مختصر للطرق المتبعة للإجابة عن أسئلة الدوال 3 ثانوي

في كلّ ما يلي : يرمز D_f إلى مجموعة تعريف دالة f ،أمّا C_f فيرمز إلى منحنيها في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ملاحظة: إذا كتبنا ∞ فنقصد $+\infty$ أو $-\infty$.

1)المستقيم المقارب العمودي:

إذا كان $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$ فإنّ تفسيرها البياني(أو الهندسي) هو: المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا عموديًا معادلته $\boxed{x = a}$.

2)المستقيم المقارب الأفقي:

إذا كان $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = b}$ فإنّ تفسيرها البياني(أو الهندسي) هو: C_f يقبل مستقيما مقاربا أفقيًا معادلته $\boxed{y = b}$ ،وذلك بجوار ∞.

3)المستقيم المقارب المائل:

ا-لإثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ C_f بجوار ∞ ، يكفي أنْ نثبت أنّ : $\boxed{\lim_{x \to \infty}(f(x) - (ax + b)) = 0}$.

ب- إذا لم تُعطَ لنا معادلة المستقيم المقارب المائل، و طلب منّا تعيينه، ننظر إلى عبارة $f(x)$ ، فإنْ كانت من الشكل التالي:

$$f(x) = ax + b + \varphi(x) \quad \text{مع} \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$$

فالمستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C_f عند ∞.

إذا لم تتوفر الملاحظة السابقة، نعيّن المستقيم المقارب المائل بالطريقة التالية: نحسب $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ ، فنجد عددا حقيقيًا a غيرمعدوم، ثم نحسب $\lim_{x \to \infty}\left[f(x) - ax\right]$ ، فنجد عددا حقيقيًا b و تكون معادلة المستقيم المقارب المائل هي: $y = ax + b$.

4)الدالة الزوجيّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f زوجيّة، نبرهن،من أجل كل x من D_f ، أنّ: $\boxed{f(-x) = f(x)}$

ملاحظة هامّة: إذا كانت f زوجيّة، فيُمْكن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

5)الدالة الفرديّة:

f دالة حيث D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر. لإثبات أنّ f فرديّة، نبرهن،من أجل كل x من D_f ، أنّ: $f(-x) = -f(x)$ أو $\boxed{f(-x) + f(x) = 0}$.

ملاحظة هامّة: إذا كانت f فرديّة، فيُمْكن إنشاء القسم من C_f على الجزء الموجب (أو السالب) من D_f ، ثم نُكمل C_f بالتناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

6)الدالة الدوريّة:

f دالة، و p عدد حقيقي غير معدوم، بحيث من أجل كل x من D_f ، $x + p$ ينتمي إلى D_f. لإثبات أنّ p دورٌ للدالة f نبرهن، من أجل كل x من D_f ، أنّ : $\boxed{f(x + p) = f(x)}$.

ملاحظة1 : الدّوْر P للدالة f هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يحقق العلاقة السابقة .

ملاحظة2 : إذا كانت f دوريّة، فيُمْكن الاكتفاء بإنشاء جزء من C_f على مجال طوله الدور P.

7)مركز التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.

لإثبات أنّ النقطة $\omega(\alpha, \beta)$ مركز تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :

$\boxed{f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta}$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$.

8)محور التناظر:

α عدد حقيقي و f دالة، حيث D_f متناظرة بالنسبة لـ α.

لإثبات أنّ المستقيم $(D): x = \alpha$ محور تناظر للمنحني C_f ، يكفي أنْ نثبت، من أجل كل x من D_f ، أنّ :

$\boxed{f(2\alpha - x) = f(x)}$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$.

9)نقطة الانعطاف:

بصفة عامّة، لتعيين نقطة الانعطاف، نقوم بما يلي:

نحسب المشتق الثاني $f''(x)$ ، و ندرس إشارته ، فإذا وجدنا $f''(x)$ انعدم عند قيمة x_0 من D_f ، مُغيّراً إشارته، تكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة خاصّة: في بعض الحالات، يمكن تعيين نقطة الانعطاف دون اللجوء إلى المشتق الثاني $f''(x)$ ، وذلك إذا انعدم المشتق الأول $f'(x)$ عند قيمة x_0 من D_f ، ولمْ يغيّر إشارته ، فتكون النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لـ C_f.

حالة أخرى: إذا كانت $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ ؛ فالتفسير الهندسي هنا هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.(فائدة: يكون المماس عند هذه النقطة موازيا لمحور التراتيب).

