowspan="3">الشبه منحرف</td><td>شبه منحرف كيفي

</td><td>❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين
❷ الساقان غير متوازيان وغير متساويان
❸ مجموع زواياه = 360°</td><td rowspan="3">• $\hat{CDA} + \hat{DAB} = 180°$
• $\hat{ABC} + \hat{BCD} = 180°$</td></tr>
<tr><td>شبه منحرف القائم

</td><td>❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين
❷ الساقان غير متوازيان وغير متساويان
له زاويتان قائمتان
❸ مجموع زواياه = 360°</td></tr>
<tr><td>شبه منحرف متساوي الساقين

</td><td>❶ القاعدتين متوازيتين غير متساويتين
❷ الساقان متساويان غير متوازيان
❸ قطراه متقايسان
❹ زاويتي القاعدة الكبرى متقايستين
❺ زاويتي القاعدة الصغرى متقايستين
❻ مجموع زواياه = 360°</td></tr>
</table>

V]. المستقيمات الخاصة في مثلث

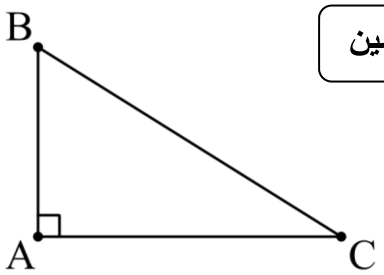
المستقيم	خواصه
الإرتفاع 	• الإرتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد الضلع المقابل.
المتوسط 	❶ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل. ❷ نقطة تقاطع متوسطات مثلث هي مركز ثقل المثلث ❸ $\boxed{MC = 2MC'}$; $\boxed{MB = 2MB'}$; $\boxed{MA = 2MA'}$
المحور 	❶ المحور في مثلث هو المستقيم الذي يعامد أحد أضلاعه في المنتصف وليس شرط أن يشمل الرأس المقابل ❷ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (التي تشمل رؤوسه) ❸ $\boxed{OA = OB = OC}$
المنصف 	❶ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه ❷ نقطة تقاطع منصفات مثلث هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (التي تمس أضلاعه)

Prof Mustapha
KHALDI

Prof Mustapha
KHALDI

VI]. مبرهنة فيتاغورس وعكسها

1) مبرهنة فيتاغورس



في المثلث القائم: مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين القائمين

أي: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

نستنتج أن:

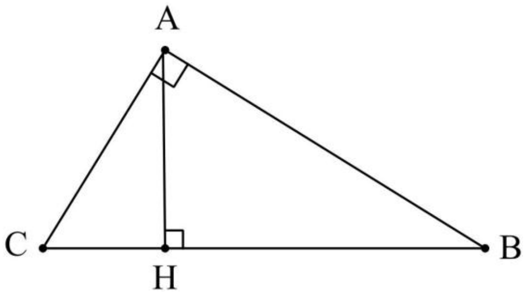
- $(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$
- $(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2$

2) المبرهنة العكسية لفيتاغورس

إذا كان مربع الضلع الأكبر= مجموع مربع الضلعان الآخران فإن هذا المثلث قائم حسب المبرهنة العكسية لفيتاغورس

أي إذا كان: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ فإن ABC مثلث قائم في A حسب المبرهنة العكسية لفيتاغورس

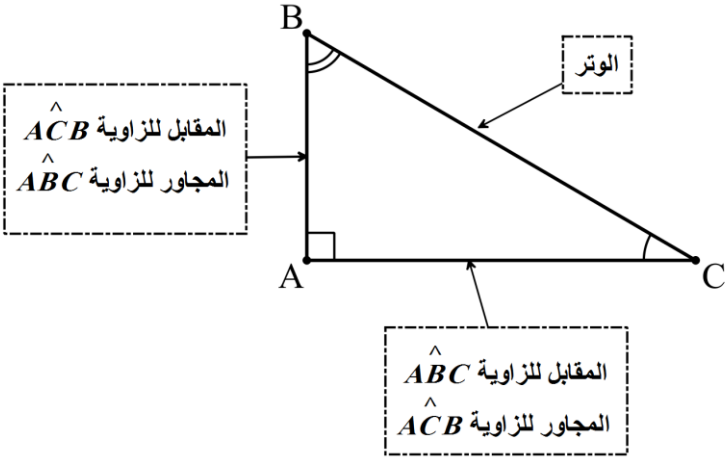
3) خواص الارتفاع في مثلث قائم



- $\boxed{AB \times AC = AH \times BC}$
- $\boxed{AB^2 = BH \times BC}$
- $\boxed{AC^2 = CH \times CB}$
- $\boxed{AH^2 = HC \times HB}$

