# الوحدة 02: تطوّر جملة ميكانيكية

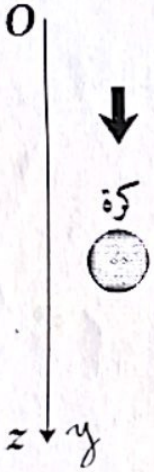
## الدّرس 04: السّقوط الشّاقولي لجسم صلب في الهواء* (*وفقط لا ماء ولا زيت ولا غيره).

• عند نهاية الدّرس لابدّ أن تستوعب ما يلي:

- ☑ دراسة حركة السّقوط الشّاقولي لجسم صلب في الهواء.
- ☑ دراسة حركة السّقوط الحرّ لجسم صلب في الفراغ.
- ☑ كتابة المعادلة التّفاضلية التي تحقّقها السّرعة.
- ☑ استغلال البيانات: السّرعة $v = f(t)$ والتّسارع $a = f(t)$.

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

### I/ ما هو السّقوط الشّاقولي؟

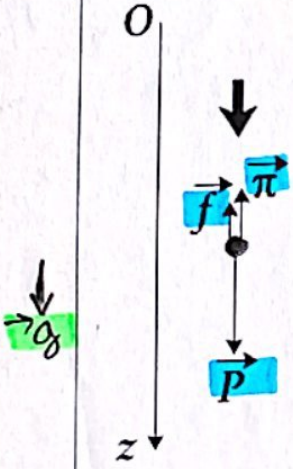



• هو سقوط الجسم شاقوليّا دون سرعة ابتدائية $v_0 = 0$ نحو الأسفل، حيث قوّة الاحتكاك $\vec{f}$ مع الهواء غير مهملة. (نستعين في الدّراسة بالمرجع العطالي السّطحي الأرضي).

• لكي يسقُط الجسم سقوطا شاقوليّا، لابدّ أن يكون:

- متجانس.
- منتظم الشّكل.
- انسيابي.

### 1- ما هي القوى المؤثّرة على الجسم أثناء السّقوط الشّاقولي؟




| القوّة | قوّة الثّقل $\vec{P}$ | قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | قوّة الاحتكاك مع الهواء $\vec{f}$ |
|---|---|---|---|
| عبارتها الشعاعية | $\vec{P} = m.\vec{g}$ | $\vec{\pi} = -\rho_{هواء}.V_{جسم}.\vec{g}$ | $\vec{f} = -k.\vec{v}^{n}$ |
| شدّتها | $P = m.g$ ($m$: $kg$) | $\pi = \rho_{هواء}.V_{جسم}.g$ ($\rho$: $kg/m^3$، $V$: $m^3$) | $f = k.v^{n}$ ($v$: $m/s$) |

$\|\vec{P}\| = m\|\vec{g}\|$

(N) ← نيوتن

- $n = 1$ ← سُرعات صغيرة
- $n = 2$ ← سُرعات كبيرة

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين



k: ثابت الاحتكاك (مع الهواء).

$g = 9,8\ N/kg \approx 10\ N/kg$

## 2- متى يمكن إهمال قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$؟

• تسقُط كرة كتلتها $m = 6 \times 10^{-3} kg$ وحجمُها $V = 2,57 \times 10^{-6} m^3$ سقوطا شاقوليّا في الهواء.

يُعطى: $\rho_{هواء} = 1,3 kg.m^{-3}$

1- أُحسب شدّة قوّة الثّقل $\vec{P}$.

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

$P = m.g = 6 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow P = 6 \times 10^{-2} N$

2- أُحسب شدّة قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.

