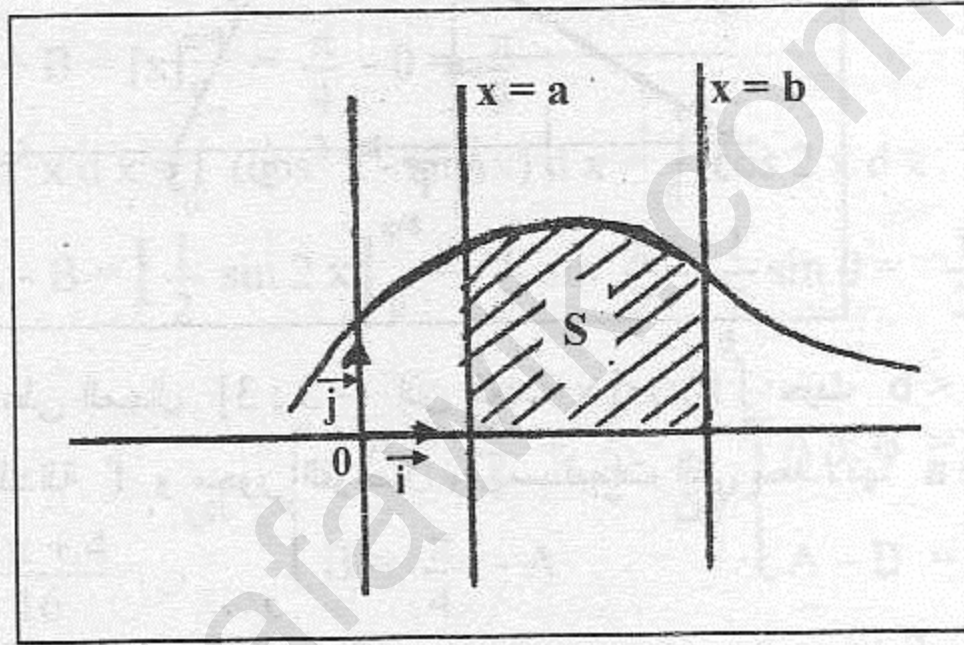


الحساب التكاملي

Kimou.

خاصية أساسية : f دالة مستمرة و موجبة على مجال جزئي I من \mathbb{R} و (C) منحنىها في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I حيث $a < b$ ، العدد الحقيقي الموجب S حيث $S = [F(b) - F(a)] \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمتان التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$ مقدرًا بـ وحدة قياس المساحة حسب مقياس أشعة التوجيه حسب الشكل التالي :

الجزء الملون يمثل حيز المستوي S المحصور بين المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمتان التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$



التكامل المحدود :

حسب الخاصية السابقة $S = F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f
 لتكن G دالة أصلية أخرى للدالة f
 هل $S = G(b) - G(a)$ ؟

الجواب : بما أن F و G دالتان أصليتان لـ f فإن $G(x) = F(x) + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$
 إذن :

$$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k]$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= S$$

نتيجة : مساحة الحيز S لا تتعلق باختيار الدالة الأصلية للدالة f
 إذن العدد S مستقل عن الدالة الأصلية F

تعريف : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I و كانت F دالة أصلية لـ f على المجال I فإن من أجل كل عددين حقيقيين a و b من المجال I العدد $F(b) - F(a)$ يسمى التكامل المحدود من a إلى b للدالة f و نرمز له بـ

$$\int_a^b f(x) dx$$

ملاحظة : الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ تقرأ : تكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x

مثلا : $f : x \mapsto 3x^2$

f مستمرة على \mathbb{R} و $F : x \mapsto x^3$ هي دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

$$\int_1^0 f(x) dx = F(0) - F(1)$$

$$= (0)^3 - (1)^3$$

$$= -1$$

إذن :

ملاحظة : بالرجوع إلى خاصية المساحة فإن $S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ حيث $a < b$ و f مستمرة و موجبة على المجال $[a; b]$

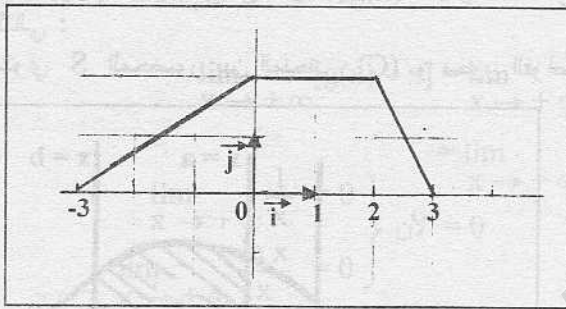
تبسيط الكتابة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال $[a; b]$ فإن العدد $F(b) - F(a)$ يمكن كتابته $[F(x)]_a^b$ و عليه $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ أمثلة :

$$\int_{-1}^2 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{2} (2)^2 \right] - \left[\frac{1}{2} (-1)^2 \right] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^{2-1} - \frac{1}{2} e^{0-1} = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = (-\cos \pi) - [-\cos(-\pi)] = 1 - 1 = 0$$

أمثلة بيانية : باستعمال المنحنى التالي لدالة f أحسب التكاملات التالية :



$$\int_0^1 f(x) dx = -1$$

$$\int_1^2 f(x) dx = -2$$

$$\int_0^2 f(x) dx = -3$$

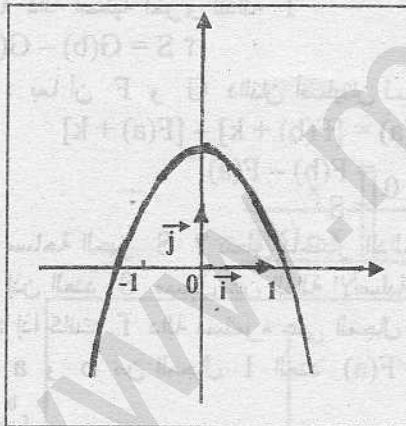
الحل : لاحظ أن الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[-3; 3]$ إذن العدد $\int_a^b f(x) dx$ يعبر عن مساحة الحيز من المستوي المحدود بـ المنحنى (C) للدالة f و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x=a$ و $x=b$ إذن يكفي إجراء قراء بيانية لهذه المساحة كمايلي :

$$\int_0^2 f(x) dx = 4 ; \int_1^2 f(x) dx = 2 ; \int_0^1 f(x) dx = 2$$

نشاط :

باستعمال الحاسبة البيانية اليك المنحنى (C) الممثل للدالة f حيث $f(x) = 2 - x^2$ في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1,5 \text{ cm}$

المطلوب : أحسب مساحة حيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x=1$; $x=-1$ **الحل :**



لاحظ أن المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل على المجال $[-1; 1]$ إذن : الدالة f موجبة على المجال $[-1; 1]$ إذن :

$$S = \int_{-1}^1 f(x) dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2$$

$$S = \int_{-1}^1 (2 - x^2) dx \times 2 \times 1,5 \text{ cm}^2$$

$$\int_{-1}^1 (2 - x^2) dx = \left[2x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

$$S = \frac{10}{3} \times 2 \times 1,5 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$$

خواص التكامل المحدود :

لتكن f و g دالتان مستمرتان على مجال I . a, b, c أعداد حقيقية من المجال I . k عدد حقيقي كفي . لدينا

الخواص التالية: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ — 1
علاقة شال .

خطية التكامل المحدود: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ — 2

خطية التكامل المحدود: $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ — 3

— 4 إذا كان $a < b$ و f موجبة على $[a; b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

— 5 إذا كان $a < b$ و من أجل كل x من $[a; b]$ فإن $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

مثال 1

ليكن $A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$ و $B = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx$

باستعمال الخواص أحسب $A+B$ ثم $A-B$ استنتج قيم A و B

الحل 1

$$A + B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} 1 \cdot dx$$

$$A + B = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

إذن :

$$A - B = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx - \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$$

$$A - B = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

إذن :

$$\begin{cases} A = \frac{2\pi + 4}{16} \\ B = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi + 4}{16} \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} 2A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \\ B = \frac{\pi}{4} - A \end{cases}$$

$$\text{إذن } \begin{cases} A + B = \frac{\pi}{4} \\ A - B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نتيجة :

$$\begin{cases} A = \frac{\pi + 2}{8} \\ B = \frac{\pi - 2}{8} \end{cases}$$

منه

$$\begin{cases} A = \frac{\pi + 2}{8} \\ B = \frac{2\pi}{8} - \frac{\pi + 2}{8} \end{cases}$$

أي

مثال 2

ليكن $A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

باستعمال الخواص أثبت أن $0 < A \leq 1$

الحل 2

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1}$ موجبة تماما على $[0; 1]$ إذن : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx > 0$

من جهة أخرى : من أجل كل x من $[0; 1]$ فإن : $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

منه : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq \int_0^1 1 \cdot dx$ أي $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq [x]_0^1$ أي : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq 1$

نتيجة : $0 < \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \leq 1$ أي $0 < A \leq 1$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

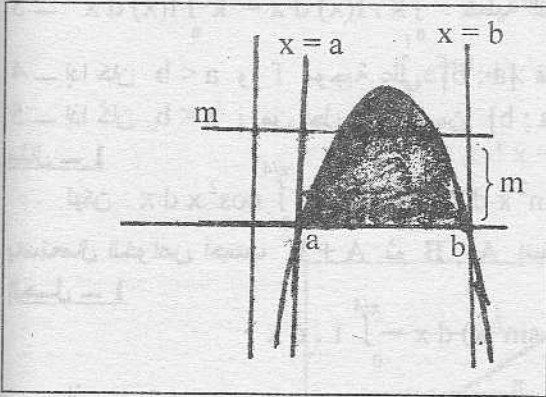
تعريف : f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$

العدد الحقيقي m المعروف بـ $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة و موجبة على المجال $[a; b]$ و كان (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{I}; \vec{J})$ فإن مساحة الحيز S المحصور بـ (C) و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ هي}$$

إذن : القيمة المتوسطة m للدالة f على $[a; b]$ هي : $m = \frac{S}{b-a}$
أي : $S = m(b-a)$



التفسير الهندسي :

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ هي مساحة الجزء الملون}$$

إذا كان $S = m(b-a)$ فإن S هي مساحة المستطيل الذي طوله $(b-a)$ و عرضه m (أنظر الشكل)
نتيجة : إذا وجد عددين حقيقيين m و M حيث من أجل كل x من $[a; b]$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ فإن } m \leq f(x) \leq M$$

مثال :

$$f(x) = 1 + \ln(1+x) \text{ دالة معرفة على }]-1; +\infty[$$

1 - أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; e-1]$

2 - إستنتج حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[0; e-1]$

$$3 - \text{إستنتج حصرا للعدد } A = \int_1^{e-1} f(x) dx$$

الحل :

$$1 - f \text{ قابلة للاشتقاق على }]-1; +\infty[\text{ و خاصة على المجال } [0; e-1] \text{ و دالتها المشقة : } f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

إذن : f متزايدة تماما على $[0; e-1]$ لأن $\frac{1}{x+1} > 0$

$$2 - \text{منه : من أجل كل } x \text{ من } [0; e-1] : f(0) \leq f(x) \leq f(e-1)$$

$$\text{أي : } 1 + \ln(1) \leq f(x) \leq 1 + \ln(1+e-1)$$

$$\text{أي : } 1 \leq f(x) \leq 2$$

3 - $1 \leq f(x) \leq 2$ إذن : حسب خاصية القيمة المتوسطة على المجال $[1; e-1]$ فإن :

$$1(e-1-1) \leq \int_1^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-1-1)$$

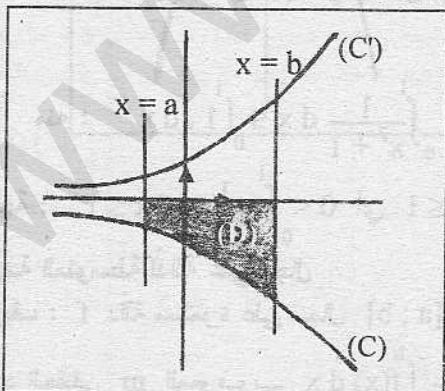
أي : $(e-2) \leq A \leq 2(e-2)$ و هو المطلوب .

ملاحظة : إذا أردنا حصر القيمة المتوسطة على المجال $[0; e-1]$ نحصل على :

$$1(e-1-0) \leq \int_0^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-1-0) \text{ أي } 1(e-1-0) \leq \int_0^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-1-0)$$

تكامل دالة سالبة على مجال

f دالة مستمرة سالبة على مجال $[a; b]$. ليكن (C) منحناها في معلم متعامد $(O; \vec{I}; \vec{J})$



نرمز بـ A إلى مساحة حيز المستوي (D) المحدود بـ المنحنى (C)

و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x=b$; $x=a$

للبحث عن A نرسم نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل

و ليكن (C') هذا المنحنى إذن (C') له المعادلة $y = -f(x)$

منه : $A = \int_a^b -f(x) dx$ لأن (C') فوق محور الفواصل أي الدالة $-f$ موجبة .

نقول أن المساحة الجبرية للحيز (D) سالبة لأن الدالة f سالبة على

المجال $[a; b]$

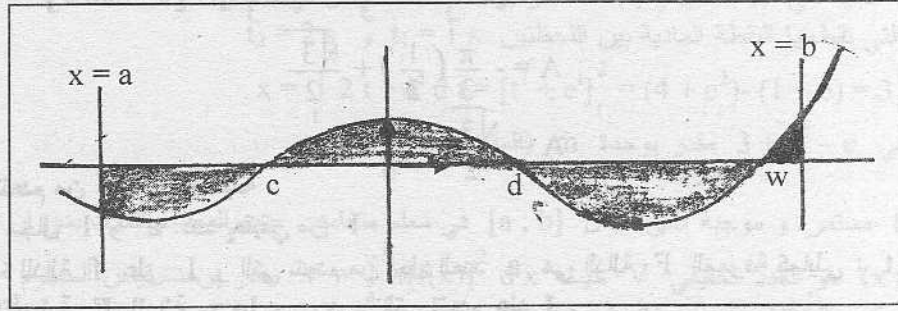
تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a; b]$ و (C) منحناها في معلم متعامد كما هو موضح في الشكل .

نرمز بـ A إلى مساحة الحيز (D) من المستوي المحدود بـ المنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها

$$x=b ; x=a$$

لحساب A نجزء الحيز (D) حسب إشارة f(x) أي موضع المنحني (C) بالنسبة إلى محور الفواصل ثم نعبّر عن المساحة A على كل مجال . حسب الشكل التالي مثلا :



$$A = \int_a^c -f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^w -f(x) dx + \int_w^b f(x) dx$$

إذن : تم تقسيم الحيز (D) إلى 4 مجالات حسب وضع المنحني (C) بالنسبة لمحور الفواصل
 مثال : f دالة معرفة بـ $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ و (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(\vec{O}; \vec{I}; \vec{J})$.

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب $a(\lambda)$ مساحة حيز المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $0 \leq x \leq \lambda$ و $f(x) \leq y \leq 0$

ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$

الحل : $f(x) = -e^{-0,5x+1}$ إذن : $f(x) < 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}

منه : $a(\lambda) = \int_0^\lambda -f(x) dx \times \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| = \int_0^\lambda e^{-0,5x+1} dx \|\vec{i}\| \|\vec{j}\|$ لأن الحيز المطلوب هو جزء المستوي المحدود بالمنحني (C) ومحور الفواصل والمستقيمت التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$ منه :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \left[-\frac{1}{0,5} e^{-0,5x+1} \right]_0^\lambda \\ &= [-2 e^{-0,5x+1}]_0^\lambda \\ &= -2 e^{-0,5\lambda+1} + 2 e \\ &= 2(e - e^{-0,5\lambda+1}) \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = 2e \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \quad \text{لأن} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-0,5\lambda+1} = 0$$

التكامل بالتجزئة

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' مستمرتان على I . من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I فإن :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

$$A = \int_0^{\pi/3} x \sin x dx \quad \text{مثال :}$$

نضع : $\left. \begin{aligned} u(x) &= x & \text{إذن} & u'(x) = 1 \\ v(x) &= -\cos x & \text{إذن} & v'(x) = \sin x \end{aligned} \right\}$

$$A = \int_0^{\pi/3} u(x) \cdot v'(x) dx \quad \text{منه :}$$

إذن : حسب التكامل بالتجزئة فإن : $A = [u(x) v(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} u'(x) v(x) dx$

$$A = [-x \cos x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos x dx \quad \text{أي :}$$

$$A = [-x \cos x]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \cos x dx \quad \text{أي :}$$

$$A = [-x \cos x]_0^{\pi/3} + [\sin x]_0^{\pi/3} \quad \text{أي :}$$

$$A = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi/3} \quad \text{أي :}$$

$$A = \left[-\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \right] - [0 + \sin 0] \quad \text{منه :}$$

$$A = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أي :}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \quad \text{أخيرا :}$$

الدالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة معينة :

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I
الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I والتي تنعدم من أجل العدد a هي الدالة F المعرفة كمايلي : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
مثال : تعيين الدالة الأصلية F للدالة $\ln x$ و التي تنعدم عند 1 .

