4) عين بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية : $2x^3-(8+m)x^2+(7+4m)x-7-4m=0$

31 نعتبر في IR المتراجحة (I)..... $-x^2+7x-5 < \frac{5}{x-1}$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=-x^2+7x-5$

ب) ارسم (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2) أدرس تغيرات الدالة g المعرفة على $IR-\{-1\}$ بالعبارة : $g(x)=\frac{5}{x-1}$ ، ثم ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق

3) حل المعادلة $f(x)=g(x)$

4) باستعمال المنحنيين (C_f) و (C_g) عين حلول المتراجحة (I)

32 لتكن f دالة معرفة على $IR-\{+1\}$ بالعبارة التالية : $f(x)=\frac{x^2-3x}{(x-1)^2}$ وليكن (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أدرس تغيرات الدالة f

2) بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين A و B يطلب تعيين إحداثياتها

3) ارسم (C_f) المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4) لتكن الدالة g المعرفة على $IR-\{1\}$ بالعبارة : $g(x)=\frac{2x-3}{2x-2}$ وليكن (C_g) منحناها البياني في نفس المعلم

أ) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) ارسم (C_g) في نفس المعلم السابق

5) أ) عين حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ ، $m\in IR$

ب) في حالة المستقيم $(\Delta_m): y=m$ يقطع (C_f) في نقطتين M و N

أحسب بدلالة m إحداثيتي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$

ج) بين ان النقطة I تنتمي إلى (C_g) .

الدرس : 6

المتتاليات

1 . المتتالية

مثال

عدد سكان مدينة A في 2005 هو 1000 000 نسمة ، حسب دراسة إحصائية وجد أن عدد سكان هذه المدينة يزداد بانتظام كل سنة بقيمة 20 000 نسمة .

1) أوجد عدد سكان المدينة A في سنة 2006 .

2) أوجد عدد سكان المدية A في الخمس سنوات المقبلة (أي بعد 2006)

3) في أي سنة يكون عدد سكان المدينة A ضعف ما كان عليه في 2005 .

✓ الحل :

1) نسمي P_x عدد سكان المدينة A في سنة $(2005+x)$ و x عدد طبيعي

عندئذ P_0 عدد سكان المدينة A في سنة 2005 أي : $P_0=100\,000$

عدد سكان المدينة A في سنة 2006 هو P_1 حيث : $P_1=P_0+20\,000+1020\,000$

2) P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 هي عدد سكان المدينة A في السنوات : 2007 ، 2008 ، 2009 ، 2010 ، 2011 على التوالي :

$P_2=P_1+20\,000$ ، $P_3=P_2+20\,000$ ، $P_4=P_3+20\,000$

$P_5=P_4+20\,000$ ، $P_6=P_5+20\,000$

لاحظ ان يمكن أن نجد علاقة بين P_0 و P_x وهذه العلاقة هي : $p_x=p_0+20\,000\times x$

وعليه نجد : $p_2=1040\,000$ ، $p_3=1060\,000$ ، $p_4=1080\,000$

$p_5=1100\,000$ ، $p_6=1120\,000$

3) نضع : $p_x = 2000\,000$ ونبحث عن x

$p_x = 2000\,000$ تكافئ $200\,0000 = p_0 + 20000\,x$ منه : $x = \frac{100\,0000}{20\,000}$ منه : $x = 50$

ومنه السنة التي تصبح فيها عدد سكان المدينة A هو $2000\,000$ هي $(2005+50)$ أي 2055

1.1 تعريف :

المتتالية هي دالة حيث مجموعة تعريفها هي N أو جزء من N و نكتب : $\begin{array}{l} U : N \to IR \\ n \to U(n) \end{array}$

اصطلاحات :

- نرمز إلى صورة n بالمتتالية U بالرمز U_n بدلا من $u(n)$
- و نرمز إلى المتتالية U بالرمز (U_n) أو $(U_n)_{n\in N}$
- U_n يسمى الحد العام للمتتالية (U_n)
- الحد U_{n-1} إن وجد يسمى الحد السابق للحد U_n
- الحد U_{n+1} يسمى الحد الموالي للحد U_n
- الحدان U_n و U_{n+1} هما حدان متعاقبان لمتتالية

2.1 كيف نعرف متتالية :

نعرف متتالية بعبارة صريحة للحد ذو الرتبة n أو بدالة f ذات المتغير الطبيعي n حيث $U_n = f(n)$.

مثال

1) $U_n = \frac{2^n+1}{5}$ منه نجد :

$U_0 = \frac{2^0+1}{5} = \frac{2}{5}$ ، $U_1 = \frac{2^1+1}{5} = \frac{3}{5}$ ، $U_5 = \frac{33}{5}$

2) $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ منه نجد :

$U_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$ ، $U_2 = \frac{(-1)^2}{1} = 1$ ، $U_3 = \frac{(-1)^3}{1} = -1$

3) $U_n = 2n+3$ منه نجد : $U_0 = 3$ ، $U_1 = 5$ ، $U_2 = 7$ ، $U_{10} = 23$

4) $U_n = f(n)$ حيث : f هي الدالة المعرفة بـ: $f : x \mapsto 2x^2+1$

إذا على سبيل المثال : $U_1 = f(1) = 2\times 1^2 + 1 = 3$

$U_3 = f(3) = 2\times 3^2 + 1 = 19$ ، $U_5 = f(5) = 2\times 5^2 + 1 = 51$

- بواسطة الحد الأول وعلاقة (نقول عنها تراجعية) تسمح لنا بحساب حدا من حدود هذه المتتالية اعتمادا على الحد الأسبق .

مثال

$U_0 = 2$ ومن اجل كل $n \in N$: $U_{n+1} = 2U_n + 3$

نتحصل عند ند على :

$U_1 = 2U_0 + 3 = 7$ ، $U_2 = 2U_1 + 3 = 17$ ، $U_3 = 2U_2 + 3 = 37$.

$U_4 = 2U_3 + 3 = 71$ ، $U_5 = 2U_4 + 3 = 145$

وبهذه الكيفية نحسب الحدود الأخرى في هذا المثال U_{n+1} يكتب بالشكل :

$U_{n+1} = f(U_n)$ حيث : f هي الدالة المعرفة بـ:

$f : x \mapsto 2x+3$ تدعى المساواة : $U_{n+1} = f(U_n)$ علاقة تراجعية .

ملاحظة ❶

1) إذا كانت f دالة معرفة على المجال I بحيث من اجل كل : $x \in I$ يكون: $f(x) \in I$ فإننا نستطيع ان نعرف متتالية (U_n) بإعطاء قيمة الحد الأول U_0 من I وعلاقة تراجعية : $U_{n+1} = f(U_n)$.

ملاحظة ❷

إن إعطاء قيمة الحد الأول وعلاقة تراجعية لا يعين دائما متتالية فمثلا (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{1}{U_n - 2}$

لاحظ أن : $U_1 = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ بالتالي : U_1 غير معرف

تمرين تدريبي

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام : $U_n = \frac{5}{n+2}$

1) احسب $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$

2) علم الحدود $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ على مستقيم مدرج

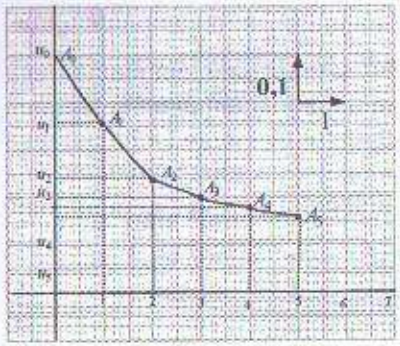
3) علم النقط $A_n(n, U_n)$ في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $|\vec{i}| = 1cm$ و $|\vec{j}| = 2cm$

✓ الحل :

1) $U_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5$ ، $U_1 = \frac{5}{3}$ ، $U_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25$ ، $U_3 = 1$ ، $U_4 = \frac{5}{6}$ ، $U_5 = \frac{5}{7}$

2)

3) الحد العام U_n تكتب على الشكل:
$U_n = f(n)$ حيث، f دالة معرفة كما يلي:
$f : x \mapsto \frac{5}{x+2}$
النقط $A_n(n, U_n)$ تنتمي إلى لنحني البياني للدالة f ، حدود المتتالية (U_n) تقرا على محور الترتيب $(y'y)$.
لاحظ أن النقطة A_0 تقع على محور الترتيب كون فاصلتها معدومة .



2 . اتجاه تغير متتالية

2 . 1 تعاريف :

- القول أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} > U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} < U_n$
- القول أن المتتالية (U_n) ثابتة يعني أن من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

ملاحظات

1) بنفس الكيفية السابقة نعرف المتتالية المتزايدة (أو المتناقصة) وذلك بتبديل المتباينة $U_{n+1} > U_n$ بالمتباينة $U_{n+1} \geq U_n$ أو $U_{n+1} < U_n$) بالمتباينة $U_{n+1} \leq U_n$
2) التعريف السابق لا يسمح لنا بالقول أن كل المتتاليات رتيبة على N
- توجد بعض المتتاليات رتيبة إبتداءا من رتبة معينة .

مثال 1

(U_n) متباينة معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n = 2n+3$
ومنه الحد U_{n+1} معرف بـ: $U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$
$U_{n+1} = 2n+3+2 = U_n + 2$
بما أن : $2 > 0$ فإن : $U_{n+1} > U_n$ وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

مثال 2

المتتالية المعرفة بحدها العام $U_n = (-1)^n + 1$ ، $n \in N$ حدودها هي : $0, 2, 0, 2, \ldots$
بالتالي فهذه المتتالية ليست رتيبة يدعى هذا النوع من المتتاليات بالمتتاليات المتناوبة

2 . 2 طرائق لتعيين اتجاه تغير متتالية :

- تعيين اتجاه تغير متتالية (U_n) يعتمد أساسا على إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$
فإذا كان : $U_{n+1} - U_n > 0$ فالمتتالية (U_n) متزايدة تماما .
وإذا كان : $U_{n+1} - U_n < 0$ فالمتتالية (U_n) متناقصة تماما .
وإذا كان : $U_{n+1} - U_n = 0$ فالمتتالية ثابتة .
- إذا كان : U_n و U_{n+1} موجبين تماما فإن تعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) يؤول إلى مقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع 1 . فإذا كان : $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ فإن : (U_n) متزايدة تماما وإذا كان : $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن : (U_n) متناقصة تماما .

مثال

1) لتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة :
$U_n = n^2 - 2n + 2$
أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)
2) ليكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $V_n = (n+1)^2$
- أدرس اتجاه تغير المتتالية (V_n)

✓ الحل :

1) لتعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) نعين إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 2\right] - \left[n^2 - 2n + 2\right]$$
$$= \left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 2\right] - \left[n^2 - 2n + 2\right]$$
$$= \left(n^2 + 1\right] - \left(n^2 - 2n + 2\right] = 2n - 1$$

من أجل كل $n \geq 1$ لدينا: $2n - 1 > 0$ ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما إبتداءا من الدليل 1) أي متزايدة تماما على N^*

2) بما أن $V_n = (n+1)^2$ و $V_{n+1} = (n+2)^2$ و V_n و V_{n+1} موجبين تماما فإن لتعيين إتجاه تغير المتتالية (V_n) نقارن بين $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ مع العدد 1 .

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \quad \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

لدينا من أجل كل : n من N : $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ وبإضافة 1 إلى طرفي هذه الأخيرة نجد:
$1 < 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2$ و بتربيع حدود هذه المتتالية نجد : $1 \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \leq 4$ أي:

$1 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq 4$ مما يدل على أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على N

□ مبرهنة

(U_n) متتالية معرفة بـ $U_n = f(n)$ مع f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$

1) إذا كانت f متزايدة تماما فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) إذا كانت f متناقصة تماما فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما

□ الإثبات

1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $n+1 > n$ وبما أن الدالة f متزايدة فإن :
$f(n+1) > f(n)$ أي : $U_{n+1} > U_n$ مما يدل على أن : (U_n) متتالية متزايدة تماما

2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $n+1 > n$ وبما أن الدالة f متناقصة تماما فإن :
$f(n+1) < f(n)$ أي : $U_{n+1} < U_n$ مما يدل على أن : (U_n) متناقصة تماما .

مثال ◆

(U_n) متتالية معرفة كما يلي : $U_n = 2n+3$

- أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

✓ الحل :

الحد العام U_n يكتب على الشكل : $U_n = f(n)$ مع f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = 2x+3$.

الدالة f من الشكل $x \mapsto ax+b$ حيث : $a = 2$ ، $b = 3$

وبما أن : $a > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على IR وبالتالي : فهي متزايدة تماما على $[0, +\infty[$ إذن المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

ملاحظة

إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بالعلاقة التراجعية : $U_{n+1} = f(U_n)$ فإنه ليس من الضروري أن يكون لـ f و (U_n) نفس إتجاه التغير

مثال ◆

f دالة معرفة على المجال $[0, 1]$ بـ $f(x) = x^2$

1) أ) ارسم (γ) بيان f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ثم عين نقط تقاطع (γ) مع المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$

ب) بين أنه من أجل كل $x \in]0, 1[$ ، $x^2 < x < 1$

2) نعرف المتتالية (U_n) بالحد الأول : $U_0 = \frac{3}{4}$ والعلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$

أ) علم النقطة A من (γ) ذات الفاصلة U_0
المستقيم المار من A والموازي لـ $(x'x)$ يقطع (d) في النقطة B ، عين فاصلة النقطة B

ب) علم النقطة من (γ) ذات الفاصلة U_1 .

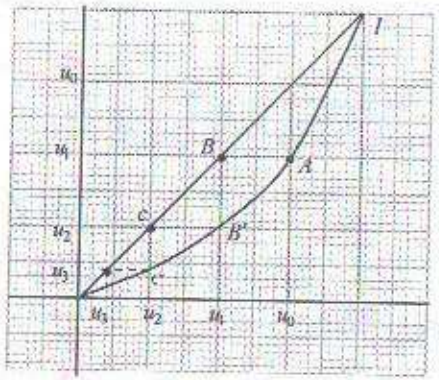
- أوجد طريقة لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية (U_n)

3) باستعمال متباينة السؤال 1) بين أن (U_n) متتالية متناقصة تماما ثم قارن بين إتجاه تغير f و (U_n).

✓ الحل :

1) أ) المنحني (γ) يقطع المستقيم (d) في نقطتين $O(0,0)$ و $I(1, 1)$

ب) المستقيم (d) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ ومنه $x < 1$ .....(1)
المنحني (γ) يقع تحت المستقيم (d) منه $x^2 < x$ .....(2)
من (1) و (2) نجد : $0 < x^2 < x < 1$



2) أ) النقطتين A و B لهما نفس الترتيب الذي هو U_1 وبما أن النقطة B تقع على المستقيم (d) فإن الفاصلة هي أيضا U_1

ب) نرسم المستقيم المار من B والموازي لـ $(y'y)$ يقطع (γ) في النقطة B'
النقطتين B و B' لهما نفس الفاصلة U_1

- نرسم (γ) بيان الدالة $f : x \mapsto x^2$ على المجال $[0, 1]$ ونرسم كذلك المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = x$ و نعلم نقطة A_0 ذات الفاصلة U_0 على محور الفواصل .

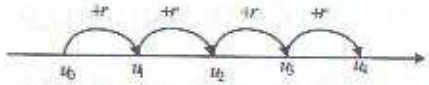
□ المستقيم المار من A_0 والموازي لـ : $(y'y)$ يقطع : (γ) في A
والمستقيم المار من A والموازي لـ : $(x'x)$ يقطع (d) في B
المسقط العمودي لـ B على $(x'x)$ هو U_1
المستقيم المار من $A_1(U_1, 0)$ والموازي $(y'y)$ يقطع (γ) في B'
والمستقيم المار من B' والموازي لـ $(x'x)$ يقطع (d) في النقطة C ، المسقط العمودي للنقطة C على محور الفواصل هو U_2 .
وبنفس الكيفية نعلم حدود المتتالية (U_n) على محور الفواصل

3) لدينا : $0 < x^2 < x < 1$ اي أن : $0 < f(x) < x < 1$ وعليه فإن : $f(U_n) < U_n < 1$
اي : $0 < U_{n+1} < U_n < 1$.
مما يدل على أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, 1]$ بينما المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N
وهذا يعني المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية : $U_{n+1} = f(U_n)$ اتجاه تغيراتها ليس دوما هو نفس تغير الدالة f .