$\pi = \rho_{هواء} . V_{كرة} . g = 1,3 \times 2,57 \times 10^{-6} \times 10 \Rightarrow \pi = 3,34 \times 10^{-5} N$

3- أُحسب النّسبة $\frac{P}{\pi}$، هل يُمكن إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ أمام ثقل الكرة $\vec{P}$؟

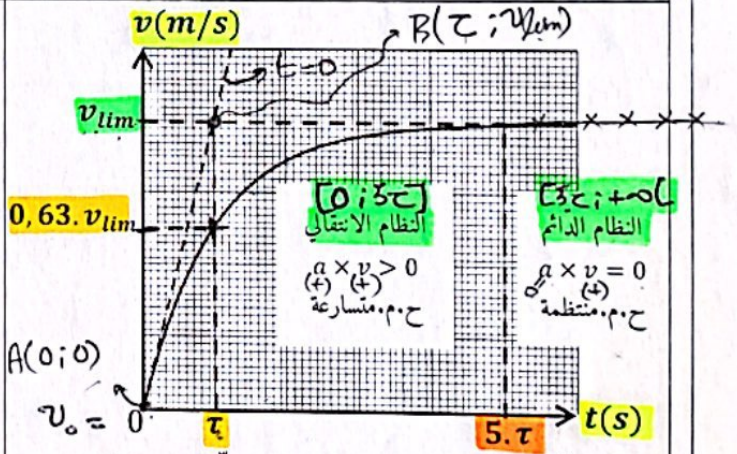
$\frac{P}{\pi} = \frac{6 \times 10^{-2}}{3,34 \times 10^{-5}} \Rightarrow \frac{P}{\pi} = 1796,41$ $\left(\frac{P}{\pi} > 50\right)$

• شدّة قوّة الثقل $\vec{P}$ أكبر بـ 1796,41 مرّة من شدّة قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.

• وعليه: يُمكن إهمال قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ أمام ثقل الكرة $\vec{P}$.

## 3- تطوّر بيان السّرعة $v = f(t)$ والتّسارع $a = f(t)$ خلال السّقوط الشّاقولي:

### بيان السّرعة $v = f(t)$




• ماذا أستخرج كمعطيات من بيان السّرعة $v = f(t)$؟

◄ السّرعة الحديّة $v_{lim}$.

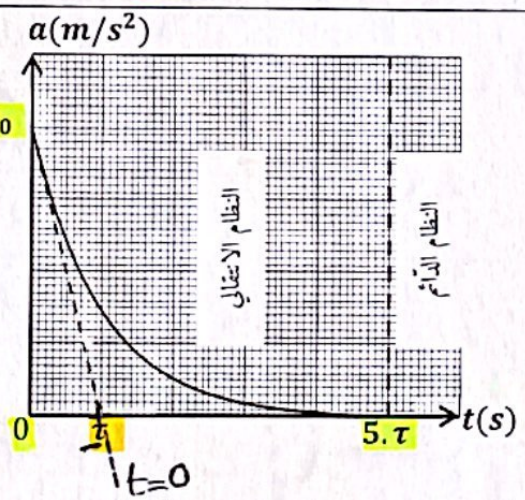
◄ ثابت الزمن $\tau$. المماس $t=0$ . $0,63.v_{lim}$

◄ التّسارع الابتدائي $a_0$ (ميل المماس عند $t = 0$)،

حيث:

$$a_0 = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v_{lim}}{\tau} \quad (m/s^2)$$

### بيان التّسارع $a = f(t)$




• ماذا أستخرج كمعطيات من بيان التّسارع $a = f(t)$؟

◄ التّسارع الابتدائي $a_0$.

◄ ثابت الزمن $\tau$. المماس $t=0$ .

◄ التّسارع النّهائي $a_{lim}$، حيث:

$$a_{lim} = \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$$



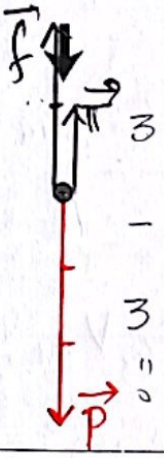
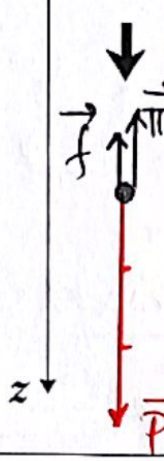
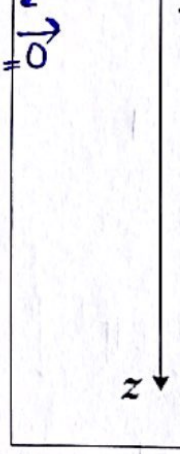
$a_{lim} = \frac{dv_{lim}}{dt} = 0$ $\quad a_0 = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}$

