ج) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x \in]-3,+\infty[$: $f(x) \leq 2$

د) ما هي المجموعة التي تمسحها

الصورة $f(x)$ لما x يمسح $]-3,+\infty[$

10 - ليكن جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-5\ ,\ 5]$

x	-5		-3		0		5
$f(x)$	-2	↗	0	↘	-3	↗	4

1) من الجدول السابق اوجد جدول تغيرات الدوال التالية :

$L(x)=|f(x)|$, $I(x)=f(x)-2$, $h(x)=-f(x)$, $g(x)=4f(x)$, $k(x)=f(|x|)$

2) ارسم المنحنى (γ) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

في نفس المعلم السابق ارسم المنحنيات الدوال المعرفة سابقا .

الدرس : 2

المعادلات والمتراجحات

1 . حل معادلة من الدرجة الثانية

1.1 تعريف

معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x هي كل معادلة من الشكل : $ax^2+bx+c=0$

حيث: a , b , c ثلاث إعداد حقيقية معطاة و $a \neq 0$

- حل المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ هو إيجاد كل الإعداد x_0 بحيث : $ax_0^2+bx+c=0$

- نقول عن العدد x_0 حلا او جذرا للمعادلة : $ax^2+bx+c=0$

مثال

$2x^2+3x-5=0$ معادلة من الدرجة الثانية حيث : $a=2$, $b=3$, $C=-5$

نلاحظ ان : $x_0=1$ يحقق $2x_0^2+3x_0-5=0$ ومنه فان $x_0=1$ حلا للمعادلة $2x^2+3x-5=0$

2.1 حل معادلة من الدرجة الثانية

نضع : $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث : $a \neq 0$ ، $(b,\ c) \in IR^2$

اولا : نكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي

بما ان : $a \neq 0$ فان : $f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

لكن : $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$ ومنه : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{4a^2}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

تسمى هذه الكتابة بالشكل النموذجي لـ: $f(x)$

□ ثانيا : حل المعادلة : $f(x)=0$

نضع : $\Delta=b^2-4ac$ ومنه : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- إذا كان : $\Delta\langle 0$ فان : $\frac{-\Delta}{4a^2}\rangle 0$ ولدينا : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ منه ينتج

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\rangle 0$ وبالتالي المعادلة : $f(x)=0$ ليس له حلول في IR

- إذا كان : $\Delta=0$ فان : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

$f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان : $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ وبما ان : $a\neq 0$ فان : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ أي :

$x=\frac{-b}{2a}$ بالتالي المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد مضاعف $\frac{-b}{2a}$

- إذا كان : $\Delta\rangle 0$ فان نكتب : $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ ومنه : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right]$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

بوضع : $x_1=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ فان : العبارة $f(x)$ تكتب كما يلي :

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان : $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ وبما ان $a\neq 0$ فان : $x-x_1=0$ او $x-x_2=0$ أي : $x=x_1$ أو $x=x_2$ بالتالي المعادلة : $f(x)=0$ لها حلين x_1 ، x_2

□ مبرهنة

$f(x)=ax^2+bx+c$ حيث : $a\neq 0$ و c,b إعداد حقيقية و $\Delta=b^2-4ac$ مميز ثلاثي حدود $f(x)$

- إذا كان : $\Delta\langle 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ ليس لها حلول في IR

- إذا كان : $\Delta=0$ فان المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $-\frac{b}{2a}$ (يسمى حلا مضاعفا)

- إذ كان $\Delta\rangle 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ لها حلين x_1 ، x_2

حيث : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال ◆

حل في IR المعادلات التالية :

1) $x^2+x+1=0$ ، 2) $x^2+5x-6=0$ ، 3) $x^2+2x+1=0$

✓ الحل :

1) $x^2+x+1=0$ ، $a=1$ ، $b=1$ ، $c=1$

$\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=1-4=-3$

بما ان : $\Delta\langle 0$ فان المعادلة : $x^2+x+1=0$ ليس لها حلول في IR

2) $x^2+5x-6+0$ ، $a=1$ ، $b=5$ ، $c=-6$

$\Delta=b^2-4ac$ منه $\Delta=25-4(1)(-6)$ منه : $\Delta=49$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة $x^2+5x-6=0$ لها حلين x_1 ، x_2

حيث: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{2}=-6$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{2}=1$

منه المعادلة : $x^2+5x-6=0$ لها حلين : -6 , 1

3) $x^2+2x+1=0$ ، $a=1$ ، $b=2$ ، $c=1$

$\Delta=b^2-4ac$ منه : $\Delta=0$

بما ان : $\Delta=0$ فان المعادلة : $x^2+2x+1=0$ لهل حل وحيد

$x_0=-\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

3.1 العلاقة بين جذري معادلة من الدرجة الثانية

إذا كانت المعادلة : $f(x)=0$ حيث : $f(x)=ax^2+bx+c$

و $a\neq 0$ تقبل حلين x_1 ، x_2 فان :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

اذن : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

تمرين تدريبي

1) نعتبر في مجموعة الإعداد الحقيقية المعادلة : $f(x) = 5x^2 + 4x - 9 = 0$

- عين الحل x_2 للمعادلة $f(x) = 0$ إذا علمت ان : $x_1 = 1$ حلا لها

2) لتكن : $g(x) = 0$ معادلة من الدرجة الثانية حيث معامل x^2 هو 2

- عين عبارة $g(x)$ علما ان $x_1 = 2$ و $x_2 = -3$ حلين للمعادلة : $g(x) = 0$

✓ الحل :

1) بما ان x_1 و x_2 حلين للمعادلة $f(x) = 0$ فان : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

بتعويض قيمة x_1 في المساويتين : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ نجد : $1 + x_2 = \frac{-4}{5}$

ومنه : $x_2 = \frac{-4}{5} - 1 = \frac{-9}{5}$

2) بما ان $g(x) = 0$ معادلة من الدرجة الثانية و x_2 ، x_1 حلين لها

فان : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

بالتعويض نجد : $\frac{-b}{a} = -1$ و $\frac{c}{a} = -6$

منه ينتج : $a = b$ و $c = -6a$

وبالتالي : $g(x) = ax^2 + ax - 6a$ بتعويض قيمة a نجد : $g(x) = 2(x^2 + x - 6)$

❷ - تحليل وإشارة ثلاثي حدود

1.2 تحليل ثلاثي الحدود

ليكن $f(x)$ ثلاثي حدود معرف بالعبارة : $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث : $a \neq 0$ و b و c إعداد حقيقية وليكن Δ مميز المعادلة : $f(x) = 0$

- إذا كان : $\Delta < 0$ فان : $f(x)$ لا يتحلل إلى جداء عوامل
- إذا كان : $\Delta > 0$ فان : $f(x) = 0$ لها حلين مختلفين x_2 ، x_1 وبالتالي :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل مضاعف : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

وعليه من اجل كل x من IR : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

مثال ◆

$f(x) = 2x^2 + x - 10$ ، $g(x) = 3x^2 + 18x + 27$

- حلل $f(x)$ و $g(x)$ إلى جداء عوامل .

✓ الحل :

1) تحليل $f(x)$

$\Delta = b^2 - 4ac$ منه $\Delta = 81$

$\Delta > 0$ ومنه المعادلة $f(x) = 0$ لها حلين : x_2 ، x_1 حيث :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-9}{4} = \frac{-5}{2}$ ، $x_2 = \frac{-1+9}{4} = \frac{8}{4} = 2$

بالتالي : $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 2)$

2) تحليل $g(x)$

$\Delta = 18^2 - 4\,(3)(27) = 324 - 324 \neq 0$

$\Delta = 0$ ومنه المعادلة : $g(x) = 0$ لها مضاعف $\frac{-b}{2a}$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-18}{6} = -3$ بالتالي : $g(x) = 3(x+3)^2$

2.2 إشارة ثلاثي الحدود

□ مبرهنة

$f(x)$ ثلاثي حدود معرف كما يلي : $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث : $a \neq 0$ و c, b عددين حقيقيين و Δ مميز $f(x) = 0$

- إذا كان : $\Delta < 0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a من اجل كل عدد حقيقي x
- إذا كان : $\Delta = 0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a من اجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $x = \frac{-b}{2a}$
- إذا كان : $\Delta > 0$ فان إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة a خارج الجذرين وعكس إشارة a داخل الجذرين .