3 . المتتالية الحسابية

1.3 تعريف :

القول أن المتتالية (U_n) حسابية يعني أنه يوجد عدد حقيقي r بحيث من أجل عدد طبيعي n
$U_{n+1} = U_n + r$ يدعى r أساس المتتالية (U_n)
- بعبارة أخرى تكون المتتالية حسابية إذا استطعنا الانتقال من حد إلى الحد الموالي بإضافة دائما نفس العدد r



مثال ◆
(U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n = 2n + 3$
- اثبت أن : (U_n) متتالية حسابية

✓ الحل :

$$U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$$

لاحظ أن : $U_{n+1} - U_n = 2$ و منه فإن : (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

مثال ◆
(V_n) متتالية معرفة بحدها العام : $V_n = -\frac{1}{2}n + 3$
- اثبت أن (V_n) متتالية حسابية .

✓ الحل :

$$V_{n+1} = \frac{-1}{2}(n+1) + 3 = \frac{-1}{2}n + \frac{5}{2}$$

$V_{n+1} - V_n = \left(\frac{-1}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}n + 3\right) = -\frac{1}{2}$ منه (V_n) متتالية حسابية أساسها $-\frac{1}{2}$

2.3 الوسط الحسابي :

□ مبرهنة
a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية .
$\frac{a+c}{2} = b$ إذا وفقط إذا كانت : a, b, c حدود من متتالية حسابية

□ الإثبات
1) نفرض أن : $\frac{a+c}{2} = b$ و نبين أن a, b, c حدود من متتالية حسابية
نضع : $b - a = r$ عندئذ $b = a + r$

من المساواة $\frac{a+c}{2} = b$ نجد : $c = 2b - a$

$$c = 2b - a = b + (b - a) = b + r$$

منه a, b, c هي فعلا حدود لمتتالية حسابية أساسها r
2) نفرض أن a, b, c حدود من متتالية حسابية أساسها r ونبين أن : $\frac{a+c}{2} = b$
لدينا من الفرض : $b = a + r$ و $c = b + r$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{a+b+r}{2} = \frac{(a+r)+b}{2} = \frac{b+b}{2} = b$$

مثال ◆
- أوجد ثلاث أعداد حقيقية x, y, z متتابعة من متتالية حسابية مع العلم أن :
$x + y + z = \frac{9}{2}$ و $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3}$

✓ الحل :

بما أن x, y, z حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن : $x + z = 2y$
نفرض قيمة $(x+z)$ في المساواة $x + y + z = \frac{9}{2}$ فنجد : $3y = \frac{9}{2}$ منه $y = \frac{3}{2}$
نعوض قيمة y في المساواة : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3}$ نجد : $\frac{1}{x} = 1$ ومنه $x = 1$
نعوض قيمة x و y في المساواة $x + z = 2y$ فنجد $z = 2y - x = 3 - 1 = 2$
إذن : $(x, y, z) = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$. لاحظ أن أساس هذه المتتالية هو : $r = \frac{1}{2}$

3.3 العلاقة بين حدود متتالية حسابية :

□ مبرهنة ❶
1) الحد العام لمتتالية حدها الأول U_0 و أساسها r هو : $U_n = U_0 + n \times r$.

2) المتتالية الحسابية ذات الأساس r متزايدة تماما إذا كان $r \rangle 0$ ومتناقصة تماما إذا كان $r \langle 0$ وثابتة إذا كان : $r = 0$

□ الإثبات

1) العبارة $U_n = U_0 + nr$ محققة من أجل الحدود الأولى : $U_1 = U_0 + 1 \times r$

$$U_2 = U_1 + r = (U_0 + r) + r = U_0 + 2r$$
$$U_3 = U_2 + r = (U_0 + 2r) + r = U_0 + 3r$$
$$U_4 = U_3 + r = (U_0 + 3r) + r = U_0 + 4r$$

نقبل أن هذه المساواة محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2) لتعيين إتجاه تغير المتتالية (U_n) ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = [U_0 + (n+1)r] - [U_0 + nr] = (n+1)r - nr = r$$

- إذن إذا كان : $r \rangle 0$ فإن : $U_{n+1} - U_n \rangle 0$ ومنه : (U_n) متزايدة تماما
- إذا كان : $r \langle 0$ فإن : $U_{n+1} - U_n \langle 0$ ومنه: (U_n) متناقصة تماما
- إذا كان : $r = 0$ فإن : $U_{n+1} - U_n = 0$ ومنه: (U_n) ثابتة .

مثال ❶

متتالية الأعداد الزوجية .....0 , 2 , 4 , 6 ..... هي متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = 0$ وأساسها $r = 2$ ، وبالتالي فهي متزايدة تماما .

- حدها العام هو : $U_n = U_0 + nr = 2n$.

مثال ❷

متتالية الأعداد الفردية 1 , 3 , 5 , 7 ..... هي متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = 1$ وأساسها $r = 2$ فهي متزايدة تماما .

- حدها العام هو : $U_n = U_0 + nr = 1 + 2n$.

مبرهنة ❷

(U_n) متتالية حسابية أساسها r .

من أجل كل عددين طبيعيين m و p : $U_m - U_p = (m-p)r$

□ الإثبات

نفرض أن U_0 هو الحد الأول للمتتالية (U_n) عندئذ الحد العام لها هو :

$U_n = U_0 + nr$ ومنه ينتج : $U_m = U_0 + m \times r$ و $U_p = U_0 + Pr$

$$U_m - U_p = (U_0 + mr) - (U_0 + pr) = mr - pr = (m-p)r$$

مثال ◆

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول : $U_0 = 5$ و $U_7 = 15$

- أوجد عبارة الحد العام لهذه المتتالية

✓ الحل :

بوضع : $m = 7$ و $p = 0$ في العلاقة : $U_m - U_p = (m-p)r$

نجد : $U_7 - U_0 = 7r$ ومنه $r = \frac{U_7 - U_0}{7} = \frac{15-5}{7} = \frac{10}{7}$

- عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هي : $U_n = U_0 + nr$

بالتعويض نجد : $U_n = 5 + \frac{10}{7}n$

3.3 مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

□ ليكن S المجموع المعرف بـ: $S = U_m + U_{m+1} + ... + U_P$

عدد حدود S هو : $(P - m + 1)$

فمثلا عدد حدود المجموع : $U_2 + U_3 + ... U_{15}$ هو $15 - 2 + 1$ أي : 14

1) حالة خاصة :

لنسحب مجموع n حد الأول الغير المعدومة من مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

نكتب S بترتيب تنازلي أي : $S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$

إذن : $S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + ..2 + 1$$

بجمع طرف إلى طرف نجد :

$$2S = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + ... + (2+n-1) + (1+n)$$
$$= (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

منه : $S = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن مجموع n عددا طبيعيا الأولى الغير المعدومة هو : $\frac{n(n+1)}{2}$

2) الحالة العامة :

لنسحب مجموع n حدا المتعاقبة لمتتالية حسابية أساسها r

نضع p هو الحد الأول و d هو الحد الأخير

حدود هذه المتتالية تكتب على الشكل :

$$p, p+r, ..., p+(n-1)r = d$$

$$S^c = P + (P+r) + ... + [p + (n-1)r]$$
$$= np + r[1 + 2 + ... + (n-1)]$$

$$= n\,p + r \times \frac{n\,(n-1)}{2} = n\left[p + \frac{r\,(n-1)}{2}\right]$$

$$= n\,\frac{[2p + r\,(n-1)]}{2} = n\,\frac{[p + (p + (n-1)r)]}{2}$$

$$= \frac{n\,(p+d)}{2}$$

نتيجة

مجموعة حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r وحدها الأول p وحدها الأخير d هو جداء عدد الحدود ونصف مجموع طرفي هذا المجموع

□ ترميز :

مجموع الحدود $U_1 + U_2 + \ldots U_n$ يكتب على الشكل $\sum_{p=1}^{n} U_P$ وتقرأ مجموع من $P = 1$ إلى n للحد " U_P " فمثلا : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

مثال ◆

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول : $U_0 = 5$ وأساسها : $r = 3$.

نضع : $S_n = U_4 + U_5 + \ldots U_n$

عين n بحيث : $S_n = 3020$

✓ الحل :

المجموع : S_n مكتوب على الشكل $U_m + \ldots U_P$ مع :

$m = 4$ و $p = n$ إذا يشمل : $(n - 4 + 1)$ حدا أي : $(n-3)$ حدا

إذن : $S_n = (n-3)\frac{(U_4 + U_n)}{2}$

لكن عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هو : $U_n = U_0 + nr$

بوضع : $n = 4$ في المساواة : $U_n = U_0 + n\,r$ نجد : $U_4 = U_0 + 4r$ بالحساب نجد :

$U_4 = 5 + 4 \times 3 = 17$ و $U_n = U_0 + n\,r = 5 + 3\,n$

وعليه فإن : $S_n = \frac{(n-3)(17 + 5 + 3\,n)}{2}$ بعد التبسيط نجد :

$$S_n = \frac{(n-3)(22 + 3\,n)}{2}$$

$S_n = 3020$ يكافئ : $\frac{(n-3)(22 + 3\,n)}{2} = 3020$

يكافئ : $(n-3)(22 + 3\,n) = 6040$

يكافئ : $3\,n^2 + 13\,n - 6106 = 0$

$\Delta = b^2 - 4\,ac$ بالتعويض نجد : $\Delta = 73441$ ، $\sqrt{\Delta} = 271$ ومنه المعادلة لها حلين هما :

$n_1 = \frac{-13 + 271}{6} = \frac{258}{6} = 43$ ، $n_2 = \frac{-13 - 271}{6} \notin N$

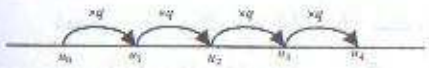
ومنه قيمة n المطلوبة هي : 43 .

4 . المتتالية الهندسية

1.4 تعريف :

القول ان المتتالية (U_n) هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = q\,U_n$ يدعى q أساس المتتالية (U_n)

و بعبارة أخرى تكون المتتالية هندسية إذا إستطعنا الانتقال من حد إلى الحد الموالي بضرب دائما في نفس العدد q .



مثال ◆

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام : $U_n = 2^n$. أثبت أن المتتالية (U_n) هندسية

✓ الحل :

$U_n = 2^n$ ومنه : $U_{n+1} = 2^{n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1} \times 2^{-n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2$$

إذن : $U_{n+1} = 2\,U_n$ بالتالي (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $U_0 = 2^0 = 1$

2.4 الوسط الهندسي :

□ مبرهنة

a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية :

$a \times c = b^2$ إذا وفقط إذا كانت : a ، b ، c حدود من متتالية هندسية

□ الإثبات

1) نفرض أن $a \times c = b^2$ ونبين أن a ، b ، c حدود من متتالية هندسية

بوضع : $\frac{b}{a} = q$ نجد : $b = q \times a$ و من المساواة $ac = b^2$ نجد : $c = \frac{b^2}{a}$

إذن : $c = \frac{b^2}{a} = \frac{(q \times a)^2}{a} = \frac{q^2 \times a^2}{a} = q^2 a = q \times (qa) = qb$

منه : a ، b ، c هي فعلا حدود لمتتالية هندسية أساسها q

نفرض أن a ، b ، c حدود من متتالية هندسية أساسها q ونبين أن $ac=b^2$

لدينا من الفرض : $b=qa$ و $c=qb$ إذن : $ac=(aq)b=b\times b=b^2$.

مثال ◆

a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث : $abc=64$ و

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{8}$

- اوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c

✓ الحل :

بما أن : a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $ac=b^2$

نعوض : ac في المساواة $abc=64$ نجد : $b^3=64$ ومنه : $b=4$

إذن : $ac=b^2=16....(1)$ ، $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}.....(2)$

من المساواة (1) نجد : $a=\frac{16}{c}$ نعوض في (2) نجد : $\frac{1}{\frac{16}{c}}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$ بالتبسيط نجد :

المعادلة $\frac{c}{16}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}$

بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد : $c^2-10c+16=0$

المعادلة : $c^2-10c+16=0$ لها حلين هما : $c_1=8$ و $c_2=2$.

- إذا كان : $c=8$ فإن : $a=2$ ومنه : $(a,b,c)=(2,4,8)$

- إذا كان : $c=2$ فإن : $a=8$ ومنه : $(a,b,c)=(8,4,2)$

3.4 العلاقة بين حدود متتالية هندسية :

مبرهنة ❶

الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها q هو : $U_n=U_0\times q^n$

□ الإثبات

العبارة : $U_n=U_0\times q^n$ محققة من أجل الحدود الأولى :

$U_1=U_0\times q^1$

$U_2=U_1\times q=U_0\times q\times q=U_0\times q^2$

$U_3=U_2\times q=U_0\times q^2\times q=U_0\times q^3$

$U_4=U_3\times q=U_0\times q^3\times q=U_0\times q^4$

نقبل أن هذه المساواة محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

مثال ◆

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول : $U_0=5$ وأساسها $q=2$

1) أوجد عبارة الحد العام ثم أحسب U_6

2) هل العدد 5120 حدا من حدود هذه المتتالية

✓ الحل :

1) عبارة الحد العام هي : $U_n=U_0\times q^n=5\times 2^n$ ومنه: $U_6=5\times 2^6=5\times 64=320$

2) $U_n=5120$ يكافئ $5\times 2^n=5120$

بقسمة طرفي هذه المساواة على 5 نجد : $2^n=1024$ لكن : $1024=2^{10}$

إذن من المساواة $2^n=1024$ نجد : $n=10$.

مبرهنة ❷

إذا كانت (U_n) متتالية هندسة أساسها $q\neq 0$ فإن من أجل كل عددين طبيعيين m و p

لدينا : $U_m=q^{m-p}\times U_p$

□ الإثبات

نفرض أن : $U_0\neq 0$ هو الحد الأول وعليه نجد : $U_m=U_0\times q^m$ و $U_p=U_0\times q^p$

$\frac{U_m}{U_p}=\frac{U_0\times q^m}{U_0\times q^p}=q^m\times q^{-p}=q^{m-p}$

إذن : $U_m=q^{m-p}\times U_p$

مثال ◆

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها q موجب

1) عين q إذا علمت أن : $U_4=48$ و $U_6=192$

2) عين الحد الأول U_0 ثم عبارة الحد العام U_n .

✓ الحل :

1) لدينا: $U_m=q^{m-p}\times U_p.....(1)$ بوضع : $m=6$ و $p=4$ في المساواة (1) نجد :

$U_6=q^{6-4}\times U_4$ بالتبسيط نجد : $U_6=q^2\times U_4$ منه نجد : $q^2=\frac{U_6}{U_4}=4$ ومنه $q=2$ أو

$q=-2$ وبما أن : $q>0$ فإن : $q=-2$ مرفوض إذن : $q=2$

2) لدينا: $U_n=U_0\times 2^n$ بوضع : $n=4$ في هذه المساواة نجد: $U_4=U_0\times 2^4$ منه : $U_0=\frac{U_4}{2^4}$

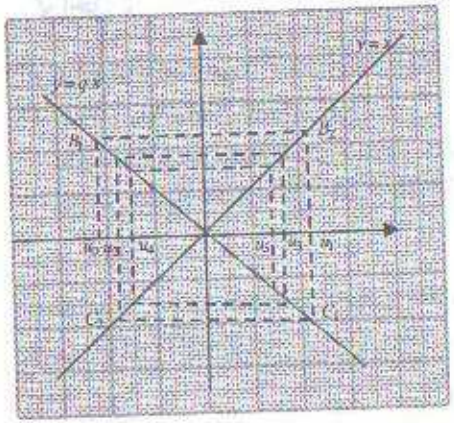
بالتعويض نجد : $U_0 = \frac{48}{16} = 3$

عبارة الحد العام للمتتالية : (U_n) هي: $U_n = 3 \times 2^n$

4.4 التمثيل البياني للحدود الأولى لمتتالية هندسية :

(U_n) متتالية هندسية أساسها q ، بالتعريف : $U_{n+1} = q \times U_n$

نستعمل الدالة الخطية : $f : x \mapsto qx$ من أجل الحصول على التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتالية الهندسية (U_n).