* $P = m \cdot g$ (ثابت)

* $\Pi = \rho_{\text{ماء}} \cdot V_{\text{جسم}} \cdot g$ (ثابت)

* $f = k \cdot v$ ($v$ متغيّر بدلالة $t$)

## 4- تمثيل القوى المؤثّرة على الجسم خلال السّقوط الشّاقولي:

| لحظة الانطلاق ($t = 0$) | النّظام الانتقالي | النّظام الدّائم |
|---|---|---|
| $v_0 = 0 \Rightarrow f = 0$ | $v \Rightarrow f = k \cdot v$ | $v_{lim} \Rightarrow f = k \cdot v_{lim}$ |
|  |  |  |



## 5- إيجاد عبارة شدّة قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ بتطبيق القانون الثّاني لنيوتن:

### لحظة الانطلاق ($t = 0$)

$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\Pi} = m \cdot \vec{a}$

بالاسقاط على المحور $(Oz)$:

$\Rightarrow P - \Pi = m \cdot a_0$

$\Rightarrow \Pi = P - m \cdot a_0$

$\Rightarrow \Pi = mg - m \cdot a_0$

$\Rightarrow \Pi = m(g - a_0)$

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

### النّظام الدّائم ($v_{lim}$)

$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

بالاسقاط على المحور $(Oz)$:

$\Rightarrow P - \Pi - f = m \cdot \vec{a}_{lim}^{\,0}$

$\Rightarrow P - \Pi - f = 0$

$\Rightarrow \Pi = P - f$

$\Rightarrow \Pi = mg - k \cdot v_{lim}$

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

## 6- إيجاد جميع المعادلات التّفاضلية الممكنة للسّرعة $v$:

بتطبيق القانون الثّاني لنيوتن، بيّن أنّ:

| حالة السّرعات | السّرعات الصّغيرة $f = k.v$ | السّرعات الكبيرة $f = k.v^2$ |
|---|---|---|
| عدم إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g.\left(1 - \frac{\rho_{الهواء}}{\rho_{الجسم}}\right) \dots (1)$ | $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g.\left(1 - \frac{\rho_{الهواء}}{\rho_{الجسم}}\right) \dots (3)$ |
| إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g \dots (2)$ | $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v^2 = g \dots (4)$ |

## 7- إيجاد جميع عبارات السّرعة الحدّية الممكنة $v_{lim}$:

| حالة السّرعات | السّرعات الصّغيرة $f = k.v$ | السّرعات الكبيرة $f = k.v^2$ |
|---|---|---|
| عدم إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $v_{lim} = \frac{m.g}{k}.\left(1 - \frac{\rho_{الهواء}}{\rho_{الجسم}}\right) \dots (1)$ | $v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}.\left(1 - \frac{\rho_{الهواء}}{\rho_{الجسم}}\right)} \dots (3)$ |
| إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $v_{lim} = \frac{m.g}{k} \dots (2)$ | $v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}} \dots (4)$ |

## 8- إيجاد جميع عبارات التّسارع الابتدائي الممكنة $a_0$:

| حالة السّرعات | السّرعات الصّغيرة $f = k.v$ | السّرعات الكبيرة $f = k.v^2$ |
|---|---|---|
| عدم إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $a_0 = g.\left(1 - \frac{\rho_{الهواء}}{\rho_{الجسم}}\right) \dots (1); (3)$ | |
| إهمال دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ | $a_0 = g \dots (2); (4)$ | |

**استنتاج:** يمكن معرفة إن كانت قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ مهملة أو غير مهملة انطلاقا من حساب التّسارع الابتدائي $a_0$.