VII]. النسب المثلثية في المثلث القائم

$$\boxed{\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}} \; ; \; \boxed{\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}} \; ; \; \boxed{\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}}$$



$$\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB}$$

العلاقات بين النسب المثلثية:

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} \; ; \; \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

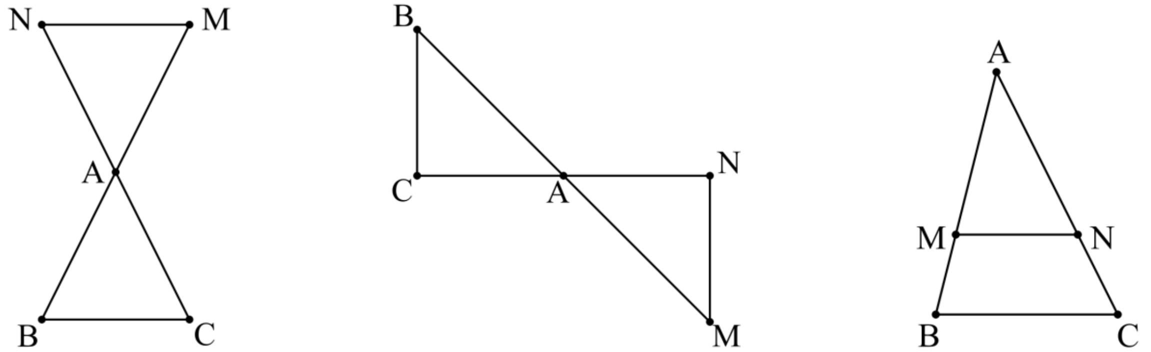
sin : جب
cos : تجب
tan : ظل
x: زاوية

✓ ملاحظة 1: قيمة sin و قيمة cos دائما أصغر من 1 و أكبر من 0

✓ ملاحظة 2: في المثلث القائم قيم sin, cos و tan دائما **موجبة**

VIII]. مبرهنة طالس و عكسها

في كل من الأشكال التالية لدينا $(BC) \parallel (MN)$ مما يعني إمكانية تطبيق مبرهنة طالس:



1) مبرهنة طالس (المباشرة):

بما أن $(BC) \parallel (MN)$ حسب مبرهنة طالس لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

2) المبرهنة العكسية لطالس: (إثبات التوازي)

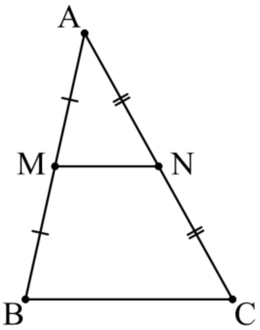
من المعطيات نختار كسرين متناسبين مثلا $\frac{AM}{AB}$ و $\frac{MN}{BC}$ ونحسب قيمة كلا منهما

نقول: بما أن $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$ و النقط **A, M, B** و **A, N, C** بنفس الترتيب على استقامية فإن

$(BC) \parallel (MN)$ حسب المبرهنة العكسية لطالس

3) خاصية مستقيم المنتصفين (المباشرة):

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصفه

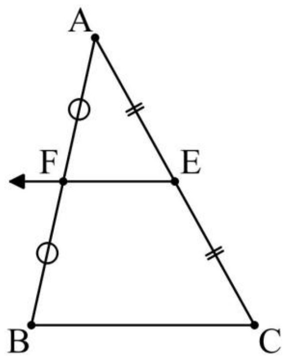


إذا كانت M و N منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب فإن:

- $(MN) \parallel (BC)$
- $MN = \frac{1}{2}BC$ أي $BC = 2MN$

4) الخاصية العكسية لمستقيم المنتصفين:

المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في مثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث

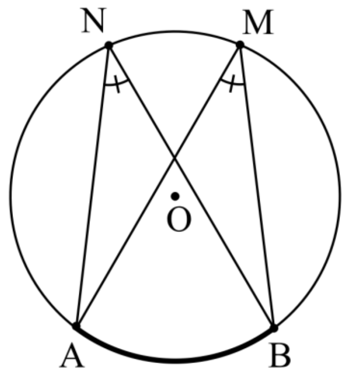


إذا كان E منتصف $[AC]$ و $(BC) \parallel (FE)$ فإن F منتصف $[AB]$

Prof Mustapha
KHALDI

IX]. الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

1) مراجعة

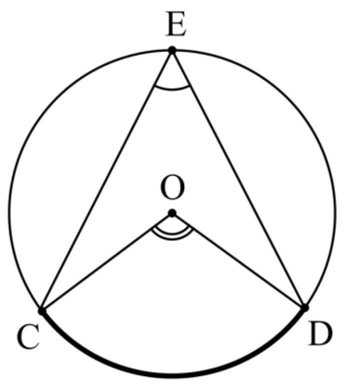


القاعدة1:

❖ الزاويتان المحيطيتان اللتان تحصران نفس القوس متقايستان

مثال1:

الزاويتان المحيطيتان $A\widehat{M}B$ و $A\widehat{N}B$ متقايستان لأنهما تحصران نفس القوس $\widehat{AB}$



القاعدة2:

إذا كانت زاوية مركزية و زاوية محيطية تحصران نفس القوس فإن:

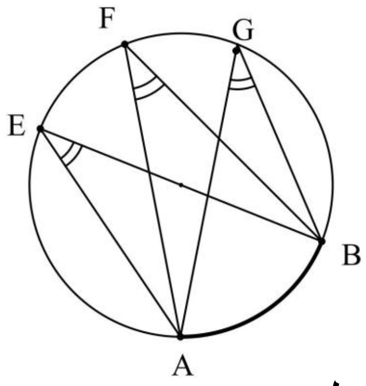
❖ الزاوية المركزية = ضعف الزاوية المحيطية

❖ الزاوية المحيطية = نصف الزاوية المركزية

مثال2:

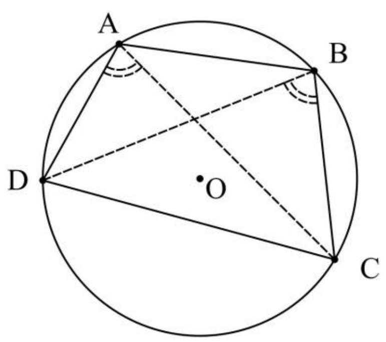
الزاوية المركزية $C\widehat{O}D$ و الزاوية المحيطية $C\widehat{E}D$ تحصران نفس القوس $\widehat{CD}$ إذن:

$C\widehat{O}D = 2\,C\widehat{E}D$ و $C\widehat{E}D = \frac{1}{2}\,C\widehat{O}D$



2) نتائج

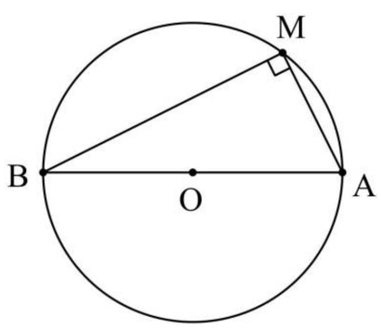
❶ الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة



❷ تكون رؤوس الرباعي المحدب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين:

➤ إما $D\widehat{B}C = D\widehat{A}C$ (زاويتان محيطيتان تجصران نفس القوس $\widehat{DC}$)

➤ أو $B\widehat{C}D + B\widehat{A}D = 180°$ (زاويتان متقابلتان متكاملتان)

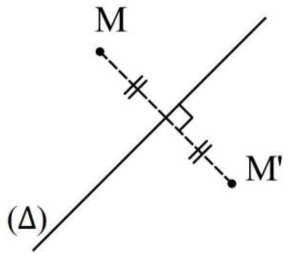


❸ خاصية المثلث القائم في الدائرة:

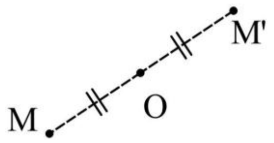
إذا كان AB قطر لدائرة و M نقطة من محيط هذه الدائرة فإن المثلث ABM قائم في M مهما كان موضع M

Prof Mustapha
KHALDI

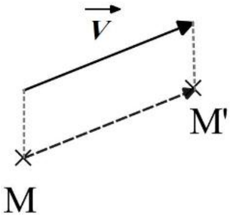
X]. التحويلات النقطية



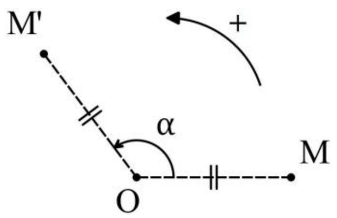
❶ **التناظر المحوري:** هو تحويل نقطي بالنسبة لمحور (Δ) يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث (Δ) **محور** $\boldsymbol{[MM']}$ (أي (Δ)عمودي على $[MM']$ في منتصفها).



❷ **التناظر المركزي:** هو تحويل نقطي بالنسبة لنقطة $\boldsymbol{O}$ يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\boldsymbol{OM = OM'}$ (أي $\boldsymbol{O}$ منتصف$[MM']$).



❸ **الانسحاب:** هو تحويل نقطي بشعاع $\vec{\boldsymbol{v}}$ يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{v}}$



❹ **الدوران:** هو تحويل نقطي وفق مركز O و زاوية $\boldsymbol{\alpha}$ واتجاه يرفق بكل نقطة $\boldsymbol{M}$ النقطة $\boldsymbol{M'}$ حيث $\boldsymbol{OM' = OM}$ و $\boldsymbol{M\hat{O}M' = \alpha}$ والاتجاه الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة.