التمثيل البياني للدالة f هو مستقيم ميله q

- إذا كان : $q \rangle 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = qx$ يمر من المبدأ 0 و يمر من الربع الثاني والثالث للمستوي .

- إذا كان $1 \rangle q \rangle 0$ فإن المستقيم $y = qx$ يكون بين $d : y = x$ و $(x\ x')$

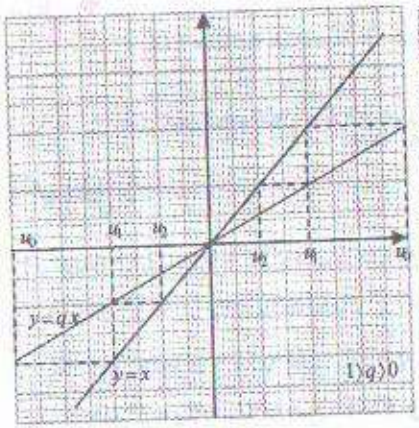
- إذا كان $q \rangle 1$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = qx$ يكون بين : $d : y = x$ و $(y\ y')$ انظر الأشكال الثلاثية .

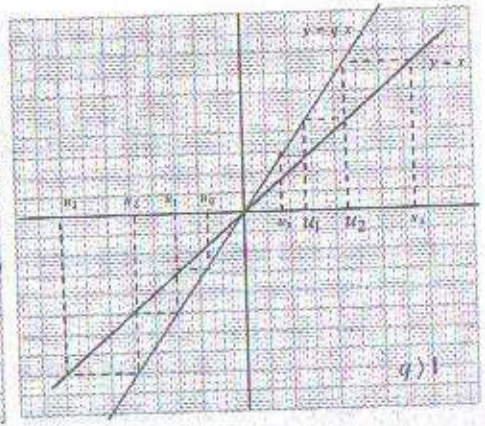
□ حالة $q \langle 0$

- نرسم مستقيم يمر من النقطة $A(U_0, 0)$ والموازي لـ: $(y\ y')$ يقطع $y = qx$ في B_1

- المستقيم المار من B_1 والموازي لـ: $(x\ x')$ يقطع $y = x$ في النقطة B_2

المسقط العمودي لـ B_2 على محور الفواصل هي U_1 لأن النقطة B_2 ترتيبها نفس ترتيب B_1 الذي هو U_1.





وبما أن B_2 من المستقيم $y = x$ فإن الفاصلة هي الترتيب

- نرسم المستقيم الذي يمثل النقطة $A_1(U_1, 0)$ والذي يوازي $(y\ y')$ يقطع $y = qx$ في النقطة C_1 و المستقيم المار من C_1 والموازي لـ: $(x\ x')$ يقطع $y = x$ في النقطة C_2

- المسقط العمودي لـ C_2 على $(x\ x')$ هو U_2

لأن النقطة C_1 ترتيبها نفس ترتيب C_2 الذي هو U_2

وبما أن : C_2 من المستقيم $y = x$ فإن الفاصلة هي الترتيب

5.4 إتجاه تغير متتالية هندسية :

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q حدها العام هو : $U_n = U_0 \times q^n$

المتتالية (U_n) رتيبة (متزايدة أو متناقصة) إذا وفقط إذا كان : $q \rangle 0$.

□ الحالة الأولى $U_0 \rangle 0$

* إذا كان : $q \geq 1$ فإن المتتالية متزايدة ، (ثابتة إذا كان : $q = 1$)
* إذا كان : $1 \geq q \rangle 0$ فإن المتتالية متناقصة(ثابتة إذا كان $q = 1$)

□ الحالة الثانية $U_0 \langle 0$

* إذا كان : $q \geq 1$ المتتالية (U_n) متناقصة (ثابتة إذا كان : $q = 1$)
* إذا كان : $1 \geq q \rangle 0$ المتتالية (U_n) متزايدة (ثابتة إذا كان : $q = 1$)

□ الإثبات

$U_{n+1} = U_0 \times q^{n+1}$ ، $U_n = U_0 \times q^n$

1) إذا كان : $q \langle 0$ فإن حدود المتتالية (U_n) تارة موجبة وتارة سالبة (حسب قيم n) وبالتالي (U_n) ليست رتيبة .

2) إذا كان : $q \rangle 0$ اتجاه تغير المتتالية (U_n) يؤول إلى مقارنة U_n و U_{n+1}

- حالة $U_0 \rangle 0$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_0 \times q^{n+1}}{U_0\, q^n} = q$

إذا كان : $1 \geq q \rangle 0$ فإن : $U_{n+1} \leq U_n$ أي أن (U_n) متناقصة

وإذا كان: $q \geq 1$ فإن : $U_{n+1} \geq U_n$ أي أن : (U_n) متزايدة .

- حالة $U_0 \langle 0$: ندرس إتجاه تغير المتتالية ذات الحد العام $-U_0\, q^n$ التي اتجاه تغيرها هو عكس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ذات لحد العام : $U_0 \times q^n$

مثال ◆

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $U_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $V_n = 3 \times 2^n$

ادرس إتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n)

✓ الحل :

1) دراسة اتجاه تغير (U_n)

بما أن : $U_0=-2$ و $q=\frac{1}{2}$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) دراسة اتجاه تغير (V_n)

بما أن $V_0=3$ و $q'=2$ فإن المتتالية (V_n) متزايدة تماما .

6.4 مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

1) حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها q

الحد العام لهذه المتتالية هو: $U_n=q^n$

نضع : $S=1+q+q^2+.....q^{n-1}.....(1)$

بضرب طرفي المساواة (1) في q نجد : $qS=q+q^2+q^3+....+q^{n-1}+q^n$ ومنه :

$qS=S-1+q^n$ و بالتالي : $qS-S=-1+q^n$ إذا : $S(q-1)=q^n-1$

- إذا كان : $q\neq 1$ فإن : $S=\frac{q^n-1}{q-1}$

- إذا كان : $q=1$ فإن : $S=1+1+....+1=n$

2) حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها q

الحد العام لهذه المتتالية هو : $U_n=U_0\times q^n$.

$S=U_0+U_1+.....U_{n-1}$ ....(2)

$S=U_0+U_0q+U_0q^2.....+U_0q^{n-1}$

$=U_0\left(1+q+q+....q^{n-1}\right)$

- إذا كان : $q=1$ فإن : $S=U_0(1+....+1)=U_0n$

- إذا كان : $q\neq 1$ فإن : $S=U_0\times\frac{q^n-1}{q-1}$

نتيجة

مجموع n حدا الأولى لمتتابعة حدها الأول a لمتتالية هندسية أساسها q هو $a.\frac{q^n-1}{q-1}$

تمرين تدريبي

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول $U_0=3$ وأساسها 2

1) أحسب الحد السادس لهذه المتتالية ، وأدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2) أحسب مجموع S لعشرين حد الأولى .

✓ الحل :

1) الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0\times q^n$ منه : $U_n=3\times 2^n$

الحد السادس للمتتالية (U_n) هو: U_5 حيث : $U_5=3\times 2^5=96$

* دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

بما أن : $q>1$ و $U_0>0$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) حساب المجموع :

$$S=U_0+U_1+.....U_{19}=U_0\times\frac{q^{19}-1}{q-1}=3\times\frac{2^{19}-1}{2-1}=3\left(2^{19}-1\right)$$

5 . تقارب متتالية

الهدف من دراسة تقارب متتالية هو معرفة كيف تصبح الأعداد U_n لما n يأخذ قيم كبيرة تقترب شيئا فشيئا من $(+\infty)$ اي هل (U_n) تأخذ قيم كبيرة ومتشتتة ام تتراكم حول قيمة معينة l .

تعريف :

نقول عن متتالية أنها متقاربة نحو العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل حدود المتتالية ابتداءا من رتبة معينة ونقول عندئذ أن المتتالية متقاربة نحو l ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l$.

مثال

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام : $U_n=\frac{1}{n}$

حدود هذه المتتالية هي : $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},....,\frac{1}{100},.....,\frac{1}{10\,000}.....$

$\frac{1}{10^7},.....,\frac{1}{10^{30}},.....,\frac{1}{10^{60}},.....$

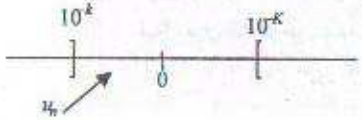
نلاحظ أن حدود المتتالية (U_n) تنتهي بالتراكم حول الصفر (تقترب شيئا فشيئا من الصفر)

من أجل كل عدد حقيقي $a=10^{-k}$ حيث : k كبير جدا ، إذا كان : $n>\frac{1}{a}$

فإن كل حدود المتتالية (U_n) تنتمي إلى المجال :

$]-a\,,\,a[$ إبتداءا من الرتبة 10^{k+1}

إذن المتتالية : (U_n) متقاربة نحو العدد 0 .



□ خاصية

1) إذا كانت المتتالية (U_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة

2) f دالة معرفة على المجال $[a\ ,\ +\infty[$ و (U_n) متتالية معرفة بـ: $U_n = f(n)$ و $n \geq a$

إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

□ الإثبات:

1) نفرض أن المتتالية تقبل نهايتين مختلفتين l_1 , l_2 نختار مجالين مختلفين I و J مركزهما l_1 , l_2 على الترتيب

بما أن (U_n) متقاربة فإن ابتداء من رتبة معينة كل الأعداد U_n تنتمي إلى I و إلى J وهذا غير ممكن كون I و J منفصلين.

إذن لا يمكن أن يكون لمتتالية متقاربة نهايتين مختلفتين.

2) في هذا المستوي نقبل الخاصية بدون برهان.

مثال ◆

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n} = 0$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n^p} = 0\ ,\ p \geq 2$ لأن: $\lim \frac{a}{x^p} = 0$

3) $\lim \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = 0$

ملاحظة

كل متتالية ثابتة متقاربة نحو قيمتها الثابتة

تمرين تدريبي

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة: $U_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

1) أ) أرسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ المستقيمان ذوي المعادلة:

$y = 2$ و $y = 2 + 10^{-1}$

ب) بين أنه يوجد عدد طبيعي k الذي من أجله كل نقط ذات الاحداثيات $A_n(n\ ,\ U_n)$ مع: $n \rangle k$ تقع بين المستقيمين السابقين ثم مثل الأعداد:

$U_0, U_1, U_2, \ldots\ldots, U_9, U_{10}, U_{11}$

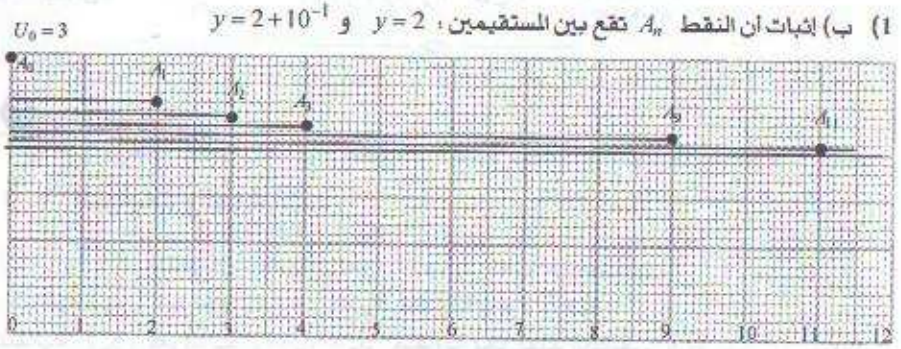
2) k عدد طبيعي كيفي بين أنه يوجد عدد طبيعي n بحيث:

$2 - 10^{k} \langle U_n \langle 2 + 10^{-k}$ استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد 2

3) باستعمال دالة عددية بين طريقة ثانية أن المتتالية (U_n) تقترب من العدد 2

✓ الحل:

1) ب) إثبات أن النقط A_n تقع بين المستقيمين: $y = 2$ و $y = 2 + 10^{-1}$



يؤول إلى إثبات أن: $2 + 10^{-1} \rangle U_n \rangle 2$

□ بما أن: $\frac{1}{n+1} \rangle 0$ فإن: $U_n \rangle 2$

□ $U_n \langle 2 + 10^{-1}$ يكافئ: $2 + \frac{1}{n+1} \langle 2 + 10^{-1}$

يكافئ: $\frac{1}{n+1} \langle 10^{-1}$

يكافئ: $n + 1 \rangle 10^{1}$

يكافئ: $n \rangle 9$

منه قيمة k المطلوبة هي 9

2) لدينا: $U_n = 2 + \frac{1}{n+1}$

المتباينة $U_n \rangle 2 - 10^{-k}$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

إذن: $2 - 10^{-k} \langle U_n \langle 2 + 10^{-k}$ تكافئ: $U_n \langle 2 + 10^{-k}$

تكافئ: $2 + \frac{1}{n+1} \langle 2 + 10^{-k}$

تكافئ: $\frac{1}{n+1} \langle 10^{-k}$

تكافئ: $n + 1 \rangle 10^{k}$

تكافئ: $n \rangle 10^{k} - 1$

بوضع : $p=10^k-1$ كل حدود المتتالية (U_n) ابتداء من U_{p+1} تنتمي إلى المجال :
$]2-10^{-k}\,,\,2+10^{-k}[$ مما يدل أن المتتالية (U_n) متقاربة نحو مركز هذا المجال الذي هو 2
ونكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=2$

3) لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $[0\,,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=2+\frac{1}{x+1}$
بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $U_n=f(n)$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=2$

6 . النهايات

1.6 النهايات والعمليات :

(U_n) و (V_n) متتاليتان متقاربتان نحو: l_1 و l_2 على الترتيب إذن :
- المتتالية (w_n) المعرفة بـ : $W_n=U_n+V_n$ متقاربة نحو : l_1+l_2
المتتالية : (S_n) المعرفة بـ: $S_n=U_n\times V_n$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $l_1\,l_2$.
المتتالية $(k\,U_n)$ متقاربة نحو $k\,l_1$
- إذا كانت حدود المتتالية (V_n) غير معدومة و $l_2\neq 0$ فإن المتتالية : $l_n=\frac{U_n}{V_n}$ متقاربة نحو العدد الحقيقي $\frac{l_1}{l_2}$

أمثلة ◆

1) $U_n=\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{1}{n^2}$ ، $W_n=U_n+V_n$
المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس العدد 0 ومنه المتتالية (W_n) متقاربة نحو العدد 0

2) $U_n=1-\frac{1}{n}$ و $V_n=\frac{1}{n^2}$ ، $W_n=U_n+V_n$
المتتاليتين : (U_n) و (V_n) متقاربتان عند 1 , 0 على الترتيب وبالتالي المتتالية (W_n) متقاربة نحو $0+1=1$

3) $U_n=1+\frac{1}{n}$ و $V_n=2-\frac{1}{n}$ ، $W_n=\frac{U_n}{V_n}$
المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان إلى العدد 1 و 2 على الترتيب وبالتالي المتتالية (W_n) متقاربة نحو العدد $\frac{1}{2}$

2.6 حصر متتالية :

□ مبرهنة

(U_n) و (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات
إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n بحيث : $n\geq n_0$:
$V_n\leq U_n\leq W_n$ و (V_n) و (W_n) متقاربتان إلى نفس النهاية l فإن المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد l .

□ الإثبات

بما أن : (V_n) متقاربة نحو l فإن كل الأعداد V_n تنتمي إلى مجال مفتوح I مركزه l ابتداء من رتبة n_1
بما أن (w_n) متقاربة نحو l فإن كل الأعداد W_n تنتمي إلى مجال I ابتداء من رتبة n_2
ليكن n_3 هو أكبر العددين n_1 و n_2
كل الأعداد V_n و W_n حيث : $n>n_3$ تنتمي إلى المجال I وعليه الأعداد U_n تنتمي إلى I
أي أن المتتالية : (U_n) متقاربة نحو l

مثال ❶

(U_n) متتالية معرفة بحدها العام :
$U_n=\frac{n+(-1)^n}{3n}$ باستعمال المبرهنة السابقة أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

✓ الحل :

من اجل كل n من N : $-1\leq(-1)^n\leq 1$ وبإضافة n إلى حدود هذه الأخيرة نجد :
$-1+n\leq(-1)^n+n\leq 1+n$ وبالقسمة على $3n$ نجد : $\frac{-1+n}{3n}\leq\frac{(-1)^n+n}{3n}\leq\frac{1+n}{3n}$
بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+n}{3n}=\frac{1}{3}$ و $\lim\frac{-1+n}{3n}=\frac{1}{3}$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\frac{1}{3}$

ملاحظة

إذا كانت من اجل كل عدد طبيعي : n بحيث : $n\geq n_0$: $|U_n-l|\leq V_n$ مع l عدد حقيقي ثابت و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=l$

مثال ◆

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n=\frac{n+2}{n}$

من اجل كل : $n \in N^*$ ، $|U_n - 1| \le \frac{2}{n}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ منه ، $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

3.6 مقارنة بعض المتتاليات :

□ خاصية :

ليكن $a \rangle 0$ ولتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول 1 واساسها a ،

حدها العام هو: $U_n = 1 + na$ ، ولتكن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول 1 واساسها $(1+a)$ ، حدها العام هو: $V_n = (1+a)^n$.