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad \text{الحل :}$$

$$= [t \ln t - t]_1^x$$

$$= [x \ln x - x] - [1 \ln 1 - 1]$$

$$= x \ln x - x + 1$$

توظيف التكامل في حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة .

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد (O, I, J, K) محاوره (x, y, z) ؛ (y, y') ؛ (z, z')
نعتبر وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على (O, I, J, K)

ليكن في الفضاء مجسم محدد بمستويين موازيين للمستوي (xoy) معادلاتهما $z=a$ و $z=b$ حيث $a < b$
خاصية (1)

نضع $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستوي موازي للمستوي (xoy) راقمه z حيث $a < z < b$

حجم المجسم به حدة الحجوم (uv) هي $V = \int_a^b S(z) dz$

مثال : برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

الحل : نعتبر كرة في الفضاء مركزها هو المبدأ 0 و نصف قطرها R

إذن : مقطع الكرة بمستوي موازي للمستوي (xoy) راقمه z حيث $-R < z < R$ هو دائرة مركزها $w(0; 0; z)$ و

نصف قطرها r حيث $R^2 = z^2 + r^2$ أي $r^2 = R^2 - z^2$

إذن : مساحة هذه الدائرة هي : $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$

إذن : حسب الخاصية (1) فإن حجم الكرة بوحدة الحجوم هي :

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \int_{-R}^R \pi R^2 dz - \int_{-R}^R \pi z^2 dz$$

$$= \left[\pi R^2 z - \frac{1}{3} \pi z^3 \right]_{-R}^R$$

$$= \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-R}^R$$

$$= \pi \left[R^2 R - \frac{1}{3} R^3 - \left(-R^2 R - \frac{1}{3} (-R)^3 \right) \right]$$

$$= \pi \left[2 R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right]$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 (u.v) \quad \text{و هو المطلوب .}$$

المسافة المقطوعة على مستقيم

نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة التي تقطعها نقطة مادية عند أي لحظة t .
السرعة اللحظية لهذه النقطة عند اللحظة t نرمز لها بـ $V(t)$ معرفة بالعلاقة

$$dx = V(t) dt \quad \text{أي} \quad V(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

خاصية : المسافة التي تقطعها نقطة مادية بين لحظتين t_1 و t_2 حيث $t_1 < t_2$ ذات السرعة اللحظية $V(t)$

$$x = \int_{t_1}^{t_2} V(t) dt \text{ هي}$$

نشاط: سرعة نقطة مادية هي $V(t) = 2t + e^t$ مقدر بوحدة m/s (متر في الثانية)

أحسب x المسافة التي تقطعها النقطة المادية بين اللحظتين $t_1 = 1$ s و $t_2 = 2$ s

$$\text{الحل: } x = \int_1^2 2t + e^t dt = [t^2 + e^t]_1^2 = (4 + e^2) - (1 + e) = 3 + e^2 - e$$

إذن: المسافة x هي $3 + e^2 - e$ مقدر بوحدة m (المتر)
خاصية:

(C) منحنى لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a; b]$ في معلم متعامد . حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول

$$\text{محور الفواصل } (xx') \text{ هو العدد الحقيقي } V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \text{ حيث } V \text{ مقدر بوحدة قياس الحجم}$$

مساحة حيز من المستوي المحدد بمنحني دالتين مستمرتين

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a; b]$ حيث من أجل كل x من $[a; b]$ $f(x) \geq g(x)$ فإن مساحة الحيز

(D) من المستوي المحدد بمنحني الدالتين f و g و بالمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = b$ هي العدد الحقيقي A

$$\text{حيث } A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \text{ مقدر بوحدة المساحة .}$$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 -

أحسب في كل ممايلي مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل على المجال I :

$$I = [1/2; 3] : f(x) = 2x - 1 \quad -1$$

$$I = [-4; -2] : f(x) = -2x - 3 \quad -1$$

$$I = [-1; 4] : f(x) = |x - 1| \quad -1$$

الحل 1 -

في كل الحالات الدالة f مستمرة على المجال I إذن: لحساب المساحة المطلوبة يكفي معرفة إشارة الدالة f على المجال I ثم حساب المساحة S كمايلي:

$$1 - \frac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ إذن: } 1 \leq 2x - 1 \leq 5 \text{ منه: } 0 \leq 2x - 1 \leq 5$$

$$\text{منه: من أجل كل } x \text{ من } I : f(x) \geq 0$$

$$\text{إذن: } S = \int_{1/2}^3 (2x - 1) dx = [x^2 - x]_{1/2}^3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$$

$$2 - -4 \leq x \leq -2 \text{ إذن: } 4 \leq -2x - 3 \leq 8 \text{ منه: } 1 \leq -2x - 3 \leq 5$$

$$\text{منه: من أجل كل } x \text{ من } I : f(x) > 0$$

$$\text{إذن: } S = \int_{-4}^{-2} (-2x - 3) dx = [-x^2 - 3x]_{-4}^{-2} = (-4 + 6) - (-16 + 12) = 2 + 4 = 6$$

3 - من أجل كل x من R فإن $|x - 1| \geq 0$ و خاصة من أجل كل x من I

$$S = \int_{-1}^4 |x - 1| dx = \int_{-1}^1 |x - 1| dx + \int_1^4 |x - 1| dx$$

$$|x - 1| = \begin{cases} 1 - x : x \leq 1 \\ x - 1 : x \geq 1 \end{cases} \text{ لأن } = \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^4 (x - 1) dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_1^4$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) - (-1 - \frac{1}{2}) + (8 - 4) - (\frac{1}{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

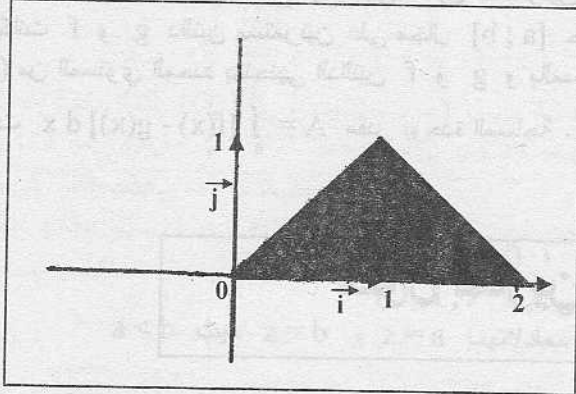
ملاحظة : المساحة S مقدره بوحدة قياس أشعة توجيه المعلم

التمرين 2 -

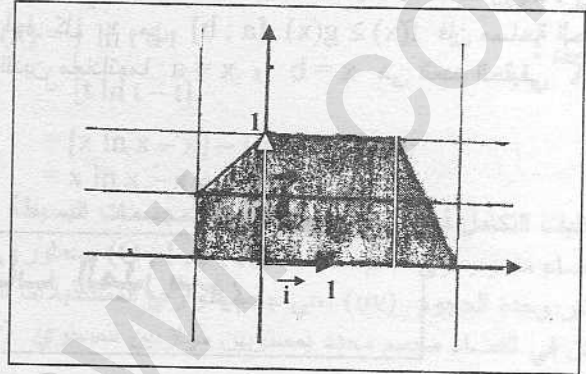
إليك في كل حالة ممالي المنحني (C) لدالة f على مجال I

أحسب تكامل الدالة f على المجال I

الحالة (2)



الحالة (1)

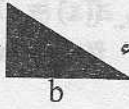


الحل 2 -

في كلا الحالتين المنحني (C) يقع فوق محور الفواصل إذن : مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمت $x=a$ و $x=b$ حيث $I=[a; b]$ (مجال تعريف الدالة f) هي : $S = \int_a^b f(x) dx$ مقدره بوحدة قياس المساحة إذن يكفي أن نحسب مساحة الجزء الملون في كل شكل كما يلي :

الحالة (1) حسب مقياس الرسم فإن :

مساحة الجزء a تساوي 1 إذن مساحة الجزء a تساوي $1/2$ و مساحة الجزء a تساوي $1/2$



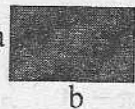
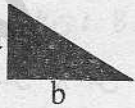
و مساحة الجزء a تساوي $1/4$



و عليه : $S = 2(1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ مقدره بوحدة قياس المساحة

إذن : $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{13}{4}$

الحالة (2) حسب مقياس الرسم فإن : مساحة الجزء a تساوي 1 و مساحة الجزء a تساوي $1/2$



إذن : $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ مقدره بوحدة قياس المساحة

و عليه : $\int_0^2 f(x) dx = 1$

ملاحظة : مقياس الرسومات هي : $a = \|\vec{i}\|$ و $b = \|\vec{j}\|$ حسب المنحني .

التمرين 3 -

f دالة معرفة على $[-1; 1]$ بـ $f(x) = \begin{cases} -2x & : x \in [-1; 0] \\ x^2 & : x \in [0; 1] \end{cases}$ و (C) منحناها في معلم متعامد

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x=1$; $x=-1$

الحل - 3

لتكن S المساحة المطلوبة . لأن f مستمرة على المجال $[-1; 1]$

على المجال $[-1; 0]$ لدينا : $-1 \leq x \leq 0$ إذن : $0 \leq -2x \leq 2$ أي $f(x) \geq 0$

على المجال $[0; 1]$ لدينا : $x^2 \geq 0$ إذن : $f(x) \geq 0$

$$S = \int_{-1}^0 -2x dx + \int_0^1 x^2 dx = [-x^2]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = [0 - (-1)] + \left[\frac{1}{3} - 0\right] = \frac{4}{3}$$

منه :

ملاحظة : هذه المساحة مقدره بوحدة قياس المساحة .

التمرين - 4

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 1,5 & : -3 \leq x \leq -1 \\ x + 2 & : -1 < x < 0 \\ -\frac{2}{3}x + 2 & : 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

دالة معرفة على $[-3; 3]$ بـ (C) منحناها في معلم متعامد

1 - تحقق أن f مستمرة على $[-3; 3]$

2 - أحسب مساحة الحيز من المستوي المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي

معادلاتها $x = 3$ و $x = -3$

الحل - 4

1 - f مستمرة على $[-3; -1] \cup [-1; 0] \cup [0; 3]$ إذن يكفي أن نثبت أنها مستمرة عند (-1) على اليمين ثم عند (0) على اليسار حتى تكون f مستمرة على $[-3; 3]$ كمايلي :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 2 = -1 + 2 = 1 \quad \text{و لدينا : } f(-1) = 0,5(-1) + 1,5 = 1$$

إذن : f مستمرة على يمين (-1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 2 = 2 \quad \text{و لدينا : } f(0) = -\frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

إذن : f مستمرة عند (0) على اليسار .

نتيجة : f مستمرة على $[-3; 3]$

2 - $-3 \leq x \leq -1$ إذن : $-1,5 \leq 0,5x \leq -0,5$ أي $0 \leq 0,5x + 1,5 \leq 1$ أي $f(x) \geq 0$ على المجال $[-3; -1]$
 $-1 < x < 0$ إذن : $1 < x + 2 < 2$ إذن : $f(x) > 0$ على المجال $[-1; 0]$

$0 \leq x \leq 3$ إذن : $-2 \leq -\frac{2}{3}x \leq 0$ إذن : $0 \leq -\frac{2}{3}x + 2 \leq 2$ أي $f(x) \geq 0$ على المجال $[0; 3]$

نتيجة : من أجل كل x من $[-3; 3]$: $f(x) \geq 0$

$$S = \int_{-3}^{-1} (0,5x + 1,5) dx + \int_{-1}^0 (x + 2) dx + \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) dx$$

إذن : المساحة المطلوبة S هي :

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{0,5}{2}x^2 + 1,5x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_0^3 \\ &= \frac{0,5}{2} - 1,5 - \left(\frac{0,5(9)}{2} - 3(1,5)\right) + 0 - \left(\frac{1}{2} - 2\right) + \left(-\frac{9}{3} + 6\right) - 0 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 3 \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدره بوحدة قياس المساحة

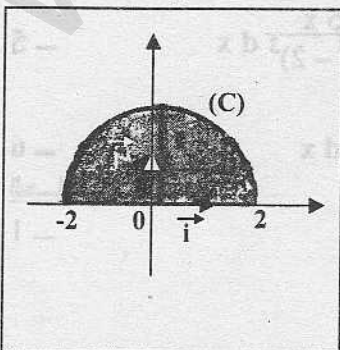
التمرين - 5

إليك المنحنى (C) الممثل لدالة f في معلم متعامد و متجانس . حيث (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0; 0)$ و نصف قطرها 2 .

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{حيث } \int_{-2}^2 f(x) dx$$

الحل - 5

مساحة الجزء الملون من المستوي هي $S = \frac{1}{2} \pi(2)^2$ أي $S = 2\pi$ (نصف مساحة الدائرة)



لكن الجزء الملون هو حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = 2$ و $x = -2$

إذن : $S = \int_{-2}^2 f(x) dx$

لنثبت أن المنحنى (C) له المعادلة $y = \sqrt{4 - x^2}$

معادلة الدائرة ذات المركز 0 و نصف القطر 2 هي $x^2 + y^2 = 4$

إذن : $y^2 = 4 - x^2$

لكن جزء الدائرة الملون يقع فوق محور الفواصل إذن : $y \geq 0$ منه : $y = \sqrt{4 - x^2}$

إذن : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

منه : $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2\pi$ و هو المطلوب .

التمرين - 6

أحسب التكاملات التالية :

$\int_0^2 x^2 - x dx$ - 4

$\int_0^1 3x + 1 dx$ - 1

$\int_1^2 (x+1)^3 dx$ - 5

$\int_1^3 -x + 3 dx$ - 2

$\int_{-5}^{-2} 4x + 3 dx$ - 3

الحل - 6

$\int_0^1 3x + 1 dx = [3(\frac{1}{2}x^2) + x]_0^1 = \frac{3}{2} + 1 - 0 = \frac{5}{2}$ - 1

$\int_1^3 -x + 3 dx = [-\frac{1}{2}x^2 + 3x]_1^3 = -\frac{9}{2} + 9 - (-\frac{1}{2} + 3) = -\frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3 = 2$ - 2

$\int_{-5}^{-2} 4x + 3 dx = [2x^2 + 3x]_{-5}^{-2} = 8 - 6 - (50 - 15) = 2 - 35 = -33$ - 3

$\int_0^2 x^2 - x dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 0 = \frac{2}{3}$ - 4

$\int_1^2 (x+1)^3 dx = [\frac{1}{4}(x+1)^4]_1^2 = \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{1}{4}(2)^4 = \frac{1}{4}(81 - 16) = \frac{65}{4}$ - 5

التمرين - 7

أحسب التكاملات التالية :

$\int_{1/2}^2 2t - 1 + \frac{1}{t^2} dt$ - 1

$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}}$ - 7

$\int_1^4 \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ - 2

$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 1} dt$ - 8

$\int_1^2 2x(x^2 - 1) dx$ - 3

$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$ - 9

$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ - 4

$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ - 10

$\int_2^3 \frac{5x}{(x^2-2)^3} dx$ - 5

$\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$ - 11

$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$ - 6

الحل - 7

$\int_{1/2}^2 2t - 1 + \frac{1}{t^2} dt = \int_{1/2}^2 2t - 1 + t^{-2} dt$
 $= [t^2 - t - \frac{1}{t}]_{1/2}^2$ - 1

$$= (4 - 2 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2)$$

$$= \frac{15}{4}$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\ln|x| - \sqrt{x}]_1^4 \quad -2$$

$$= (\ln 4 - 2) - (\ln 1 - 1)$$

$$= \ln 4 - 1$$

$$\int_1^2 2x(x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 \right]_1^2 = \frac{9}{2} \quad -3$$

$$\int_1^{10} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_1^{10} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 2[\sqrt{t}]_1^{10} = 2(\sqrt{10} - 1) \quad -4$$

$$\int_2^3 \frac{5x}{(x^2 - 2)^3} dx = \frac{5}{2} \int_2^3 \frac{2x}{(x^2 - 2)^3} dx \quad -5$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{1}{-3+1} (x^2 - 2)^{-3+1} \right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4} \left[\frac{1}{(x^2 - 2)^2} \right]_2^3$$

$$= \frac{-5}{4} \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx = [e^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 3 - 2 = 1 \quad -6$$

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}} = 2 \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt = 2[\sqrt{t+1}]_0^3 = 2(2 - 1) = 2 \quad -7$$