ملاحظة: في بعض الحالات، يفرضُ علينا سياق التمرين أن نعيّن نقطة الانعطاف بالكيفيّة التالية :

يُطلب منّا أنْ ندرس وضعيّة المنحني C_f بالنسبة إلى المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 ، فإذا وجدنا أنّ C_f غيّر وضعيّته بالنسبة إلى المماس(قبْل و بعْد نقطة التماس) نستنتج أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف لـ C_f.

10)تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل:

لتعيين نقط تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل، نحلّ المعادلة $\boxed{f(x) = 0}$ حيث $x \in D_f$.(طبْعا، إذا كانت قابلة للحل !)

11)تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب:

f دالة حيث $0 \in D_f$ لتعيين نقطة تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب، نعوّض x بالصفر في عبارة $f(x)$. **(يتبع...)**

12)المماس:

هناك ستّ صيَغ- تقريبا- لطرح سؤال المماس، لكنْ تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أيٍّ منها كما سنرى.

1/**الصّيغة الأولى**(العاديّة) : اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

الإجابة: نكتب الدستور: $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نُعوّض x_0 بقيمتها المعطاة.

2/**الصّيغة الثّانية:** اكتب معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الترتيب y_0.

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f(x_0) = y_0}$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

3/**الصّيغة الثّالثة:** بيّن أنه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f ميْله (أوْ معامل توجيهه) يساوي a .

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{f'(x_0) = a}$ ، وعند تعيين قيمة(أوْ قيم) x_0 نكون قد عُدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.

4/**الصّيغة الرابعة:** بيّن أنه يوجد مماس- أوْ أكثر- للمنحني C_f يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{f'(x_0) = a}$ (عُدنا إلى الحالة الثانية).

5/**الصّيغة الخامسة:**بيّن أنه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $\boxed{a.f'(x_0) = -1}$.

6/**الصّيغة السادسة:**بيّن أنه يوجد مماس-أوْ أكثر- للمنحني C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيّيْ (α, β).

الإجابة: نحلّ المعادلة $\boxed{\beta = f'(x_0).(\alpha - x_0) + f(x_0)}$

عند تعيين قيمة (أوْ قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى.

13)النّقطة الزّاويّة: إذا كان:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 .$$

حيث l_1 و l_2 عددان حقيقيّان $(l_1 \neq l_2)$ ، فالتفسير الهندسي هو أنّ النقطة ذات الفاصلة x_0 : نقطة زاويّة للمنحني C_f.

ملاحظة1: قد تُكتب النهايتان السابقتان على الشّكل التالي :

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l_1 \quad \text{و} \quad \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l_2$$

ملاحظة2: معادلتا **نصفيْ المماسيْن** عند النقطة الزاويّة هما:

$$\begin{cases} y = f_d'(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = f_g'(x_0).(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

عِلما أنّ : $f_g'(x_0) = l_1$ و $f_d'(x_0) = l_2$.

تنبيه: تبقى النقطة الزاويّة موجودة حتى لو كانت إحدى النهايتيْن السابقتيْن عددا حقيقيّا l و الأخرى $+\infty$ أو $-\infty$.

14)استنتاج تمثيل بياني من آخر:

بعْد إنشاء C_f، قد يُطلب منّا أنْ نستنتج منحنيا آخر C_h - مثلا- لدالة h ؛ و يكون الاستنتاج حسب صيغة السؤال كما سيأتي :

1/**الصّيغة الأولى:** استنتج C_h منحني h حيث: $h(x) = |f(x)|$

الإجابة: 1)على المجالات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ (أي يكون فيها C_f على محور الفواصل أو فوقه)

نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2) على المجالات التي تكون فيها $f(x) < 0$ (أي يكون فيها C_f تحت محور الفواصل)

نحصل على $h(x) = -f(x)$ ، ومنه يكون C_h نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

2/**الصّيغة الثّانية:** استنتج C_h منحني h حيث: $h(x) = f(|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يُطلب منا أوّلا أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x \geq 0$ و $x \in D_f$ (الجزء الموجب من D_f)

نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

3/**الصّيغة الثّالثة:** استنتج C_h منحني h حيث: $h(x) = f(-|x|)$

ملاحظة: غالبا ما يُطلب منا أوّلا أنْ نثبت أنّ h زوجيّة.

الإجابة:1)إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_f$ (الجزء السالب من D_f)

نحصل على $h(x) = f(x)$ ، ومنه C_h ينطبق على C_f.

2)نكمل الجزء المتبقي من C_h بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ h زوجيّة.

4/**الصّيغة الرابعة:** استنتج C_h منحني h حيث: $h(x) = -f(x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

5/**الصّيغة الخامسة:**استنتج C_h منحني h حيث: $h(x) = f(-x)$

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى محور التراتيب.

6/**الصّيغة السادسة:** استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x) = -f(-x)$.