إذن من اجل n تنتمي إلى N ، $(1+a)^n \ge 1 + na$ اي ان ، $V_n \ge U_n$

مثال ◆

من اجل كل $n \in N$ ، $2^n \ge 1 + n$ ، $3^n \ge 1 + 2n$ ، $\left(\frac{3}{2}\right)^n \ge 1 + \frac{1}{2}n$

4.6 نهاية متتالية هندسية :

□ مبرهنة

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 واساسها $q \ne 0$

حدها العام هو: $U_n = U_0 \times q^n$

1) إذا كان : $q \rangle 1$ و $U_0 \ne 0$ فإن المتتالية (U_n) ليست متقاربة (متباعدة) ونهايتها $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ حسب إشارة U_0

2) إذا كان : $q = 1$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة ونهايتها U_0

3) إذا كان : $1 \rangle q \rangle -1$ فإن المتتالية (U_n) متقاربة نحو الصفر

4) إذا كان : $q \le -1$ فإن المتتالية (U_n) متباعدة وليست لها نهاية

□ الاثبات

1) من اجل $q \rangle 1$ نضع : $q = 1 + a$ مع $a \rangle 0$

من اجل كل $a \rangle 0$: $(1+a)^n \ge 1 + na$ وبما ان : $a \rangle 0$ فإن :

المتتالية ذات الحد العام : $1 + na$ نهايتها $(+\infty)$

إذن المتتالية ذات الحد العام : $q^n = (1+a)^n$ نهايتها $(+\infty)$.

وبالتالي نهاية U_n هي : $(+\infty)$ إذا كان : $U_0 \rangle 0$ و $(-\infty)$ إذا كان : $U_0 \langle 0$.

2) من اجل $q = 1$ فإن: $U_0 q^n = U_0$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد U_0

3) من اجل $|q| \langle 1$ نستطيع ان نكتب : $|q| = \frac{1}{1+a}$ حيث : $a \ge 0$

إذن : $|U_0 q_n| = |U_0| \, |q|^n$

$$= |U_0| \left(\frac{1}{1+a}\right)^n = |U_0| \times \frac{1}{(1+a)^n}$$

لكن من المتباينة : $(1+a)^n \ge 1 + na$ نستنتج : $\frac{1}{(1+a)^n} \le \frac{1}{1+na}$

إذن : $0 \le |U_0 \; q^n| \le |U_0| \times \frac{1}{1+na}$

و بما ان : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+na} = 0$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_0 \, q^n = 0$ اي : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

4) من اجل $q \le -1$

إذا كان : n زوجي فإن : $q^n \ge 1$ وإذا كان : n فردي : $q^n \le -1$

وبالتالي المتتالية ذات الحد العام : $U_0 \, q^n$ ليست لها نهاية وعليه فهي ليست متقاربة (متباعدة)

مثال ◆

لتكن : (U_n) ، (V_n) ، (W_n) ، (S_n) اربع متتاليات معرفة كما يلي :

$$U_n = 2 \times 3^n \;،\; V_n = \left(\frac{-3}{2}\right)^n \;،\; W_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \;،\; S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

- احسب نهاية كل متتالية .

✓ الحل :

1) حساب نهاية U_n

(U_n) متتالية هندسية أساسها : $q = 3$ وحدها الأول 2

بما أن : $q \rangle 1$ و $U_0 = 2$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

2) حساب نهاية V_n :

(U_n) متتالية هندسية اساسها : $q = -\frac{3}{2}$ وحدها الأول 1

بما أن: $q \le -1$ فإن المتتالية (V_n) ليست لها نهاية

3) نهاية (W_n)

المتتالية (W_n) هندسية أساسها : $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 .

بما أن : $|q| \langle 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

4) نهاية : (S_n)

المتتالية (S_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول 1

بما أن : $|q| \langle 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$.

تطبيقات نموذجية

تطبيق . 1 : ايجاد الدالة f بحيث، $U_n = f(n)$ حساب حدود متتالية

- أوجد الدالة f بحيث من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_n = f(n)$ ثم احسب الحدود من U_0 إلى U_4 في كل حالة من الحالات التالية :

1) $U_n = 3n+2$ 2) $U_n = \frac{n^2+1}{n+3}$ 3) $U_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

4) $U_n = n^2 - 3\sqrt{n} + 2$

الحل :

1) الدالة f المعرفة هنا هي : $f(x) = 3x+2$

$U_0 = 2$ ، $U_1 = 5$ ، $U_2 = 8$ ، $U_3 = 11$ ، $U_4 = 14$

2) الدالة f المعرفة على : $[0,+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$

$U_0 = \frac{1}{3}$ ، $U_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، $U_2 = \frac{5}{5} = 1$ ، $U_3 = \frac{5}{3}$ ، $U_4 = \frac{17}{7}$

3) الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$U_0 = 0$ ، $U_1 = 1$ ، $U_2 = 0$ ، $U_3 = -1$ ، $U_4 = 0$

4) الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x) = x^2 - 3\sqrt{x} + 2$

$U_0 = 2$ ، $U_1 = 3-3 = 0$ ، $U_2 = 6-2\sqrt{2}$ ، $U_2 = 11-3\sqrt{3}$ ، $U_4 = 12$

تطبيق . 2 : ايجاد الدالة f بحيث، $U_{n+1} = f(U_n)$ حساب حدود متتالية

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول U_0 و علاقة تراجعية

- أوجد الدالة f بحيث من اجل كل n من N : $U_{n+1} = f(U_n)$

ثم احسب الحدود من U_1 إلى U_3 في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = (U_n-2)^2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n+1} \end{cases}$

الحل :

1) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل x من $[0,+\infty[$ العدد : $f(x) = \frac{x}{x+2}$

$U_1 = \frac{U_0}{U_0+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، $U_2 = \frac{U_1}{U_1+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}$ ، $U_3 = \frac{U_2}{U_2+2} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{1}{11}$

2) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل x من $[0,+\infty[$ العدد الحقيقي :

$f(x) = (x-2)^2$.

$U_1 = (U_0-2)^2 = (-4)^2 = 16$

$U_2 = (U_1-2)^2 = 14^2 = 196$

$U_3 = (U_2-2)^2 = 194^2$

3) الدالة f المعرفة هنا هي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $[0,+\infty[$ بالعدد الحقيقي : $f(x) = \sqrt{x+1}$

$U_1 = \sqrt{U_0+1} = 2$ ، $U_2 = \sqrt{U_1+1} = \sqrt{3}$ ، $U_3 = \sqrt{U_2+1} = \sqrt{\sqrt{3}+1}$

تطبيق . 3 : التعبير عن حدود متتالية بدلالة n علم حدها العام

(U_n) متتالية معرفة : من حل كل عدد طبيعي n

عبر بدلالة n عن الحدود U_{n+1} ، U_{2n} ، U_{n-1} في كل حالة من الحالات التالية :

1) $U_n = 2n^2 - 3n$ ، 2) $U_n = \frac{2n+2}{n+2}$ ، 3) $U_{n-3} = 2 - 3^{n+2}$

الحل :

1) $U_n = 2n^2 - 3n$

$U_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3(n+1) = 2(n^2+2n+1) - 3n - 3 = 2n^2 + n - 1$

$U_{2n} = 2(2n)^2 - 3(2n) = 2(4n^2) - 6n = 8n^2 - 6n$

$$U_{n-1}=2(n-1)^2-3(n-1)=2(n^2-2n+1)-3n+3$$
$$=2n^2-4n+2-3n+3=2n^2-7n+5$$

2) $U_{n+1}=\frac{2(n+1)+2}{n+1+2}=\frac{2n+4}{n+3}$

$$U_{2n}=\frac{2(2n)+2}{2n+2}=\frac{4n+2}{2n+2}=\frac{2n+1}{n+1}$$
$$U_{n-1}=\frac{2(n-1)+2}{n-1+2}=\frac{2n}{n+1}$$

3) $U_{n+1}=2-3^{(n+1)+2}=2-3^{n+6}$

$$U_{n-1}=2-3^{(n+2)+2}=2-3^{n+4}$$
$$U_{2n}=2-3^{(2n+3)+2}=2-3^{2n+5}$$

تطبيق . 4 : المتتالية الدورية

(U_n) متتالية معرفة بحدها الأول : $U_0=2$ و $U_1=4$ و العلاقة التراجعية :
$U_{n+2}=U_{n+1}-U_n$

1) احسب عشرة الحدود الأولى لهذه المتتالية وماذا تلاحظ

2) بين أن : U_{n+3} تكتب بدلالة U_n فقط ثم استنتج عبارة U_{n+6} بدلالة U_n

3) اوجد قيم U_{100} و U_{2006}

✓ الحل :

1) $U_2=U_1-U_0=4-2=2$ ، $U_3=U_2-U_1=2-4=-2$

$U_4=U_3-U_2=-2-2=-4$ ، $U_5=U_4-U_3=-4+2=-2$

$U_6=U_5-U_4=-2+4=2$ ، $U_7=U_6-U_5=2+2=4$

$U_8=U_7-U_6=4-2=2$ ، $U_9=U_8-U_7=2-4=-2$

$U_{10}=U_9-U_8=-2-2=-4$ ، $U_{11}=U_{10}-U_9=-4+2=-2$

نلاحظ ان قيم حدود (U_n) دورية دورها $P=6$

اي من اجل كل n من N ، $U_{n+6}=U_n$

يسمى هذا النوع من المتتاليات بالمتتاليات الدورية

2) $U_{n+3}=U_{n+2}-U_{n+1}=(U_{n+1}-U_n)-(U_{n+1})=-U_n$

$$U_{n+6}=U_{(n+3)+3}=-U_{n+3}=-(-U_n)=U_n$$

3) $U_{100}=U_{94+6}=U_{94}=....=U_4=-4$ (لاحظ ان : $100=6\times16+4$)

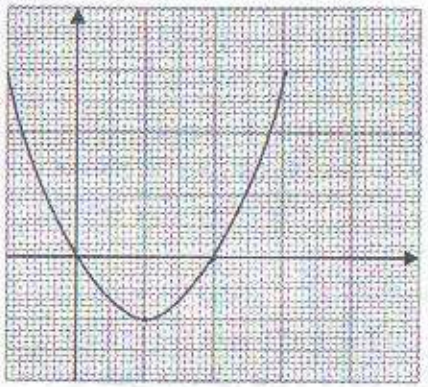
$U_{2006}=U_2=2$ (لاحظ ان : $2006=334\times6+2$)

تطبيق . 5 : التمثيل البياني للنقط ذات الإحداثيات $(n\ ,\ U_n)$

(U_n) متتالية معرفة بـ: $U_n=n^2-2n$

- احسب الحدود : $U_0\ ,\ U_1\ ,\ U_2\ ,\ U_3\ ,\ U_4$ ثم مثل بيانيا هذه الحدود في معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ وبين ان النقط A_n ذات الإحداثيات $(n\ ,\ U_n)$ تقع على قطع مكافئ يطلب إعطاء معادلته .

✓ الحل :



$U_n=n^2-2n$

$U_0=0$ ، $U_1=-1$

$U_2=0$ ، $U_3=3$

بما ان : $U_n=f(n)$ حيث f : هي الدالة المعرفة على IR بالشكل $f(x)=x^2-2x$

بما أن بيان أن الدالة f هو قطع مكافئ ذروته $\omega(1,-1)$ فإن النقط $A_n=(n,U_n)$ تنتمي إلى هذا القطع

تطبيق . 6 : تعين اتجاه تغير متتالية

ادرس تغيرات كل متتالية من المتتاليات التالية :

1) $U_n=\frac{3}{n+2}$ 2) $U_n=(n-2)^2$ 3) $U_n=n-(-1)^n$

4) $Un=\cos n\pi$ 5) $U_n=\sqrt{n+1}$ 6) $\begin{cases}U_{n+1}=U_n-n\\U_0=3\end{cases}$

✓ الحل :

لدراسة تغيرات المتتالية (U_n) نحسب الفرق : $U_{n+1}-U_n$ ثم نعين إشارته

1) $U_{n+1}=\frac{3}{n+1+2}=\frac{3}{n+3}$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{3}{n+3}-\frac{3}{n+2}=\frac{3(n+2)-3(n+3)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-3}{(n+3)(n+1)}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\frac{-3}{(n+3)(n+1)} < 0$

ومنه : فإنه من أجل كل n : $U_{n+1}-U_n < 0$ بالتالي : (U_n) متناقصة تماما .

2) $U_{n+1}=(n+1-2)^2=(n-1)^2$

$U_{n+1}-U_n=(n-1)^2-(n-2)^2=[(n-1)-(n-2)][(n-1)+(n-2)]=(2n-3)$

من أجل كل n من $N^*-\{1\}$: $2n-3>0$ ومنه : $U_{n+1}-U_n>0$ أي: $U_{n+1} > U_n$

مما يدل على أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $N-\{0,1\}$

3) $U_{n+1}=(n+1)-(-1)^{n+1}=(n+1)+(-1)^n$

$U_{n+1}-U_n=[(n+1)+(-1)^n]-[n-(-1)^n]$

$=(n+1-n)+2(-1)^n=1+2(-1)^n$

إذا كان n زوجي فإن : $U_{n+1}-U_n>0$ وإذا كان n فردي فإن : $U_{n+1}-U_n<0$ وبالتالي المتتالية (U_n) ليست رتيبة

4) $U_n=\cos n\pi$ نعلم أن $\cos n\pi=(-1)^n$ ومنه : $U_{n+1}=(-1)^{n+1}$

$U_{n+1}-U_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n=(-1)^n=(-1)^n(-1-1)=(-2)(-1)^n$

- إذا كان n زوجي فإن : $U_{n+1}-U_n<0$ وإذا كان n فردي فإن : $U_{n+1}-U_n>0$ وبالتالي (U_n) ليست رتيبة

5) $U_n=\sqrt{n+1}$ ومنه : $U_{n+1}=\sqrt{n+2}$

$U_{n+1}-U_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

بما أن من أجل n من N : $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}>0$ فإن : $U_{n+1}-U_n>0$

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على N

6) $U_{n+1}-U_n=(U_n-n)-(U_n)=-n$

من أجل كل n من N^* : $U_{n+1}-U_n<0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما على N^*

تطبيق . 7 : دراسة اتجاه تغير متتالية بمقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1

(U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n=3^n+4n+1$

1) أحسب الحدود من U_0 إلى U_5 . ماذا تستطيع أن تقول عن اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

2) أدرس إشارة $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

✓ الحل :

1) $U_0=3^0+1=2$ ، $U_1=3^1+4+1=8$

$U_2=3^2+8+1=18$ ، $U_3=3^3+12+1=40$

$U_4=3^4+16+1=98$ ، $U_5=3^5+20+1=264$

نلاحظ ان حدود المتتالية (U_n) متزايدة تماما

2) $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1=\frac{3^{n+1}+4n+5}{3^n+4n+1}-1=\frac{3^{n+1}+4n+5-3^n-4n-1}{3^n+4n+1}$

$=\frac{3^{n+1}-3^n+4}{3^n+4n+1}=\frac{3^n(3-1)+4}{3^n+4n+1}=\frac{2(3^n+2)}{3^n+4n+1}$

بما أن $3^n+2>0$ و $3^n+4n+1>0$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\frac{2(3^n+2)}{3^n+4n+1}>0$

أي : $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1>0$

- المتباينة $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1>0$ تكافئ : $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$ ومنه نستنتج ان : (U_n) متتالية متزايدة تماما .