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4t^3}{t^4 + 1} dt \quad -8$$

$$= \frac{1}{4} [\ln|t^4 + 1|]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} (\ln 17 - \ln 2)$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx \quad -9$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|e^{2x} + 1|]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(e^2 + 1) - \ln 2)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -2 \int_0^3 \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} dx \quad -10$$

$$= -2 [\sqrt{4-x}]_0^3$$

$$= -2(1 - 2)$$

$$= 2$$

$$\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{2 dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2t+1} \right]_0^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{7} + 1 \right) = \frac{3}{7} \quad - 11$$

التمرين - 8

أحسب التكاملات التالية :

$$\int_0^\pi \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt \quad - 6 \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx \quad - 1$$

$$\int_{-2}^2 \frac{x}{x^2-9} dx \quad - 7 \qquad \int_0^\pi \sin 2x dx \quad - 2$$

$$\int_0^1 3e^{4x} dx \quad - 8 \qquad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \quad - 3$$

$$\int_0^1 t e^{t^2-1} dt \quad - 9 \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x} dx \quad - 4$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x dx \quad - 10 \qquad \int_1^2 \frac{1}{2x+3} dx \quad - 5$$

الحل - 8

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad - 1$$

$$\int_0^\pi \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = \frac{-1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 0 \quad - 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \left[\sqrt{2x+1} \right]_1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{3} \quad - 3$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{x-2}{x} dx &= \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{2}{x} \right) dx \quad - 4 \\ &= [x - 2 \ln|x|]_{-2}^{-1} \\ &= (-1 - 2 \ln 1) - (-2 - 2 \ln 2) \\ &= 1 + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2}{2x+3} dx = \frac{1}{2} [\ln|2x+3|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 7 - \ln 5) \quad - 5$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt &= \left[-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^\pi \quad - 6 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\int_{-2}^2 \frac{x}{x^2-9} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-9} dx \quad - 7$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|x^2-9|]_{-2}^2$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 5)$$

$$= 0$$

$$\int_0^1 3 e^{4x} dx = \frac{3}{4} \int_0^1 4 e^{4x} dx = \frac{3}{4} [e^{4x}]_0^1 = \frac{3}{4} (e^4 - 1) \quad - 8$$

$$\int_0^1 t e^{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2 t e^{t^2-1} dt = \frac{1}{2} [e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad - 9$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/3} 2 \cos x \sin x dx \quad - 10$$

$$= \frac{1}{2} [\sin^2 x]_{-\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1/8$$

التمرين 9

أحسب التكاملات التالية :

$$\int_0^1 (3t^2 + 1) e^{2t^3+2t} dt \quad - 6 \quad \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx \quad - 1$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2+\sqrt{2}} dx \quad - 7 \quad \int_0^1 3te^{t^2-1} dt \quad - 2$$

$$\int_0^1 (3x-6)(x^2-4x+1)^3 dx \quad - 8 \quad \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad - 3$$

$$\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad - 4$$

$$\int_0^3 2^{3x} dx \quad - 5$$

الحل 9

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = [\ln|x^2+x-1|]_1^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 \quad - 1$$

$$\int_0^1 3te^{t^2-1} dt = \frac{3}{2} \int_0^1 2te^{t^2-1} dt = \frac{3}{2} [e^{t^2-1}]_0^1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad - 2$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x (\sin x)^{-2} dx \quad - 3$$

$$= \left[\frac{1}{-2+1} (\sin x)^{-2+1} \right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \left[\frac{-1}{\sin x} \right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$\int_1^3 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = - \int_1^3 \frac{-1}{x^2} e^{1/x} dx \quad - 4$$

$$= - [e^{1/x}]_1^3$$

$$= - (e^{1/3} - e)$$

$$= e - \sqrt[3]{e}$$

$$\int_0^3 2^{3x} dx = \int_0^3 8^x dx = \int_0^3 e^{x \ln 8} dx = \left[\frac{1}{\ln 8} e^{x \ln 8} \right]_0^3 = \frac{1}{\ln 8} (e^{3 \ln 8} - 1) = \frac{8^3 - 1}{\ln 8} \quad - 5$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3t^2 + 1) e^{2t^3 + 2t} dt &= \frac{1}{2} \int_0^1 (6t^2 + 2) e^{2t^3 + 2t} dt \\ &= \frac{1}{2} [e^{2t^3 + 2t}]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e^4 - 1) \end{aligned} \quad - 6$$

$$\int_0^1 \frac{3x}{x^2 + \sqrt{2}} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + \sqrt{2}} dx = \frac{3}{2} [\ln |x^2 + \sqrt{2}|]_0^1 = \frac{3}{2} (\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \sqrt{2}) \quad - 7$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x - 6)(x^2 - 4x + 1)^3 dx &= 3 \int_0^1 (x - 2)(x^2 - 4x + 1)^3 dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (2x - 4)(x^2 - 4x + 1)^3 dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{4} (x^2 - 4x + 1)^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{8} [(x^2 - 4x + 1)^4]_0^1 \\ &= \frac{3}{8} (16 - 1) \\ &= 45/8 \end{aligned} \quad - 8$$

التمرين - 10

1 - أوجد الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$:

$$\frac{3}{x^2 - 9} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3}$$

- 2 استنتج $\int_{-1}^2 \frac{3}{x^2 - 9} dx$
الحل - 10

$$\frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3} = \frac{ax + 3a + bx - 3b}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{(a + b)x + 3(a - b)}{x^2 - 9} \quad - 1$$

$$\left. \begin{aligned} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{aligned} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} 2a = 1 \\ b = -a \end{aligned} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{aligned} a + b = 0 \\ 3(a - b) = 3 \end{aligned} \right\} \text{نحصل على} \quad \frac{3}{x^2 - 9} \text{ بالمطابقة مع}$$

$$\frac{3}{x^2 - 9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + 3} \right) \quad \text{منه:}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{3}{x^2 - 9} dx = \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + 3} \right) \right] dx \quad - 2$$

$$= \frac{1}{2} [\ln |x - 3|]_{-1}^2 - \frac{1}{2} [\ln |x + 3|]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 4) - \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2$$

التمرين - 11

1 - عين الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1/2; 2\}$:

$$\frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} = a + \frac{b}{2x - 1} + \frac{c}{x - 2}$$

- 2 استنتج $\int_3^4 \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} dx$

الحل - 11

$$a + \frac{b}{2x-1} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(2x-1)(x-2) + b(x-2) + c(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \quad -1$$

$$= \frac{2ax^2 - 5ax + 2a + bx - 2b + 2cx - c}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$= \frac{2ax^2 + (-5a + b + 2c)x + 2a - 2b - c}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=2 \\ b+2c=5 \\ -2b-c=-4 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} 2a=4 \\ -5a+b+2c=-5 \\ 2a-2b-c=0 \end{array} \right\} \text{نحصل على} \quad \frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2} \text{ بالمطابقة مع}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=2 \\ c=2 \\ b=1 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} a=2 \\ 2b+4c=10 \\ -2b-c=-4 \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2} = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x-2} \quad \text{منه:}$$

$$2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{4x^2 - 10x + 4 + x - 2 + 4x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 - 5x + 2} \quad \text{تحقيق:}$$

$$\int_3^4 \frac{4x^2-5x}{2x^2-5x+2} dx = \int_3^4 \left(2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx \quad -2$$

$$= \left[2x + \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 2 \ln|x-2| \right]_3^4$$

$$= \left(8 + \frac{1}{2} \ln 7 + 2 \ln 2 \right) - \left(6 + \frac{1}{2} \ln 5 + 2 \ln 1 \right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \ln 7 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5$$

التمرين - 12

$$1 - \text{أوجد الأعداد الحقيقية } a, b, c \text{ حيث من أجل } x \neq 1 : \frac{x^2+2x-3}{x-1} = ax+b+\frac{c}{x-1}$$

$$2 - \text{استنتج } \int_2^3 \frac{x^2+2x-3}{x-1} dx$$

الحل - 12

1 - بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ x^2-x \\ \hline 3x-3 \\ 3x-3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ x+3 \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x-1} = x+3 \quad \text{منه: من أجل } x \neq 1$$

$$\text{إذن: } a=1 ; b=3 ; c=0$$

$$2 - \int_2^3 \frac{x^2+2x-3}{x-1} dx = \int_2^3 (x+3) dx \quad -2$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3$$

$$= \frac{9}{2} + 9 - (2 + 6) = 11/2$$

التمرين 13

1 - بين أن من أجل كل x من \mathbb{R} : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

2 - استنتج $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

الحل 13

$$1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$$

$$= [x - \ln|1+e^x|]_0^1$$

$$= 1 - \ln(1+e) - (0 - \ln 2)$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2$$

التمرين 14

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ دالة معرفة على المجال $[-1; 1]$ بـ

1 - تحقق أن المنحنى (C) الممثل للدالة f هو نصف دائرة مركزها O و نصف قطرها 1 و الواقع فوق محور الفواصل

2 - استنتج أن $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi/2$

الحل 14

1 - المعادلة ذات المركز O و نصف القطر 1 معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ أي $y^2 = 1 - x^2$

إذن : الجزء الواقع فوق محور الفواصل معادلته $y = \sqrt{1-x^2}$ لأن $y \geq 0$

إذن : $y = f(x)$ و هو المطلوب .

2 - لدينا مساحة نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 هي $\frac{1}{2}(\pi \times 1^2) = \pi/2$

إذن : $\int_{-1}^1 f(x) dx = \pi/2$ لأن عبارة مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمتان التي

معادلاتها $x = -1$ و $x = 1$ هي $\int_{-1}^1 f(x) dx$ و يمثل نصف الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 .

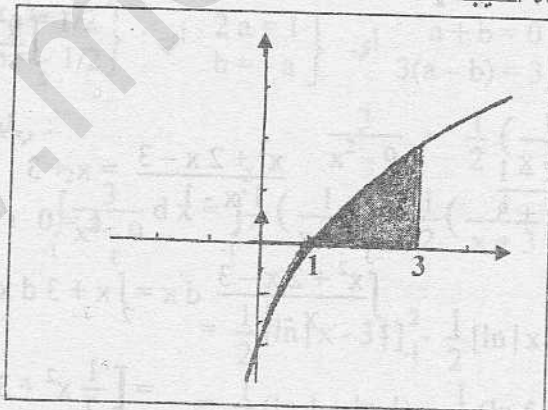
التمرين 15

f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2}$ و (C) تمثيلها البياني كما في الشكل (أنظر الشكل) .

1 - أحسب $\int_1^3 f(x) dx$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

2 - أحسب $\int_0^3 f(x) dx$

الشكل :



الحل 15

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \left(x - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int_1^3 (x - 4(x+1)^{-2}) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 4 \left(\frac{1}{-2+1} (x+1)^{-2+1} \right) \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x+1} \right]_1^3$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2} \right) = 3$$

التفسير الهندسي : حسب الشكل فإن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1 ; 3]$

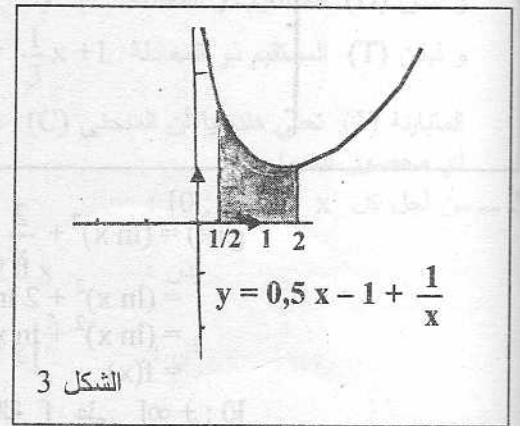
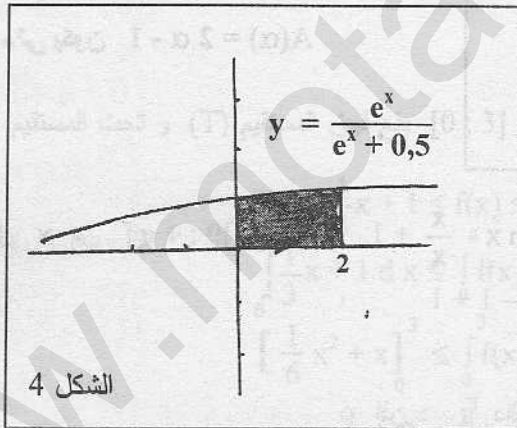
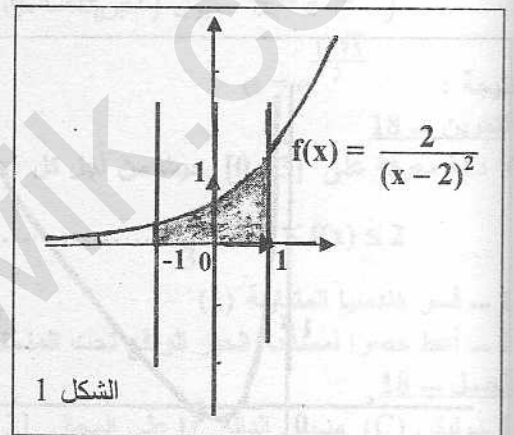
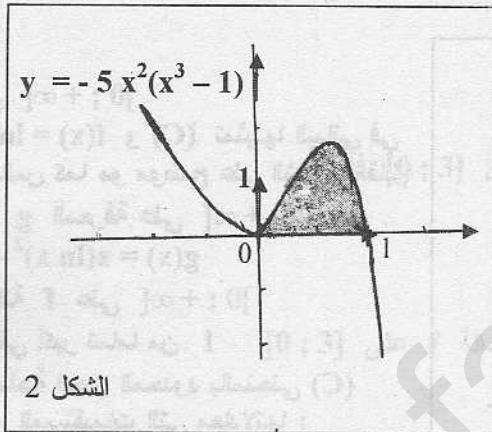
إذن العدد $\int_1^3 f(x) dx$ يعبر عن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x = 1$ و $x = 3$ أي الجزء الملون في الشكل . و عليه فإن مساحة هذا الجزء هي 3 (وحدة قياس المساحة) .

$$\int_0^3 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x+1} \right]_0^3 = \frac{9}{2} + \frac{4}{4} - (0 + 4) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} - 2$$

التمرين = 16

إليك الأشكال التالية لمنحنيات .

المطلوب : أحسب مساحة الحيز الملون مقدره بوحدة القياس للمساحة .



الحل = 16

في كل الأشكال الجزء الملون يقع فوق محور الفواصل إذن إذا كانت $y = f(x)$ عبارة المنحنى فإن مساحة كل جزء من هذه الأجزاء مقدره بوحدة قياس المساحات هي : $\int_a^b f(x) dx$ حيث a و b هي حدود الأجزاء على محور الفواصل كمايلي :

$$S = \int_{-1}^1 \frac{2}{(x-2)^2} dx = 2 \left[\frac{-1}{x-2} \right]_{-1}^1 = 2 \left[\frac{-1}{-1} - \left(\frac{-1}{-3} \right) \right] = \frac{4}{3} \quad \text{الشكل (1) :}$$

$$S = \int_0^1 -5x^2(x^3 - 1) dx = -\frac{5}{3} \int_0^1 3x^2(x^3 - 1) dx \quad \text{الشكل (2) :}$$

$$= -\frac{5}{3} \left[\frac{1}{2} (x^3 - 1)^2 \right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{6} [(x^3 - 1)^2]_0^1$$

$$= -\frac{5}{6} [0 - (1)] = \frac{5}{6}$$

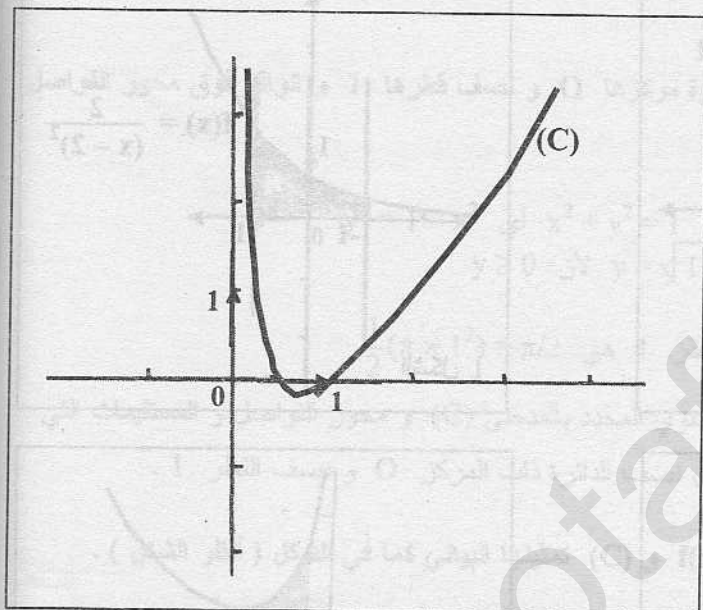
$$S = \int_{1/2}^2 0,5x - 1 + \frac{1}{x} dx$$

الشكل (3) :

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4}x^2 - x + \ln|x| \right]_{1/2}^2 \\ &= (1 - 2 + \ln 2) - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2} - \ln 2 \right) \\ &= -1 + \ln 2 + \frac{7}{16} + \ln 2 \\ &= 2 \ln 2 - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$S = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 0,5} dx = [\ln|e^x + 0,5|]_0^2 = \ln(e^2 + 0,5) - \ln(1,5)$$

الشكل (4) :



التمرين 17 -

f دالة معرفة على $]0; +\infty[$

بـ $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو موضح على الشكل المقابل.