الاثبات

الشكل النموذجي لـ : $f(x)$ هو : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\langle 0$ فإن العدد $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ موجب تماما وعليه فان إشارة $f(x)$ من إشارة العدد a من اجل كل x من IR.

-إذا كان : $\Delta=0$ فان أشارة $f(x)$ هي من إشارة العدد a من اجل كل $x\neq\frac{-b}{2a}$

- إذا كان : $\Delta\rangle 0$ فان : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x)$ هو جداء ثلاث عوامل الأول a وهو ثابت و العاملين الآخرين هما ثنائي حد من الدرجة الأولى واللذان نستطيع تعيين إشارتهما من اجل كل x

نفرض ان : $x_1\langle x_2$

نلخص إشارة $f(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a	إشارة a		إشارة a		إشارة a		
$x-x_1$	-		0	+		+	
$x-x_2$	-			-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$	+			-		+	
$f(x)$	إشارة a		0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

مثال

عين إشارة ثلاثي الحدود $f(x)$ حيث : $f(x)=-3x^2+5x+8$

الحل :

$\Delta=5^2-4(-3)(8)=121$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة : $f(x)=0$ لها حلين مختلفين :

$x_1=\frac{-5-11}{-6}=\frac{-8}{3}$ و $x_2=\frac{-5+11}{-6}=-1$ ومنه : $f(x)=-2(x+1)\left(x+\frac{8}{3}\right)$

وإشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-8}{3}$		-1		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

$f(x)$ سالب تماما لما x ينتمي إلى المجموعة : $\left]-\infty,\frac{-8}{3}\right[\cup]-1,+\infty[$ و $f(x)$ موجب تماما لما x تنتمي إلى $\left]-\frac{8}{3},-1\right[$

3.2 حل متراجحة من الدرجة الثانية

- نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة من الشكل :

$ax^2+bx+c\langle 0$ او : $ax^2+bx+c\leq 0$ او : $ax^2+bx+c\rangle 0$ او : $ax^2+bx+c\geq 0$

حيث : $a\neq 0$ و b و c عددان حقيقيان .

- حل المتراجحة : $ax^2+bx+c\langle 0$ يعني تعيين الإعداد الحقيقية x التي تجعل : $ax^2+bx+c\langle 0$ ومن اجل ذلك نعين إشارة ثلاثي الحدود : ax^2+bx+c

مثال

- حل في IR المتراجحات التالية :

1) $x^2+x+1\langle 0$ ، 2) $2x^2+3x+7\rangle 0$ ، 3) $-3x^2+6x+9\geq 0$

الحل :

1) $x^2+x+1\langle 0$ ، $\Delta=1-4=-3$

$\Delta\langle 0$ بالتالي ثلاثي الحدود $\left(x^2+x+1\right)$ ليس له جذور وإشارته من إشارة a $(a=1)$

إذن من اجل كل x من IR : $x^2+x+1\rangle 0$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $x+x+1\langle 0$ هي : ϕ

2) $2x^2+x+7\rangle 0$ ، $\Delta=9-(4)(2)(7)$ ومنه : $\Delta=-47$

$\Delta\langle 0$ بالتالي ثلاثي الحدود $\left(2x^2+3x+7\right)$ ليس له جذور وإشارته من نفس شارة a $(a=+2)$ اي : موجبة

إذن : من اجل كل x من IR : $2x^2+3x+7\rangle 0$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $2x^2+3x+7\rangle 0$ هي IR

3) $-3x^2+6x+9\geq 0$ ، $\Delta=36-4(-3)(9)$ منه : $\Delta=144$

$\Delta\rangle 0$ ومنه ثلاثي الحدود : $\left(-3x^2+6x+9\right)$ له جذرين $x_1=-1$ و $x_2=3$ وإشارة $\left(-3x^2+6x+9\right)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	0	+	0	-	

من الجدول أعلاه نستنتج أن مجموعة قيم x التي من أجلها يكون $-3x^2+6x+9\geq 0$ هي $[-1\ ,\ 3]$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $-3x+6x+9\geq 0$ هي : $s=[-1\ ,3]$

3 - ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية والقطع المكافئ

الهدف من هذه الفقرة هو تبيان ان التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية هو عبارة عن قطع مكافئ .

ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة f المعرفة بالشكل : $f(x)=ax^2+bx+c$ و $a\neq 0$.

معادلة (γ) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي : $y=f(x)$ بكتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي نجد :

$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ وبإضافة $\frac{\Delta}{4a^2}$ إلى طرفي المساواة الأخيرة نجد :

$$y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

بوضع $X=x+\frac{b}{2a}$ و $Y=y+\frac{\Delta}{4a}$ تصبح هذه المعادلة من الشكل : $Y=aX^2$

- لتكن $A\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ نقطة من المستوي في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ لنبحث عن معادلة (γ) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ولتكن M نقطة كيفية من المستوي إحداثياتها (x,y) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (X,Y) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، حسب علاقة شال نجد : $\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$

ومنه نستنتج : $\begin{cases} x=-\frac{b}{2a}+X \\ y=\frac{-\Delta}{4a}+Y \end{cases}$ ومنه نستنتج : $\begin{cases} x+\frac{b}{2a}=X \\ y+\frac{\Delta}{4a}=Y \end{cases}$

- معادلة المنحى (γ) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ هي : $y+\frac{\Delta}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

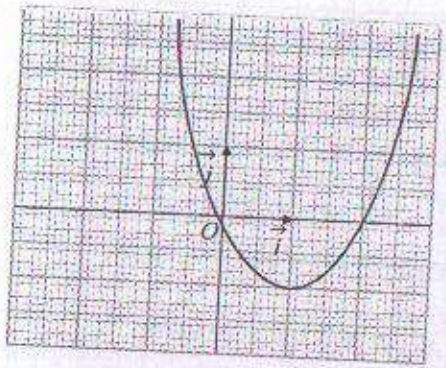
و باستعمال معادلات تغير معلم نجد : $Y=aX^2$ وهذه الأخيرة تمثل معادلة (γ) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$.

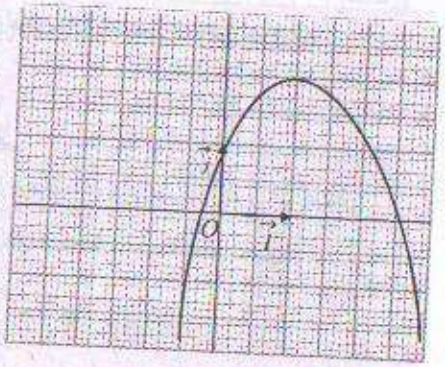
خلاصة

المنحى (γ) هو قطع مكافئ لان معادلته من الشكل : $Y=aX^2$ في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$

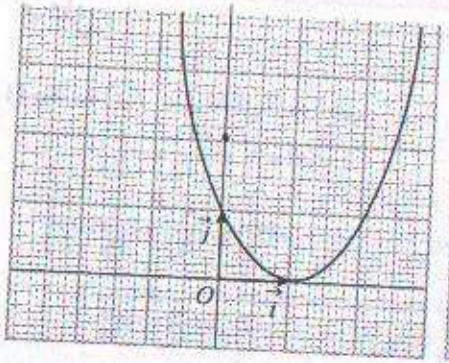
- في حالة : $a\rangle 0$ فان القطع المكافئ (γ) مشدود نحو الأعلى
- في حالة : $a\langle 0$ فان القطع المكافئ (γ) مشدود نحو الأسفل
- المستقيم ذوا المعادلة : $x=-\frac{b}{2a}$ هو محور تناظر للمنحى (γ)
- في حالة $a\rangle 0$ الدالة : $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ لها قيمة حدية صغرى من اجل : $x=\frac{-b}{2a}$
- في حالة : $a\langle 0$ الدالة : $f:x\mapsto ax^2+bx+c$ لها قيمة حدية عظمى من اجل : $x=\frac{-b}{2a}$.
- إشارة Δ تعطينا فكرة عن عدد نقط تقاطع (γ) مع محور الفواصل وإشارة a بفضلها نعرف هل المنحى (γ) مشدود نحو الأعلى او نحو الأسفل ومن اجل ذلك نميز الحالات الثلاثة التالية :