**حيث:**

1. $a_0 = g \approx 9{,}8 m/s^2$ نعتبر دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ مهملة.
2. $a_0 \neq g \approx 9{,}8 m/s^2$ نعتبر دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ غير مهملة.

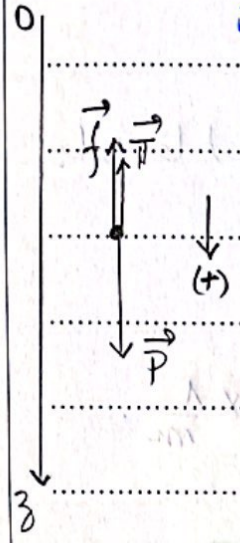
السرعة الحدية

# كتابة جميع المعادلات التفاضلية للسرعة $v$ + عبارة $v_{lim}$ + عبارة $a_0$ & التسارع الابتدائي

* ج01: المعادلة التفاضلية لـ $v$ & عبارة $\vec{\pi}$ + $f = k.v$

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

* المجموعة المدروسة: جسم.
* المرجع: خطي سطحي أرضي.
* بتطبيق القانون II لنيوتن:




$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

$$\Rightarrow P - \pi - f = m.a \quad : (Oz) \text{ بالإسقاط على}$$

$$\Rightarrow m.g - \rho_{هواء}.V_{جسم}.g - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(m\frac{dv}{dt} + kv = mg - \rho_{هواء}.V_{جسم}.g\right) \times \frac{1}{m}$$

$\rho_{جسم} = m_{جسم}/V_{جسم}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \rho_{هواء}.\frac{V_{جسم}.g}{m_{جسم}} \quad ; \quad \frac{V_{جسم}.g}{m_{جسم}} = 1/\rho_{جسم}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}.g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right) \quad \text{---(1)}$$

النظام الانتقالي: $v = v_{lim}$ ; $t = 0$

$$\Rightarrow \frac{dv_{lim}}{dt}^{0} + \frac{k}{m}v_{lim} = g\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m}v_{lim} = g\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{lim} = \frac{m.g}{k}\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right)}$$

(1)

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{k}{m}v_0^{0} = g\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_{هواء}}{\rho_{جسم}}\right)}$$

(1)

* حالة $\vec{T} + \vec{f} = -k\vec{v}$ : 02 ت

- المجموعة : جسم
- المرجع : مخبري سطحي أرضي
- بتطبيق القانون II لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على : (oz)

$$\Rightarrow P - f = ma$$

$$\Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(m\frac{dv}{dt} + kv = mg\right) \times \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \text{---- (2)}$$

النظام الدائم : $v = v_{lim}$

$$\Rightarrow \frac{dv_{lim}}{dt}^{0} + \frac{k}{m}v_{lim} = g$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m}v_{lim} = g$$

$$\Rightarrow v_{lim} = \frac{m.g}{k}$$

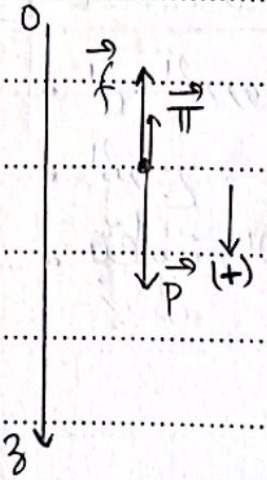
(2)

$t = 0$

$$\Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} + \frac{k}{m}v_0^{0} = g$$

$$\Rightarrow a_0 = g \quad \text{---- (2)}$$

* حالة $\vec{\Pi} + \vec{f} = k \cdot v^2$ : حيز مطلق




- الجملة المدروسة: جسم
- المرجع: سطابي سطحي أرضي
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow P - \Pi - f = m a \quad \text{بالإسقاط على } (Oz)$$

$$\Rightarrow m g - \rho_{\text{هواء}} V_{\text{جسم}} g - k v^2 = m \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left( m \frac{dv}{dt} + k v^2 = m g - \rho_{\text{هواء}} V_{\text{جسم}} g \right) \times \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g - \rho_{\text{هواء}} \frac{V_{\text{جسم}}}{m_{\text{جسم}}} g$$