1 - بين أن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$

$$g(x) = x(\ln x)^2 - x \ln x + x$$

هي دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

2 - α عدد حقيقي أكبر تماما من 1

أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمتين التي معادلاتها :

$$x = 1 \text{ و } x = \alpha$$

3 - عين α حتى يكون $A(\alpha) = 2\alpha - 1$

الحل 17 -

$$g'(x) = (\ln x)^2 + \frac{2}{x}x \ln x - \ln x - \frac{x}{x} + 1 \quad ;]0; +\infty[\text{ من } x \text{ كل من } 1 -$$

$$= (\ln x)^2 + 2 \ln x - \ln x - 1 + 1$$

$$= (\ln x)^2 + \ln x$$

$$= f(x)$$

إذن : دالة أصلية للدالة f على $]0; +\infty[$

2 - على المجال $]1; \alpha[$ منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل إذن مساحة الحيز المحدود بـ (C) ومحور الفواصل والمستقيمتين التي معادلاتها $x = \alpha$ و $x = 1$ هي :

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx = [g(x)]_1^\alpha$$

$$A(\alpha) = g(\alpha) - g(1)$$

منه :

$$A(\alpha) = \alpha(\ln \alpha)^2 - \alpha \ln \alpha + \alpha - 1$$

أي :

$$A(\alpha) = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha(\ln \alpha)^2 - \alpha \ln \alpha + \alpha - 1 = 2\alpha - 1 \end{cases} \quad - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha(\ln \alpha)^2 - \alpha \ln \alpha - \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ (\ln \alpha)^2 - \ln \alpha - 1 = 0 \dots\dots\dots (1) \end{cases}$$

18 - تمرين

نحل المعادلة (1) ذات المجهول $\alpha > 1$ حيثنضع : $t = \ln \alpha$ إذن : $t^2 - t - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

إذن : $\ln \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ أو $\ln \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ أي : $\alpha = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ مرفوض (أصغر من 1) أو $\alpha = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ مقبول (أكبر تماما من 1)نتيجة : $\alpha = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$

التمرين - 18

f دالة معرفة على $[0; 3]$ حيث من أجل كل x من المجال $[0; 3]$ فإن :

$$(1) \dots\dots\dots \frac{1}{3}x + 1 \leq f(x) \leq 2$$

1 - فسر هندسيا المتباينة (1)

2 - أعط حصرا لمساحة الحيز الواقع تحت المنحنى الممثل للدالة f على $[0; 3]$

الحل - 18

1 - ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال $[0; 3]$ و ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ و ليكن (T) المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{3}x + 1$ (1) المتباينة تعني هندسيا أن المنحنى (C) على المجال $[0; 3]$ يقع فوق المستقيم (T) و تحت المستقيم (D) أي محصور بينهما2 - من أجل كل x من $[0; 3]$:

$$\frac{1}{3}x + 1 \leq f(x) \leq 2$$

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) dx \leq \int_0^3 f(x) dx \leq \int_0^3 2 dx \quad \text{إذن :}$$

$$\left[\frac{1}{6}x^2 + x \right]_0^3 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq [2x]_0^3 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{9}{6} + 3 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 6 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{9}{2} \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 6 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C) مقدره بوحدة المساحة هي $S = \int_0^3 f(x) dx$

$$\text{إذن : } 9/2 \leq S \leq 6$$

التمرين - 19

باستعمال الخواص أحسب التكاملات التالية :

$$\int_1^e \ln x dx + \int_1^e x + \ln(1/x) dx \quad - 1$$

$$\int_1^e \ln(x^2 + 1) dx + \int_1^e \ln(x^2 + 1) dx \quad - 2$$

$$\int_1^{\pi/6} \cos 2x dx - \int_1^{\pi/6} \cos 2x dx \quad - 3$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e x + \ln(1/x) \, dx &= \int_1^e \ln x + x + \ln(1/x) \, dx \\ &= \int_1^e \ln x + x - \ln x \, dx \\ &= \int_1^e x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

- 1

$$\int_1^e \ln(x^2 + 1) \, dx + \int_e^1 \ln(x^2 + 1) \, dx = \int_1^1 \ln(x^2 + 1) \, dx = 0$$

- 2

$$\begin{aligned} \int_1^{\pi/6} \cos 2x \, dx - \int_1^{7\pi/6} \cos 2x \, dx &= \int_1^{\pi/6} \cos 2x \, dx - \left[\int_1^{\pi/6} \cos 2x \, dx + \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x \, dx \right] \\ &= - \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \cos 2x \, dx \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\pi/6}^{7\pi/6} \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sin 7\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right] \\ &= - \left[\frac{1}{2} \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 3

التمرين - 20

f و g دالتان مستمرتان على المجال [5 ; 10] حيث أحسب التكاملات التالية :

$$\int_5^{10} (-f + \frac{2}{3}g)(x) \, dx = -5$$

$$\int_5^{10} (2f - g)(x) \, dx = -6$$

$$\int_5^{10} (f + g)(x) \, dx = -1$$

$$\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x) \, dx = -2$$

$$\int_5^{10} (f - g)(x) \, dx = -3$$

$$\int_5^{10} (2f + 3g)(x) \, dx = -4$$

الحل - 20

$$\int_5^{10} (f + g)(x) \, dx = \int_5^{10} f(x) \, dx + \int_5^{10} g(x) \, dx = 4 - 5 = -1$$

- 1

$$\int_5^{10} \frac{5}{2} f(x) \, dx = \frac{5}{2} \int_5^{10} f(x) \, dx = \frac{5}{2} (4) = 10$$

- 2

$$\int_5^{10} (f - g)(x) \, dx = \int_5^{10} f(x) \, dx - \int_5^{10} g(x) \, dx = 4 - (-5) = 9$$

- 3

$$\int_5^{10} (2f + 3g)(x) \, dx = 2 \int_5^{10} f(x) \, dx + 3 \int_5^{10} g(x) \, dx = 2(4) + 3(-5) = -7$$

- 4

$$\int_5^{10} \left(-f + \frac{2}{3}g\right)(x) \, dx = - \int_5^{10} f(x) \, dx + \frac{2}{3} \int_5^{10} g(x) \, dx = -4 + \frac{2}{3}(-5) = -\frac{22}{3}$$

- 5

$$\int_5^{10} (2f - g)(x) \, dx = 2 \int_5^{10} f(x) \, dx - \int_5^{10} g(x) \, dx = 2(4) - (-5) = 13$$

- 6

التمرين - 21

أحسب التكامل I حيث $I = \int_{-1}^1 |x| + |x+1| dx$

الحل - 21

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 : x \geq -1 \\ -x-1 : x \leq -1 \end{cases} \quad |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 |x| + |x+1| dx = \int_{-1}^0 |x| + |x+1| dx + \int_0^1 |x| + |x+1| dx \quad \text{إذن :}$$

$$= \int_{-1}^0 -x + x + 1 dx + \int_0^1 x + x + 1 dx$$

$$= \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 2x + 1 dx$$

$$= [x]_{-1}^0 + [x^2 + x]_0^1$$

$$= 0 - (-1) + 1 + 1 - 0$$

$$= 3$$

نتيجة : $I = 3$

التمرين - 22

أحسب $\int_{\pi/3}^{3\pi/2} |\sin t| dt$

الحل - 22

$$|\sin t| = \begin{cases} \sin t : 0 \leq t \leq \pi \\ -\sin t : \pi \leq t \leq 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\int_{\pi/3}^{3\pi/2} |\sin t| dt = \int_{\pi/3}^{\pi} |\sin t| dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} |\sin t| dt \quad \text{إذن :}$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} -\sin t dt$$

$$= [-\cos t]_{\pi/3}^{\pi} + [\cos t]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$$= -(-1) + \frac{1}{2} + 0 - (-1)$$

$$= 5/2$$

التمرين - 23

f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ \rightarrow $f(x) = \begin{cases} x : 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x : x > 1 \end{cases}$ أحسب التكاملات التالية :

$$J = \int_2^{1/2} f(x) dx \quad -2$$

$$I = \int_0^3 f(x) dx \quad -1$$

الحل - 23

$$I = \int_0^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + [\ln x]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + \ln 3 - \ln 1$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 3$$

$$\begin{aligned}
 J &= \int_2^{1/2} f(x) dx & -2 \\
 &= \int_2^1 f(x) dx + \int_1^{1/2} f(x) dx \\
 &= \int_2^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{1/2} x dx \\
 &= [\ln x]_2^1 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^{1/2} \\
 &= \ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \\
 &= -\ln 2 - \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

التمرين 24

قارن دون حساب بين التكاملين I و J في الحالات التالية :

$$J = \int_0^1 t^2 e^t dt \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 t e^t dt \quad -1$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad -2$$

$$J = \int_1^2 u^2 \sin u du \quad \text{و} \quad I = \int_1^2 u \sin u du \quad -3$$

الحل - 24

1 - لندرس إشارة الفرق $t^2 e^t - t e^t$ على المجال $[0; 1]$ كما يلي :

$$t^2 e^t - t e^t = t e^t (t - 1) \quad \text{إذن : } t^2 e^t - t e^t \leq 0 \quad \text{لأن } t e^t \geq 0 \quad \text{و} \quad t - 1 \leq 0$$

$$\text{أي : } t^2 e^t \leq t e^t$$

$$\text{منه : } \int_0^1 t^2 e^t dt \leq \int_0^1 t e^t dt$$

$$\text{أي : } J \leq I$$

2 - ندرس إشارة الفرق $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ على المجال $[0; 1]$ كما يلي :

$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x-1}{1+x^2} \quad \text{إذن : } \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{لأن } x-1 \leq 0$$

$$\text{منه : } \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{أي : } J \leq I$$

3 - ندرس إشارة الفرق $u^2 \sin u - u \sin u$ على المجال $[1; 2]$ كما يلي :

$$u^2 \sin u - u \sin u = u \sin u (u - 1) \quad \text{إذن : } u^2 \sin u - u \sin u \geq 0 \quad \text{لأن } u \sin u \geq 0 \quad \text{و} \quad u - 1 \geq 0$$

$$\text{منه : } \int_1^2 u^2 \sin u du \geq \int_1^2 u \sin u du$$

$$\text{أي : } J \geq I$$

التمرين 25

دون حساب التكاملات التالية عين إشارتها :

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{t-2} dt \quad -4$$

$$\int_2^3 \sqrt{x-1} dx \quad -1$$

$$\int_0^2 -e^{-u+1} du \quad -5$$

$$\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x} dx \quad -2$$

$$\int_{-1/2}^1 \ln(u+1) du \quad -6$$

$$\int_0^3 t^2 + t + 1 dt \quad -3$$

الحل - 25

1- لتكن $f: x \mapsto \sqrt{x-1}$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن f موجبة فإن F متزايدة أي $F(3) > F(2)$ منه $F(3) - F(2) > 0$

$$\int_2^3 \sqrt{x-1} dx > 0 \quad \text{أي}$$

2- لتكن $f: x \mapsto \sqrt{2-x}$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن $F(-2) > F(-3)$ منه $F(-2) - F(-3) > 0$

$$\int_{-3}^{-2} \sqrt{2-x} dx > 0 \quad \text{أي}$$

3- لتكن $f: t \mapsto t^2 + t + 1$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن f موجبة فإن F متزايدة إذن $F(3) > F(0)$ منه $F(3) - F(0) > 0$

$$\int_0^3 t^2 + t + 1 dt > 0 \quad \text{أي}$$

4- لتكن $f: t \mapsto \frac{1}{t-2}$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن f سالبة على المجال $[-4; -1]$ لأن $t-2 < 0$ فإن F متناقصة على المجال $[-4; -1]$

$$F(-1) < F(-4) \quad \text{منه} \quad F(-1) - F(-4) < 0$$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{1}{t-2} dt < 0 \quad \text{أي}$$

5- لتكن $f: u \mapsto -e^{-u+1}$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن f سالبة على \mathbb{R} فإن الدالة F متناقصة تماما على \mathbb{R} إذن $F(2) < F(0)$

$$F(2) - F(0) < 0 \quad \text{منه} \quad \int_0^2 -e^{-u+1} du < 0$$

6- لتكن $f: u \mapsto \ln(u+1)$ و F دالة أصلية لها إذن $F' = f$ بما أن $-1/2 \leq u \leq 1$ فإن $1/2 \leq u+1 \leq 2$ إذن $\ln(u+1)$ يغير إشارته من أجل $u \in [-1/2; 1]$ و عليه فإن

$$\text{الدالة } f \text{ تغير إشارتها على المجال } [-1/2; 1]$$

$$\text{إذن: } F \text{ ليست رتيبة على المجال } [-1/2; 1]$$

نتيجة: لا يمكن إستنتاج إشارة التكامل $\int_{-1/2}^1 \ln(u+1) du$ دون حسابه كمايلي:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^1 \ln(u+1) du &= [(u+1) \ln(u+1) - u]_{-1/2}^1 \\ &= (2 \ln 2 - 1) - \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} > 0 \end{aligned}$$

التمرين - 26

بين أن من أجل كل x من المجال $[-\pi/4; 0]$: $1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$ ثم إستنتج أن:

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \pi \frac{\sqrt{2}}{4}$$

الحل - 26

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0$: إذن $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$ حسب الدائرة المثلثية.

$$\frac{1}{1} \leq \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

أي: $1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$ وهو المطلوب.

نتيجة : $1 \leq \frac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$ على المجال $[-\pi/4; 0]$ إذن : حسب خواص التكامل فإن :

$$\int_{-\pi/4}^0 1 dx \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \int_{-\pi/4}^0 \sqrt{2} dx$$

$$[x]_{-\pi/4}^0 \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq [x\sqrt{2}]_{-\pi/4}^0 \quad \text{أي :}$$

$$0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right) \quad \text{أي :}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\cos x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{أي : وهو المطلوب .}$$

التمرين - 27

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في الحالات التالية :

$$I = [-1; 1] \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 3 - 1$$

$$I = [-2; 2] \quad \text{و} \quad f(x) = |x| - 2$$

الحل - 27

لتكن m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال I في كل حالة .

$$m = \frac{1}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 (2x + 3 - 1) dx \quad - 1$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 + 3x]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2} [1 + 3 - (1 - 3)]$$

$$= 3$$

$$m = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 |x| dx \quad - 2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_{-2}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int_{-2}^0 -x dx + \int_0^2 x dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(0 - \left(-\frac{4}{2}\right) + \frac{4}{2} - 0 \right)$$

$$= 1$$

التمرين - 28

بين صحة مايلي :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2 + 1) dx \leq \frac{\pi}{2} \quad - 3$$

$$\int_{1/2}^1 \ln x dx \geq \frac{-\ln 2}{2} \quad - 1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \frac{1}{2} \quad - 2$$

الحل - 28

$$-\ln 2 \leq \ln x \leq 0 \quad \text{أي} \quad \ln \frac{1}{2} \leq \ln x \leq \ln 1 \quad \text{إذن :} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad - 1$$

$$\text{منه :} \quad \int_{1/2}^1 \ln x dx \geq \int_{1/2}^1 -\ln 2 dx$$

$$\int_{1/2}^1 \ln x \, dx \geq [-x \ln 2]_{1/2}^1 \quad \text{أي :}$$

$$\int_{1/2}^1 \ln x \, dx \geq -\ln 2 - \left(-\frac{1}{2} \ln 2\right) \quad \text{أي :}$$

$$\int_{1/2}^1 \ln x \, dx \geq \frac{-\ln 2}{2} \quad \text{أي :}$$

$$2 \leq 1+x^3 \leq 9 \quad \text{منه : } 1 \leq x^3 \leq 8 \quad \text{إذن : } 1 \leq x \leq 2$$