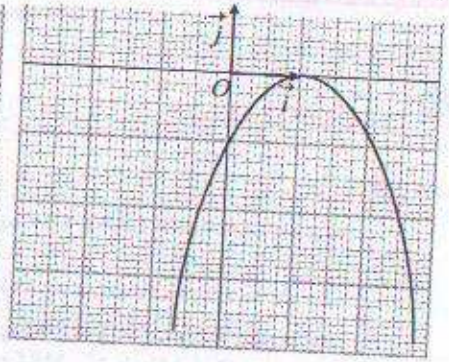
الحالة الأولى $\Delta\rangle 0$



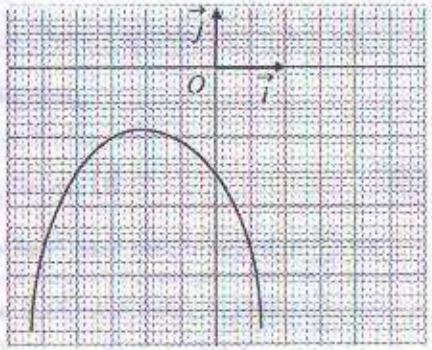


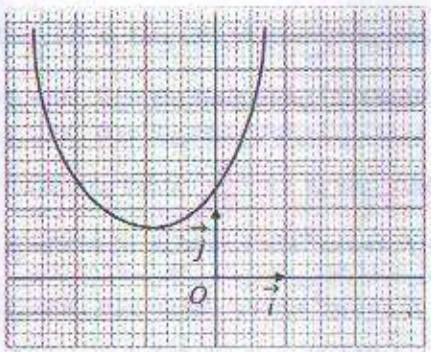
الحالة الثانية : $\Delta=0$





□ حالة الثالثة $\Delta \langle 0$





تمرين تدريبي

لتكن الدالة : $f: x \mapsto 2x^2+3x-5$ وليكن (γ) المنحنى البياني لها في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي

2) اكتب معادلة (γ) على الشكل : $y+\alpha=a(x+\beta)^2$ حيث : α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم استنتج احداثيا النقطة A مبدأ المعلم الجديد $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) اكتب معادلة (γ) في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ ثم ارسم (γ)

4) حل بيانيا المتراجحة $f(x)\le 0$.

✓ الحل :

1) كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي

$$f(x)=2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\right)$$
$$=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{5}{2}\right]$$
$$=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$$

2) كتابة معادلة (γ) على الشكل : $y+\alpha=a(x+\beta)^2$ بوضع : $y=f(x)$ نجد :

$y=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$ منه $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$ اي : $y+\frac{49}{8}=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$ بالتالي : :

$\alpha=\frac{49}{8}$ و $\beta=\frac{3}{4}$

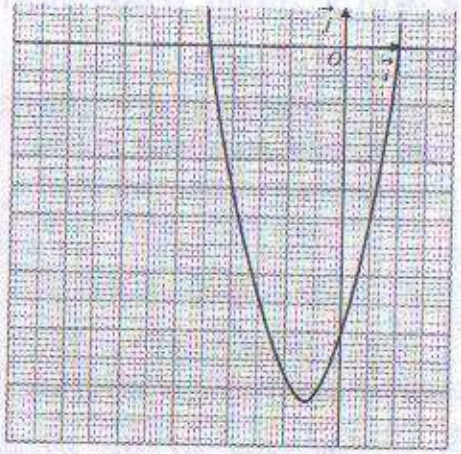
ومنه إحداثيتي النقطة A هي : $\left(-\frac{3}{4},\frac{-49}{8}\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وتحصلنا عليها بوضع:

$y+\frac{49}{8}=0$ و $x+\frac{3}{4}=0$

3) معادلات تغير معلم هي : $x+\frac{3}{4}=X$ و $y+\frac{49}{8}=Y$

وباستعمال هذا التغير تصبح معادلة (γ) على الشكل : $Y=2X^2$

في المعلم $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$



4) حل بيانيا المتراجحة : $f(x)\le 0$

حلول المتراجحة : $f(x)\le 0$ هي :

فواصل نقط من المنحني (γ) التي تقع تحت المستقيم ذو المعادلة : $y=0$ ومن الشكل نجد ان هذه الفواصل تنتمي الى المجال : $\left[\frac{-5}{2},1\right]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة :

$f(x)\le 0$ هي : $s=\left[-\frac{5}{2},1\right]$

4 - المعادلات الصماء

مثال

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (γ) المنحى البياني للدالة : $f: x\mapsto\sqrt{x-1}$ ، M نقطة من (γ) فاصلتها x والنقطة P مسقطها العمودي على محور الفواصل ، l عدد حقيقي معطى

هل توجد نقط M بحيث : $OP-2PM$ ؟

نحل هذه المسألة حسابيا من اجل $l=1$ ثم نحلها بيانيا في الحالة العامة اي من اجل اي قيمة للعدد l

1) لتكن (x,y) احداثيا النقطة M

- تحقق ان : $y=\sqrt{x-1}$ و $y\geq 0$ و $x\geq 1$

2) استنتج ان حل هذه المسألة يؤول إلى حل المعادلة : $x+2\sqrt{x-1}=l.....(E)$

المعادلة (E) تسمى معادلة صماء لأنها تحتوي على جذر وهذا الجذر لا يمكن تبسيطه

3) من اجل : $l=1$ حل المعادلة (E) جبريا ثم ماذا نستنتج عن وجود النقطة M

4) حل بيانيا المعادلة (E) من اجل اي قيمة للعدد l

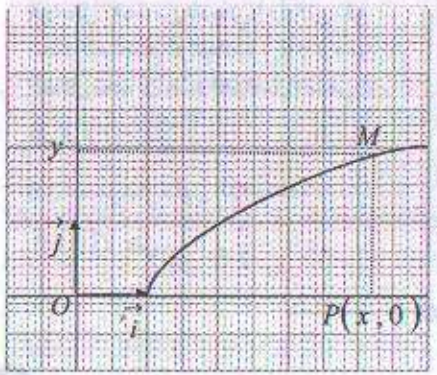
✓ الحل :

1) بما أن النقطة $M(x,y)$ تنتمي إلى (γ) فان : $y=f(x)$

اي : $y=\sqrt{x-1}$ وحتى يكون الجذر معرف يجب ان يكون : $x-1\geq 0$ اي : $x\geq 1$

2) وبما أن $y=\sqrt{x-1}$ فان $y\geq 0$

بما أن : p المسقط العمودي للنقطة M على $(x\ x')$ فان : $x=x_p=x_M$ و $y_p=0$



$$OP=\sqrt{(x_p-x_0)^2+(y_p-y_0)^2}$$

$$OP=\sqrt{(x-0)^2+(0-0)^2}$$

$$OP=\sqrt{x^2}=|x|$$

وبما ان $x\geq 1$ فان : $|x|=x$ ومنه $OP=x$

$$MP=\sqrt{(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2}$$

$$PM=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}$$

$$PM=\sqrt{y^2}=|y|$$

وبما ان : $y\geq 0$ فان : $|y|=y$ ومنه $PM=y$ اي : $PM=\sqrt{x-1}$

إذن المعادلة : $OP-2PM=l$ تكتب على الشكل: $x-2\sqrt{x-1}=l...(E)$

إذن وجود النقطة M يتعلق بوجود حلول للمعادلة (E)

3) حل المعادلة (E) من اجل $l=1$

المعادلة (E) تصبح كما يلي : $x-2\sqrt{x-1}=1$

$x-2\sqrt{x-1}=1.....(E_1)$

المعادلة (E_1) تكتب على الشكل : $\sqrt{x-1}=\frac{x-1}{2}$

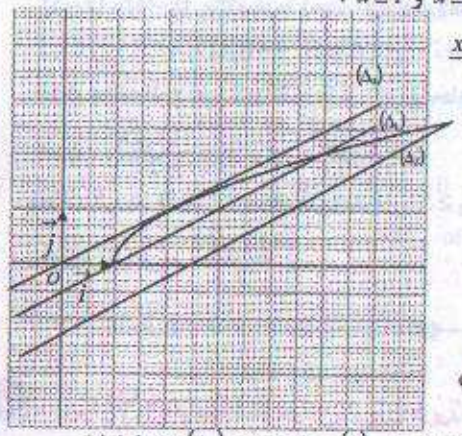
من المساواة : $\sqrt{x-1}=\frac{x-1}{2}$ ينتج : $\begin{cases}x-1=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\\ x-1\geq 0\end{cases}$ اي : $\begin{cases}(x-1)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\\ x\geq 1\end{cases}$