XI]. خواص التحويلات النقطية

❶ **النقطة الصامدة:** نقول عن نقطة إنها صامدة بواسطة تحويل نقطي، إذا كانت منطبقة على صورتها بهذا التحويل.

❷ **حفظ المسافات (التقايس)**

يحافظ كلا من التناظر المركزي والتناظر المحوري والانسحاب والدوران على المسافات لذلك نسمي هذه التحويلات عامة **بالتقايس**

✱صورة بتقايس: هي صورة بالتناظر المركزي أو بالتناظر المحوري أو بالانسحاب أو بالدوران

❸ **الحفاظ على الاستقامية**

إذا كانت A، B، C ثلاث نقاط في استقامية فإن صورها A'، B'، C' **بتقايس** تكون في استقامية

❹ **الحفاظ على أقياس الزوايا**

صورة زاوية **بتقايس** هي زاوية تقايسها

➤ **استنتاج:**

- صورتي مستقيمان متوازيان **بتقايس** هما مستقيمان متوازيان
- صورتي متعامدان متوازيان **بتقايس** هما مستقيمان متعامدان

Prof Mustapha
KHALDI

تقايس وتشابه مثلثين

Prof Mustapha
KHALDI

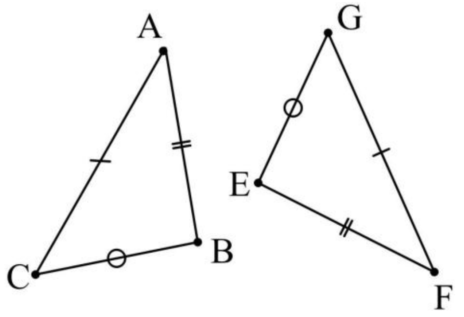
I. تقايس مثلثان

1) تعريف

المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق أي كل الأضلاع متساوية وكل الزوايا متقايسة مثنى مثنى.

2) شروط تقايس مثلثان

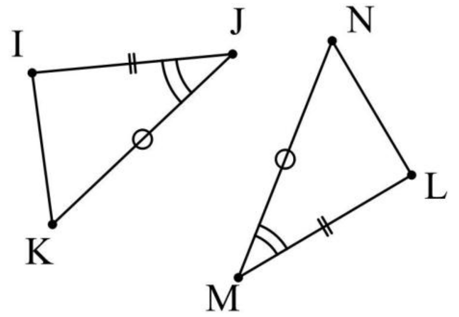
يتقايس مثلثان إذا تحققت إحدى الشروط التالية:



① كل الأضلاع متساوية مثنى مثنى

كل الأضلاع من المثلث الأول متساوية مثنى مثنى مع أضلاع المثلث الثاني.

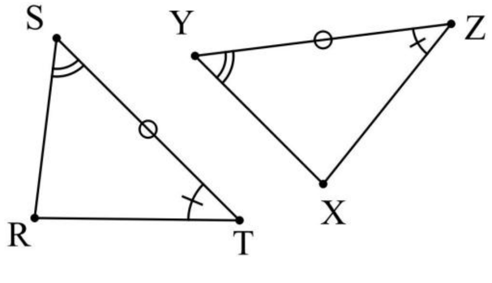
✳ بما أن $\left.\begin{matrix} AB = EF \\ AC = GF \\ BC = EG \end{matrix}\right\}$ فإن المثلثان ABC و EFG متقايسان



② ضلعان يحصران زاوية

ضلعان من المثلث الأول يساويان مثنى مثنى ضلعان من المثلث الثاني والزاوية المحصورة بين ضلعا المثلث الأول تقايس الزاوية المحصورة بين ضلعا المثلث الثاني.

✳ بما أن $\left.\begin{matrix} IJ = LM \\ JK = MN \\ I\hat{J}K = L\hat{M}N \end{matrix}\right\}$ فإن المثلثان IJK و LMN متقايسان



③ ضلع وزاويتين مجاورتين

ضلع من المثلث الأول يساوي ضلع من المثلث الثاني والزاويتين المجاورتين لضلع المثلث الأول تقايسان مثنى مثنى الزاويتين المجاورتين لضلع المثلث الثاني

✳ بما أن $\left.\begin{matrix} ST = YZ \\ R\hat{S}T = X\hat{Y}Z \\ R\hat{T}S = X\hat{Z}Y \end{matrix}\right\}$ فإن المثلثان RST و XYZ متقايسان

3) نتائج

✳ صورة مثلث بتناظر مركزي أو تناظر محوري أو انسحاب أو دوران هو مثلث **يقايسه**

✳ التقايس المباشر: هو عندما يمكن تطبيق مثلث على الأخر بالسحب والتدوير أو التدوير والسحب