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{2} \quad \text{منه :}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} \, dx \leq \int_1^2 \frac{1}{2} \, dx \quad \text{إذن : حسب خواص التكامل}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} \, dx \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_1^2 \quad \text{أي :}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3} \, dx \leq \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{أي :}$$

$$-1 \leq \sin(x^2+1) \leq 1 \quad \text{فإن } x \text{ حقيقي}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} -1 \, dx \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \, dx \quad \text{إذن :}$$

$$[-x]_{\pi/2}^{\pi} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq [x]_{\pi/2}^{\pi} \quad \text{أي :}$$

$$-\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{أي :}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x^2+1) \, dx \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{أي :}$$

التمرين - 29

$$1 - \text{بين أن من أجل كل } x \text{ من المجال } [0; 1] : \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2$$

$$2 - \text{استنتج حصرا للتكامل } \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx$$

الحل - 29

$$1 - \text{إذن : } 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2 \quad \text{منه : لأن } x^2 \geq 0$$

$$2 - \text{بما أن } \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{x+1} \leq x^2 \text{ على المجال } [0; 1] \text{ فإن من خواص التكامل :}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx \leq \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx \leq \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{6} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} \, dx \leq \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

التمرين - 30

أثبت مايلي :

$$\int_1^4 \cos(x^2) \, dx \leq 3 \quad -1$$

$$- 2 \quad \int_0^1 x^2 \cos x \, dx \leq \frac{1}{3}$$

الحل - 30

1 - من أجل كل x من \mathbb{R} : $\cos(x^2) \leq 1$

$$\int_1^4 \cos(x^2) \, dx \leq \int_1^4 1 \, dx \quad \text{إذن :}$$

$$\int_1^4 \cos(x^2) \, dx \leq [x]_1^4 \quad \text{أي :}$$

$$\int_1^4 \cos(x^2) \, dx \leq 3 \quad \text{أي :}$$

2 - من أجل كل x من \mathbb{R} : $\cos x \leq 1$ إذن : $x^2 \cos x \leq x^2$ لأن $x^2 \geq 0$

$$\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \leq \int_0^1 x^2 \, dx \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \leq \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \quad \text{أي :}$$

$$\int_0^1 x^2 \cos x \, dx \leq \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

التمرين - 31

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب t : $1 - t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$ 2 - استنتج أن : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

الحل - 1

1 - ليكن $t \geq 0$ إذن : $t+1 \geq 1$ منه $\frac{1}{t+1} \leq 1$ (1)

$$\frac{1}{t+1} - (1-t) = \frac{1 - (1-t^2)}{t+1} = \frac{t^2}{t+1} \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$(2) \quad \frac{1}{t+1} \geq 1-t \quad \text{أي :} \quad \frac{t^2}{t+1} \geq 0 \quad \text{فإن} \quad t^2 \geq 0 \quad \text{و} \quad t+1 > 0$$

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن : من أجل $t \geq 0$: $1-t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$ 2 - حسب السؤال (1) فإن من أجل كل $t \geq 0$ فإن $1-t \leq \frac{1}{t+1} \leq 1$

$$\text{إذن :} \quad \int_0^b 1-t \, dt \leq \int_0^b \frac{1}{t+1} \, dt \leq \int_0^b 1 \, dt \quad \text{حيث} \quad b \geq 0$$

$$\text{أي :} \quad \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^b \leq [\ln|t+1|]_0^b \leq [t]_0^b$$

$$\text{أي :} \quad b - \frac{1}{2}b^2 - 0 \leq \ln|b+1| - \ln|1| \leq b - 0$$

$$\text{أي :} \quad (3) \quad b - \frac{1}{2}b^2 \leq \ln(b+1) \leq b \quad \text{لأن} \quad b \geq 0 \quad \text{إذن} \quad b+1 > 0$$

من أجل $b = x$ حيث $x \geq 0$ فإن العلاقة (3) تصبح : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x$

التمرين - 32

في كل حالة من الحالات التالية ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; 1]$ ثم استنتج حصرا للتكامل : $\int_0^1 f(x) \, dx$

$$- 1 \quad f(x) = e^x - 1$$

$$- 2 \quad f(x) = \frac{-1}{x+1}$$

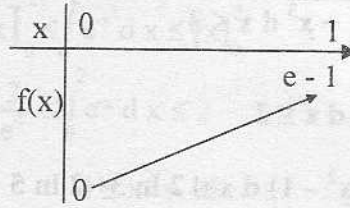
$$- 3 \quad f(x) = \ln(x+2) - 3$$

الحل - 32

$$- 1 \quad f(x) = e^x - 1$$

التغيرات على $[0; 1]$: $f(1) = e - 1$ ؛ $f(0) = 0$:
 إذن $f'(x) = e^x$: f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :



حسب جدول تغيرات الدالة f على $[0; 1]$ فإن $0 \leq f(x) \leq e - 1$:

إذن : $0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e - 1 dx$ أي $0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq [(e - 1)x]_0^1$:

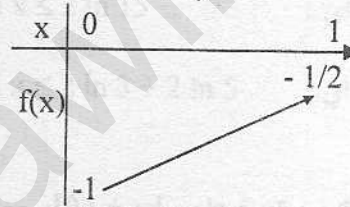
أي : $0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$:

2 - $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

التغيرات على $[0; 1]$: $f(1) = -\frac{1}{2}$ ؛ $f(0) = -1$:

إذن $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: f متزايدة تماما .

جدول التغيرات :



من جدول تغيرات الدالة f على $[0; 1]$ فإن $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}$:

إذن : $\int_0^1 -1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 -\frac{1}{2} dx$ أي $[-x]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq [-\frac{1}{2}x]_0^1$:

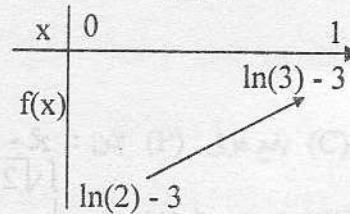
أي : $-1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq -\frac{1}{2}$:

3 - $f(x) = \ln(x+2) - 3$

التغيرات على $[0; 1]$: $f(1) = \ln(3) - 3$ ؛ $f(0) = \ln(2) - 3$:

إذن $f'(x) = \frac{1}{x+2} > 0$: f متزايدة على $[0; 1]$

جدول التغيرات :



حسب جدول تغيرات الدالة f على $[0; 1]$: $\ln(2) - 3 \leq f(x) \leq \ln(3) - 3$:

منه : $\int_0^1 \ln(2) - 3 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \ln(3) - 3 dx$:

أي : $[(\ln 2 - 3)x]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq [(\ln(3) - 3)x]_0^1$:

أي : $\ln(2) - 3 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \ln(3) - 3$:

بين صحة كل حصر مما يلي :

$$\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3 \quad -3$$

$$\frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2 \quad -4$$

$$2 \ln 3 \leq \int_2^5 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5 \quad -5$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1 \quad -1$$

$$\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq 9 \quad -2$$

الحل 33

$$0 \leq x^3 \leq 1 \quad \text{إذن } 0 \leq x \leq 1 \quad -1$$

$$1 \leq 1+x^3 \leq 2 \quad \text{منه}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq \int_0^1 1 dx \quad \text{منه}$$

$$\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq [x]_0^1 \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1 \quad \text{أي}$$

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \quad \text{إذن } 0 \leq x \leq 9 \quad -2$$

$$1 \leq 1+\sqrt{x} \leq 4 \quad \text{منه}$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_0^9 \frac{1}{4} dx \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq \int_0^9 1 dx \quad \text{منه}$$

$$\left[\frac{1}{4}x\right]_0^9 \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq [x]_0^9 \quad \text{أي}$$

$$\frac{9}{4} \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \leq 9 \quad \text{أي}$$

$$1 \leq x^3 \leq 8 \quad \text{إذن } 1 \leq x \leq 2 \quad -3$$

$$2 \leq 1+x^3 \leq 9 \quad \text{منه}$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^3} \leq 3 \quad \text{منه}$$

$$\int_1^2 \sqrt{2} dx \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq \int_1^2 3 dx \quad \text{منه}$$

$$[x\sqrt{2}]_1^2 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq [3x]_1^2 \quad \text{أي}$$

$$\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3 \quad \text{أي}$$

$$0 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{إذن } 0 \leq x \leq 2 \quad -4$$

$$-4 \leq -x^2 \leq 0 \quad \text{منه}$$

$$e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq e^0 \quad \text{منه}$$

$$\frac{1}{e^4} \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^4} dx \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq \int_0^2 1 dx \quad \text{منه :}$$

$$\left[\frac{1}{e^4} x \right]_0^2 \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq [x]_0^2 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{2}{e^4} \leq \int_0^2 e^{-x^2} dx \leq 2 \quad \text{أي :}$$

$$4 \leq x^2 \leq 16 \quad \text{إذن : } 2 \leq x \leq 4 - 5$$

$$3 \leq x^2 - 1 \leq 15 \quad \text{منه :}$$

$$\ln 3 \leq \ln(x^2 - 1) \leq \ln 15 \quad \text{منه :}$$

$$\int_2^4 \ln 3 dx \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq \int_2^4 \ln 15 dx \quad \text{إذن :}$$

$$[x \ln 3]_2^4 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq [x \ln 15]_2^4 \quad \text{أي :}$$

$$4 \ln 3 - 2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 4 \ln 15 - 2 \ln 15 \quad \text{أي :}$$

$$2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 15 \quad \text{أي :}$$

$$2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 3 + 2 \ln 5 \quad \text{أي :}$$

التمرين 34

إليك الشكل التالي :

(C) هو منحنى دالة f مستمرة على $[0; +\infty[$

(P) هو القطع المكافئ ذو المعادلة $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5$

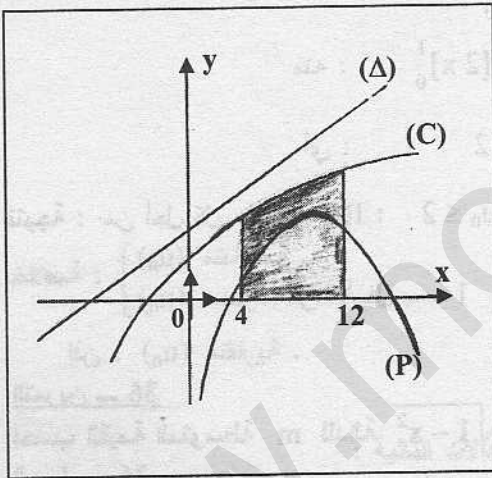
(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 2$

لتكن A مساحة مجموعة النقط $A(x; y)$

حيث $0 \leq y \leq f(x)$ و $4 \leq x \leq 12$

1 - باستعمال الشكل أثبت أن : $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

2 - إستنتج حصرا للمساحة A



الحل 34

1 - حسب الشكل لدينا (C) يقع فوق (P) إذن : $f(x) \geq -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5$

و (C) يقع تحت (Δ) إذن : $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

نتيجة : $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

2 - حسب السؤال (1) : $-\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + 2$

$$\int_4^{12} -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 dx \leq \int_4^{12} f(x) dx \leq \int_4^{12} \frac{1}{2}x + 2 dx \quad \text{إذن :}$$

$$\left[-\frac{1}{30}x^3 + x^2 - 5x \right]_4^{12} \leq \int_4^{12} f(x) dx \leq \left[\frac{1}{4}x^2 + 2x \right]_4^{12} \quad \text{أي :}$$

$$-\frac{144 \times 2}{5} + 144 - 60 - \left(-\frac{32}{15} + 16 - 20 \right) \leq \int_4^{12} f(x) dx \leq 36 + 24 - (4 + 8) \quad \text{أي :}$$

$$32.54 \leq \int_4^{12} f(x) dx \leq 48$$

أي :

$$A = \int_4^{12} f(x) dx \quad \text{لأن } 32.54 \leq A \leq 48 \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين - 35

$$u_n = \int_0^1 (1+x^n) dx \quad \text{ب- متتالية معرفة على } \mathbb{N}$$

1- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .2- هل (u_n) متقاربة ؟

الحل - 35

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 1+x^{n+1} dx - \int_0^1 1+x^n dx \quad \text{1- من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$= \int_0^1 x^{n+1} dx - \int_0^1 x^n dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{سالبا لأن } (n+2)(n+1) > 0$$

بما أن $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن (u_n) متتالية متناقصة2- لدينا : $0 \leq x \leq 1$ إذن : $0 \leq x^n \leq 1$

$$1 \leq 1+x^n \leq 2 \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 1+x^n dx \leq \int_0^1 2 dx \quad \text{منه :}$$

$$[x]_0^1 \leq \int_0^1 1+x^n dx \leq [2x]_0^1 \quad \text{منه :}$$

$$1 \leq \int_0^1 1+x^n dx \leq 2 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : من أجل كل n من \mathbb{N} : $1 \leq u_n \leq 2$ خلاصة : (u_n) متناقصة . (u_n) محدودة من الأسفل بـ 1إذن : (u_n) متقاربة .

التمرين - 36

احسب القيمة المتوسطة m للدالة $f: x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ على المجال $[-1; 1]$

الحل - 36

$$m = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

لاحظ أن العدد $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ حيث I هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز $(0; 0)$ و نصف القطر 1 والتي معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ أي $y = \sqrt{1-x^2}$ أي $y = f(x)$

$$I = \frac{1}{2} (\pi) \quad \text{إذن :}$$

$$m = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي : } m = \frac{1}{2} I \quad \text{منه :}$$

التمرين - 37

في كل حالة من الحالات التالية m هي القيمة المتوسطة للدالة f مستمرة على المجال I . فاحسب التكامل المطلوب

$$-1 \quad m=2 \quad ; \quad I=[1; 4] \quad \text{أحسب } \int_1^4 f(x) dx$$

$$\int_1^3 f(x) dx \quad I = [1; 3] \quad ; \quad m = \ln 2 \quad - 1$$

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx \quad \text{علما أن } f \text{ دالة زوجية.} \quad I = [-\pi/4; \pi/4] \quad ; \quad m = 2/\pi \quad - 3$$

الحل - 37

$$2 = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx \quad \text{أي} \quad m = \frac{1}{4-1} \int_1^4 f(x) dx \quad - 1$$

$$\int_1^4 f(x) dx = \frac{2}{1/3} \quad \text{منه}$$

$$\int_1^4 f(x) dx = 6 \quad \text{أي}$$

$$\ln 2 = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \quad \text{إذن} \quad m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx \quad - 2$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{\ln 2}{1/2} \quad \text{منه}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = 2 \ln 2 \quad \text{أي}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/4)} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx \quad \text{إذن} \quad m = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx \quad - 3$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = \frac{2/\pi}{2/\pi} \quad \text{منه}$$

$$(1) \dots \dots \dots \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi/4} f(x) dx \quad \text{لكن}$$

$$\int_{-\pi/4}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi/4} f(x) dx \quad \text{وبما أن الدالة } f \text{ زوجية فإن}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi/4} f(x) dx \quad \text{إذن}$$

$$2 \int_0^{\pi/4} f(x) dx = 1 \quad \text{منه : العلاقة (1) تصبح}$$

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = 1/2 \quad \text{أي}$$

التمرين - 38

عين حصرا للقيمة المتوسطة m للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$I = [0; 1] \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad - 1$$

$$I = [1; e] \quad , \quad f(x) = \ln x \quad - 2$$

$$I = [1; \sqrt{2}] \quad , \quad f(x) = e^{x^2} \quad - 3$$

الحل - 38

$$0 \leq x^2 \leq 1 \quad \text{إذن} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad - 1$$

$$1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \quad \text{منه}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \quad \text{إذن}$$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx \quad \text{منه}$$

$$\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq [x]_0^1 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1 \quad \text{أي :}$$

لكن $m = \int_0^1 f(x) dx$ إذن : $1/2 \leq m \leq 1$ و هو المطلوب . (لأن $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$)

$$\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \quad \text{إذن : } 1 \leq x \leq e \quad -2$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{أي :}$$

$$0 \leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e 1 dx \quad \text{منه :}$$

$$0 \leq \int_1^e f(x) dx \leq [x]_1^e \quad \text{منه :}$$

$$0 \leq \int_1^e f(x) dx \leq e - 1 \quad \text{أي :}$$

$$0 \leq \frac{1}{e-1} \int_1^e f(x) dx \leq \frac{e-1}{e-1} \quad \text{منه :}$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad \text{أي :}$$

$$1 \leq x^2 \leq 2 \quad \text{إذن : } 1 \leq x \leq \sqrt{2} \quad -3$$

$$e \leq e^{x^2} \leq e^2 \quad \text{منه :}$$

$$e \leq f(x) \leq e^2 \quad \text{أي :}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} e dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx \leq \int_1^{\sqrt{2}} e^2 dx \quad \text{منه :}$$

$$[xe]_1^{\sqrt{2}} \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx \leq [xe^2]_1^{\sqrt{2}} \quad \text{أي :}$$

$$(\sqrt{2}-1)e \leq \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx \leq (\sqrt{2}-1)e^2 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)e}{\sqrt{2}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx \leq \frac{(\sqrt{2}-1)e^2}{\sqrt{2}-1} \quad \text{منه :}$$

$$e \leq m \leq e^2 \quad \text{أي :}$$

التمرين - 39

f دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_n = \int_0^n f(x) dx$

1 - بين أن (u_n) متزايدة

2 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{n-1}{2}$

3 - هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

الحل - 39

1 - من أجل كل n من \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx \\ &= \int_0^n f(x) dx + \int_n^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx \\ &= \int_n^{n+1} f(x) dx \end{aligned}$$

لتكن F دالة أصلية لـ f على $[0; +\infty[$ إذن : $u_{n+1} - u_n = F(n+1) - F(n)$

لكن $f(x) > 0$ على المجال $[0; +\infty[$ إذن : F متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ لأن $F'(x) = f(x)$

منه : $F(n+1) > F(n)$ أي $F(n+1) - F(n) > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

نتيجة : (u_n) متزايدة تماما .