المعادلة : $(x-1)=\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ تكتب على الشكل : $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-(x-1)=0$ وبإخراج $(x-1)$ كعامل مشترك نجد : $(x-1)\left(\frac{x-1}{4}-1\right)=0$ بالتبسيط نجد : $(x-1)\left(\frac{x-5}{4}\right)=0$ ومنه نستنتج : $x=1$ أو : $x=5$ وبما ان : $1\geq 1$ و $5\geq 1$ فإن المعادلة : (E_1) لها حلين : 1 و 5

وبالتالي توجد نقطتين : $M_1(1,0)$ و $M_2(5,2)$ من (γ) بحيث : $OP-2PM=1$

4) حل بيانيا المعادلة (E)

المعادلة (E) تكتب على الشكل $\frac{x-l}{2}=\sqrt{x-1}$ وهذه المعادلة يكون لها معنى إذا وفقط إذا كان : $\frac{x-l}{2}\geq 0$ و $x-1\geq 0$ اي : $x\geq l$ و $x\geq 1$.



وضمن هذا الشرط المساواة : $\frac{x-l}{2}=\sqrt{x-1}$

تكتب على الشكل : $\left(\frac{x-l}{2}\right)^2=x-1$

وبالتبسيط نجد :

$x^2-2(l+2)x+l^2+4=0.....(E_2)$

مميز المعادلة (E_2) هو : $\Delta=16l$

إذن إذا كان : $l\langle 0$ فإن المعادلة (E_2) ليس لها حلول وبالتالي النقطة M غير موجودة ، وعليه النقطة M موجودة في حالة $l\geq 0$.

حلول المعادلة (E_2) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (γ) و المستقيم (Δ_l) ذو المعادلة $y=\frac{x-l}{2}$.

- لما $l=0$ فإن : (Δ_0) يقطع (γ) في نقطة $M(2\ ,\ 1)$
- لما $1\geq l\rangle 0$ فإن : (Δ_l) يقطع (γ) في نقطتين مختلفتين
- لما $l\rangle 1$ فإن المنحى (γ) يقطع (Δ_l) في نقطة وحيدة .

نتيجة

المعادلة الصماء هي كل معادلة تتضمن جذرا لا يمكن تبسيطه .

تمرين تدريبي

حل المعادلة الصماء التالية : $\sqrt{x-4}=x-5$

✓ الحل :

$\sqrt{x-4}=x-5.....(E)$

المعادلة (E) لها معنى إذا كان : $x-4\geq 0$ اي : $x\geq 4$

x	4	5	$+\infty$
$x-5$	$-$	0	$+$

لحل المعادلة (E) ندرس إشارة $(x-5)$ على المجال : $[4,+\infty[$

1) إذا كان : $4\leq x\rangle 5$ فإن $x-5$ سالب و $\sqrt{x-4}\rangle 0$ ومنه المعادلة (E) ليس لها حلول .

2) إذا كان : $x\geq 5$ فإن : $x-5\geq 0$ و $\sqrt{x-4}\geq 0$ ومنه المعادلة (E) تصبح كما يلي :

$(x-4)=(x-5)^2$ بالتبسيط نجد : $x^2-10x+25=x-4$ اي : $x^2-11x+29=0$

$\Delta=11^2-4(1)(29)=121-116=5$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة : $x^2-11x+29=0$ لها حلين : x_1 , x_2

حيث : $x_1=\frac{11+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{11-\sqrt{5}}{2}$

بما ان $x_2\rangle 5$ فان : x_2 مرفوض وبما ان : $x_1\geq 5$ فان x_1 مقبول وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $s=\left\{\frac{11+\sqrt{5}}{2}\right\}$

5 . معادلات ومتراجحات مضاعفة التربيع

1.5 معادلات مضاعفة التربيع

نسمي معادلة مضاعفة التربيع كل معادلة من الشكل : $ax^4+bx^2+c=0$

حيث : $a\neq 0$ و b و c عددان حقيقيان .

مثال ◆

كل من المعادلات التالية :

$2x^4+3x^2-1=0$, $x^4-x^2=0$, $-\sqrt{2}x^4+4=0$, $-\frac{1}{2}x^4+\sqrt{3}x^2=0$

هي معادلات مضاعفة التربيع .

2.5 حل معادلة مضاعفة التربيع

مثال 1

لتكن المعادلة : $ax^4+bx^2+c=0...(E)$ حيث : $a\neq 0$

1) بوضع : $t=x^2$ بين ان المعادلة (E) تكتب على الشكل : $at^2+bt+c=0.....(E')$

2) بين انه إذا كان x_0 حلا للمعادلة (E) فان المعادلة $t_0=x^2_0$ هو حلا للمعادلة (E') وبالعكس

3) بين انه إذا كان t_0 حلا موجب للمعادلة (E') فان المعادلة (E) لها حلين $x_1=\sqrt{t_0}$ و $x_2=-\sqrt{t_0}$.

✓ الحل :

1) بما أن $t=x^2$ فان : $t^2=x^4$ ومنه : $ax^4+bx^2+c=at^2+bt+c$

ومنه المعادلة : $ax^4+bx^2+c=0$ تكتب على الشكل : $at^2+bt+c=0$

2) إذا كان x_0 حلا للمعادلة (E) فان : $ax_0^4+bx_0^2+c=0$

لكن : $ax_0^4+bx_0^2+c=at_0^2+bt_0+c$ ومنه : $at^2_0+bt_0+c=0$ اي : t_0 حلا للمعادلة : $at^2+bt+c=0$.

وبالعكس t_0 حلا للمعادلة (E') تعني ان : $at_0^2+bt_0+c=0$

ولكن : $at^2_0+bt_0+c=a(x_0^2)^2+b(x_0^2)+c$

$=ax_0^4+bx_0^2+c$

وبما أن : $at_0^2+bt_0+c=0$ فان : $ax_0^4+bx_0+c=0$ و منه : x_0 حلا للمعادلة (E)

3) بما أن : t_0 حلا للمعادلة (E') فان المعادلة : $t_0=x^2$ لها حلين هما :

$x_1=\sqrt{t_0}$ و $x_2=-\sqrt{t_0}$

لاحظ $t_0=x^2$ تكتب على الشكل : $x^2=(\sqrt{t_0})^2$

مثال 2

- حل في IR المعادلتين التاليتين :

1) $x^4-5x^2+4=0.....(E_1)$

2) $2x^4-16x^2-18=0.....(E_2)$

✓ الحل :

1) بوضع $t=x^2$ المعادلة : (E_1) تكتب على الشكل : $t^2-5t+4=0.....(E'_1)$ مع : $t\geq 0$

مميز المعادلة : (E_1') هو : $\Delta = 9$

بما ان : $\Delta > 0$ فان المعادلة (E_1') لها حلين : t_0 , t_1

حيث : $t_0 = \frac{5+3}{2} = 4$, $t_1 = \frac{5-3}{2} = 1$

- الحالة الأولى : $t_0 = 4$

$x^2 = t_0$ يكافئ : $x^2 = 4$

يكافئ: $(x = 2)$ او : $(x = -2)$

- الحالة الثانية : $t_1 = 1$

$x^2 = t_1$ يكافئ : $x^2 = 1$

يكافئ : $(x = 1)$ او $(x = -1)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي : $s_1 = \{-1 , 1 , 2 , -2\}$

2) بوضع : $t = x^2$ المعادلة (E_2) تصبح كما يلي :

$2t^2 - 16t - 18 = 0 .....(E_2')$

مميز (E_2') هو : $\Delta = 400$

$\Delta > 0$ ومنه المعادلة : (E_2') لها حلين : t_0 , t_1 حيث :

$t_0 = 9$ و $t_1 = -1$

بما ان : $t > 0$ فان : t_1 مرفوض و t_0 مقبول

$x^2 = t_0$ تكافئ $x^2 = 9$

تكافئ $x = 3$ أو : $x = -3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي : $s_2 = \{3 , -3\}$

3.5 حل متراجحة مضاعفة التربيع

مثال ◆

لنعتبر المتراجحة التالية : $2x^4 - 8x^2 + 6 \le 0 .....(E)$

- حل في IR المتراجحة (E)

✓ الحل :

لحل المتراجحة (E) نعين إشارة العبارة : $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ ثم نحدد مجموعة قيم x التي تحقق (E) .