الإجابة: C_h هو نظير C_f بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

7/**الصّيغة السابعة:** استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x) = f(x + a) + b$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيّان

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix} -a \\ +b \end{pmatrix}$.

8/**الصّيغة الثّامنة:** استنتج C_h منحني الدالة h التي تحقق : $h(x) = k.f(x)$ ؛ $k \in \mathbb{R}^*$.

الإجابة: نستنتج C_h من C_f بالتآلف $A(x'x, y'y, k)$.

ملاحظة: هذه أبرز الحالات ، وغيرها شبيه بها أو يعود إليها.

المستوى:3علوم تجريبية   مُلخّص على الدالة اللوغاريتميّة (بالتطبيقات)   2012/2011

I.نتائج ، خواص و تطبيقات:

1.نتائج:

في كلّ ما يلي ، يرمز a إلى عدد حقيقي:

1) $\ln a$ مُعرّف يعني $(a>0)$. 2) $(\ln a>0)$ يعني $(a>1)$

3) $(\ln a=0)$ يعني $(a=1)$. 4) $(\ln a<0)$ يعني $(0<a<1)$

5) $\ln e^a=a$. 6) $e^{\ln a}=a$ ؛ $a>0$. 7) $\ln 1=0$. 8) $\ln e=1$

2.خواص:

في كلّ ما يلي ، يرمز a و b إلى عددين حقيقيّين موجبيْن تماما:

1) $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$. 2) $\ln a>\ln b$ يعني $a>b$

3) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. 4) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

5) $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$. 6) $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$ ؛ $n\in\mathbb{Q}$.

3.تطبيقات:

ت1: اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $e^{\ln 5}+e^{-\ln 3}$ 2) $e^{1+\ln 2}$ 3) $e^{-2\ln 3}$ 4) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$، المعادلة $2\ln x=\ln(x-4)+\ln(2x)$.

ت3: حل، في $\mathbb{R}$، المتراجحة $\ln x+\ln(4-x)\le\ln(2x-1)+\ln 3$

ت4: حل، في $\mathbb{R}$، المعادلة $(\ln x)^2+2\ln x-3=0$.

II.دراسة إشارة بعض العبارات:

في كلّ ما يلي ، ترمز a، b، c، α، β إلى أعداد حقيقيّة.

1.دراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ حيث $a.\alpha\ne0$:

لدراسة إشارة العبارة $a.\ln(\alpha x+\beta)+b$ على مجموعة تعريفها، نبحث عن القيمة التي تعدمها ولتكن x_0 ،ثمّ نُحدّد إشارتها كما في الجدول التالي:

x		x_0	
$a.\ln(\alpha x+\beta)+b$	عكس إشارة $a\alpha$	0	نفس إشارة $a\alpha$

تطبيق:

ادرس إشارة كلّ من 1) $\ln(x+2)-1$ ؛ 2) $\ln(-x+1)+2$.

2.دراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b\ln x+c$ حيث $a.b.c\ne0$:

لدراسة إشارة العبارة $a(\ln x)^2+b\ln x+c$ على $\mathbb{R}^{+*}$ ، نقوم بما يلي:

نضع $\ln x=X$ ، فتصبح العبارة $a.X^2+b.X+c$ ، ونعيّن قيم X التي تعدمها- إنْ وُجدت- ثمّ نستنتج قيم x التي تعدم العبارة ، و في الأخير، نشكل جدولا ندرس فيه إشارة العبارة،مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

تطبيقات:

ت1: ادرس إشارة : 1) $(\ln x)^2+2\ln x-3$ 2) $(\ln x)^2-\ln x+1$

ت2: حل، في $\mathbb{R}$، المتراجحة $(\ln x)^2+2\ln x-3>0$.

III.تحويل بعض عبارات الدوال:

1) $\ln\left(u(x)^n\right)=n.\ln(u(x))$ ، إذا كان n فرديًا.

2) $\ln\left(u(x)^n\right)=n.\ln|u(x)|$ ، إذا كان n زوجيًا.