تطبيق . 8 : استنتاج اتجاه تغير متتالية حدها العام معرف بواسطة دالة

1) أدرس اتجاه تغيرات الدوال f ، g ، h المعرفة على IR بالعبارات :

$f(x)=2x^2+5x+4$ ، $g(x)=x^2-4x+2$ ، $h(x)=-x^2+6x+6$

2) نعرف المتتاليات (U_n) ، (V_n) ، (W_n) بالكيفية التالية :

$U_n=f(n)$ ، $V_n=g(n)$ ، $w_n=h(n)$

باستعمال السؤال الأول أدرس تغيرات كل متتالية

✓ الحل :

1) □ الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا ، من اجل كل x من IR : $f'(x)=4x+5$

إذن إذا كان ، $x\rangle\frac{-5}{4}$ فإن f متزايدة تماما ، وإذا كان : $x\langle\frac{-5}{4}$ فإن متناقصة تماما

□ الدالة g قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR : $g'(x)=2x-4$

- إذا كان $x\rangle 2$ فإن الدالة g متزايدة تماما .
- إذا كان $x\langle 2$ فإن الدالة g متناقصة تماما .

□ الدالة h قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من اجل كل x من IR : $h'(x)=-2x+6$

- إذا كان : $x\rangle 3$ فإن h متناقصة تماما
- إذا كان : $x\langle 3$ فإن الدالة h متزايدة تماما

2) بما أن f متزايدة تماما على $\left[-\frac{5}{4},+\infty\right[$ فإنها متزايدة تماما على N وبالتالي المتتالية (U_n) حيث : $U_n=f(n)$ متزايدة تماما على N .

- بما أن الدالة g متزايدة تماما على $[2,+\infty[$ فإن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على $N-\{0,1\}$.
- بما أن الدالة h متناقصة على المجال $[3,+\infty[$ فإن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $N-\{0,1,2\}$.

تطبيق - 9 : تعيين اتجاه تغير متتالية

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بالعبارة :

$$U_n=\frac{(\sqrt{3})^n}{n^2}$$

1) احسب الحدود من U_1 إلى U_7 ماذا نستطيع أن نقول حول اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2) ادرس تغيرات المتتالية (U_n)

✓ الحل :

1) $U_1=\sqrt{3}$ ، $U_2=\frac{3}{4}$ ، $U_3=\frac{\sqrt{3}}{9}$ ، $U_4=\frac{9}{16}$ ، $U_5=\frac{9\sqrt{3}}{25}$ ، $U_6=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$ ، $U_7=\frac{27\sqrt{3}}{49}$

نلاحظ أن ابتداء من U_4 فإن : $U_7\rangle U_6\rangle U_5\rangle U_4$

2) $$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{(\sqrt{3})^n}=\sqrt{3}\times\frac{n^2}{(n+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\times\sqrt{3}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt{3}$$

من اجل كل $n\geq 4$ لدينا : $n+1\geq 5$ منه : $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{5}$ منه ينتج : $\frac{-1}{n+1}\geq-\frac{1}{5}$ بإضافة 1 إلى طرفي هذه المتباينة نجد : $1-\frac{1}{n+1}\geq\frac{4}{5}$ بالتربيع نجد : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\geq\frac{16}{25}$ وبضرب طرفي المتباينة في $\sqrt{3}$ نجد : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt{3}\geq\frac{16\sqrt{3}}{25}$ وبما ان : $\frac{16\sqrt{3}}{25}\rangle 1$

فإن : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\times\sqrt{3}\rangle 1$ أي $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مما يدل على أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ابتداء من $n=4$.

تطبيق - 10 : ايجاد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية علم مجموعها ومجموع مربعاتها

أوجد ثلاث أعداد a ، b ، c متتابعة من متتالية حسابية بحيث :

$a+b+c=15$ ، $a^2+b^2+c^2=83$

✓ الحل :

$$\begin{cases}a+b+c=15 \quad .....(1)\\ a^2+b^2+c^2=83 \quad .....(2)\end{cases}$$

بما أن a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن : $a+c=2b$ .....(3)

من (1) و (3) نجد : $3b=15$ ومنه : $b=5$

نعوض قيمة b في المعادلتين (1) و (2) نجد $\begin{cases}a+c=10\\ a^2+c^2=58\end{cases}$

$a+c=10$ تكافئ : $a=10-c$

نعوض عبارة a في المساواة : $a^2+c^2=58$ نجد : $(10-c)^2+c^2=58$

وبالتبسيط نجد : $2c^2-20c+42=0$ بالقسمة على 2 نجد : $c^2-10c+21=0$ ....(*)

ليكن : Δ مميز المعادلة (*) : $\Delta=(-10)^2-4(1)(21)=16$

$\Delta\rangle 0$ ومنه المعادلة (*) لها حلين مختلفين هما : c_1 ، c_2

حيث : $c_1=\frac{10+4}{2}=7$ و $c_2=\frac{10-4}{2}=3$

- إذا كان : $c=7$ فإن $a=3$ ومنه : $(a,b,c)=(3,5,7)$
- إذا كان : $c=3$ فإن : $a=7$ ومنه : $(a,b,c)=(7,5,3)$

تطبيق . 11 : التعرف على متتالية حسابية

من اجل كل متتالية ؛
(U_n) ، (V_n) ، (W_n) المعرفة ادناه
- ما هي التي تمثل متتالية حسابية ثم عين حدها الأول والأساس ؛
$U_n=-2n+5$ ، $V_n=n^2+1$ ، $W_n=3^{n-1}$

✓ الحل :

1) $U_n=-2n+5$ ، $U_{n+1}=-2(n+1)+5=-2n+3$
(U_n) حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1}-U_n=r$
$U_{n+1}-U_n=(-2n+3)-(-2n+5)=-2n+3+2n-5=-2$
إذن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=-2$ وحدها الأول : $U_0=-2-\times 0+5=5$

2) $V_n=n^2+1$ ، $V_{n+1}=(n+1)^2+1=n^2+2n+2$
$V_{n+1}-V_n=n^2+2n+2-(n^2+1)=2n+1$
بما ان : $V_{n+1}-V_n$ ليس ثابت فإن المتتالية (V_n) ليست حسابية

3) $W_n=3^{n-1}$ ، $W_{n+1}=3^{n+1-1}=3^n$ ، $W_{n+1}-W_n=3^n-3^{n-1}=3^{n-1}(3-1)=2\times 3^{n-1}$
بما ان الفرق : $w_{n+1}-w_n$ متعلق بـ: n (ليس ثابت) فإن : (W_n) ليست حسابية .

تطبيق . 12 : طبيعة المتتالية ذات الحد العام U_n-3V_n حيث (U_n) و (V_n) حسابيتان

(U_n) متتالية حسابية اساسها 5 وحدها الأول $U_1=3$ و (V_n) متتالية حسابية أساسها -5 وحدها الأول $V_1=7$
- اثبت ان المتتالية (W_n) المعرفة بـ: $W_n=U_n-3V_n$ حسابية ثم احسب الحد الأول W_1 والحد الثامن .

✓ الحل :

بما ان (U_n) متتالية حسابية فإن عبارة الحد العام لها هو: $U_n=3+5(n-1)$ ؛ $n\in N^*$
بما ان (V_n) متتالية حسابية فإن عبارة الحد العام لها هو: $V_n=7+(n-1)(-5)$ اي:
$V_n=-5n+12$ ، $n\in N^*$

□ إثبات ان (W_n) متتالية حسابية ؛
من اجل كل $n\in N^*$ ؛ $W_{n+1}=U_{n+1}-3V_{n+1}$
$=(U_n+5)-3(V_n-5)$
$=U_n-3V_n+(5+15)=W_n+20$
ومنه ؛ (W_n) متتالية حسابية اساسها 20 وحدها الأول $W_1=U_1-3V_1=3-21=-18$

□ تعيين الحد الثامن ؛
الحد الثامن هو W_8 ؛ $W_8=W_1+7\times 20=-18+140=122$.

تطبيق . 13 : تعيين عدد حدود متتالية حسابية حدودها محصورة بين قيمتين معلومتين

لتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول $U_0=2$ وحدها الثاني $U_1=5$
1) احسب قيمة الحد الثالث عشر
2) إبتداءا من اي رتبة U_n يكون اكبر تماما من 700
3) من اجل اي قيم لـ n يكون U_n محصورة بين 200 و 300

✓ الحل :

1) أساس المتتالية (U_n) هو ؛ $r=U_1-U_0=3$
عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0+nr$
بالتعويض ؛ U_0 و r نجد ؛ $U_n=2+3n$
الحد الثالث عشر هو ؛ U_{12} حيث ؛ $U_{12}=2+3\times 12=2+36+38$

2) $U_n>700$ يكافئ ؛ $2+3n>700$ يكافئ ؛ $3n>698$
يكافئ ؛ $n>\frac{698}{3}$ يكافئ ؛ $n>232,66$
إذن ابتداء من الرتبة 233 يكون ؛ U_n اكبر تماما من 700 .

3) $200<U_n<300$ يكافئ ؛ $200<2+3n<300$ يكافئ ؛ $189<3n<298$
يكافئ ؛ $\frac{198}{3}<n<\frac{298}{3}$ يكافئ ؛ $66<n<99,3$
ومنه مجموعة قيم n بحيث ؛ U_n يكون محصور بين 200 و 300
هي 67 , 68 , 69 , ... , 98

تطبيق . 14 : تعيين طبيعة المتتاليتين $\frac{1}{3}U_n+2$ و $2U_n+5V_n$ حيث (U_n) حسابية

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $U_0=-2$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n=\frac{1}{3}U_n+2$

بين أن (V_n) متتالية حسابية

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $t_n=2U_n+5V_n$

بين أن (V_n) متتالية حسابية ثم احسب حدها الأول t_0

✓ الحل :

1) بما أن : (U_n) متتالية حسابية أساسها 3 فإن : $U_{n+1}=U_n+3$

(V_n) متتالية حسابية أساسها r' إذ وفقط إذا كان : $V_{n+1}-V_n=r'$

$$V_{n+1}-V_n=\left(\frac{1}{3}U_{n+1}+2\right)-\left(\frac{1}{3}U_n+2\right)=\frac{1}{3}(U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{3}r=\frac{1}{3}\times 3=1$$

إذن : (V_n) متتالية حسابية أساسها $r'=1$ وحدها الأول : $V_0=\frac{1}{3}U_0+2=\frac{4}{3}$

2) (t_n) متتالية حسابية أساسها r'' إذا وفقط إذا كان : $t_{n+1}-t_n=r''$

$$t_{n+1}-t_n=(2U_{n+1}+5V_{n+1})-(2U_n+5V_n)$$
$$=2(U_{n+1}-U_n)+5(V_{n+1}-V_n)=2r+5r'=6+5=11$$

إذن (t_n) متتالية حسابية أساسها $r''=11$ وحدها الأول $t_0=\frac{8}{3}$

تطبيق . 15 : تعيين طبيعة المتتالية $\frac{1}{U_n}+2$ حيث (U_n) متتالية تراجعية

لتكن (U_n) متتالية معرفة بالحد الأول : $U_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{U_n}{1+2U_n}$ والمتتالية (V_n) المعرفة بـ : $V_n=\frac{1}{U_n}+2$

1) بين أن (V_n) متتالية حسابية ثم احسب حدها الأول V_0

2) أوجد عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

3) احسب نهاية (V_n) و (U_n) لما n يؤول إلى $(+\infty)$

✓ الحل :

1) (V_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $V_{n+1}-V_n=r$

$$V_{n+1}-V_n=\left(\frac{1}{U_{n+1}}+2\right)-\left(\frac{1}{U_n}+2\right)=\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}$$
$$=\frac{1+2U_n}{U_n}-\frac{1}{U_n}=\frac{1+2U_n-1}{U_n}=\frac{2U_n}{U_n}=2$$

إذن : (V_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $V_0=\frac{1}{U_0}+2=4+2=6$

2) $V_n=V_0+n\times r$: $V_n=6+2n$, $n\in N$

لدينا : $V_n=\frac{1}{U_n}+2$ ومنه : $\frac{1}{U_n}=V_n-2$ بقلب الطرفين نجد : $U_n=\frac{1}{V_n-2}$

وبالتالي : $U_n=\frac{1}{2n+6-2}=\frac{1}{2n+4}$

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}(6+2n)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+4}=0$$

تطبيق . 16 : حساب حدود متتالية هندسية بمعرفة الحد الأول والأساس أو حدين

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0

1) احسب الحدود : U_1 , U_2 , U_3 , U_4 إذا علمت أن : $U_0=2$ و $q=5$

2) احسب الحدود U_1 , U_2 , U_3 , U_4 إذا علمت أن : $U_0=-2$ و $q=-\frac{1}{2}$

3) احسب : U_0 و U_9 إذا علمت أن : $U_4=48$ و $U_7=-384$ و $q<0$

✓ الحل :

1) عبارة الحد العام هي : $U_n=U_0\times q^n$

بالتعويض قيمة U_0 و q نجد : $U_n=2\times 5^n$

$U_1=2\times 5^1=10$ ، $U_2=2\times 5^2=50$

$U_3=2\times 5^3=250$ ، $U_4=2\times 5^4=1250$

2) الحد العام للمتتالية (U_n) هو : $U_n=U_0\times q^n$ بالتعويض قيمة U_0 و q نجد :

$U_n=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ ومنه نجد : $U_1=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^1=1$ ، $U_2=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2=\frac{-1}{2}$

$U_3=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\frac{+1}{4}$ ، $U_4=-2\left(\frac{-1}{2}\right)^4=\frac{-1}{8}$

3) لدينا من اجل كل n و p من N : $U_n=U_p\times q^{n-p}$.....(1)

بوضع : $n=7$ و $p=4$ في (1) نجد : $U_7=U_4\times q^{7-4}$

أي : $-384=48\times q^3$ ومنه : $q^3=-\frac{384}{48}=-8$

$q^3=-8$ يكافئ : $q=-2$

بوضع: $p=0$ و $n=4$ في المساواة (1) نجد : $U_4=U_0\times q^4$ ومنه : $U_0=\frac{U_4}{q^4}$

بالتعويض قيمة U_4 و q نجد : $U_0=\frac{48}{(-2)^4}=\frac{48}{16}=3$

- بوضع $p=7$ و $n=9$ في المساواة (1) نجد : $U_9=U_7\times q^2$

$U_9=(-384)\times(-2)^2=-384\times4-1536$.

تطبيق . 17 : ايجاد أساس متتالية هندسية بمعرفة علاقة بين حدودها

1) (U_n) متتالية هندسية بحيث من اجل كل عدد طبيعي n :
$U_{n+2}=U_n+U_{n+1}$ وحدودها غير معدومة وأساسها q موجب ، أوجد q

2) (V_n) متتالية هندسية ليست ثابتة بحيث : $V_0=3$ و $V_2=3V_1-2V_0$
أ) أوجد أساس هذه المتتالية
ب) أوجد عبارة V_n بدلالة n ثم أحسب : V_1 ، V_2 ، V_3

✓ الحل :

1) الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 هو: $U_n=U_0\times q^n$ ومنه ينتج :
$U_{n+1}=U_0\times q^{n+1}$ و $U_{n+2}=U_0\times q^{n+2}$

من المساواة : $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ ينتج : $U_0\times q^{n+2}=U_0\times q^{n+1}+U_0q^n$ بقسمة طرفي هذه الأخيرة على : U_0q^n نجد : $q^2=q+1$

أي : $q^2-q-1=0$.....(1)

ليكن Δ مميز المعادلة (1) : $\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة (1) لها حلين هما :

$q_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$ ، $q_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$ وبما أن : $q>0$ فإن : $q=q_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$

2) الحد العام للمتتالية (V_n) هو $V_n=V_0\times q^n=3\times q^n$

ومنه ينتج : $V_1=3\times q$ و $V_2=3\times q^2$

بالتعويض V_1 و V_2 و V_0 في المساواة : $V_2=3V_1-2V_0$ نجد : $3q^2=9q-6$ وبالقسمة على 3 نجد : $q^2=3q-2$ أي : $q^2-3q+2=0$.....(2) .