ولتعين إشارة $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ لابد معرفة حلول المعادلة : $2x^4 - 8x^2 + 6 = 0 .....(E')$.

- بوضع : $x^2 = t$ المعادلة (E') تصبح كما يلي : $2t^2 - 8t + 6 = 0 .....(E'')$

مميز المعادلة : (E'') هو $\Delta = 16$.

$\Delta > 0$ ومنه المعادلة (E'') لها حلين هما $t_0 = 3$ و $t_1 = 1$

- من اجل $t = t_0$ نجد : $x^2 = t_0$ اي : $x^2 = 3$ ومنه : $x = \sqrt{3}$ او : $x = -\sqrt{3}$

- من اجل : $x^2 = t_1$ نجد : $x^2 = t_1$ اي : $x^2 = 1$ ومنه $x = 1$ او $x = -1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E') هي : $\{1 , -1 , \sqrt{3} , -\sqrt{3}\}$

لدينا : $2t^2 - 8t + 6 = 2(t - t_0)(t - t_1)$

ومنه : $2x^4 - 8x^2 + 6 = 2(x^2 - 3)(x^2 - 1)$

إشارة $(2x^4 - 8x^2 + 6)$ هي إشارة الجداء $(x^2 - 3)(x^2 - 1)$.

والجدول التالي يلخص إشارة الجداء

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0	-		-		-	0	+	
x^2-1		+		+	0	-	0	+		+	
$2(x^2-3)(x^2-1)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

من الجدول السابق نستنتج ان : $2x^4 - 8x^2 + 6 \le 0$ إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى :

$[1 , \sqrt{3}] \cup [-\sqrt{3} , -1]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (E) هي : $x = [-\sqrt{3} , -1] \cup [1 , \sqrt{3}]$

تمرين تدريبي

نعتبر المعادلتين التاليتين :

$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0 .....(E)$

$2z^4 + 8z^3 + 2z^2 - 12z = 0 .....(E')$

1) بوضع : $z = x - 1$ بين أن : المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E')

2) حل في IR المعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (E')

✓ الحل :

1) من المساواة : $Z = x - 1$ نجد : $x = Z + 1$ بتعويض عبارة x في العبارة $(2x^4 - 10x^2 + 8)$ نجد

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 2(Z+1)^4 - 10(Z+1)^2 + 8$$
$$= 2(Z^4 + 4Z^3 + 6Z^2 + 4Z + 1) - 10(Z^2 + 2Z + 1) + 8$$
$$= 2Z^4 + 8Z^3 + 12Z^2 + 8Z + 2 - 10Z^2 - 20Z - 10 + 8$$
$$= 2Z^4 + 8Z^3 + 2Z^2 - 12Z$$

إذا المعادلة : $2x^4-10x^2+8=0$ تكافئ : $2Z^4+8Z^3+2Z^2-12Z=0$

ومنه المعادلتين : (E) و (E') متكافئتين اي ان إذا كان x_0 حلا لـ : (E)

فان Z_0 حلا لـ : (E') والعكس صحيح

2) - حل المعادلة (E)

بوضع $x^2=t$ المعادلة (E) تكتب على الشكل : $2t^2-10t+8=0$

مميز المعادلة : $2t^2-10t+8=0$ هو : $\Delta=10^2-4(2)(8)=36$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة : $2t^2-10t+8=0$ لها حلين : $t_0=4$ و $t_1=1$

- إذا كان : $t=t_0$

$x^2=4$ إذا وفقط إذا كان $(x=2)$ أو $(x=-2)$

- إذا كان : $t=t_1$

$x^2=1$ إذا وفقط إذا كان : $(x=1)$ أو $(x=-1)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $s=\{1\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ -2\}$

* استنتاج حلول المعادلة (E')

لدينا : $Z=x-1$ إذن

- إذا كان : $x=1$ فان $Z=0$
- إذا كان : $x=2$ فان : $Z=1$
- إذا كان : $x=-1$ فان : $Z=-2$
- إذا كان : $x=-2$ فان : $Z=-3$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E') هي : $s'=\{0\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ -3\}$.

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : حل معادلات من الدرجة الثانية

- حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلات التالية :

1) $3x^2-3(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+3\sqrt{6}=0$

2) $x^2+0,5x-1,5=0$

3) $u^2-7u-8=0$

✓ الحل :

1)

$$\Delta=\left[3(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]^2-4(3)(3\sqrt{6})$$
$$=9(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-36\sqrt{6}=9(2+3+2\sqrt{6})-36\sqrt{6}$$
$$=45+18\sqrt{6}-36\sqrt{6}\ =45-18\sqrt{6}$$
$$=9(5-2\sqrt{6})=3^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

منه : $\sqrt{\Delta}=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة لها حلين : x_0 ، x_1 حيث:

$$x_1=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}\ ,\quad x_0=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}=\sqrt{3}$$

ومنه مجوعة حلول المعادلة المعطاة هي : $S_1=\{\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\}$

2)

$$\Delta=(0,5)^2-4(1)-(1,5)=0,25+6=\frac{25}{100}+6=\frac{625}{100}=\left(\frac{25}{10}\right)^2$$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة المعطاة لها حلين : x_0 ، x_1 حيث :

$$x_1=\frac{-0,5-2,5}{2}=-\frac{3}{2}\quad ,\quad x_0=\frac{-0,5+2,5}{2}=1$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $s_2=\left\{1\ ,\ \frac{-3}{2}\right\}$

3)

$$u^2-7u-8=0$$
$$\Delta=(-7)^2-4(1)(-8)=81$$

$\Delta \rangle 0$ ومنه المعادلة المعطاة لها حلين هما : u_1 , u_0

حيث : $u_0 = \frac{7+9}{2} = 8$ ، $u_1 = \frac{7-9}{2} = -1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي : $s_3 = \{-1 , 8\}$

تطبيق . 2: حل معادلة من الدرجة الثانية بمعرفة أحد حليها

1) تحقق ان العدد 2 هو حلا للمعادلة : $2x^2 - 5x + 2 = 0 ....(E)$

2) ما هو مجموع جذري المعادلة (E) ؟ وما هو جدائهما ثم استنتج الجذر الثاني للمعادلة (E)

✓ الحل :

1) $2(2)^2 - 5(2) + 2 = 2 \times 4 - 10 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0$

منه العدد 2 هو جذرا للمعادلة (E)

2) ليكن : x_1 , x_0 جذري المعادلة (E) منه : $x_0 + x_1 = \frac{-b}{a}$ و $x_1 x_0 = \frac{c}{a}$ حيث : $a = 2$ و $b = -5$ و $c = 2$ ومنه : $x_0 + x_1 = \frac{5}{2}$ و $x_1 x_0 = 1$

- استنتاج الجذر الثاني :

لدينا : $x_0 + x_1 = \frac{5}{2}$ ومنه : $x_1 = \frac{5}{2} - x_0$ وبالتعويض نجد : $x_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

تطبيق . 3: معادلة من الدرجة الثانية ذات معاملات كيفية

1) كيف نختار العدد الحقيقي m حتى يكون العدد 1 جذرا للمعادلة :

$x^2 + mx + 3 = 0 .....(E)$

2) من اجل قيمة m المحصل عليها في السؤال 1)

عين الجذر الثاني للمعادلة (E).