2- من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\int_1^n \frac{x}{x+1} dx \geq \int_1^n \frac{1}{2} dx$$

$$\int_1^n f(x) dx \geq \left[\frac{1}{2}x\right]_1^n$$

$$\int_1^n f(x) dx \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^n f(x) dx \geq \frac{n-1}{2}$$

لكن من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^n f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^n f(x) dx$$

بما أن $\int_0^1 f(x) dx > 0$ لأن F متزايدة تماما فإن : $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^n f(x) dx > \frac{n-1}{2}$

نتيجة : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{n-1}{2}$

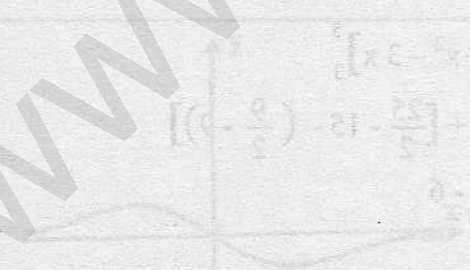
3- لدينا : $u_n > \frac{n-1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty$$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 f(x) dx \\ u_0 &= \int_0^0 f(x) dx = 0 \end{aligned} \right\}$$

ملاحظة : (u_n) متزايدة تماما إذن $u_1 > u_0$ أي $\int_0^1 f(x) dx > 0$ حيث



التمرين - 39

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

1 - بين أن : $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

2 - هل المتتالية (u_n) متقاربة .

الحل - 39

1 - من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: إذا كان $n \leq x \leq n+1$ فإن $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$

منه : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$

أي : $[\frac{1}{n+1}x]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq [\frac{1}{n}x]_n^{n+1}$

أي : $\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n}$

أي : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ وهو المطلوب .

2 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ - 2

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ أي (u_n) متقاربة نحو 0

التمرين - 40

f دالة معرفة على المجال $[2; 5]$ بـ $f(x) = x - 3$ و محور الفواصل و المستقيمين اللذان معادلاتهما $x = 2$ و $x = 5$ أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f

الحل - 40

لندرس وضعية دالة f بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[2; 5]$

| | | | |
|---------|---|---|---|
| x | 2 | 3 | 5 |
| $x - 3$ | - | 0 | + |

نتيجة : لما $x \in [2; 3[$: المنحنى تحت محور الفواصل (f سالبة)

لما $x \in]3; 5]$: المنحنى فوق محور الفواصل (f موجبة)

منه : المساحة S للحيز المحدود بالمنحنى الممثل للدالة f و محور الفواصل و المستقيمتين اللذان معادلاتهما $x = 2$

و $x = 5$ هي : $S = \int_2^3 -f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$

$= \int_2^3 (3-x) dx + \int_3^5 (x-3) dx$

$= [3x - \frac{1}{2}x^2]_2^3 + [\frac{1}{2}x^2 - 3x]_3^5$

$= [9 - \frac{9}{2} - (6 - 2)] + [\frac{25}{2} - 15 - (\frac{9}{2} - 9)]$

$= 5 - \frac{9}{2} + \frac{25}{2} - \frac{9}{2} - 6$

$= \frac{25}{2} - 10$

$= 5/2$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين - 41

f دالة معرفة على $[-2; 2]$ بـ $f(x) = \begin{cases} -x : x \in [-2; 2] \\ 2x - 6 : x \in [2; 3] \end{cases}$

أحسب $\int_{-2}^3 f(x) dx$

الحل - 41

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 -x dx + \int_2^3 2x - 6 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^2 + \left[x^2 - 6x \right]_2^3$$

$$= [-2 - (-2)] + [9 - 18 - (4 - 12)]$$

$$= -1$$

بما أن f مستمرة على $[-2; 3]$ فإن :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 : -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 : 0 < x \leq 3 \\ x-5 : 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

التمرين - 42

أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلاتهما $x=5$ و $x=-1$

الحل - 42

f مستمرة على المجال $[-1; 5]$ إذن : يكفي تحديد وضعية منحنى الدالة f بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[-1; 5]$ كمايلي :

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | 3 | 5 | $+\infty$ |
|--------|-----------|----|---|---|---|---|-----------|
| $x+1$ | - | 0 | + | + | | | |
| $-x+1$ | | + | + | 0 | - | - | |
| $x-5$ | | | - | - | - | 0 | + |

نتيجة : لما $-1 \leq x \leq 0$ فإن $f(x) \geq 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $0 \leq x \leq 1$ فإن $f(x) \geq 0$ أي المنحنى فوق محور الفواصل

لما $1 \leq x \leq 3$ فإن $f(x) \leq 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

لما $3 \leq x \leq 5$ فإن $f(x) \leq 0$ أي المنحنى تحت محور الفواصل

إذن : المساحة S للحيز المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيمتين اللذين معادلاتهما $x=5$ و $x=-1$ هي كمايلي :

$$S = \int_{-1}^0 x+1 dx + \int_0^1 -x+1 dx + \int_1^3 -(-x+1) dx + \int_3^5 -(x-5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x \right]_3^5$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \frac{-1}{2} + 1 - 0 + \frac{9}{2} - 3 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \frac{25}{2} + 25 - \left(\frac{-9}{2} + 15 \right)$$

$$= 5$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدرة بوحدة قياس المساحة .

التمرين - 43

إليك المنحنى (C) ذو المعادلة $y = \frac{-x}{(x^2+1)^2}$ في معلم متعامد

1 - عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور

الفواصل و محور الترتيب و المستقيم (D) ذو المعادلة $x=1$

2 - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند المبدأ .

3 - احسب المساحة A_2 لتمثلت المحدد بـ (T) و محور الفواصل

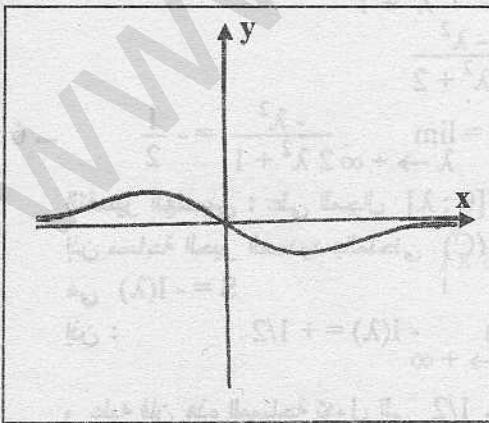
و المستقيم (D) و محور الترتيب .

4 - استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بـ المنحنى (C)

و المماس (T) و المستقيم (D) و محور الترتيب .

5 - احسب $I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{-x}{(x^2+1)^2} dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما

6 - احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .



1 - حسب الشكل فإن المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[0; 1]$ إذن :

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \left[\frac{-x}{(x^2+1)^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2+1)^{-2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x^2+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2} + 1 \right] \end{aligned}$$

مقدر بوحدة قياس المساحة . $= 1/4$

2 - نضع $f(x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2}$ إذن : معادلة المماس (T) نكتب من الشكل : $y = f'(0)x + f(0)$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)^2 + 2x(2x)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} \quad \text{حيث :}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f'(0) = -1$$

$$\text{إذن : (T) له المعادلة } y = -x$$

3 - على المجال $[0; 1]$ المستقيم (T) يقع تحت محور الفواصل إذن :

$$A_2 = \int_0^1 (-x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

مقدر بوحدة قياس المساحة .

4 - لندرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (T) على المجال $[0; 1]$:

$$f(x) - (-x) = \frac{-x}{(x^2+1)^2} + x = x \left[1 - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right]$$

$$\text{بما أن } x \geq 0 \quad \text{و} \quad 1 - \frac{1}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad \text{فإن } f(x) - (-x) \geq 0$$

إذن : المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (T) على المجال $[0; 1]$

$$\text{منه : } A = A_2 - A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

مقدرة بوحدة المساحة

$$\int_0^\lambda \frac{-x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad -5$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x^2+1} \right]_0^\lambda$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{-1}{\lambda^2+1} + 1 \right]$$

$$= \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+2}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda^2}{2\lambda^2+2} = -\frac{1}{2} \quad -6$$

التفسير الهندسي : على المجال $[0; \lambda]$ المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل .

إذن مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل و محور الترتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = \lambda$

$$\text{هي } S = -I(\lambda)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -I(\lambda) = +1/2 \quad \text{إذن :}$$

و عليه فإن هذه المساحة تتؤول إلى $1/2$.

التمرين - 44

1 - عدد حقيقي موجب تماما . باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0; +\infty[$

الحل - 44

1 - نضع $\left. \begin{aligned} u(t) &= \ln t \\ v'(t) &= 1/t^2 \end{aligned} \right\}$ إذن $\left. \begin{aligned} u'(t) &= 1/t \\ v(t) &= -1/t \end{aligned} \right\}$

منه : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^x u(t) \cdot v'(t) dt$

$= [u(t) \cdot v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t) \cdot v(t) dt$

$= \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

$= \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x + \left[\frac{-1}{t} \right]_1^x$

$= \frac{-\ln x}{x} - \frac{-\ln 1}{1} + \frac{-1}{x} - \frac{-1}{1}$

$= 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

2 - حسب السؤال (1) : $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 0$

إذن : الدالة $x \mapsto 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ على $]0; +\infty[$

و التي تتعدم من أجل $x = 1$

تحقيق : ليكن $F(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

إذن : $F(1) = 1 - 1 - 0 = 0$

و $F'(x) = \frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$

التمرين - 45

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية :

1 - $\int_1^e x \ln x dx$

2 - $\int_2^e \ln(x-1) dx$

3 - $\int_0^\pi x \cos x dx$

4 - $\int_0^1 x e^x dx$

الحل - 45

1 - نضع $\left. \begin{aligned} u(x) &= \ln x \\ v'(x) &= x \end{aligned} \right\}$ إذن $\left. \begin{aligned} u'(x) &= 1/x \\ v(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \right\}$

منه : $\int_1^e x \ln x dx = \int_1^e v'(x) u(x) dx$

$= [u(x) \cdot v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) \cdot v(x) dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) dx$

$= \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x-1 \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ نضع } -2$$

$$\int_2^e \ln(x-1) dx = \int_2^e u(x) \cdot v'(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$= [u(x) \cdot v(x)]_2^e - \int_2^e u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$= [(x-1) \ln(x-1)]_2^e - \int_2^e \frac{x-1}{x-1} dx$$

$$= (e-1) \ln(e-1) - 1 \ln 1 - \int_2^e 1 dx$$

$$= (e-1) \ln(e-1) - [x]_2^e$$

$$= (e-1) \ln(e-1) - (e-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \end{array} \right\} \text{ نضع } -3$$

$$\int_0^\pi x \cos x dx = \int_0^\pi u(x) \cdot v'(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$= [u(x) \cdot v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x) v(x) dx$$

$$= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx$$

$$= \pi \sin \pi - 0 - [-\cos x]_0^\pi$$

$$= -(-\cos \pi + \cos 0)$$

$$= -2$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ نضع } -4$$

$$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 u(x) \cdot v'(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$= [u(x) \cdot v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) v(x) dx$$

$$= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - 0 - [e^x]_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-2}{3} (1-x)^{3/2} \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{1-x} \end{array} \right\} \text{ نضع } -5$$

$$\int_{-1}^0 x \sqrt{1-x} dx = \int_{-1}^0 u(x) v'(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$= [u(x) \cdot v(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'(x) v(x) dx$$

$$= \left[\frac{-2}{3} x(1-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

$$= 0 - \frac{2}{3} (2)^{3/2} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{\frac{3}{2} + 1} (1-x)^{\frac{3}{2} + 1} \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{-2}{3}(2\sqrt{2}) - \frac{4}{15}[(1-x)^{5/2}]_{-1}^0$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-(2)^{5/2})$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}(1-4\sqrt{2})$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}-4}{15}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{2x-3} \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \end{array} \right\} \text{ نضع } - 6$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx = [x\sqrt{2x-3}]_2^3 - \int_2^3 \sqrt{2x-3} dx \quad \text{منه :}$$

$$= 3\sqrt{3}-2\sqrt{1} - \frac{1}{2} \int_2^3 2(2x-3)^{1/2} dx$$

$$= 3\sqrt{3}-2 - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (2x-3)^{3/2} \right]_2^3$$

$$= 3\sqrt{3}-2 - \frac{1}{3} (3\sqrt{3}-1)$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x-2 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ نضع } - 7$$

$$\int_1^2 (x-2)e^x dx = [(x-2)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \quad \text{منه :}$$

$$= 0 - (-e) - [e^x]_1^2$$

$$= e - (e^2 - e)$$

$$= 2e - e^2$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos 3x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = 3 \sin 3x \end{array} \right\} \text{ نضع } - 8$$

$$\int_0^{\pi/3} 3x \sin 3x dx = [-x \cos 3x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos 3x dx \quad \text{منه :}$$

$$= -\frac{\pi}{3} \cos \pi - 0 + \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \sin \pi - 0$$

$$= \pi/3$$

التمرين - 46

1 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2 - بلستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} dx$

الحل - 46

1 - من أجل كل x من \mathbb{R} : $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^x}{e^x+1}$

2 - التكامل بالتجزئة :

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{e^x+1} \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$\int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \left[\frac{-x}{e^x + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

منه :

$$= \frac{-1}{e+1} - 0 - \int_0^1 \frac{-1}{e^x + 1} dx$$

$$\frac{-1}{e^x + 1} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} \quad \text{لأن حسب السؤال الأول} = \frac{-1}{e+1} - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx$$

$$= \frac{-1}{e+1} - [\ln(e^{-x} + 1)]_0^1$$

$$= \frac{-1}{e+1} - \left[\ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) - \ln(1 + 1) \right]$$

$$= \frac{-1}{e+1} - \ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

التمرين - 47

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين متتابعين أحسب $\int_0^1 x^2 e^x dx$

الحل - 47

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذن :} \\ u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx \dots\dots\dots (1) \quad \text{منه :}$$

لنحسب الآن $\int_0^1 2x e^x dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذن} \\ u'(x) = 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^1 2x e^x dx = [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2 e^x dx$$

منه :

$$= 2e - 0 - 2[e^x]_0^1$$

$$= 2e - 2(e - 1)$$

$$= 2$$

نعوض الآن $\int_0^1 2x e^x dx$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2$$

$$= e - 0 - 2$$

$$= e - 2$$

التمرين - 48

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx$

الحل - 48

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذن :} \\ u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx = [-x^2 \cos x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} 2x \cos x dx \dots\dots\dots (1) \quad \text{منه :}$$

لنحسب الآن $\int_0^{\pi/4} 2x \cos x dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذن} \\ u'(x) = 2 \\ v(x) = \sin x \end{array} \right\}$$

$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos x dx = [2x \sin x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2 \sin x dx$$

منه :

$$= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} - 0 + [2 \cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} - 2 \cos(0)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$$

نعوض الآن $\int_0^{\pi/4} 2x \cos x dx \rightarrow \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi/4} x^2 \sin x dx = [-x^2 \cos x]_0^{\pi/4} + \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{16} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 + \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$$

$$= -\frac{\pi^2}{32}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$$

التمرين 49

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$ باستخدام التكامل بالتجزئة مرتين أحسب I_n بدلالة n

الحل 49

نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos nx \end{array} \right\}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\}$ حيث $n \neq 0$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left[\frac{x^2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2x}{n} \sin nx dx$$

$$= \frac{\pi^2}{n} \sin n\pi - 0 - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= -\frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \dots\dots\dots (1)$$

لنحسب الآن $\int_0^{\pi} x \sin nx dx$ باستخدام التكامل بالتجزئة كمايلي :

نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \sin nx \end{array} \right\}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\}$

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n} \cos nx dx$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi - 0 + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} (\sin n\pi - \sin 0)$$

$$= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi$$

نعوض الآن $\int_0^{\pi} x \sin nx dx \rightarrow -\frac{\pi}{n} \cos n\pi$ في المساواة (1) فنحصل على :

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = -\frac{2}{n} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi \right)$$

$$I_n = \frac{2\pi}{n^2} \cos n\pi$$

$$I_n = \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n$$

$$\cos n\pi = (-1)^n \text{ أي } \cos n\pi = \begin{cases} 1 : \text{زوجي } n \\ -1 : \text{فردية } n \end{cases}$$

التمرين - 50

في كل حالة من الحالات التالية وباستعمال التكامل بالتجزئة، عين دالة أصلية F للدالة f على المجال I والتي تحقق $f(a) = 0$ حيث a معطى.