ليكن Δ مميز المعادلة (2) : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

$\Delta>0$ ومنه المعادلة (2) لها حلين هما

$q_1=\frac{3-1}{2}=2$ ، $q_2=\frac{3-1}{2}=1$

وبما أن (V_n) ليست ثابتة فإن : q_2 مرفوض وبالتالي $q=q_1=2$

ب) عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) هو : $V_n=V_0q^n=3\times2^n$

$V_1=3\times2^1=6$ ، $V_2=3\times2^2=12$ ، $V_3=3\times2^3=24$

تطبيق . 18 : الحد العام لمتتالية هندسية — الوسط الهندسي

(U_n) متتالية هندسية حدودها سالبة ومتزايدة
1) ما هو المجال الذي ينتمي إليه q
2) أ) عين U_1 ، U_2 ، U_3 علما أن : $U_1U_3=\frac{4}{81}$ و $U_1+U_2+U_3=\frac{-26}{27}$
ب) أوجد عبارة U_n بدلالة n

✓ الحل :

1) الحد العام للمتتالية (U_n) هو: $U_n=U_0\times q^n$ و بما أن حدودها سالبة فإن : $U_0<0$

لدينا : $U_{n+1}-U_n=U_0q^n(q-1)$

(U_n) متزايدة يعني أن : $U_0q^n(q-1)>0$ وبما أن $U_0<0$ فإن : $q^n(q-1)<0$

حتى يكون : $q^n(q-1)<0$ يجب أن يكون : $0<q<1$

2) أ) بما أن : U_1 ، U_2 ، U_3 حدود متتابعة من متتالية هندسية

فإن : $U_1U_3=U_2^2$

لكن : $U_1U_3=\frac{4}{81}$ إذن : $U_2^2=\frac{4}{81}$ وبالتالي : $U_2=\frac{2}{9}$ أو $U_2=\frac{-2}{9}$

بما أن حدود المتتالية سالبة فإن : $U_2=\frac{2}{9}$ مرفوض و $U_2=-\frac{2}{9}$ مقبول

نعوض U_2 في المساواة : $U_1+U_2+U_3=\frac{-26}{27}$ نجد : $U_1+U_3=\frac{-20}{27}$

إذن : $\begin{cases} U_1U_3=\frac{4}{81} \\ U_1+U_3=\frac{-20}{27} \end{cases}$ .....(1)

(1) تكافئ : $\begin{cases} U_1\left(\frac{-20}{27}-U_1\right)=\frac{4}{81} \\ U_1+U_3=\frac{-20}{27} \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} U_1^2-\frac{20}{27}U_1-\frac{4}{81}=0 \\ U_3=-U_1+\frac{-20}{27} \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} 81U_1^2+60U_1+4=0 \\ U_3=-U_1+\frac{-20}{27} \end{cases}$

$81U_1^2+60U_1+4=0$.....(1)

ليكن Δ' مميز المعادلة (1) ، $\Delta'=(30)^2-(81)(4)=900-324=576$

$U_1=\frac{-30+24}{81}=\frac{-6}{81}=\frac{-2}{27}$ ، $U_1'=\frac{-30-24}{81}=\frac{-54}{81}=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$

وبما أن (U_n) متزايدة تماما فإن : $U_1=\frac{-2}{27}$ مرفوض و $U_1=\frac{-2}{3}$ مقبول

نعوض U_1 في المساواة : $U_3=-U_1-\frac{20}{27}$ نجد : $U_3=-\frac{2}{27}$.

ب) كتابة U_n بدلالة n

لدينا : $U_2=qU_1$ ومنه : $q=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{-2}{9}}{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3}$

إذن : $U_n=U_1\times q^{n-1}=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

تطبيق - 19 : المتتالية هندسية — اتجاه تغير متتالية — حساب النهايات

(U_n) متتالية معرفة بـ : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3} \end{cases}$ و (V_n)

معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n=U_n-\frac{1}{2}$

1) مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 على المستقيم العددي بدون حساب الحدود ثم ماذا يمكن استنتاجه عن تغيرات المتتالية (U_n)

2) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0

3) عبر عن V_n و U_n بدلالة n

4) ادرس تغيرات المتتالية (V_n) ثم (U_n)

5) ما هي نهاية (V_n) ثم استنتج نهاية (U_n)

✓ الحل :

1) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ومنه فإن : $U_{n+1}=f(U_n)$

نرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ بيان الدالة f وليكن (d) ونرسم أيضا

وليكن (Δ) المستقيم ذوا المعادلة $y=x$ نعلم U_0 على محور الفواصل

- نرسم مستقيم $x=U_0$ يقطع (d) في نقطة A_1 ترتيبها U_1

- نرسم من A_1 مستقيم يوازي (xx') يقطع : (Δ) في نقطة B_1

حيث ترتيبها هو U_1 وفاصلتها U_1

المسقط العمودي لـ: B_1 على محور الفواصل هي النقطة ذات الفاصلة U_1

النقطة A_2 هي نقطة تقاطع المستقيم المرسوم من النقطة $(U_1,0)$ و الموازي لـ: (yy') و المستقيم (d) فاصلتها U_1

- نرسم من A_2 مستقيم يوازي محور الفواصل يقطع (Δ) في B_2 ، فاصلتها B_2 هي U_2 وترتيبها هو U_2

المسقط العمودي لـ B_2 على محور الفواصل هي النقطة ذات الفاصلة U_2

وهكذا نواصل وضع الأعداد U_3 ، .... على مستقيم العددي

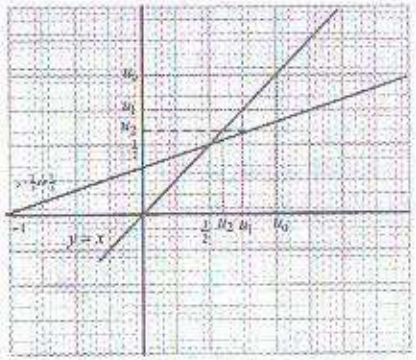
نلاحظ من الشكل أن المتتالية (U_n) تتناقص وتتقارب من القيمة $\frac{1}{2}$

2) إثبات أن (V_n) هندسية

(V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث: $V_{n+1}=V_n\times q$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1}-\frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(V_n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}V_n+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}V_n \end{aligned}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول U_0 حيث : $V_0=\frac{1}{2}$



3) $V_n=V_0\times q^n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$V_n=U_n-\frac{1}{2}$ منه : $U_n=V_n+\frac{1}{2}$

$$U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right]$$

4) تغيرات المتتالية (V_n)

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+1-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[\frac{1}{3}-1\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{-2}{3}\right)$$

من اجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}-V_n\langle 0$ ومنه المتتالية (V_n) متناقصة تماما

بما ان : (V_n) متناقصة فإن : المتتالية ذات الحد العام : $\left(V_n+\frac{1}{2}\right)$ متناقصة وبالتالي المتتالية (U_n) متناقصة

5) بما ان $0\langle q\langle 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

و منه نستنتج ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{2}$

تطبيق . 20 : استعمال متتالية هندسية في حساب الأجور

أجرة أستاذ تزداد بانتظام كل سنة : 5% فإذا كانت أجرته سنة 2004 هي 15000 DA فكم عدد السنين حتى يتضاعف الأجر

✓ الحل :

نفرض أن U_n هي أجرة الأستاذ سنة $(2004+n)$

فيكون: U_0 يساوي 15000 DA و U_{n+1} هي أجرة الأستاذ سنة $(2004+n+1)$

$U_{n+1}=U_n+0,05\,U_n=(1+0,05)U_n=1,05\,U_n$

إذن أجرة الأستاذ تزداد وفق متتالية هندسية أساسها : $q=1,05$ وحدها الأول $U_0=15000DA$

الحد العام لهذه المتتالية هو : $U_n=U_0(1,05)^n$

$U_n=15000\times(1,05)^n(DA)$

أجرة الأستاذ ضعف ما هي عليه تعني : $U_n=2U_0$

$U_n=2U_0$ يكافئ : $2U_0=U_0\times(1,05)^n$ بالقسمة على U_0 نجد : $2=(1,05)^n$

ومنه : $n=15$ (لان : $(1,05)^{14}=1,979$) .

تطبيق . 21 : مجموع حدود متتالية حدها العام مجموع لحدي عام متتالية حسابية وهندسية

(U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n=2^n+3n-4$

(V_n) و (W_n) المتتاليتان المعرفتان ب : $V_n=2^n$ ، $W_n=3n-4$

1) بين أن (V_n) هندسية و (W_n) حسابية

2) احسب المجموعين : $S_1=V_0+V_1+....+V_n$ ، $S_2=W_0+....+W_n$

3) استنتج المجموع S_3 حيث : $S_3=U_0+U_1+....+U_n$

✓ الحل :

1) □ (V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r_1 بحيث : $V_{n+1}=V_n\times r_1$

$V_{n+1}=2^{n+1}\times 2^n\times 2^1=V_n\times 2$

منه (V_n) متتالية هندسية أساسها $r_1=2$ وحدها الأول $V_0=2^0=1$

□ (W_n) حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r_2 بحيث : $W_{n+1}=W_n+r_2$

$W_{n+1}=3(n+1)-4=(3n-4)+3=W_n+3$

منه : (V_n) متتالية حسابية أساسها : $r_2=3$ وحدها الأول $W_0=-4$

2) □ حساب S_1 و S_2

* S_1 هو مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول V_0 و أساسها r_1 ومنه : $S_1=V_0\times\frac{1-r_1^{n+1}}{r_1}$ وبالتعويض نجد :

$$S_1=2\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=-2\left(1-2^{n+1}\right)=2^{n+2}-2$$

* S_2 هو مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية حسابية حدها الأول W_0 وأساسها

n_2 ومنه : $S_2=\left(\frac{n+1}{2}\right)(W_0+W_n)$ بالتعويض نجد

$$S_2=\frac{n+1}{2}(-4+3n-4)=\frac{n+1}{2}(-8+3n)$$

3) حساب المجموع S_3 : لاحظ أن : $U_n=V_n+W_n$

$$S_3=U_0+U_1+....U_n$$
$$=(V_0+W_0)+(V_1+W_1)+.....(V_n+W_n)$$
$$=(V_0+V_1+..V_n)+(W_0+W_1+...W_n)=S_1+S_2$$
$$=2^{n+1}-2+\left(\frac{n+1}{2}\right)(-8+3n)$$

تطبيق . 22 : مجموع حدود متتالية (هندسية - حسابية)

1) (U_n) متتالية حسابية بحيث : $U_5=23$ و $U_7=33$

أ) احسب U_0 والأساس r

ب) احسب المجموع التالي : $S=U_5+....U_{105}$

2) (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ و $V_3=108$

احسب المجموع $S'=V_3+.....+V_{15}$

✓ الحل :

1) أ) من أجل كل عددين طبيعيين n و p

$U_n=U_p+(n-p)r.....(1)$ بوضع : $n=7$ و $p=5$ في المساواة (1)

نجد : $U_7=U_5+2r$ ومنه : $r=\frac{U_7-U_5}{2}=\frac{33-23}{2}=\frac{10}{2}=5$

ب) عدد حدود المجموع S هو : $(105-5)+1=101$

إذن : $S=\frac{101}{2}(U_5+U_{105})$

$$U_{105}=U_5+100\times r$$
$$U_{105}=23+100\times 5=523$$

إذن : $S=\frac{101}{2}(23+523)+50{,}5\times 546=27573$

2) عدد حدود المجموع S' هو : $(15-3)+1=13$

$$S'=V_3\times\frac{1-q^{13}}{1-q}=108\times\frac{1-3^{13}}{1-3}=-54(1-3^{13})=54(3^{13}-1)$$

تطبيق . 23 : حساب المجاميع

- أحسب المجاميع التالية :

$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+.....+\frac{1}{1024}$ ، $S_3=1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+.....+\frac{1}{10^{12}}$

$S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-.....-\frac{1}{1048576}$ ، $S_4=-2+5+12+19+.....+68$

✓ الحل :

حساب S_1 لاحظ أن : $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ، $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ، $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ، ..... ، $\frac{1}{1024}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

إذن : $S_1=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+....\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

منه نستنتج أن S_1 هو مجموع 10 حدود متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول :

$\frac{1}{2}$ إذن : $S_1=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)\times 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

- حساب S_2 : لاحظ أن : $\frac{1}{2}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^1$ ، $\frac{-1}{4}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{1}{8}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ، $-\frac{1}{1048576}=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{20}$

إذن $S_2=-\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)^3-....-\left(\frac{-1}{2}\right)^{20}$

S_2 يشمل 20 حدا الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول $-\left(-\frac{1}{2}\right)$

وأساسها ، $q=\frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$ ومنه نجد :

$$S_2=-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right]=\frac{1}{3}\times\left[1-\frac{1}{1048576}\right]=349525$$

تطبيق . 24 : متتالية حسابية – مجموع الحدود

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_1 وأساسها r و S_n مجموع n حد الأولى لهذه المتتالية : $S_n = U_1 + ... U_n$

1) أحسب U_1 و S_n لما : $U_n = -31$ ، $r = -3$ ، $n = 12$

2) أحسب U_1 و U_n لما : $r = -6$ و $n = 10$ ، $S_n = -270$

3) أحسب r و U_1 لما : $U_n = 72$ و $r = 7$ ، $S_n = 405$

الحل :

1) $U_n = U_1 + (n-1)r$ بتعويض قيمة n في عبارة الحد العام نجد : $U_{12} = U_1 + 115$

ومنه : $U_1 = U_{12} - 115$

$U_1 = -31 - 11 \times (-3) = 33 - 31 = 2$

$S_n = U_1 + ... + U_{12} = \frac{12}{2}(U_1 + U_{12}) = 6(2 + (-31)) = 6(-29) = -174$

2) $U_1 + U_2 + ... + U_{10} = -270$ و $r = -6$ و $n = 10$

$\frac{10}{2}(U_1 + U_{10}) = -270 ....(1)$ بالتبسيط نجد : $U_1 + U_{10} = -270 .....(1)$

لدينا : $U_{10} = U_1 + 9r ....(2)$ بطرح 2 من 1 نجد : $2U_1 = 0$

ومنه : $U_1 = 0$

إذن : $U_n = U_1 + (n-1)r = -6(n-1) = -6n + 6$

3) $S_n = U_1 + ... + U_n = 405$ و $r = 7$ ، $U_n = 72$

$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = 405$ ومنه : $n(U_1 + 72) = 810 ....(1)$

$72 = U_1 + (n-1) \times 7 ....(2)$

من (2) نجد : $U_1 = 72 - (n-1) \times 7$ نعوض : U_1 في (1) نجد:

$n[72 - 7n + 7 + 72] = 810$ بالتبسيط نجد : $-7n^2 + 151n - 810 = 0 ....(3)$

ليكن Δ مميز المعادلة (3) : $\Delta = (151)^2 - 4(-7)(-810) = 121$

$n_1 = \frac{-151 + 121}{-14} = \frac{-140}{-14} = 10$ مقبول $n_2 = \frac{-151 - 11}{-14} = \frac{-162}{-14} = 11{,}57$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى N ، إذن : $n = 10$

بالتالي : $U_1 = 72 - (10-1) \times 7 = 72 - 63 = 9$.

تطبيق . 25 : اتجاه تغير متتالية - المتتالية هندسية - التقارب

لتكن : (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بالعلاقة $2nU_{n+1} = (n+1)U_n$ و $U_1 = 1$ بحيث حدودها موجبة

1) أ) أحسب U_2 , U_3 , U_4

ب) بين أن (U_n) متناقصة

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = \frac{U_n}{n}$

أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها q

ب) أدرس نهاية المتتالية (V_n)

3) عبر عن U_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية (W_n) المعرفة بـ:

$W_n = \frac{U_n}{n+1}$

الحل :

1) أ) $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{n+1}{2n}U_n \\ U_1 = 1 \end{cases}$

$U_2 = \frac{2}{2}U_1 = U_1 = 1$ ، $U_3 = \frac{3}{4}U_2 = \frac{3}{4}$ ، $U_4 = \frac{4}{6}U_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

ب) إثبات أن (U_n) متناقصة

بما أن (U_n) حدودها موجبة فإن لإثبات أنها متناقصة يكفي إثبات : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

من أجل كل $n \ge 1$ فإن : $2n \ge 2$ ومنه : $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}$ بإضافة $\frac{1}{2}$ إلى طرفي المتباينة

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2n} \le 1$ نجد : $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}$ أي : $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ إذن : (U_n) متناقصة

2) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية

(V_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $V_{n+1} = qV_n$

$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{2n}U_n \times \frac{1}{n+1} = \frac{U_n}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n}{n}\right) = \frac{1}{2}V_n$

منه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1 = \frac{U_1}{1} = 1$

ب) بما ان : $q=\frac{1}{2}$ و $V_1=1$ فإن الحد العام هو : $V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و بما ان : $|q|<1$ فإن : $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه المتتالية (V_n) متقاربة نحو الصفر .