$\rho_{\text{جسم}} = \frac{m_{\text{جسم}}}{V_{\text{جسم}}}$ ، $\frac{V_{\text{جسم}}}{m_{\text{جسم}}} = 1/\rho_{\text{جسم}}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} \right) \quad \cdots (3)$$

النظام الدائم: $v = v_{lim}$ ، $\frac{dv_{lim}}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} v_{lim}^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} \right)$$

$$\Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} \right)}$$

(3)

النظام الابتدائي: $t = 0$

$$\Rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} + \frac{k}{m} v_0^2 = g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} \right)$$

$$\Rightarrow a_0 = g \left( 1 - \frac{\rho_{\text{هواء}}}{\rho_{\text{جسم}}} \right)$$

(3)

## تمرين 04 : سقوط $\vec{\Pi}$ + $f=k.v^2$

- المجموعة المدروسة : جسم
- المرجع : سطحي أرضي
- بتطبيق القانون II لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

$$\Rightarrow P - f = m.a \quad : (oz) \text{ بالإسقاط على}$$

$$\Rightarrow m.g - k.v^2 = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(m.\frac{dv}{dt} + k.v^2 = m.g\right) \times \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g} \quad (4)$$

النظام الدائم ← $v = v_{lim}$

$t = 0$ ←

$$\Rightarrow \frac{dv_{lim}}{dt} + \frac{k}{m}v_{lim}^2 = g \qquad \Rightarrow \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} + \frac{k}{m}v_0^2 = g$$

($\frac{dv_{lim}}{dt} = 0$ ، $v_0 = 0$)

$$\Rightarrow \frac{k}{m}v_{lim}^2 = g \qquad \Rightarrow \boxed{a_0 = g}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{k}}}$$

(4) (4)

متى نهمل $\vec{\Pi}$ ؟

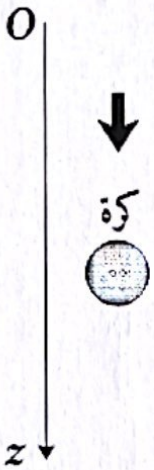
$\frac{P}{\Pi} > 50$ (1)

$a_0 = g$ (2)

$\approx 9{,}8\ m/s^2$

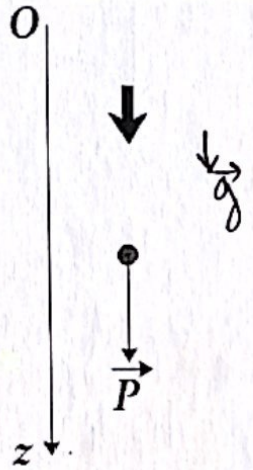
الأستاذ العلوم الفيزيائية
محمد الأمين

## II/ ما هو السّقوط الحرّ؟




• هو السّقوط الذي تهمل فيه قوّة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$ وقوّة الاحتكاك مع الهواء $\vec{f}$ حيث تؤثّر على الجسم قوّة الثّقل $\vec{P}$ فقط.

### 1-ماهي القوى المؤثّرة على الجسم أثناء السّقوط الحرّ (السّقوط في الفراغ)؟




| القوّة | قوّة الثّقل $\vec{P}$ |
|---|---|
| عبارتها الشعاعية | $\vec{P} = m.\vec{g}$ |
| شدّتها | $P = m.g$ (N ; kg) |