1 - $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ حيث $I =]0; +\infty[$ و $a = 1$

2 - $f(x) = 2x e^{-x}$ حيث $I = \mathbb{R}$ و $a = 0$

3 - $f(x) = x^2 \ln x$ حيث $I =]0; +\infty[$ و $a = 1$

الحل - 50

الدالة الأصلية للدالة f ، والتي تتعدم عند a معرفة بـ $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ كمايلي :

1 - نضع $\left. \begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1/t^2 \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = -1/t \end{array} \right\}$

منه : من أجل $x > 0$ فإن :

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{-\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{-\ln x}{x} - 0 - \left[\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= \frac{-\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{x} (1 + \ln x) \end{aligned}$$

نتيجة : $F(x) = 1 - \frac{1}{x} (1 + \ln x)$

$F(1) = 1 - 1(1 + 0) = 0$

تحقيق :

$F'(x) = \frac{1}{x^2} (1 + \ln x) - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = f(x)$

2 - ليكن $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 2t e^{-t} dt$

نضع $\left. \begin{array}{l} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t} \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right\}$

إذن :

$$\begin{aligned} F(x) &= [-2t e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2e^{-t} dt \\ &= -2x e^{-x} - [2e^{-t}]_0^x \\ &= -2x e^{-x} - (2e^{-x} - 2) \\ &= 2 - 2x e^{-x} - 2e^{-x} \end{aligned}$$

نتيجة : $F(x) = 2 - 2x e^{-x} - 2e^{-x}$

$F(0) = 2 - 0 - 2 = 0$

تحقيق :

$F'(x) = -2e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} = 2x e^{-x} = f(x)$

3 - ليكن $x > 0$ $F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 \ln t dt$

نضع $\left. \begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = t^2 \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = \frac{1}{3} t^3 \end{array} \right\}$

منه :

$$F(x) = \left[\frac{1}{3} t^3 \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3} t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} (x^3 - 1)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{9}$$

نتيجة :

$$F'(x) = x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} x^2 = x^2 \ln x = f(x) \quad \text{تحقيق :}$$

التمرين 51

نضع : $I = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx$ و $J = \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$

1 - أحسب $J + I$

2 - تحقق أن : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) \, dx$

3 - استنتج قيم كل من I و J

الحل 51

1 - $I + J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx + \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx$$

لأن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \int_0^{\pi/2} x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

2 - $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx - \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} x(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

لأن $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$$

3 - باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب : $I - J = \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$

نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos 2x \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\}$

$$I - J = \left[\frac{x}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \sin \pi - 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2} \cos(0) \right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} I + J = \frac{\pi^2}{8} \\ I - J = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$ إذن

$$I = \frac{\pi^2 - 4}{16}$$

$$J = \frac{\pi^2 + 4}{16}$$

أي

التمرين - 52

- (C) منحنى الدالة f على المجال $[0; 1]$ حيث $f(x) = x^2 - 3x + 2$
- 1 - أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال $[0; 1]$
 - 2 - أحسب v الحجم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحل - 52

1 - لندرس إشارة الدالة f على المجال $[0; 1]$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{3-1}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{إذن } \Delta = 9 - 8 = 1$$

| | | | | |
|-----------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | 2 | $+\infty$ |
| $f(x) = x^2 - 3x + 2$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ |

منه :

إذن : على المجال $[0; 1]$ المنحنى (C) فوق محور الفواصل $(f(x) \geq 0)$

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{إذن :}$$

$$\alpha = \int_0^1 x^2 - 3x + 2 dx \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = 5/6 \quad \text{أي :}$$

$$v = \int_0^1 \pi(x^2 - 3x + 2)^2 dx \quad -2$$

$$= \pi \int_0^1 x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{13}{3} - 6 + 4 \right)$$

$$= \frac{\pi}{30} (6 - 45 + 130 - 60)$$

$$= \frac{31}{30} \pi \quad \text{مقدر بوحدة قياس الحجم}$$

التمرين - 53

- (C) منحنى الدالة f على المجال $[0; 1]$ حيث $f(x) = (x-1)e^x$
- 1 - أحسب α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال $[0; 1]$
 - 2 - أحسب v حجم الجسم المولد بدوران المنحنى (C) حول محور الفواصل .

الحل - 53

1 - على المجال $[0; 1]$ لدينا $x-1 \leq 0$ إذن : $(x-1)e^x \leq 0$ لأن $e^x > 0$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{منه :}$$

$$\alpha = \int_0^1 -f(x) dx \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \int_0^1 (x-1)e^x dx \quad \text{أي :}$$

التكامل بالتجزئة : نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x - 1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\}$

$\alpha = [(x-1)e^x]_1^0 - \int_1^0 e^x dx$ منه .

$\alpha = -e^0 - 0 - [e^x]_1^0$ أي :

$\alpha = -1 - (1 - e)$ أي :

$\alpha = e - 2$ أي :

$v = \int_0^1 \pi [(x-1)e^x]^2 dx$ - 2

$= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) e^{2x} dx$

$= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx - 2\pi \int_0^1 x e^{2x} dx + \pi \int_0^1 e^{2x} dx \dots \dots \dots (1)$

لنحسب $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx$ بالتجزئة :

نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{2x} \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\}$

$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \left[\frac{x^2}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx$ منه :

$= \frac{e^2}{2} - \int_0^1 x e^{2x} dx \dots \dots \dots (2)$

لنحسب $\int_0^1 x e^{2x} dx$ بالتجزئة :

نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\}$

$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$ منه :

$= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1)$

$= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$

نتيجة (1) المساواة (2) تصبح : $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

نرجع إلى المساواة (1) : $V = \pi \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) - 2\pi \int_0^1 x e^{2x} dx + \pi \int_0^1 e^{2x} dx$

$\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$ لأن $= \frac{\pi e^2}{4} - \frac{\pi}{4} - 2\pi \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$

$= \frac{\pi}{4} [e^2 - 1 - 2e^2 - 2 + 2e^2 - 2]$

مقدر بوحدة قياس الحجم $= \frac{\pi}{4} (e^2 - 5)$

التمرين - 54

1 - أحسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

ليكن $J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$

2 - أحسب $I + J$ ثم استنتج قيمة J .

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{الحل - 54} \quad -1$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad -2$$

$$= \int_0^1 \frac{x+x^3}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^1 x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= 1/2$$

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \ln 2 \\ I + J = 1/2 \end{array} \right\} \text{نتيجة :} \quad \text{إذن : } J = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{أي : } J = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

التمرين - 55

f دالة معرفة على IR $\rightarrow f(x) = (1-x)e^x$ 1- بين أن من أجل كل x من IR : $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ 2- استنتج $\int_0^1 f(x) dx$

الحل - 55

$$f'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -e^x + e^x - x e^x = -x e^x \quad \text{1- من أجل كل } x \text{ من IR :}$$

$$f''(x) = -e^x - x e^x \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) + f''(x) = (1-x)e^x - e^x - x e^x \quad \text{منه :}$$

$$= e^x(1-x-1-x)$$

$$= -2x e^x$$

$$= 2f'(x) \text{ وهو المطلوب .}$$

$$f(x) + f''(x) = 2f'(x)$$

2- حسب السؤال (1) فإن :

$$f(x) = 2f'(x) - f''(x)$$

إذن :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2f'(x) dx - \int_0^1 f''(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 2[f(x)]_0^1 - [f'(x)]_0^1 \quad \text{أي :}$$

لأن $\left. \begin{array}{l} f \text{ دالة أصلية لـ } f' \\ f'' \text{ دالة أصلية لـ } f' \end{array} \right\}$

$$\int_0^1 f(x) dx = 2[(1-x)e^x]_0^1 - [-x e^x]_0^1 \quad \text{أي :}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 2(0-1) - (-e-0) \quad \text{أي :}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = e-2 \quad \text{أي :}$$

التمرين - 56

f دالة معرفة على IR $\rightarrow f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$

$$1 - \text{بين أن من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

2 - استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

3 - α عدد حقيقي موجب تماما. أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ منحنى الدالة f و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلتهما $x=0$ و $x=\alpha$

الحل - 56

$$1 - \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^x} e^{-2x}$$

$$= -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{2e^{-x}}{1+2e^x} + 2e^{-2x} \ln(1+2e^x) \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$2 - \text{حسب السؤال (1) : } f'(x) + 2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$2f(x) = \frac{2e^{-x}}{1+2e^x} - f'(x) \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^x} - \frac{1}{2} f'(x) \quad \text{أي :}$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx - \int \frac{1}{2} f'(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) \quad \text{لأن } \int f(x) dx = \frac{-1}{2} f(x) + \int \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx \quad \text{منه :}$$

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{2} f(x) + \int \frac{e^{-x}}{e^x(e^{-x}+2)} dx \quad \text{منه :}$$

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{2} f(x) + \int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} dx \quad \text{منه :}$$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2} \quad \text{إذن :}$$

$$\int \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} dx = \int e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2} dx \quad \text{منه :}$$

$$= -e^{-x} + 2 \ln |e^{-x}+2|$$

$$\text{نتيجة : } F(x) = \int f(x) dx = \frac{-1}{2} e^{-2x} \ln(1+2e^x) - e^{-x} + 2 \ln |e^{-x}+2|$$

و هي عبارة الدالة الأصلية للدالة f .

$$\text{تحقيق : } F'(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x) - \frac{1}{2} e^{-2x} \left(\frac{2e^x}{1+2e^x} \right) + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

$$= e^{-2x} \ln(1+2e^x) - \frac{e^{-x}}{1+2e^x} + e^{-x} - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(1+2e^x)}$$

$$= e^{-2x} \ln(1+2e^x) - \frac{e^{-x}}{1+2e^x} + e^{-x} - \frac{2}{1+2e^x}$$

$$= e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{-e^{-x} + e^{-x}(1+2e^x) - 2}{1+2e^x}$$

$$= e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{-e^{-x} + e^{-x} + 2 - 2}{1+2e^x}$$

$$= e^{-2x} \ln(1+2e^x) + 0$$

$$= f(x)$$

3 - لاحظ أن $f(x) > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R} إذن : $A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

$$= \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) - e^{-x} + 2 \ln(e^{-x} + 2) \right]_0^\alpha$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1 + 2e^\alpha) - e^{-\alpha} + 2 \ln(e^{-\alpha} + 2) - \left(-\frac{1}{2} \ln 3 - 1 + 2 \ln 3 \right)$$

$$\text{مقدر بوحدة المساحة} = \frac{-1}{2} e^{-2\alpha} \ln(1 + 2e^\alpha) - e^{-\alpha} + 2 \ln(e^{-\alpha} + 2) + 1 - \frac{3}{2} \ln 3$$

التمرين - 57

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} dx \quad \text{ليكن}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx \quad \text{1 - أحسب}$$

2 - أحسب $I + J$ ثم استنتج قيمة I .

الحل - 57

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos x}{1 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} [\ln |1 + 2 \sin x|]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{\ln 3}{2} \quad \text{1 -}$$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + 2 \sin x} + \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \cos x}{1 + 2 \sin x} dx \quad \text{2 -}$$

لدينا : $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

منه : $\sin 2x + \cos x = 2 \sin x \cos x + \cos x = \cos x(1 + 2 \sin x)$

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1 + 2 \sin x)}{1 + 2 \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} I + J = 1 \\ J = \frac{\ln 3}{2} \end{aligned} \right\} \text{لدينا :} \quad \text{إذن :} \quad I = 1 - \frac{\ln 3}{2} = \frac{2 - \ln 3}{2}$$

التمرين - 58

المستوي منسوب إلى معلم متعامد .

r عدد حقيقي موجب تماما. (C) منحنى معادلته $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

1 - حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x; y)$ حيث $0 \leq x \leq r$ و $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$

$$2 - \text{استنتج} \quad \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \text{و} \quad \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

الحل - 58

1 - (C) له المعادلة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ أي $y^2 = r^2 - x^2$ أي $x^2 + y^2 = r^2$ مع $y \geq 0$

إذن : (C) هو نصف الدائرة التي مركزها $O(0; 0)$ و نصف قطرها r و الواقع فوق محور الفواصل .

منه : مجموعة النقط M ذات الإحداثيات $(x; y)$ حيث $0 \leq x \leq r$ و $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$ هو حيز المستوي المحدد

بالمحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمات التي معادلاتها $x = r$ و $x = 0$ و هذا الجزء هو ربع الدائرة ذات

المركز O و نصف القطر r و التي مساحتها $S = \pi r^2$

2 - حسب السؤال السابق العدد $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ هو مساحة ربع الدائرة التي نصف قطرها r

$$\text{إذن :} \quad \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} r^2$$

$$\text{نفس الشيء بالنسبة لـ} \quad \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \text{إذن :} \quad \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} r^2$$

التمرين - 59

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1 - x}$

1 - عين الأعداد الحقيقية $a; b; c; d$ حيث من أجل $x \neq 1$: $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1 - x}$

$$I = \int_0^{1/2} f(x) dx \quad \text{2 - أحسب}$$

$$J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) dx \quad \text{3 - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب}$$

الحل - 59

1 - من أجل $x \neq 1$ فإن :

$$f(x) = -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x}$$

تحقيق :

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x} &= \frac{-x^2 + x^3 + 5x - 5x^2 + 4 - 4x - 4}{1-x} \\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x & 1-x \\ \hline x^3 - x^2 & -x^2 + 5x + 4 \\ \hline -5x^2 + x & \\ -5x^2 + 5x & \\ \hline -4x & \\ -4x + 4 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$$I = \int_0^{1/2} f(x) dx \quad \text{2 -}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/2} -x^2 + 5x + 4 - \frac{4}{1-x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 4 \ln|1-x| \right]_0^{1/2} \\ &= -\frac{1}{24} + \frac{5}{8} + 2 + 4 \ln \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{31}{12} - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

$$J = \int_0^{1/2} (3x^2 - 12x + 1) \ln(1-x) dx \quad \text{3 -}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = \frac{-1}{1-x} \\ v(x) = x^3 - 6x^2 + x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} u(x) = \ln(1-x) \\ v'(x) = 3x^2 - 12x + 1 \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} J &= [(x^3 - 6x^2 + x) \ln(1-x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{(x^3 - 6x^2 + x)}{1-x} dx \quad \text{منه :} \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{1}{2} - 0 + \int_0^{1/2} \frac{x^3 - 6x^2 + x}{1-x} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1-12+4}{8} \ln \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} f(x) dx$$

$$= \frac{-7}{8} \ln \frac{1}{2} + I$$

$$= \frac{7}{8} \ln 2 + \frac{31}{12} - 4 \ln 2$$

$$= \frac{31}{12} - \frac{25}{8} \ln 2$$

التمرين - 60

باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I و التي تتعدم من أجل القيمة α في كل حالة من الحالات التالية :

$$\alpha = 1 \quad \text{و} \quad I =]0; +\infty[\quad : \quad f(t) = \ln(t^2) \quad \text{- 1}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R} \quad : \quad f(t) = (2t+1) \sin t \quad \text{- 2}$$

$$\alpha = 0 \quad \text{و} \quad I =]-1; +\infty[\quad : \quad f(t) = \ln(t+1) \quad \text{- 3}$$

$$\alpha = -1 \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R} \quad : \quad f(t) = (t+1)^2 e^{2t} \quad \text{- 4}$$