3) لدينا : $V_n=\frac{U_n}{n}$ ومنه : $U_n=n\times V_n$ أي : $U_n=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$W_n=\frac{U_n}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بما ان : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=1\times0=0$

أي أن المتتالية (W_n) متقاربة نحو الصفر .

تطبيق . 26 : متتاليات تراجعية – متتالية هندسية

لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي : $\begin{cases}U_0=0\ ,\ U_1+1\\ U_{n+1}=\frac{1}{2}(U_n+U_{n-1})\end{cases}$

1) أحسب : $U_4\ ,\ U_3\ ,\ U_2$

2) نضع : $V_n=U_{n+1}-U_n$

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول V_0 ثم عبر عن V_n بدلالة n

✓ الحل :

1) $U_2=\frac{1}{2}(U_1+U_0)=\frac{1}{2}$

$$U_3=\frac{1}{2}(U_2+U_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}$$

$$U_4=\frac{1}{2}(U_3+U_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

2) (V_m) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحث : $V_{n+1}=q\times V_n$

$$V_{n+1}=U_{n+2}-U_n$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}(U_{n+1}+U_n)-U_n=\frac{1}{2}U_{n+1}+\frac{1}{2}U_n-U_n=\frac{1}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$$

$$=\frac{1}{2}(U_{n+1}-U_n)=\frac{1}{2}V_n$$

منه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$

وحدها الأول : $V_0=U_1-U_0=1$ ومنه الحد العام هو : $V_n=V_0\times q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تطبيق . 27 : متتالية حدها العام هو مجموع لحدي عام لمتتالية حسابية وهندسية

ليكن (U_n) و (V_n) متتاليتين معرفتان كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=2^n$ و $V_n=3n-7$

1) أثبت أن (U_n) متتالية هندسية و (V_n) متتالية حسابية ثم عين الحد الأول لكل منها .

2) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$ ، $S'_n=V_0+V_1+.....+V_n$

3) أحسب المجموع : $S''_n=(-6)+(-2)+(3)+...+(2^n+3n-7)$

✓ الحل :

1) □ إثبات أن (U_n) متتالية هندسية

(U_n) متتالية هندسية أساسها r يعني من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=U_n\ r$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=2^{n+1}=2^n\times2=U_n\times2$

منه (U_n) متتالية هندسية أساها $r=2$. وحدها الأول هو : $U_0=2^0=1$

□ إثبات أن (V_n) متتالية حسابية

(V_n) متتالية حسابية أساها r يعني أن من أجل كل عدد طبيعي : $V_{n+1}=V_n+r'$

من أجل كل عدد طبيعي : $V_{n+1}=3(n+1)-7=(3n-7)+3=V_n+3$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r'=3$ وحدها الأول : $V_0=3\times0-7=-7$

2) □ حساب المجموع $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$

S_n عبارة عن مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1 ومنه : $S_n=1\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

□ حساب المجموع S'_n

S'_n عبارة عن مجموع $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية حسابية أساسها : $r'=3$ وحدها الأول يساوي 7 منه :

$$S_n=\frac{n+1}{2}(V_0+V_n)=\frac{n+1}{2}(-7+3n-7)=\frac{n+1}{2}(3n-14)$$

إذن : $S_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(3n-14)$

3) □ حساب المجموع S''_n

$$S''_n=(-6)+(-2)+(3)+...+(2^n+3n-7)=(U_0+V_0)+(U_1+V_1)+.....+(U_n+V_n)$$

$$=(U_0+U_1+...+U_n)+(V_0+V_1+...+V_n)=S_n+S'_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)(3n+14)+2^{n+1}-1$$

تطبيق . 28 : تعيين ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية

a,b,c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث : $a\times b\times c=64$

و $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$

- عين الأعداد الحقيقية a,b,c

✓ الحل :

بما أن a,b,c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن : $ac=b^2$

$\begin{cases}abc=64\\ac=b^2\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}b^3=64\\ac=b^2\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}b=4\\ac=16\end{cases}$

بتعويض قيمة b في المساواة : $\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ نجد : $\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{7}{8}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$

إذن : $\begin{cases}ac=16\\\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{5}{8}.....(1)\end{cases}$

(1) يكافئ : $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{16}{a}}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\\frac{1}{a}+\frac{a}{16}=\frac{5}{8}\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\\frac{16+a^2}{16a}=\frac{5}{8}\end{cases}$

يكافئ : $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\\frac{16+a^2}{2a}=5\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}c=\frac{16}{a}\\a^2-10a+16=0\end{cases}$

$a^2-10a+16=0$

$\Delta'=25-(1)(16)=9$

$a_1=\frac{5+3}{1}=8$ ، $a_2=\frac{3-5}{1}=2$

□ الحالة الأولى $a=a_1$

$a=a_1$ يكافئ : $c_1=\frac{16}{8}=2$ منه $(a,b,c)=(8,4,2)$

□ الحالة الثانية $a=a_2$

$a=a_2$ يكافئ : $c_2=\frac{16}{2}=8$ منه : $(a,b,c)=(2,4,8)$

تطبيق . 29 : حساب جداء حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 وأساسها r ، حيث : $r>0$

1) عين الأساس r إذا علمت أن : $V_0=3$ و $V_2+V_4=60$.

2) عين عبارة V_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $S_n=V_0+V_1+....+V_{n+1}$ بدلالة n .

3) احسب الجداء : $P=V_0\times V_1\times...\times V_n$

✓ الحل :

1) □ تعيين الأساس r

بما أن (V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 فإن الحد العام لها $V_n=V_0\times r^n$ ومنه :

$V_2=V_0\times r^2=3r^2$ ، $V_4=V_0\times r^4=3r^4$

$V_2+V_4=60$ يكافئ : $3r^2+3r^4=60$ يكافئ : $r^4+r^2=20$

يكافئ : $r^4+r^2-20=0$

بوضع : $y=r^2$ تصبح المعادلة : $r^4-r^2-20=0$ كما يلي : $y^2+y-20=0$

$\Delta=1-4(1)[(-20)]=81$

$y_1=\frac{-1+9}{2}=4$ مقبول ، $y_2=\frac{-1+9}{2}=-5$ مرفوض لأن : $y>0$

$y=r^2$ يكافئ : $r^2=4$ يكافئ : $(r=2)$ أو $(r=-2)$ يكافئ : $r=2$

2) □ تعيين عبارة V_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=V_0\times r^n=3\times 2^n$

□ حساب قيمة المجموع : $S_n=V_0+V_1+....V_{n+1}$

S_n عبارة عن مجموع : $(n+2)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية حدها الأول V_0

وأساسها r ومنه :

$$S_n = V_0 \times \frac{r^{n+2}-1}{r-1} = 3\times\frac{2^{n+2}-1}{2-1} = 3\left(2^{n+2}-1\right)$$

3) حساب الجداء : $p = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$

p عبارة عن جداء $(n+1)$ حد الأولى من حدود متتالية هندسية

$$p = V_0\left(V_0\ r^1\right)\times\left(V_0\ r^1\right)\times\ldots\times\left(V_0\ r^n\right)$$

$$p = \left(V_0\times V_0\times\ldots\times V_n\right)\times\left(r^1\times r^2\times\ldots\times r^n\right)$$

$$p = V_0^{n+1}\times r^{1+2+3+\ldots+n} = V_0^{n+1}\times r^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{n+1}\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

تطبيق . 30 : حساب مجموع مربعات حدود لمتتالية هندسية

لتكن (V_n) متتالية حقيقية معرفة كما يلي : $V_{n+1} = 2V_n - 3n + 2$ و $V_0 = 4$

ولتكن (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_n = V_n - 3n - 1$

1) أثبت أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول U_0

2) استنتج عبارة V_n بدلالة n

3) أ) احسب المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots U_n$

ب) احسب : $S'_n = V_0 + V_1 + \ldots V_n$

4) احسب المجموع : $S''_n = U^2{}_0 + U^2{}_1 + \ldots + U^2{}_n$

✓ الحل :

1) إثبات أن (U_n) متتالية هندسية

(U_n) متتالية هندسية أساسها r) يعني من أكل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n \times r$

من أكل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = V_{n+1} - 3(n+1) - 1 = 2Vn - 3n + 2 - 3n - 3 - 1 = 2U_n$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $U_0 = V_0 - 3 + 4 - 1 = 3$

2) تعيين V_n لدلالة n

بما أن (U_n) متتالية هندسية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$ فإن الحد العام

$U_n = 3\times 2^n$

لدينا : $U_n = V_n - 3n - 1$ يكافئ : $V_n = U_n + 3n + 1$

يكافئ : $V_n = 3\times 2^n + 3n + 1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي : $V_n = 3\times 2^n + 3n + 1$

3) أ) حساب المجموع S

S عبارة عن مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية منه:

$$S = U_0\times\frac{r^{n+1}-1}{r-1} = 3\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 3\times\left(2^{n+1}-1\right)$$

ب) حساب المجموع S'

$S' = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$

لدينا : $U_n = V_n - 3n - 1$

$U_0 = V_0 - 3\times 0 - 1$

$U_1 = V_1 - 3\times 1 - 1$

$U_2 = V_2 - 3\times 2 - 1$

$U_{n-1} = V_{n-1} - 3(n-1) - 1$

$U_n = V_n - 3n - 1$ بجمع أطراف المساويات طرفا لطرف نجد :

$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \left(V_0 + V_1 + \ldots + V_n\right) - 3\left(0 + 1 + 2 + \ldots + n\right) - \left(1 + 1 + \ldots + 1\right)$$

$$S = S' - 3\left(1 + 2 + \ldots + n\right) + \underbrace{\left(1 + 1 + 1 \ldots + 1\right)}_{(n+1)\text{ مرة } 1}$$

$$S' = 3\left(2^{n+1}-1\right) + 3\times\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 3\left(2^{n+1}-1\right) + \frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$S' = 3\left(2^{n+1}-1\right) + \frac{(n+1)+2(3n+2)}{2}$$

4) حساب المجموع S''

$$S'' = U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_n^2 = U_0^2 + U_0^2 r^2 + \ldots + U_0^2 r^{2n} = U_0^2\left[1 + r^2 + \ldots + r^{2n}\right]$$

$$= U_0^2\times\left[1 + r^2 + \ldots + \left(r^2\right)^n\right]$$

$1 + r + \ldots r^{2n}$ عبارة عن مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من حدود متتالية هندسية أساسها r^2 وحدها الأول 1

$$1 + r + \ldots r^{2n} = 1\times\frac{\left(r^2\right)^{n+1}-1}{r^2-1} = \frac{r^{2n+2}-1}{r^2-1}$$

إذن $S'' = U_0^2\times\left[1\times r^2 + \ldots + r^{2n}\right] = 9\times\frac{2^{2n+2}-1}{3} = 3\left(2^{2n+2}-1\right)$

تمارين و مسائل

1 (U_n) متتالية معرفة بحدها الأول $U_0=3$ وعلاقة تراجعية تعطى U_{n+1} بدلالة U_n

أحسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4 في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_{n+1}=(U_n-2)^2$ ، ب) $U_{n+1}=5U_n-3$ ، ج) $U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3}$

د) $U_{n+1}=\dfrac{2U_n}{U_n+2}$ ، هـ) $U_{n+1}=\dfrac{1}{U_n}+1$ ، و) $U_{n+1}=\sqrt{|-U_n+2|+1}$

2 (V_n) متتالية معرفة $V_n=\dfrac{n^2-n-2}{n+3}$

أ) أوجد عبارة U_{n+1} بدلالة U_n

ب) أحسب الحدود الخمسة الأولى U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4

ج) مثل هندسيا هذه الحدود في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=3$

3 أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_n=n^2+3$ ، ب) $U_n=3n-5$ ، ج) $U_n=\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$ ، د) $U_n=\dfrac{2+n}{n^2}$

هـ) $U_n=3-\sqrt{n+3}$ ، و) $U_n=\dfrac{3n+1}{2n+5}$ ، ن) $U_n=\dfrac{n+3}{2^n}$ ، ف) $U_n=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1}$

4 (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 أساسها r

عين عبارة الحد العام في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_0=2$ و $r=3$ ، ب) $U_0=-3$ و $r=\sqrt{2}$ ج) $U_0=\dfrac{2}{5}$ و $r=\dfrac{1}{2}$

5 أ) لتكن (U_n) متتالية حسابية

أوجد الحد الأول U_0 و الأساس r في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $U_3=12$ و $U_7=24$ ، ب) $U_5=-9$ و $U_{11}=-21$ ،

ج) $U_3=\dfrac{11}{2}$ و $U_8=13$

2) أوجد ستة أعداد فردية متتابعة علما أن مجموعها 49 .

6 (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r ، عين عبارة U_n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $U_0+U_1+U_2=15$ و $U^2_0+U^2_1+U^2_2=93$

2) $U_0+U_1+U_2=-12$ و $U^2_0+U^2_1+U^2_2=146$

3) $U_5+U_6+U_7=-27$ و $U_{100}=-15$

4) $U_6+U_8+U_{10}+U_{12}=91$ و $U_2+U_4=21$

7 نعطي خمسة أعداد حقيقية a ، b ، c ، d ، e بحيث هذا الترتيب تشكل حدود لمتتالية حسابية .

1) عبر عن الاعداد a ، b ، d ، e بدلالة c والأساس r للمتتالية .

2) عبر عن المجموع $a+b+c+d+e$ بدلالة c . إذا علمت أن هذا المجموع يساوي 30 و $b=5$ أحسب الحد الخامس لهذه المتتالية

8

1) أحسب مجموع مضاعفات العدد 5 الأقل من 2000

2) أحسب مجموع مضاعفات 5 المحصورة بين 2000 و 3000

3) أحسب مجموع مضاعفات 5 المحصورة بين 2000 و 5000

9

1) أحسب عشرة الحدود الأولى من متتالية هندسية حدها الأول $U_0=3$ وأساسها $q=2$

2) أوجد U_0 و r في كل حالة من الحالات التالية

أ) $U_2=12$ و $U_5=160$

ب) $U_1\times U_3=\dfrac{16}{729}$ و $U_1+U_2=\dfrac{10}{27}$

3) a ، b ، c ثلاث حدود متتابعة بهذا الترتيب شكل متتالية حسابية و a ، c ، b بهذا الترتيب تشكل متتالية هندسية و $a+b+c=18$ أحسب a و b و c .

10 أدرس تقارب المتتاليات في كل حالة من الحالات التالية

أ) $U_n=\dfrac{3^n}{2^{n+2}}$ ، $V_n=\dfrac{2^n-1}{3^n}$

ب) $U_n=3+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ ، $V_n=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$

ج) $U_n=\dfrac{3^n+2^n}{5^n}$ ، $V_n=\dfrac{3^n+7^n}{5^n}$

11 عين ثلاث أعداد حقيقية غير معدومة a , b , c بحيث a , b , c بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و $a+b+c=9$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{32}{10}$

12 لتكن $(U_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية

1) عين الأعداد الحقيقية : U_0 , U_1 , ..., U_4

إذا علمت أن : $U_0\times U_4=144$ و $U_1+U_2+U_3=42$

2) أ) عين بدلالة n الحد العام U_n

ب) أحسب المجموع : $S_1=U_0+U_4+....+U_{99}$

ج) أحسب الجداء : $P=U_0\times U_1\times.....\times U_{99}$

13 لتكن المتتاليتان (U_n) و (V_n) بحيث من أجل كل : $n\in N$: $U_{n+1}=\frac{1}{4}(3V_n+5)$

1) أ) برهن أنه إذا كانت (U_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ فإن من أجل كل $n\in N$: $V_{n+1}=\frac{1}{4}(V_n-5)$.