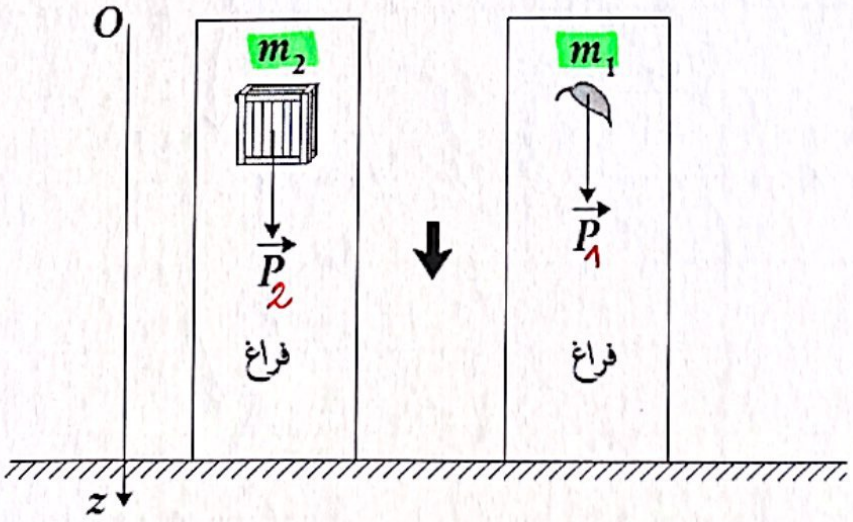
### 2- إيجاد المعادلة التّفاضلية للسّرعة $v$:

•بتطبيق القانون الثّاني لنيوتن، بيّن أنّ:

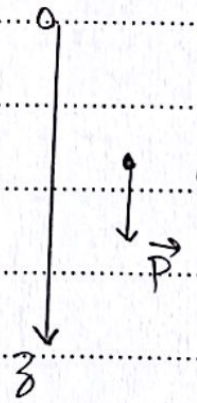
$$\frac{dv}{dt} = g \quad ...(1)$$

### 3- دراسة حركة السّقوط الحرّ لورقة الشّجرة كتلتها $m_1$ وصندوق كتلته $m_2$:

$(m_2 \gg m_1)$



## # كتابة المعادلة التفاضلية للسرعة v : (السقوط الحر)




- المجموعة : جسم
- المرجع : مخبري سطحي أرضي
- بتطبيق القانون II لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

بالإسقاط على (Oz) :

$$\Rightarrow P = m \cdot a$$

$$\Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g$$

$$a = g$$

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

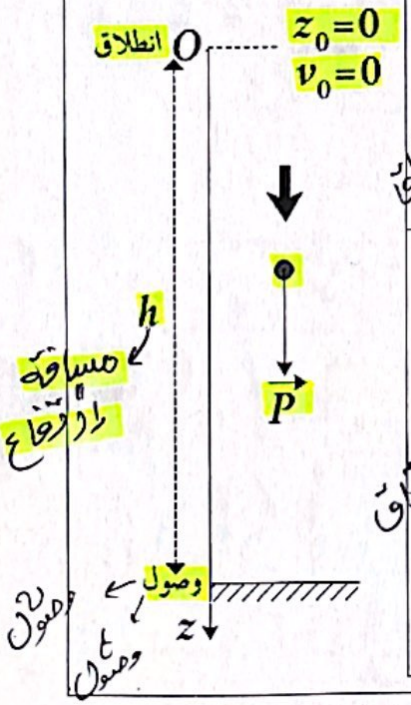
طبيعة الحركة ⇐ $a \times v$

| الجملة المدروسة | ورقة | صندوق |
|---|---|---|
| المرجع | حطالي سطحي أرضي | حطالي سطحي أرضي. |
| بتطبيق القانون الثاني لنيوتن | $\sum \vec{F}_{ext} = m_1 . \vec{a}_1$<br>$\Rightarrow \vec{P}_1 = m_1 . \vec{a}_1$<br>بالإسقاط على (OZ) :<br>$\Rightarrow P_1 = m_1 . a_1$<br>$\Rightarrow m_1 . g = m_1 . a_1$<br>$\Rightarrow a_1 = g$ | $\sum \vec{F}_{ext} = m_2 . \vec{a}_2$<br>$\Rightarrow \vec{P}_2 = m_2 . \vec{a}_2$<br>بالإسقاط على (OZ) :<br>$\Rightarrow P_2 = m_2 . a_2$<br>$\Rightarrow m_2 . g = m_2 . a_2$<br>$\Rightarrow a_2 = g$ |
| طبيعة الحركة | $a \times v > 0$ ⇐ حركة مستقيمة متسارعة بانتظام. | |
| الاستنتاج | في السقوط الحر، التسارع ثابت لا يتعلق بالكتلة $m$. | |