✓ الحل :

1) 1 جذرا للمعادلة (E) هذا معناه ان : $1^2 + m \times 1 + 3 = 0$ بالتبسيط نجد : $m + 4 = 0$

اي : $m = -4$

2) من اجل $m = -4$ نرمز بـ : x_0 , x_1 لجذري المعادلة (E) منه : $x_0 + x_1 = \frac{-b}{a}$

و بتعويض a و b نجد : $x_0 + x_1 = 4$

منه : $x_1 = \frac{-b}{a} - x_0 = \frac{4}{1} - 1 = 4 - 1 = 3$

إذن في حالة : $m = -4$ المعادلة (E) لها حلين هما : 1 و 3

تطبيق . 4: حل معادلة من الدرجة الثانية و سيطية

نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية :

$-2x^2 - mx + 2 - m = 0 .....(E)$ حيث : m عدد حقيقي معطى

1) عين قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) جذرا مضاعف ثم احسبه

2) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين مختلفين في الإشارة

3) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين

4) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين

✓ الحل :

1) حتى تقبل المعادلة (E) جذر مضاعف يجب ان يكون : $\Delta = 0$.

$\Delta = (-m)^2 - 4(-2)(2-m) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$

$\Delta = 0$ إذا وفقط إذا كان : $(m-4)^2 = 0$ اي : $m - 4 = 0$ ومنه : $m = 4$

وفي هذه الحالة الجذر المضاعف هو : $x = \frac{-b}{2a}$.

بالتعويض قيمة a و b نجد : $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-m)}{-4} = \frac{m}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$

2) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين مختلفين في الإشارة يجب ان يكون : $\Delta \rangle 0$ و $\frac{c}{a} \langle 0$

$\Delta \rangle 0$ إذا وفقط إذا : $(m-4)^2 \rangle 0$ اي : $m \neq 4$

$\frac{c}{a} \langle 0$ إذا وفقط إذا كان : $\frac{2-m}{-2} \langle 0$ اي : $2 - m \rangle 0$ و منه : $m \langle 2$

$m \neq 4$ و $m \langle 2$ تكافئ : $m \in]-\infty , 2[$

ومنه مجموعة قيم m المطلوبة هي : $]-\infty , 2[$

3) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين يجب ان يكون : $\Delta \rangle 0$ و $\frac{-b}{a} \rangle 0$ و $\frac{c}{a} \rangle 0$

$\Delta \rangle 0$ تكافئ : $m \neq 4 .....(1)$

$\frac{c}{a} \rangle 0$ تكافئ $m \rangle 2 .....(2)$

$0 \rangle \frac{-b}{a}$ تكافئ $m \langle 0$.....(3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أنه لا توجد أي قيمة لـ : m تحقق الشروط الثلاثة السابقة

ومنه مجموعة قيم m هي : ϕ أي أن : المعادلة (E) لا تقبل جذرين موجبين معا

4) حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين معا يجب أن يكون :

$\Delta \rangle 0$ و $\frac{-b}{a} \langle 0$ و $\frac{c}{a} \rangle 0$.

$\Delta \rangle 0$ تكافئ : $m \neq 4$

$\frac{-b}{a} \langle 0$ تكافئ : $m \rangle 0$

$\frac{c}{a} \rangle 0$ تكافئ : $m \rangle 2$

و منه مجموعة قيم m التي تحقق الشروط الثلاثة هي : $]2 , 4[\cup]4 , +\infty[$

تطبيق . 5 : المعادلتين المتكافئتين

1) لتكن المعادلتين : $ax^2+bx+c=0$.....(E) و $a'x^2+b'x+c'=0$ ...(E')

حيث : a , b , c , a' , b' , c' أعداد حقيقية ؛ $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $a' \neq 0$ و $b' \neq 0$

عين الشرط اللازم والكافئ الذي تحققه : a , b , c , a' , b' , c' حتى يكون للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول

2) عين العددين : m و n بحيث المعادلتين :

$x^2-(m+1)x+m-n=0$.....(1) ، $3x^2-(m+7)x-n=0$.....(2)

لهما نفس الحلول ثم عين في هذه الحالة هذه الحلول

✓ الحل :

1) نفرض أن المعادلتين : (E) و (E') لهما نفس الحلين x_0 , x_1 بالتالي فان :

$x_0+x_1=\frac{-b}{a}$ ومن جهة أخرى : $x+x_1=\frac{-b'}{a'}$ كذلك $x_0x_1=\frac{c}{a}$ و $x_0x_1=\frac{c'}{a'}$

و عليه ينتج : $\frac{-b}{a}=-\frac{b'}{a'}$ و $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$ بالتبسيط نجد : $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ و $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$

منه ينتج : $\frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$ و $\frac{c}{c'}=\frac{a}{a'}$.

- نفرض أن : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ و أن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لها حلين : x_0 , x_1

و نبين أن المعادلة : $a'x^2+b'x+c'=0$ لها نفس الحلول : x_0 , x_1

نضع : $\frac{a}{a'}=\alpha$ منه نجد : $a'=\alpha a$ و $b'=\alpha b$ و $c'=\alpha c$ حيث : $\alpha \neq 0$

المعادلة : $a'x^2+b'x+c'=0$ تكتب على الشكل : $\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c=0$

منه : $\alpha(ax^2+bx+c)=0$ وبما أن : $\alpha \neq 0$ فان : $ax^2+bx+c=0$

إذن إذا كان : x_0 , x_1 حلان للمعادلة : $ax^2+bx+c=0$ و $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\alpha$ فإن :

x_0 , x_1 كذلك حلين للمعادلة : $a'x^2+b'x+c'=0$

2) المعادلتان لهما نفس الحلول إذا وفقط إذا كان :

$\frac{1}{3}=\frac{m+1}{m+7}$ منه ينتج : $\frac{1}{3}=\frac{-(m+1)}{-(m+7)}=\frac{m-n}{-n}$

$\frac{1}{3}=\frac{m+1}{m+7}$ تكافئ : $3m+3=m+7$ تكافئ $m=2$

$\frac{1}{3}=\frac{m-n}{-n}$ تكافئ : $3m-3n=-n$ تكافئ $n=3$

إذا حتى يكون للمعادلتين (1) و (2) نفس الحلول يجب أن يكون : $m=2$ و $n=3$

- من أجل : $m=3$ و $n=3$

المعادلة (2) تصبح كما يلي : $3x^2-9x-3=0$

$\Delta=81-4(3)(-3)=81+36=121$

$x_0=\frac{9+11}{6}=\frac{10}{3}$ و $x_1=\frac{9-11}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

تطبيق . 6 : تحليل ثلاثي حدود وتعيين إشارته

لتكن ثلاثيات الحدود التالية :

أ) $f(x)=3x^2-3x-6$

ب) $f(x)=4x^2+x-18$

ج) $f(x)=2x^2-24x-26$

1) حلل كثيرات الحلول المعطاة ثم عين إشارة كل منها

2) حل في IR المتراجحة : $f(x) \langle 0$ في كل حالة من الحالات السابقة .

✓ الحل :

1) أ) $f(x)=3x^2-3x-6$

$\Delta=9-(4)(3)(-6)=(81)$

$\Delta \rangle 0$ ومنه $f(x)$ له جذرين هما : x_0 , x_1 حيث : $x_0=2$ ، $x_1=-1$

منه : $f(x)=3(x-2)(x+1)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب) $f(x)=4x^2-x-18$

$\Delta=1-4(4)(-18)=289$

$\Delta>0$ ومنه : $f(x)$ له جذرين هما : x_1 ، x_0 حيث : $x_0=\frac{9}{4}$ ، $x_1=-2$

منه : $f(x)=4\left(x-\frac{9}{4}\right)(x+2)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-2		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج) $f(x)=2x^2-24x-26$

$\Delta=(24)^2-4(2)(-26)$ منه : $\Delta=176+208$ منه : $\Delta=784$

$\Delta>0$ ومنه $f(x)$ له جذرين هما x_0 ، x_1 حيث :

$x_0=\frac{24+28}{4}=13$ ، $x_1=\frac{24-28}{4}=-1$ وبالتالي : $f(x)=2(x+1)(x-13)$

- إشارة $f(x)$ مدونة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		$+13$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حل المتراجحة : $f(x)<0$

2) ا) حالة : $f(x)=3x^2-3x-6$: من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج ان مجموعة قيم : x التي تحقق : $f(x)<0$ هي : $]-1\,,\,2[$

ب) حالة : $f(x)=4x^2+x-18$

من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج ان مجموعة قيم x التي تحقق $f(x)<0$ هي $\left]-2\,,\,\frac{9}{4}\right[$.