ب) أحسب U_n بدلالة n و U_0 ثم V_n بدلالة n و U_0

ج) أحسب المجموعين التاليين :

$S_1=U_0+U_1+...+U_n$ ، $S_2=V_0+V_1+.....+V_n$

14 لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_0=2$ و $V_1=3$ ومن أجل كل $n\in N$:

$V_{n+2}=(\alpha+1)V_{n+1}-\alpha V_n$ ، $\alpha\in IR^*$

ولتكن (U_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n=V_{n+1}-V_n$

1) برهن أن (U_n) متتالية هندسية .

2) أوجد عبارة U_n بدلالة n و α

3) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+...+U_n$ بدلالة n و α

4) استنتج مما سبق عبارة V_n بدلالة n و α

15 لتكن المتتالية (V_n) معرفة كما يلي :

$V_0\in IR$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $V_{n+1}=\frac{1}{5}V_n+2$

1) ما هي قيمة V_0 الممكنة حتى تكون المتتالية (V_n) ثابتة ؟

2) نفرض أن : $V_0\neq\frac{5}{2}$ ، ولنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_n=V_n-\alpha$ ، $\alpha\in IR$

أ) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (U_n) هندسية ؟

ب) أوجد عبارة U_n بدلالة n و V_0 ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n و V_0

ج) أحسب المجاميع

$S_1=V_0+V_1+.....+V_n$ ، $S_2=U_0+U_1+.....+U_n$ ، $S_3=V^2{}_0+V_1^2+.....+V^2{}_n$

16 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي:

$U_0=6$ و $U_1=9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2}=2U_{n+1}-U_n$

1) أثبت أن (U_n) متتالية حسابية

2) أحسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_n$ بدلالة n

3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_n=5^{U_n}$

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية ، ب) أحسب V_n بدلالة n

ج) أحسب المجموع : $S=V_0+V_1+.....+V_{10}$

17 لتكن $(V_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية

1) عين الأساس r والحد الأول V_0 للمتتالية (V_n) إذا علمت أن :

$V_0+V_1+V_2=24$ و $V_0\times V_2=39$

2) عين عبارة V_n بدلالة n

3) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $V_0+V_1+....+V_n=65$

18 لتكن (V_n) متتالية معرفة بحدها الأول $V_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$V_{n+1}=5V_n-8n-2$

ولتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_n=V_n-2n-1$

1) أ) بين أن (U_n) متتالية هندسية ، ب) أحسب U_n بدلالة n

ج) استنتج عبارة V_n بدلالة n

2) أحسب المجموعين $S_1=U_0+U_1+.....+U_n$ ، $S_2=V_0+V_1+.....+V_n$

19 عين ثلاث أعداد حقيقية : z , y , x بحيث هذا الترتيب تشكل متتالية هندسية و z , x , y بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و $z+y+x=\alpha$ ، $\alpha\in IR^*$

20 لتكن (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $V_{n+1}=\alpha V_n+3$

حيث : $\alpha\in IR^*$

1) عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية حسابية

2) نفرض أن : $\alpha\neq1$ ، ولنعتبر المتتالية (U_n) معرفة بـ : $U_n=V_n-\beta$ ، $\beta\in IR^*$

أ) عين العلاقة التي تربط بين α و β حتى تكون (U_n) متتالية هندسية

ب) عين عبارة U_n و V_n بدلالة n , α , β

21 لتكن (V_n) متتالية معرفة بحدها الأول V_0 والعلاقة التراجعية ، $V_{n+1}=\frac{1}{3}V_n+2$

1) ما هي قيمة V_0 الممكنة حتى تكون المتتالية (V_n) ثابتة .

2) نفرض أن ، $V_0\neq 3$ ، ونعرف المتتالية (U_n) كما يلي ، $U_n=V_n+\alpha$ ، $\alpha\in IR^*$

بين أنه توجد قيمة لـ α بحيث، من أجلها تكون (U_n) متتالية هندسية

ب) أعط عبارة V_n بدلالة V_0 و n ثم استنتج أن : (V_n) متتالية متقاربة

ج) أحسب نهاية V_n لما $n\to+\infty$

---

22 لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي :

$V_0=1$ و $V_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}=\frac{3}{2}V_{n+1}-\frac{1}{2}V_n$

ولنعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $U_n=V_{n+1}-V_n$

1) برهن أن ، (U_n) متتالية هندسية

2) أحسب U_n بدلالة n ثم استنتج عبارة V_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n بحيث: $|V_n-3|\rangle 10^{-5}$

---

23 لتكن المتتاليتان $(U_n)_{n\in N}$ و $(V_n)_{n\in N}$

المعرفتين كما يلي : $U_{n+1}=\frac{1}{4}(3V_n+\alpha)$ ، $\alpha\in IR^*$

1) برهن أنه إذا كانت (U_n) متتالية هندسية أساسها $r=\frac{1}{4}$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}=\frac{1}{4}(V_n-\alpha)$

2) أحسب U_n بدلالة n و U_0 ثم أحسب V_n بدلالة : n ، U_0 ، α

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

4) أ) أحسب S_n بدلالة n و U_0 حيث : $S_n=U_0+U_1+....U_n$

ب) أحسب S'_n بدلالة n ، U_0 ، α حيث: $S'_n=V_0+V_1+.....+V_n$

---

24 عين ثلاث أعداد حقيقية غير معدومة a ، b ، c بحيث : a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و b ، a ، c بهذا الترتيب تشكل متتالية هندسية والعدد $(a+b+c)$ قاسم أولي للعدد 1998.

---

25 لتكن $(V_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية

1) عين ، V_1 ، V_2 ، V_3 ، V_4 ، V_5 بحيث : $V_1\times V_4=4$ و $V_2+V_3+V_4=7$

2) أ) أحسب S_n بدلالة n حيث ، $S_n=V_1+V_2+.....+V_n$

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to+a} S_n$

---

26 (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول ، $U_0=3$ وبالعبارة : $3U_{n+1}-2U_n=U_n+\frac{9}{2}$

1) أثبت أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r ثم أحسب : U_1 ، U_2 ، U_3

2) أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n ثم أحسب الحد التاسع عشر

3) أحسب $S=U_0+U_1+..U_{19}$

---

27 (U_n) متتالية معرفة بالعلاقة ، $U_n=\sqrt{3n}-5$

1) أحسب U_0 ، U_1 ، U_2

أثبت أن (U_n) متزايدة تماما على N

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=U^2_n+10U_n+11$

أحسب V_0 ، V_1

ب) أحسب V_n بدلالة n ثم بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها

ج) أحسب المجموع : $S_n=V_0+V_1+....+V_n$ بدلالة n

د) هل العدد 115 هو حد من حدود المتتالية (V_n)

---

28 لتكن (V_n) و (U_n) متتاليتان معرفتان على N كما يلي:

$V_0=3$ و $V_{n+1}=V_n+6n+3$ ، $U_n=V_n-3n^2$

1) أحسب V_1 ، V_2 ثم استنتج أن (V_n) لا هي حسابية ولا هي هندسية

2) بين أن المتتالية (V_n) متزايدة تماما على N

3) أثبت أن المتتالية (U_n) حسابية ثم عين أساسها وحدها الأول

4) عين عبارة U_n ثم V_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n+1}$

ثم عين قيمة n حتى تكون : $S_n=-88$

---

29 لتكن (w_n) ، (U_n) ، (V_n) ثلاث متتاليات معرفة بـ: $U_0=12$ و $U_{n+1}=\frac{V_n+3U_n}{4}$

$V_0=1$ و $V_{n+1}=\frac{V_n+2U_n}{3}$ و $w_n=U_n-V_n$

2) أحسب : w_0 ، w_1 ، w_2

2) بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

3) أ) أكتب w_n بدلالة n

ب) أحسب الحد الثالث عشر

4) أحسب : $S_n=w_0+w_1+.....+w_n$ بدلالة n

5) بين أن : $U_{n+1}-U_n=-\frac{1}{4}w_n$ و $V_{n+1}-V_n=\frac{2}{3}w_n$

ثم استنتج أن (U_n) متتالية متناقصة تماما على N و (V_n) متزايدة تماما على N

6) باستعمال السؤال 4) و 5) ، أوجد عبارة U_n و V_n بدلالة n

7) لتكن (k_n) متتالية معرفة كما يلي : $k_n=8U_n+3V_n$ اثبت أن (k_n) متتالية ثابتة

---

30 لتكن (U_n) متتالية حسابية اساسها r وحدها الأول U_0

1) عين الأساس r والحد الأول U_0 إذا علمت أن :

$U_{15}=52$ و $U_0+U_1+.....+U_{15}=472$

2) عين عبارة الحد العام U_n بدلالة n

3) احسب المجموع : $S=U_0+U_1+.....+U_{100}$

---

31 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي : $U_n=\frac{1}{2+n}-\frac{1}{1+n}$

1) احسب : U_0 ، U_1 ، U_2

2) بين أن (U_n) متتالية متزايدة تماما

3) احسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة

---

32 لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $V_{n+1}=3V_n+2$

1) عين قيمة V_0 حتى تكون (V_n) متتالية ثابتة

2) نفرض أن $V_0\neq-1$ ولتكن المتتالية (U_n) المعرفة على n كما يلي $U_n=V_{n+1}-V_n$

أ) اثبت أن (U_n) متتالية هندسية يطلب حساب حدها الأول U_0 وأساسها

ب) عين U_n بدلالة n و V_0 ، V_1

ج) احسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة n و V_0 ، V_1.

---

33 (U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0=3$ و $U_{n+1}=\frac{3}{\sqrt{5}}U_n$

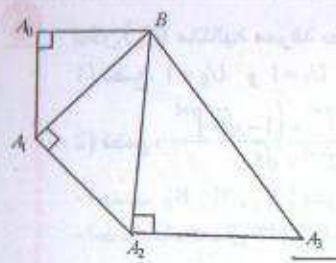
أ) احسب المجموع : $S_n=U_0+U_1+....+U_n$ بدلالة n

ب) هل المتتالية (S_n) لها نهاية .

---

34 A_0 و B نقطتين من المستوي بحيث : $A_0B=1$

كل المثلثات BA_nA_{n+1} قائمة في النقطة A_n ومتقايسة الساقين . كما هو موضح في الشكل المجاور .



نضع : $U_n=A_nA_{n+1}$ و $V_n=BA_n$

1) أ) احسب U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3

ب) بين أن هذه الحدود لمتتالية هندسية

2) أ) احسب V_0 ، V_1 ، V_2 ، V_3

ب)) بين أن هذه الحدود لمتتالية هندسية

ج) أين تقع النقطة A_4 ثم احسب U_4 و V_4

---

35 لتكن (C_0) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $15\,cm$

- أرسم الدائرة (C_1) مركزها O ونصف قطرها $\frac{1}{4}\times15$ ثم أرسم الدائرة (C_2) مركزها O ونصف قطرها $\left(\frac{1}{4}\right)^2\times15$ وهكذا ننشئ الدوائر الأخرى .

1) أ) نرمز بـ : P_n إلى محيط الدائرة (C_n)

بين أن المتتالية (P_n) هندسية يطلب تعيينها

ب) ما هو محيط كل الدوائر المرسومة (حتى (C_n))

هل هذا المحيط له نهاية لما n يؤول إلى $(+\infty)$

2) نرمز بـ : A_n إلى مساحة الدائرة (C_n)

أ) بين أن المتتالية (A_n) هندسية يطلب تعيينها .

ب) ما هي نهاية مجموع مساحات الدوائر (حتى (C_n)) هل هذا المجموع له نهاية ؟

---

36 شخص له رأس مال يقدر بـ : $20000\ DA$ أراد أن يوضع هذا المال في بنك فعرضت عليه بنكين لوضع هذا المال

- البنك الأول : يوضع هذا المال بفائدة ثابتة 5% في كل سنة من راس المال

- البنك الثاني : يوضع هذا المال بفائدة 2% لكل سنة

1) ما هو البنك الأفضل لمدة 4 سنوات

2) في كل حالة أوجد عدد السنين بحيث راس المال يتضاعف

---

37 (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_1+2 و $r=-3$

1) أوجد العددين الحقيقيين P_n و q_n بحيث المعادلة $x^2+P_nx+q_n=0$ لها حلين هما U_n و U_{n+1}

2) نرمز بـ : (V_n) إلى المتتالية ذات الحد العام : $V_n=\frac{P_n}{q_n}$

- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

38 لتكن (U_n) متتالية معرفة كما يلي : $U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ من أجل كل $n\in N$

1) نضع: $U_0=1$ و $U_1=1$ احسب 21 حد الأولى لهذه المتتالية

2) نضع : $W_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\times\sqrt{5}}$

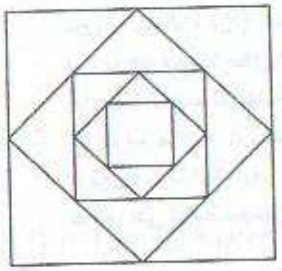
- احسب W_0 , W_1 , W_2 (بدون الآلة الحاسبة)

- احسب باستعمال الآلة الحاسبة الحد السابع عشر ماذا تستنتج ؟

3) نضع : $V_n=\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ وليكن $\vartheta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- أحسب 20 حدا الأولى من المتتالية (V_n) ثم قارنهم مع العدد ϑ ماذا تستنتج فيما يخص المتتالية (V_n) .

39 $ABCD$ مربع طول ضلعه 1 نرسم مربع آخر بحيث رؤوسه منتصفات أضلاع $ABCD$ وهكذا نرسم المربعات الأخرى انظر الشكل .



نرمز بـ : S_n إلى مساحة المربع المحصل عليه في المرحلة n

1) أحسب S_1 و S_2 و S_3

ب) أحسب S_{n+1} بدلالة S_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to S_n}$

2) أحسب $V_n=S_1+S_2+.....+S_n$ بدلالة n

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

3) نرمز بـ إلى d_n إلى مساحة المثلثات الناتجة في المرحلة n

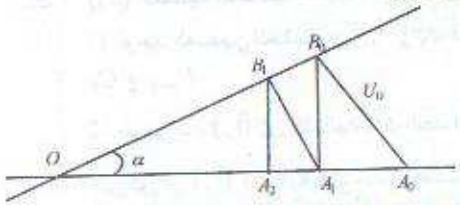
أ) أحسب d_1 و d_2 ثم أوجد علاقة بين d_n و d_{n+1}

ب) أحسب المجموع $L_n=d_1+d_2+....+d_n$ وماذا يمثل : $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$

40 $[ox)$ و $[oy)$ نصفي مستقيمين يصنعان زاوية هندسية حادة قيسها α

A_0 نقطة من $[ox)$ و B_0 مسقطها العمودي على $[oy)$ و A_1 مسقط B_0 على $[ox)$

B_1 مسقط A_1 على $[oy)$ وهكذا بقية النقاط



1) بين أن $A_{n+1}B_n=(\cos\alpha)(A_nB_n)$

$A_{n+1}B_{n+1}=(\cos\alpha)(A_{n+1}B_n)$

2) نضع : $U_n=A_nB_n$

أ) بين أن : $U_0=5\cos\alpha$

ب) عبر عن : U_{n+1} بدلالة U_n

ج) ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ثم أوجد عبارة U_n بدلالة n و α

د) أحسب المجموع $S_n=U_0+U_1+...+U_n$ احسب : $\lim S_n$.

الدرس : 7

الاحصاء

1 . الأرباع

نعتبر سلسلة إحصائية ذات متغير كمي (نمط كمي) .

الأرباع هي الأعداد التي تقسم السلسلة الإحصائية إلى أربعة أجزاء تحتوي كل منها على نفس عدد الحدود أي 25 % من التكرار الكلي .

مثال

إليك السلسلة الإحصائية التالية :

قيم النمط	2	3	5	11
التكرار	5	5	5	6

1) أ) رتب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا

ب) أحسب الوسيط لهذه السلسلة الإحصائية

ج) أحسب قيمة الوسط الحسابي لهذه السلسلة

2) أ) أوجد أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 25% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر منه أو تساويه

ب) أوجد أصغر قيمة للنمط بحيث على الأقل 75% من حدود السلسلة تملك قيما أصغر منه أو تساويه ، ماذا تستنتج ؟