التقايس غير المباشر: هو عندما لا يمكن تطبيق مثلث على الأخر إلا بعد قلبه

II]. تشابه مثلثان

1) تعريف

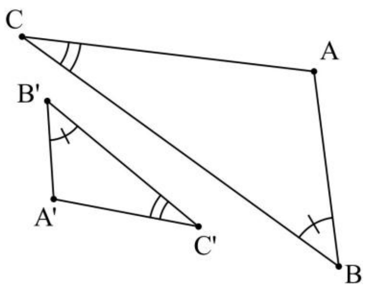
المثلثان المتشابهان لهما كل الزوايا متقايسة مثنى مثنى ولكن أضلاعهما غير متساوية مثنى مثنى بل متناسبة (أي المثلث الأول تكبير للمثلث الثاني أو تصغير له)

2) شروط تشابه مثلثان

يتشابه مثلثان إذا تحققت إحدى الشروط التالية:

① زاويتين متقايستين مثنى مثنى

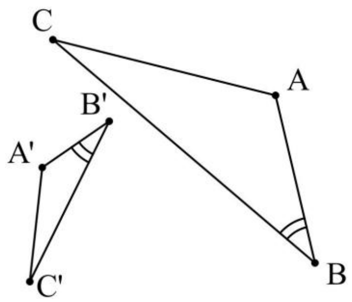
زاويتين من المثلث الأول متقايستين مثنى مثنى مع زاويتين من المثلث الثاني



✳ بما أن $\left.\begin{array}{c} A\hat{C}B = A'\widehat{C'}B' \\ \text{و} \\ A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C' \end{array}\right\}$ فإن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان

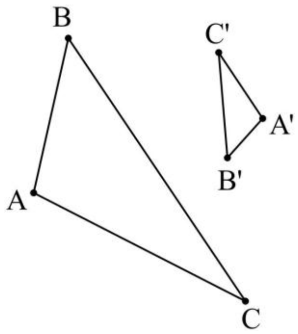
② زاوية وضلعان متناسبان

زاوية من المثلث الأول تقايس زاوية من المثلث الثاني وضلعا زاوية المثلث الأول متناسبان مع ضلعا زاوية المثلث الثاني.



✳ بما أن $\left.\begin{array}{c} A\hat{B}C = A'\widehat{B'}C' \\ \text{و} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \end{array}\right\}$ فإن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان

③ ثلاثة أضلاع متناسبة



أضلاع المثلث الأول متناسبة مثنى مثنى مع أضلاع المثلث الثاني

✳ بما أن $\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$ فإن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متشابهان

3) نسبة التشابه

نسبة التشابه بين مثلثين ABC و $A'B'C'$ هي العدد الموجب تماما k حيث:

$$\boxed{k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}}$$

أو

$$\boxed{k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C'}}$$

- إذا كان $k > 1$ فإن k يسمى **نسبة التكبير**
- إذا كان $0 < k < 1$ فإن k يسمى **نسبة التصغير**
- إذا كان $k = 1$ فإن المثلثان **متقايسان**

Prof Mustapha
KHALDI

الهندسة الفضائية

Prof Mustapha
KHALDI

I. التمثيل بالمنظور متساوي القياس

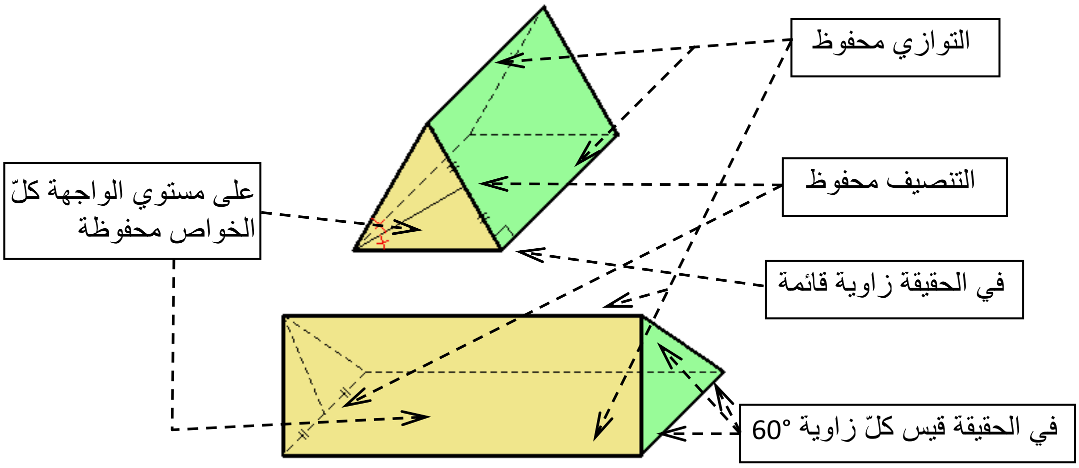
المنظور متساوي القياس هو تقنية لتمثيل أجسام من الفضاء على سطوح مستوية ومن قواعده:

أ- الخطوط المخفية: نرسمها بخطوط متقطعة

ب- على مستوى الواجهة: نحافظ على كل الخواص (التوازي، التعامد، التنصيف، استقامية النقط...) وعلى المقادير (الزوايا، المسافات...)