جـ) حالة : $f(x)=2x^2-24x-26$

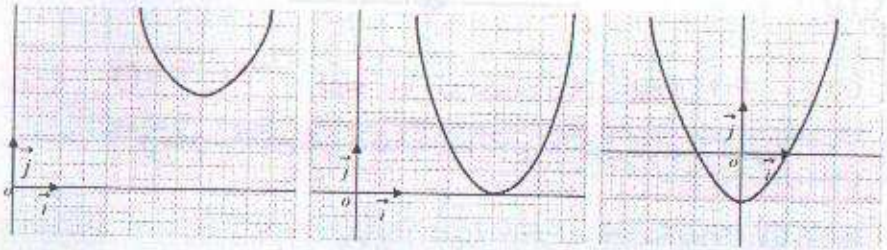
من جدول إشارة $f(x)$ نستنتج ان مجموعة قيم x التي تحقق : $f(x)<0$ هي : $]-1\,,\,13[$.

تطبيق . 7 : تعيين إشارة a و Δ بيانيا

الأشكال التالية تمثل بيانات لدوال ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

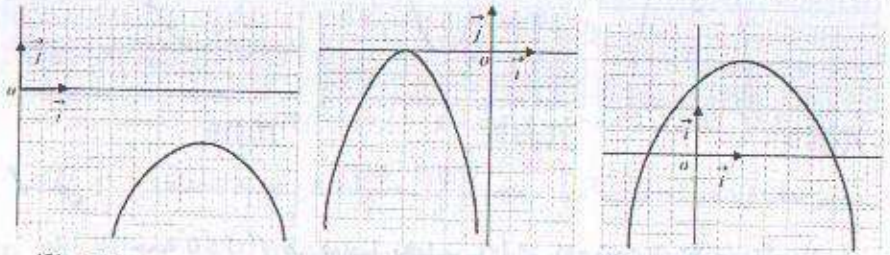
- عين إشارة المميز وإشارة a (a هو معامل x^2) في كل حالة من الحالتين التاليتين :

□ الحالة الأولى :



الشكل (1) الشكل (2) الشكل (3)

□ الحالة الثانية :



الشكل (1) الشكل (2) الشكل (3)

✓ الحل :

□ الحالة الأولى :

- في الشكل (1) المنحنى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة تماما وبما ان المنحى (γ) يقطع $(x\,x')$ في نقطتين فإن : $\Delta>0$

- في الشكل (2) المنحى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة وبما أن المنحى (γ) يقطع مرة واحدة $(x\,x')$ فإن : $\Delta=0$

- في الشكل (3) المنحى مشدود نحو الأعلى وبالتالي إشارة a موجبة وبما ان (γ) لا يقطع $(x\,x')$ فإن : $\Delta<0$

□ الحالة الثانية :

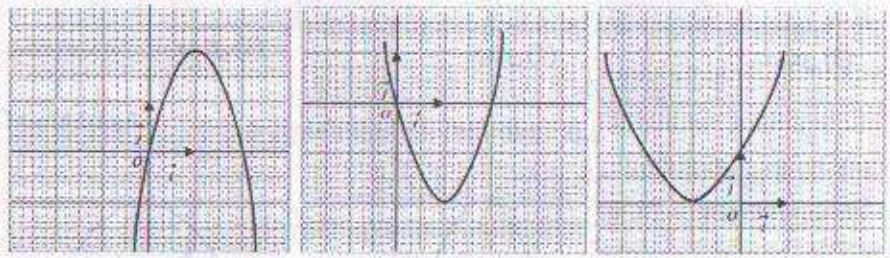
في الشكل (1) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل وبالتالي إشارة a سالبة وبما ان (γ) يقطع $(x\ ,\ x)$ في نقطتين فإن : $\Delta \rangle 0$

- في الشكل (2) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل بالتالي إشارة a سالبة وبما ان (γ) يقطع $(x\ x')$ في نقطة واحدة فإن : $\Delta = 0$

- في الشكل : (3) المنحى (γ) مشدود نحو الأسفل بالتالي $a \rangle 0$ وبما ان (γ) لا يقطع : $(x\ x')$ فإن : $\Delta \langle 0$

تطبيق . 8 : حل متراجحات بيانيا

في كل حالة من الحالات التالية أعط مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة :



$f(x) \le 0$ $\qquad$ $f(x) \le 0$ $\qquad$ $f(x) \rangle 0$

✓ الحل :

1) حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي فواصل نقط من (γ) التي تقع تحت المستقيم ذوا لمعادلة $y = 0$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى $]-\infty , 0] \cup [2\ ,\ +\infty[$ بالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $f(x) \le 0$ هي : $s_1 =]-\infty , 0] \cup [2\ ,+\infty[$

2) حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي فواصل نقط من (γ) التي تقع تحت المستقيم ذوا لمعادلة $y = 0$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى $[0\ ,\ 2]$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \le 0$ هي $s_2 = [0\ ,2]$

3) حلول المتراجحة $f(x) \rangle 0$ هي فواصل نقط تقاطع (γ) مع $(x\ x')$ ، ومن الشكل نجد أن هذه الفواصل تنتمي إلى IR ومنه مجموعة حلول المتراجحة : $f(x) \rangle 0$ هي : IR .

تطبيق . 9 : حل معادلات ناطقة

حل في مجموعة الأعداد الحقيقية IR المعادلتين التاليتين :

1) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+2} = \dfrac{2}{3}x-1 \ldots\ldots\ldots (E)$

2) $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{39}{10} \ldots\ldots (E')$

✓ الحل :

1) $\dfrac{x^2+3x-5}{x+2} = \dfrac{2}{3}x-1 \ldots\ldots\ldots (E)$

لكي يكون للمعادلة (E) معنى يجب ان يكون : $x+2 \ne 0$ أي : $x \ne -2$ ومنه الحلول ان وجدت فهي من المجموعة $IR-\{-2\}$

المعادلة (E) تكتب على الشكل : $\dfrac{x^2+3x-5}{x+2} - \left(\dfrac{2}{3}x-1\right) = 0$

بتوحيد المقامات نجد : $\dfrac{(x^2+3x-5)-(x+2)\left(\dfrac{2}{3}x-1\right)}{x+2} = 0$

بالتبسيط نجد : $\dfrac{\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-3}{x+2} = 0 \ldots\ldots (E_1)$

المعادلة : (E_1) تكافئ : $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-3=0$ و $x \in IR-\{-2\}$

مميز المعادلة : $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-3=0$ هو : $\Delta = \dfrac{100}{9} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^2$ ومنه المعادلة :

$\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x-3=0$ لها حلين : $x_0\ ,\ x_1$ حيث : $x_0 = -9$ ، $x_1 = 1$

بما ان : $x_0 \ne -2$ و $x_1 \ne -2$ فإن مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي : $\{-9\ ,1\}$

2) $\dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{39}{10} \ldots\ldots (E')$

المعادلة (E') لها معنى إذا وفقط ذا : $x-1 \ne 0$ و $x+2 \ne 0$ أي : $x \ne 1$ و $x \ne -2$

ومنه حلول المعادلة (E') ان وجدت فهي من المجموعة : $IR-\{1\ ,-2\}$

المعادلة (E') تكتب على الشكل : $\dfrac{(x+2)^2+(x-1)(2x+1)}{(x-1)\ (x+2)} = \dfrac{39}{10}$

بالتبسيط نجد : $\dfrac{3x^2+3x+3}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{39}{10}$

ومنه ينتج : $39(x-1)(x+2)=30x^2+30x+30$

بالتبسيط نجد : $9x^2+9x-108=0$

ومميز هذه المعادلة هو : $\Delta=3909$

بما أن : $\Delta>0$ فإن المعادلة : $9x^2+9x=108=0$ لها حلين x_0 , x_1

حيث: $x_0=\frac{-9+\sqrt{\Delta}}{18}$ و $x_1=\frac{-9-\sqrt{\Delta}}{18}$

تطبيق - 10:

لتكن المعادلة : $(x^2+x+1)^2-4x^2-4x-1=0.....(E)$

1) بالتعويض : $x^2+x=t$ في المعادلة (E) نتحصل على معادلة (E_1) يطلب حلها

2) من اجل كل α حل للمعادلة (E_1) حل المعادلة $U(x)=\alpha$ حيث $U(x)=t$

3) نرمز بـ : $f(x)$ الى الطرف الأول من المعادلة (E) و $g(x)$ الى الطرف الأول في المعادلة (E_1) و $U(x)=x^2+x$

أ) تحقق ان : $f(x)=g[u(x)]$ من اجل كل x من IR

ب) استنتج حلول المعادلة $f(x)=0$

✓ الحل :

1) المعادلة (E) تكتب على الشكل التالي :

$$(x+x+1)^2-4x^2-4x-1=[(x^2+x)+1]^2-4(x^2+x)-1$$
$$=(t+1)^2-4t-1=t^2-2t$$

إذن : $t^2-2t=0.....(E_1)$

المعادلة (E_1) لها حلين هما : 0 , 2

2) حل المعادلة : $U(x)=\alpha$

- من اجل $\alpha=0$

المعادلة : $U(x)=0$ هي : $x^2+x=0$ وحلي هذه المعادلة هما : -1 و 0

- من اجل : $\alpha=2$

المعادلة : $U(x)=2$ هي $x^2+x=2$ وتكتب على الشكل : $x^2+x-2=0$ وحلي هذه المعادلة هما 1 و -2 .

3) أ) $g(u(x))=(u(x))^2-2u(x)$

$$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)$$
$$=(x^2+x)^2+2(x^2+x)-4(x^2+x)+1-1$$
$$=[(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1]-4(x^2+x)-1$$
$$=(x^2+x+1)^2-4(x^2+x)-1=f(x)$$

ب) حل المعادلة $f(x)=0$ يؤول الى حل المعادلة $g(u(x))=0$ ومن السؤال الأول وجدنا الحلول α التي تحقق $g(\alpha)=0$ ومن السؤال الثاني عينا كل قيم x بحيث : $u(x)=\alpha$ التي هي حلول المعادلة : $f(x)=0$ ومنه نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي :

$\{0, 1, -1, 2\}$

تمارين و مسائل

1 - حل في IR المعادلات التالية :

1) $-3x^2+3\left(1+\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}=0$

2) $2x^2-0,6x+0,04=0$

3) $u^2-24u+144=0$.

2 1) تحقق أن العدد (-1) هو حلا للمعادلة : $-3x^2+2x+5=0$.....(E)

2) ما هو مجموع جذري المعادلة (E) ؟ وما هو جدائهما ثم استنتج الجذر الثاني للمعادلة (E).

3 - كيف نختار العدد الحقيقي m حتى يكون العدد (-2) جذرا للمعادلة :

$x^2-(1+m)x+2m-1=0$ ثم استنتج عندئذ الجذر الثاني .

4 - نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-(m+1)x+\frac{5}{4}m-\frac{1}{4}=0$....(E)

حيث : m عدد حقيقي معطى .

1) عين قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرا مضاعفا ثم احسبه

2) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين موجبين

3) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) حلين مختلفين في الإشارة

4) ما هي قيم m حتى تقبل المعادلة (E) جذرين سالبين

5) ما هي قيم m حتى لا تقبل المعادلة (E) جذورا .

5 - عين العدد الحقيقي m و n بحيث المعادلتين التاليتين لهما نفس الحلول

$x^2-2mx+2m-3n=0$.....(E)

$3x^2-(2m+6)x+1-3n=0$.....(E')

6 - لتكن ثلاثيات الحدود التالية :

1) $f(x)=2x^2+x-4$

2) $f(x)=3x^2-2x-5$

3) $f(x)=-2x^2+2\sqrt{2}x+2-2\sqrt{2}$

1) حلل كثير الحدود $f(x)$ إلى جداء عوامل ثم عين إشارته

2) حل في IR المتراجحات التالية : $f(x)\leq 0$ ، $f(x)\rangle 0$.

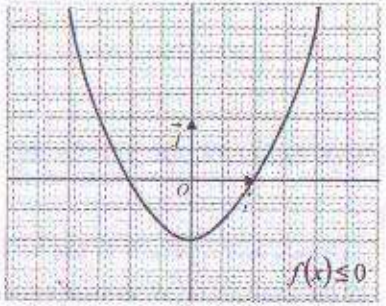
7 1) حل في IR المتراجحتين :

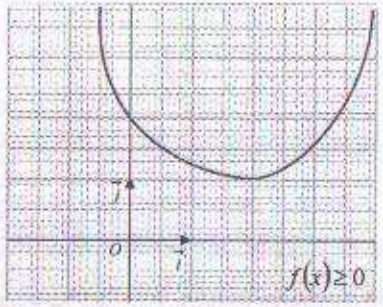
$x^2+3x+2\rangle 0$ .....(1)

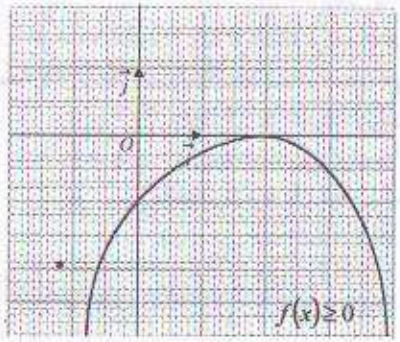
$x^2+3x\langle 0$ .....(2)

2) استنتج مجموعة حلول المتراجحة : $-1\langle x^2+3x+1\rangle -1$.

8 - في كل حالة من الحالات التالية أعط مجموعة حلول المتراجحة المطلوبة







9 - لتكن $f(x)$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية

$f(x)=x^2-mx+3$ حيث m عدد حقيقي معطى

1) عين مجموعة قيم m بحيث من اجل كل x من IR : $f(x)\rangle 0$

2) من اجل اي قيمة للعدد m بحيث يكون لـ $f(x)$ جذرا مضاعفا ثم عينه

3) من اجل اي قيمة للعدد m بحيث يكون لـ $f(x)$ جذرين مجموعهما 5

4) هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون لـ $f(x)$ جذرين احدهم مقلوب الآخر

10 - نعتبر المعادلة : $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-\frac{5x}{2x+2}+1=0.....(E)$

1) بتعويض : $t=\frac{x}{x+1}$ في المعادلة (E) نتحصل على معادلة (E_1) يطلب حلها

2) من اجل كل α حل للمعادلة (E_1) حل المعادلة $u(x)=\alpha$ حيث : $u(x)=\frac{x}{x+1}$

3) تحقق ان $f(x)=[g(u(x))]$ من اجل كل : $x\in IR-\{-1\}$

ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$

الدرس : 3

الاشتقاق

1 - العدد المشتق

1.1 النهاية العددية لدالة عند الصفر

مثال 1

سيارة متوجهة من المدينة A نحو المدينة B التي تبعد بمسافة $100\,km$، حيث المسافة المقطوعة من طرف السيارة في اللحظة t معطاة بالعبارة : $d(t)=10t^2$

حيث t بالثانية و d بالمتر

لتكن $V(1)$ السرعة اللحظية للسيارة عند اللحظة $t_0=1s$

ولحساب $V(1)$ نقوم بحساب السرعات المتوسطة للسيارة في لحظات قريبة من $1s$ وهذه السرعات تعطينا القيمة المقربة للعدد $V(1)$.

السرعة المتوسطة للسيارة بين اللحظتين $t_0=1$ و $t=1+h$

حيث : h عدد صغير جدا وقريب من الصفر

تعطى بالعلاقة : $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ مع $h\neq 0$

1) تحقق ان : $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=20+10h$ مع $h\neq 0$

2) أوجد السرعات المتوسطة للسيارة الموافقة لقيم h التالية :

$-0,00001,\ -0,0001,\ -0,001,\ 0,0000,\ 0,0001,\ 0,001$ ثم ماذا تستنتج

3) استنتج ان $V(1)$ هي نهاية $\frac{d(1+h)-d(1)}{h}$ لما h يقترب من الصفر ثم احسب $V(1)$.