## 4- المعادلات (العبارات) الزمنية لعناصر الحركة أثناء السّقوط الحرّ:

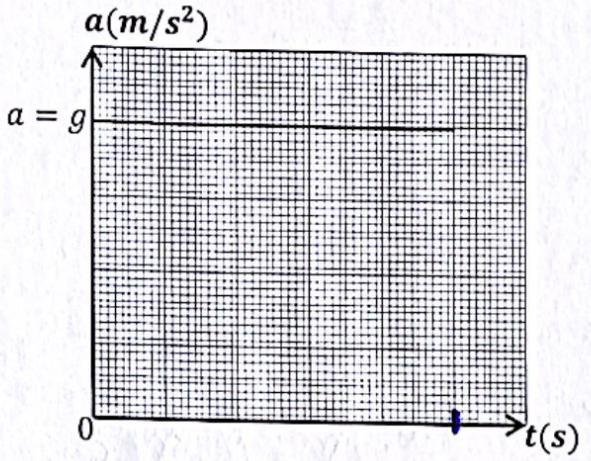
الأستاذ العلوم الفيزيائية مأمون محمد الأمين

(• حركة مستقيمة متسارعة بانتظام).




| | |
|---|---|
| $z(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0$<br>$\Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{1}{2} g . t^2}$ | المعادلة الزمنيّة للموضع |
| الاشتقاق<br>$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} g . t^2)$<br>$\Rightarrow \boxed{v(t) = g . t}$ | المعادلة الزمنيّة للسّرعة |
| الاشتقاق<br>$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$<br>$\boxed{a(t) = g}$ | المعادلة الزمنيّة للتّسارع |

## 5- تطوّر بيان السّرعة $v=f(t)$ والتّسارع $a=f(t)$ خلال السّقوط الحرّ:

| بيان السّرعة $v=f(t)$ | بيان التّسارع $a=f(t)$ |
|---|---|
| |  |
| • ماذا أستخرج كمعطيات من بيان السّرعة $v=f(t)$؟ | • ماذا أستخرج كمعطيات من بيان التّسارع $a=f(t)$؟ |
| ◄تسارع الجسم $a=g$، حيث: | ◄تسارع الجسم $a=g$. |
| • المعادلة الزمنية للسّرعة: $v(t)=\boxed{g}.t$ | |
| •العبارة البيانية: البيان عبارة عن خط مستقيم يمرّ بالمبدأ، $y=a.x \Rightarrow v(t)=\boxed{a}.t$ (ميل البيان) | |
| $a=g=\dfrac{v_{وصول}-0}{t_{وصول}-0}\approx 9{,}8\,m/s^2$ | |
| ◄ارتفاع الجسم $h$، (مساحة الحيز المحصور) | |

الأستاذ العلوم الفيزيائية
زدون محمد الأمين

## 6- ملاحظات هامّة:

| | |
|---|---|
| 1• يمكن إيجاد قيمة ارتفاع الجسم $h$: | $z(t)=\frac{1}{2}g.t^2 \Rightarrow \boxed{h=\frac{1}{2}g.t^2_{وصول}}$ |
| 2• إيجاد قيمة $v_{وصول}$: | $v(t)=g.t \Rightarrow \boxed{v_{وصول}=g.t_{وصول}}$ |
| 3• يمكن كذلك إيجاد قيمة $v_{وصول}$ بعلاقة (محذوفية الزمن): | $\boxed{v^2_{وصول}-v^2_{انطلاق}=2.g.h}$ (مع $v_{انطلاق}=0$) $\Rightarrow v^2_{وصول}=2.g.h$ $\Rightarrow \boxed{v_{وصول}=\sqrt{2.g.h}}$ |