ت- على جميع الأوجه: نحافظ على استقامية النقط، التوازي، المنتصفات والنسب بين قطع المستقيم المتوازية.

✱ ملاحظة: المستوي في المنظور متساوي القياس يمثل بمتوازي أضلاع



II. المستقيم والمستوي في الفضاء

❶ يتعين مستقيم إما بنقطتين متمايزتين أو بنقطة وشعاع

❷ يتعين مستوي إما:

- بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة
- بمستقيم ونقطة لا تنتمي إليه
- مستقيمين متمايزين أما متقاطعين أو متوازيين

❸ إذا شمل مستوي نقطتين متمايزتين A و B فإنه يشمل كل نقط المستقيم (AB)

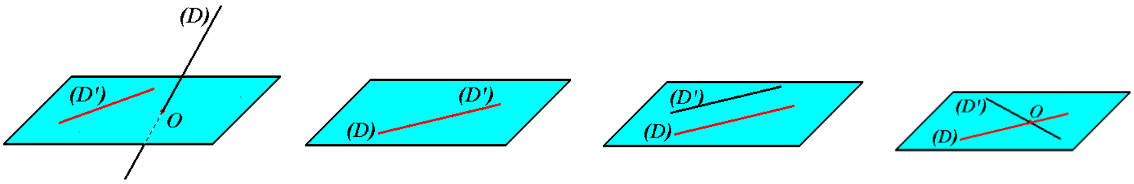
خاصية 1: إذا كانت نقطتين متمايزتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشملهما

خاصية 2: إذا لم تكن ثلاث نقط على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد يشملها

III. الأوضاع النسبية لمستقيمين، لمستويين ولمستوي ومستقيم

1) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

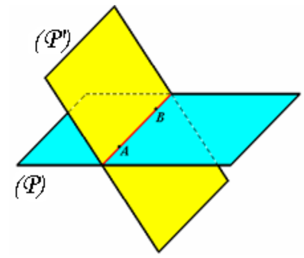
كل مستقيمين من الفضاء هما إما
- من مستوي واحد
  - ① متقاطعين
  - ② متوازيين
- ③ليسا من نفس المستوي



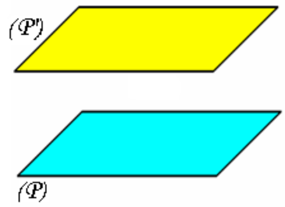
③ليسا من نفس المستوي　② متوازيين متمايزين أو متطابقين　① متقاطعين

Prof Mustapha
KHALDI

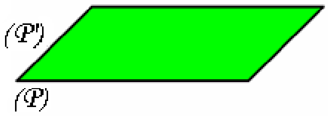
2) الأوضاع النسبية لمستويين: كل مستويين من الفضاء هما إما



①متقاطعين وتقاطعهما هو مستقيم



②متوازيين متمايزين



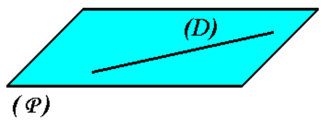
③متوازيان متطابقان

3) الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو:

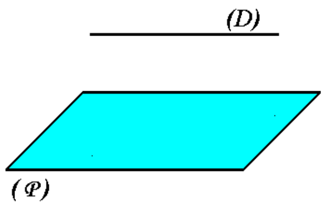
كل مستقيم (D) ومستو (P) من الفضاء هما إما

① متوازيين: $(D) \subset (P)$ أو $(D) \cap (P) = \phi$

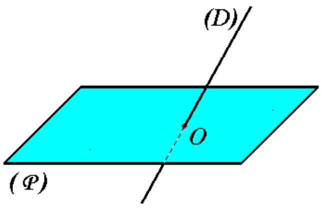
② متقاطعان في نقطة



① متوازيين $(D) \subset (P)$



② متوازيين $(D) \cap (P) = \phi$



③ متقاطعان في نقطة

IV]. التوازي في الفضاء

1) المستقيمات المتوازية في الفضاء

المستقيمان المتوازيان في الفضاء هما إما

① متطابقان

② من نفس المستوي وغير متقاطعين

خواص:

❶ يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما

❷إذا قطع مستوي أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الاخر

❸ المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان

2) المستويات المتوازية

المستويان المتوازيين هما مستويان إما

① متطابقان (يشتركان في جميع النقط)

② منفصلان (لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما)

خواص:

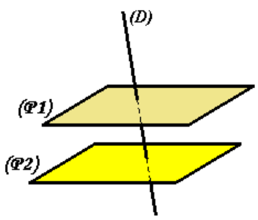
❶ يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستويا معلوما

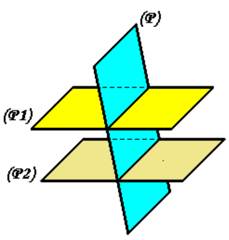
❷ إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الاخر

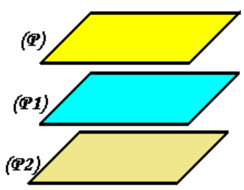
❸ إذا قطع مستو أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الاخر (ويكون مستقيما التقاطع متوازيين)

❹ المستويان الموازيين لثالث متوازيان

❺ يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما مستقيمين متقاطعين كل منهما يوازي المستوي الاخر

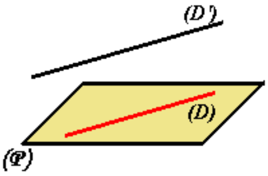






3) توازي مستقيم مع مستوي

يكون مستقيم و مستو متوازيين إذا كانا
① منفصلين (لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما)
② المستوي يحوي المستقيم



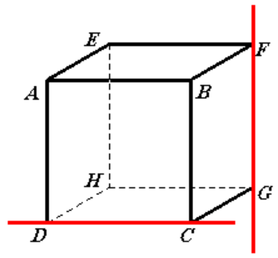
خواص:

❶ يكون مستقيم موازيا لمستو إذا كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي
❷ إذا كان مستقيم يوازي أحد مستويين متوازيين فإنه يوازي الاخر
❸ إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما

V]. التعامد في الفضاء

1) تعامد مستقيمين

يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان المستقيمان الموازيان لهما من نفس النقطة متعامدين
أو بتعريف مبسط: يكون مستقيمان متعامدان في الفضاء إذا كان المستقيم الموازي لأحدهما عموديا على الآخر
مثال: ما هو الوضع النسبي للمستقيمين (GF) و (DC) ؟
*المستقيم الذي يوازي (GF) من نفس نقطة (DC) هو (BC)
فنقول بما أن $(BC) \parallel (GF)$ و $(BC)\perp(DC)$ فإن $(GF)\perp(DC)$

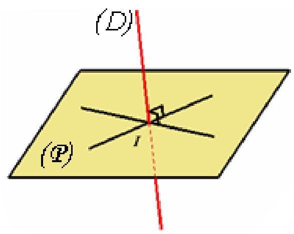


خواص:

❶ المستقيم العمودي على أحد المستقيمين المتوازيين عمودي على الأخر
❷ المستقيمين الموازيان لمستقيمين متعامدين متعامدان

2) تعامد مستقيم و مستوي

يكون مستقيم عموديا على مستو إذا كان عموديا على كل مستقيمات هذا المستوي
*مبرهنة:
إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين من مستو فإنه عمودي على كل مستقيمات هذا المستوي

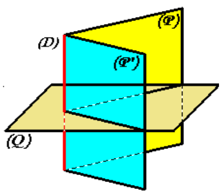


3) تعامد مستويين

يكون مستويين متعامدين إذا شمل أحدهما مستقيما عموديا على الاخر

خواص:

❶ المستوي العمودي على أحد المستويين المتوازيين عمودي على الأخر
❷ إذا كان (P) و (P') مستويين متقاطعين في المستقيم (D) و كان كل منهما عموديا على مستو ثالث (Q) فإن مستقيم تقاطعهما (D) عمودي على المستوي (Q)



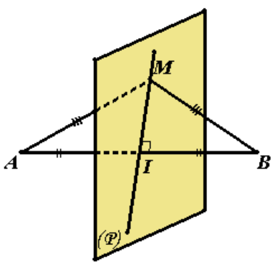
خواص:

❶ يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة و يعامد مستويا معلوما
❷ يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة و يعامد مستقيما معلوما
❸ المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان
❹ المستقيمان العموديان على نفس المستوي متوازيان
❺ المستقيم العمودي على أحد المستويين المتوازيين عمودي على الاخر
❻ المستوي العمودي على أحد المستقيمين المتوازيين عمودي على الاخر