IV.حساب النهايات :

1.النهايات الشهيرة:

1) $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}\ln\alpha=+\infty}$

2) $\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha}=0}$ ← $\left(\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{\alpha^n}=0\right.$ ؛ $\left.n>0\right)$

3) $\boxed{\lim_{\alpha\overset{>}{\to}0}\ln\alpha=-\infty}$ ↓← $\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha}{\ln\alpha}=+\infty$

4) $\boxed{\lim_{\alpha\overset{>}{\to}0}\alpha\ln\alpha=0}$ ← $\left(\lim_{\alpha\overset{>}{\to}0}\alpha^n\ln\alpha=0\right.$ ؛ $\left.n>0\right)$

5) $\boxed{\lim_{\alpha\to0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1}$ ← $\left(\lim_{\alpha\to1}\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}=1\right)$

2.تطبيقات على النهايات:

ت1: ادرس ، في كل حالة ، نهاية الدالة f عند $+\infty$:

1. $f(x)=x+1-\ln(x-2)$ 2. $f(x)=\frac{\ln(x-1)}{x+3}$

3. $f(x)=x+1-\ln(x-2)^2$ 4. $f(x)=\frac{1+2\ln x}{1-3\ln x}$

ت2: احسب ، في كل حالة ، النهاية :

1. $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(-x^2+3x+1\right)\ln x$ 2. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

3. $\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 4. $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

5. $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$ 6. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$

7. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)}{x}$ 8. $\lim_{x\to+\infty}\ln|-4x+2|-\ln|2x-1|$

V.قانونا الاشتقاق:

*إذا كانت u دالة موجبة تماما و قابلة للاشتقاق على مجال I، فإنّ: $\boxed{\left(\ln[u(x)]\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$

*إذا كانت u دالة لا تنعدم و تقبل الاشتقاق على مجال I، فإنّ: $\boxed{\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$

تطبيقات:

ت1: f دالة معرّفة على $D_f=]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت2: f دالة معرّفة على $D_f=]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-3$ ؛ ادرس تغيّرات f .

ت3: f دالة معرّفة على $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$ بـ: $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$ ؛ ادرس تغيّرات f .

دليل مختصر في توظيف الاعداد المركبة للاجابة عن اسءلة الهندسة3 ثانوي

في كل ما يلي، نفرض أنّ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. ترمز z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D إلى لواحق النقط A ، B ، C ، D على الترتيب.

I. معلومات أوّليّة:

تمهيد:

1. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هي z_A. 2. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هي z_B.
3. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

التفسير الهندسي للطويلة:

1. $|z_A| = OA$ ؛ $|z_B| = OB$ ؛ $|z_B - z_A| = AB$.
2. $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{OA}{OB}$ ؛ حيث $B \neq O$.
3. $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ ؛ حيث $A \neq B$.

تعريف العمدة و تفسيرها الهندسي:

1. $\arg(z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ ؛ حيث $z_A \neq 0$.
2. $\arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})$ ؛ حيث $A \neq B$.
3. $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ؛ حيث $A \neq O$ و $B \neq O$.
4. $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ؛ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$.

II. توظيف الأعداد المركّبة في حلّ مسائل الهندسة:

تداور النقط:

1. إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ ، نستنتج أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر r.
2. إذا كان $|z_A - z_\omega| = |z_B - z_\omega| = |z_C - z_\omega| = |z_D - z_\omega| = r$ نستنتج أنّ النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω و نصف القطر r.

استقاميّة النقط:

1. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ؛ حيث $A \neq B$
نستنتج أنّ النقط A ، B ، C على استقاميّة.
2. إذا كان : $\frac{z_B}{z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$ ؛ حيث $A \neq O$
نستنتج أنّ النقط O ، A ، B ، على استقاميّة.

توازي شعاعيْن أو مستقيميْن:

☑ إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k \quad ; k \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$ أو $(BD)//(AC)$.
التعليل: لأنّ العلاقة السابقة تكافئ $z_D - z_B = k(z_C - z_A)$ و هي تعني أنّ $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$.

تعامد شعاعيْن أو مستقيميْن:

1. إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy \;; y \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ أو $(BD) \perp (AC)$.
التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg(iy)$
و هذا يعني $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
2. إذا كان: $\frac{z_B}{z_A} = iy \quad ; y \in \mathbb{R}^*$ ؛ حيث $A \neq O$ و $B \neq O$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ أو $(OA) \perp (OB)$.
التعليل: مثل التعليل السابق.

طبيعة مثلث:

1. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ ؛ حيث $A \neq C$ و $A \neq B$
فإنّ المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقيْن.
التعليل:لأنّ $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |\pm i|$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(\pm i)$
أيْ : $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)
2. إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy \;; y \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$ ؛ $A \neq C$ و $A \neq B$
فإنّ المثلث ABC قائم في A.
التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(iy)$
أيْ : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (التفسير الهندسي للعمدة).
3. إذا كان : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ؛ حيث $A \neq C$ و $A \neq B$
فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع .
التعليل:لأنّ $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
أيْ : $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)
4. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$
فإنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع .
التعليل: لأنّ $AB = AC = BC$ (التفسير الهندسي للطويلة).
5. إذا كان : $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
فإنّ المثلث ABC متساوي الساقيْن.
التعليل: لأنّ $AB = AC$ (التفسير الهندسي للطويلة).