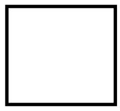
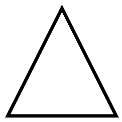
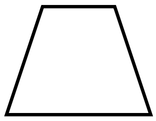
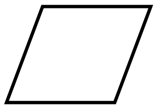
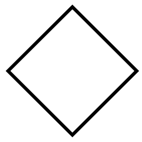
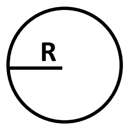
Prof Mustapha
KHALDI

د) المستوي المحوري لقطعة مستقيم

المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ هو المستوي العمودي على (AB) في منتصف $[AB]$
*مبرهنة:
مجموعة النقط المتساوية المسافة عن نقطتين متمايزتين A و B في الفضاء هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$



المحيط و المساحة

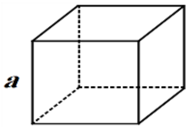
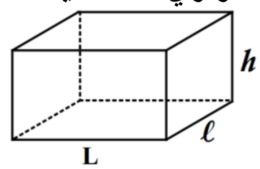
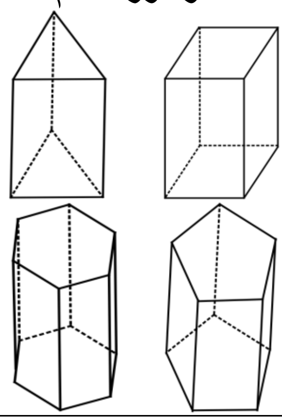
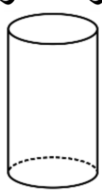
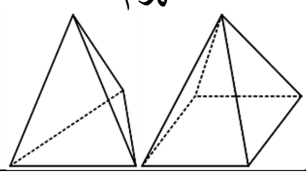
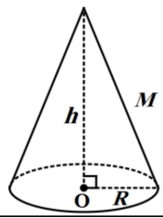
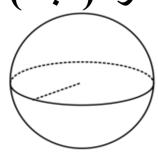
الشكل	المحيط P	المساحة S
المربع 	**مجموع الأضلاع** أو **4 × الضلع**	**الضلع × الضلع** أو $\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$
المستطيل 	**مجموع الأضلاع** أو 2 × (الطول + العرض)	**الطول × العرض**
المثلث 	**مجموع أضلاعه**	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$
شبه منحرف 	**مجموع أضلاعه**	$\frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$
متوازي الأضلاع 	**مجموع الأضلاع** أو 2 ×(مجموع ضلعين متتاليين)	القاعدة × الارتفاع
المعين 	**مجموع الأضلاع** أو **4 × الضلع**	$\frac{\text{جداء القطرين}}{2}$ أو القاعدة × الارتفاع
الدائرة 	نصف القطر: R $\pi = 3,14$ القطر: D $\pi \times R \times 2$ أو: $\pi \times D$	نصف القطر: R $\pi = 3,14$ $\pi \times R^2$

a: الضلع
l: العرض
L: الطول
h: الارتفاع
D: القطر
R: نصف القطر
S أو A: المساحة

S_B: مساحة القاعدة
P: المحيط
P_B: محيط القاعدة
V: الحجم
B: القاعدة الكبرى
b: القاعدة الكبرى

Prof Mustapha
KHALDI

الحجم، المساحة الجانبية والمساحة الكلية

الشكل	الحجم (السعة)	المساحة الجانبية	المساحة الكلية
المكعب 	$(\text{الضلع})^3 =$ الضلع × الضلع × الضلع $V = a \times a \times a = a^3$	مساحة وجه × 4 $S = 4a^2$	مساحة وجه × 6 $S = 6a^2$
متوازي المستطيلات 	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = S_B \times h$ أو الطول × العرض × الارتفاع $V = L \times l \times h$	محيط القاعدة × الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2(L + l) \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2[(L + l) \times h + L \times l]$
الموشور القائم 	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = S_B \times h$	محيط القاعدة × الارتفاع $S = P_B \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
الأسطوانة الدورانية 	مساحة القاعدة × الارتفاع $V = S_B \times h$ أو $V = \pi \times R^2 \times h$	محيط القاعدة × الارتفاع $S = P_B \times h$ أو $S = 2\pi R \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $S = 2\pi R(h + R)$
الهرم 	$\dfrac{\text{مساحة القاعدة × الارتفاع}}{3}$ $V = \dfrac{S_B \times h}{3}$	نصف محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
المخروط 	$\dfrac{\text{مساحة القاعدة × الارتفاع}}{3}$ $V = \dfrac{S_B \times h}{3}$ أو $V = \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$	طول مولد المخروط: M نصف محيط القاعدة × طول مولده أو $S = \pi \times R \times M$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $S = \pi R(R + M)$
الكرة (الجلة) 	نصف القطر: R $\quad \pi = 3,14$ $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times R^3$	نصف القطر: R $\quad \pi = 3,14$ $S = 4 \times \pi \times R^2$	

Prof Mustapha KHALDI