الحل - 60

في كل حالة الدالة F الأصلية لـ f تتعدم عند α معرفة بـ $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$

$$f(t) = 2 \ln t \quad : \quad]0; +\infty[\quad \text{على المجال} \quad \text{إذن :} \quad f(t) = \ln(t^2) = 2 \ln|t| \quad \text{- 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = 1/t \\ v(t) = 2t \end{array} \right\} \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 2 \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$F(x) = \int_1^x 2 \ln t \, dt \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} &= [2t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t} dt \\ &= 2x \ln x - 0 - \int_1^x 2 dt \\ &= 2x \ln x - [2t]_1^x \\ &= 2x \ln x - (2x - 2) \\ &= 2x \ln x - 2x + 2 \end{aligned}$$

$$F(1) = 0 - 2 + 2 = 0 \quad \text{تحقيق :}$$

$$F'(x) = 2 \ln x + \frac{2x}{x} - 2 = 2 \ln x = \ln x^2 = f(x)$$

$$F(x) = \int_0^x (2t + 1) \sin t \, dt \quad -2$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = 2 \\ v(t) = -\cos t \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = 2t + 1 \\ v'(t) = \sin t \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$F(x) = [- (2t + 1) \cos t]_0^x - \int_0^x 2 \cos t \, dt \quad \text{منه :}$$

$$\begin{aligned} &= - (2x + 1) \cos x + 1 + 2[\sin t]_0^x \\ &= - (2x + 1) \cos x + 1 + 2 \sin x \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_0^x \ln(t + 1) \, dt \quad -3$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{t+1} \\ v(t) = t+1 \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = \ln(t+1) \\ v'(t) = 1 \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$F(x) = [(t + 1) \ln(t + 1)]_0^x - \int_0^x \frac{t+1}{t+1} dt \quad \text{منه :}$$

$$\begin{aligned} &= (x + 1) \ln(x + 1) - 0 - \int_0^x 1 \, dt \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - [t]_0^x \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - x \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-1}^x (t + 1)^2 e^{2t} \, dt \quad -4$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = 2(t + 1) \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2t} \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = (t + 1)^2 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2} (t + 1)^2 e^{2t} \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{(x + 1)^2}{2} e^{2x} - \int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt \dots\dots\dots (1)$$

لنحسب بالتجزئة $\int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt$ كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2} e^{2t} \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u(t) = t + 1 \\ v'(t) = e^{2t} \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$\int_{-1}^x (t + 1) e^{2t} \, dt = \left[\frac{t+1}{2} e^{2t} \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{1}{2} e^{2t} \, dt = \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{-1}^x \quad \text{منه :}$$

$$\int_{-1}^x (t+1) e^{2t} dt = \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2}) \quad \text{أي :}$$

$$F(x) = \frac{(x+1)^2}{2} e^{2x} - \frac{x+1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2}) \quad \text{بالرجوع إلى العلاقة (1) :}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2}$$

$$= \frac{x^2 + x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2}$$

التمرين - 61

باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين عين دالة أصلية F للدالة f على IR

حيث $f(t) = e^{-2t} \cos t$ و $F(0) = 0$

الحل - 61

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t} \cos t dt$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(t) = -2 e^{-2t} \\ v(t) = \sin t \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \cos t \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$\int_0^x e^{-2t} \cos t dt = [e^{-2t} \sin t]_0^x - \int_0^x -2 e^{-2t} \sin t dt \dots\dots\dots (1) \quad \text{منه :}$$

لنحسب الآن بالتجزئة $\int_0^x -2 e^{-2t} \sin t dt$ كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} u'(t) = -4 e^{-2t} \\ v(t) = \cos t \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} u(t) = 2 e^{-2t} \\ v'(t) = -\sin t \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$\int_0^x -2 e^{-2t} \sin t dt = [2 e^{-2t} \cos t]_0^x - \int_0^x -4 e^{-2t} \cos t dt \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^x -2 e^{-2t} \sin t dt = [2 e^{-2t} \cos t]_0^x + 4 \int_0^x e^{-2t} \cos t dt \quad \text{أي :}$$

بالتعويض في المساواة (1) نحصل على :

$$\int_0^x e^{-2t} \cos t dt = [e^{-2t} \sin t]_0^x - ([2 e^{-2t} \cos t]_0^x + 4 \int_0^x e^{-2t} \cos t dt)$$

$$\int_0^x e^{-2t} \cos t dt + 4 \int_0^x e^{-2t} \cos t dt = [e^{-2t} \sin t]_0^x - [2 e^{-2t} \cos t]_0^x \quad \text{أي :}$$

$$5 \int_0^x e^{-2t} \cos t dt = e^{-2x} \sin x - (2 e^{-2x} \cos x - 2) \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^x e^{-2t} \cos t dt = \frac{1}{5} (e^{-2x} \sin x - 2 e^{-2x} \cos x + 2) \quad \text{أي :}$$

$$F(x) = \frac{1}{5} (e^{-2x} \sin x - 2 e^{-2x} \cos x + 2) \quad \text{نتيجة :}$$

$$F'(x) = (-2 e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x + 4 e^{-2x} \cos x + 2 e^{-2x} \sin x) \times \frac{1}{5} \quad \text{تحقيق :}$$

$$= e^{-2x} \cos x = f(x)$$

$$F(0) = \frac{1}{5} (0 - 2 + 2) = 0$$

التمرين - 62

باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية F للدالة f على $]+0; +\infty[$ المعرفة بـ $f(t) = (\ln t)^2$ حيث $F(1) = 0$

الحل - 62

$$F(x) = \int_1^x (\ln t)^2 dt$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(t) = \frac{2}{t} \ln t \\ v(t) = t \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} u(t) = (\ln t)^2 \\ v'(t) = 1 \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$F(x) = [\ln t]^x \Big|_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t} \ln t dt \quad \text{منه :}$$

$$= x(\ln x)^2 - 2 \int_1^x \ln t dt$$

$$= x(\ln x)^2 - 2[t \ln t - t]_1^x$$

$$= x(\ln x)^2 - 2[x \ln x - x + 1]$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - 2$$

ملاحظة: الدالة $t \mapsto t \ln t - t$ هي دالة أصلية للدالة $t \mapsto \ln t$ على المجال $]0; +\infty[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \text{التمرين - 63 : } n \text{ غير معدوم}$$

$$1 - \text{بين أن من أجل كل } x \text{ من } [0; 1] \text{ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

$$2 - \text{إستنتج حصرا للعدد } u_n \text{ ثم بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$$

الحل - 63

$$-1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{إذن : } e^0 \leq e^x \leq e^1$$

$$1 \leq e^x \leq e \quad \text{أي :}$$

$$2 \leq 1 + e^x \leq e + 1 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2} \quad \text{منه :}$$

$$-2 \quad \text{بما أن } \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2} \text{ فإن } \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2} dx$$

$$\frac{1}{1+e} \int_0^1 e^{nx} dx \leq u_n \leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{1+e} \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} e^{nx} \right]_0^1 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{n(1+e)} (e^n - 1) \leq u_n \leq \frac{1}{2n} (e^n - 1) \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} (e^n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{2n} - \frac{1}{2n} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{2n}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(1+e)} (e^n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n(1+e)} - \frac{1}{n(1+e)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n(1+e)}$$

$$= +\infty$$

نتيجة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ حسب خاصية الحصر .

$$\frac{1}{n(1+e)} (e^n - 1) \leq u_n \leq \frac{1}{2n} (e^n - 1) \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$\frac{1}{n e^n (1+e)} (e^n - 1) \leq \frac{u_n}{e^n} \leq \frac{1}{2n e^n} (e^n - 1) \quad \text{إذن :}$$

لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n e^n} (e^n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{2n e^n} - \frac{1}{2n e^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n e^n}$$

$$= 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n e^n (1+e)} (e^n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n e^n (1+e)} - \frac{1}{n e^n (1+e)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(1+e)} - \frac{1}{n e^n (1+e)}$$

$$= 0$$

إذن : حسب خاصية الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$

حلول تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين 1

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x e^x}{1 + e^x}$

1- بين أن من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$

2- استنتج حصرا لمساحة حيز المستوي المكون من مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث : $1 \leq x \leq \lambda$ و $0 \leq y \leq f(x)$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

الحل 1

1- من أجل كل x من $[1; +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{x e^x}{1 + e^x} - x = x \left[\frac{e^x - 1 - e^x}{1 + e^x} \right] = \frac{-x}{1 + e^x}$$

بما أن $\frac{x}{1 + e^x} \geq 0$ على المجال $[1; +\infty[$ فإن $\frac{-x}{1 + e^x} \leq 0$

إذن : $f(x) \leq x$ (1)

من أجل كل x من $[1; +\infty[$:

$$f(x) - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{x e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{1 + e^x} (x - 1)$$

بما أن $x - 1 \geq 0$ و $\frac{e^x}{1 + e^x} > 0$ على المجال $[1; +\infty[$ فإن $\frac{e^x}{1 + e^x} (x - 1) \geq 0$

إذن : $f(x) \geq \frac{e^x}{1 + e^x}$ (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$

2- لدينا : $x \in [1; +\infty[$ من أجل كل $\frac{e^x}{1 + e^x} \leq f(x) \leq x$

إذن : $\int_1^\lambda \frac{e^x}{1 + e^x} dx \leq \int_1^\lambda f(x) dx \leq \int_1^\lambda x dx$

أي : $\left[\ln |1 + e^x| \right]_1^\lambda \leq \int_1^\lambda f(x) dx \leq \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^\lambda$

أي : $\ln |1 + e^\lambda| - \ln |1 + e| \leq \int_1^\lambda f(x) dx \leq \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{2}$

نتيجة : بما أن منحنى الدالة f يقع فوق محور الفواصل على المجال $[1; +\infty[$ و خاصة على المجال $[1; \lambda]$ فإن مساحة الحيز المحدود بمنحناها و محور الفواصل و المستقيمت التي معادلاتها $x = 1$ و $x = \lambda$ هي نفسها مساحة الحيز المكون من مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $1 \leq x \leq \lambda$ و $0 \leq y \leq f(x)$ أي إذا كانت S هذه المساحة

فإن : $\ln |1 + e^\lambda| - \ln |1 + e| \leq S \leq \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{2}$

التمرين 2

f دالة معرفة على $]0; -\infty[$ بـ $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

نسمي (C) منحناها في معلم متعامد $(O; \vec{I}; \vec{J})$

1- أدرس تغيرات الدالة f

2- أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-1 \leq \alpha \leq -1/2$

4- أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها $x = -1$ و $x = \alpha$ و $y = 1$

5- بين أن $A(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}$ ثم استنتج حصر الـ $A(\alpha)$
الحل - 2

1- التغيرات : f معرفة على \mathbb{R}^* وخاصة على $] -\infty ; 0[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln|x|}{x}\right) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln x^2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - 2 \frac{\ln|x|}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{\ln x^2}{x}\right) = -\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $] -\infty ; 0[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\frac{2x^2 - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x^2 - 2$ كما يلي :

$$\ln x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x^2 \geq \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq e^2$$

$$\Leftrightarrow (x - e)(x + e) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in] -\infty ; -e[\cup] e ; +\infty [$$

| | | | | | |
|---------------|-----------|------|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | $-e$ | 0 | e | $+\infty$ |
| $\ln x^2 - 2$ | + | 0 | - | 0 | + |

إذن : إشارة $f'(x)$ على $] -\infty ; 0[$ كما يلي :

| | | | |
|---------|-----------|------|---|
| x | $-\infty$ | $-e$ | 0 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |

منه جدول التغيرات :

| | | | | |
|---------|-----------|-------------------|----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-e$ | α | 0 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | |
| f(x) | 1 | $1 + \frac{2}{e}$ | 0 | $-\infty$ |

$$f(-e) = 1 - \frac{\ln e^2}{-e} = 1 + \frac{2}{e}$$

2- وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$

$$f(x) - 1 = 1 - \frac{\ln x^2}{x} - 1 = -\frac{\ln x^2}{x}$$

من إشارة $\ln x^2$ لأن $x > 0$ كما يلي :

$$\ln x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x^2 \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$$

نتيجة : لما $x \in] -\infty ; -1[$ المنحنى فوق المستقيم .

لما $x = -1$ المنحنى يقطع المستقيم .

لما $x \in] -1 ; 0[$ المنحنى تحت المستقيم .

3- من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة f تتعدم مرة واحدة على المجال $] -e ; 0[$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

$$f(-1) = 1 - \frac{\ln 1}{-1} = 1 \text{ لدينا :}$$

$$f(-1/2) = 1 - \frac{\ln \frac{1}{4}}{-1/2} = 1 + 2 \ln \frac{1}{4} = 1 - 2 \ln 4$$

نتيجة : f مستمرة على $[-1; -1/2]$
 $f(-1) \times f(-1/2) < 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α من المجال $[-1; -1/2]$ حيث $f(\alpha) = 0$
 بما أن f متناقصة تماما على $[-1; -1/2]$ فإن α وحيد .

4 - على المجال $[-1; 0]$ المنحنى (C) تحت المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ إذن : $A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} 1 - f(x) dx$

$$A(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} \frac{\ln x^2}{x} dx \quad \text{منه :}$$

$$= \int_{-1}^{\alpha} \frac{2 \ln |x|}{x} dx$$

$$= 2 \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x} \ln |x| dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} (\ln |x|)^2 \right]_{-1}^{\alpha}$$

$$= [(\ln |x|)^2]_{-1}^{\alpha}$$

$$= (\ln |\alpha|)^2$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدره بوحدة القياس .

$$5 - لدينا $f(\alpha) = 0$ أي : $1 - \frac{\ln \alpha^2}{\alpha} = 0$$$

$$\frac{\ln \alpha^2}{\alpha} = 1 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{2 \ln |\alpha|}{\alpha} = 1 \quad \text{أي :}$$

$$\ln |\alpha| = \frac{\alpha}{2} \quad \text{أي :}$$

$$(\ln |\alpha|)^2 = \frac{\alpha^2}{4} \quad \text{منه :}$$

نتيجة : $A(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}$ و هو المطلوب .

$$\text{الحصر : } -1 \leq \alpha \leq -1/2 \quad \text{إذن : } 1/4 < \alpha^2 < 1$$

$$\text{منه : } 1/16 < \frac{\alpha^2}{4} < 1/4$$

نتيجة : $1/16 < A(\alpha) < 1/4$ و هو الحصر المطلوب .

التمرين 3

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x+1} - x - 2$ نسمي (C) منحنىها في معلم متعامد .

1 - أدرس إشارة $f(x) - (-x - 2)$ على \mathbb{R}

2 - أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها

$x = \alpha$; $x = 0$; $y = -x - 2$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما .

3 - نعرف المتتالية (u_n) على \mathbb{N}^* بـ $u_n = A(n) + 4e$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب أساسها وحدها الأول .

الحل - 3

$$1 - f(x) - (-x - 2) = 2e^{\frac{1}{2}x+1} \quad \text{— 1}$$

إذن : من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) - (-x - 2) > 0$

2 - حسب السؤال (1) $f(x) - (-x - 2) > 0$ إذن : المنحنى (C) يقع دائما فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -x - 2$

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x) - (-x - 2) dx \quad \text{منه :}$$

$$= \int_0^{\alpha} 2e^{\frac{1}{2}x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2e \int_0^{\alpha} e^{\frac{1}{2}x} dx \\
 &= 2e \left[2e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^{\alpha} \\
 &= 2e \left[2e^{\frac{1}{2}\alpha} - 2 \right] \\
 &= 4e \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha} - 4e
 \end{aligned}$$

ملاحظة : المساحة $A(\alpha)$ مقطرة بوحدتة قياس المساحة .

3 - من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $u_n = A(n) + 4e$

$$\begin{aligned}
 &= 4e \cdot e^{\frac{1}{2}n} - 4e + 4e \\
 &= 4e(e^{\frac{1}{2}})^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 4e(e^{\frac{1}{2}})^{n+1} \\
 &= 4e(e^{\frac{1}{2}})^n \cdot (e^{\frac{1}{2}})^1 \\
 &= e^{\frac{1}{2}} u_n
 \end{aligned}$$

منه :

إذن : (u_n) متتالية هندسية أساسها $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ وحدها الأول $u_1 = 4e\sqrt{e}$

التمرين 4

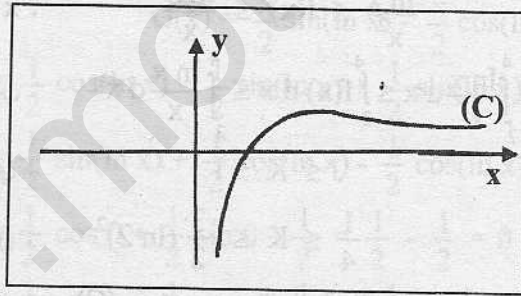
f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

1 - بين أن من أجل كل $x > 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

2 - أحسب $J = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$ و $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx$

3 - استنتج حصرًا $K = \int_2^4 f(x) dx$

4 - باستعمال الحصر الموجود في السؤال (3) أعط حصرًا بـ cm^2 للمساحة A لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث $2 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq f(x)$



الحل 4

1 - ليكن $x > 1$:

$$\begin{aligned}
 f(x) - \frac{\ln x}{x} &= \frac{2 \ln x}{x^2 + x} - \frac{\ln x}{x} \\
 &= \frac{\ln x}{x} \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) \\
 &= \frac{\ln x}{x} \left(\frac{2-x-1}{x+1} \right) \\
 &= \frac{\ln x}{x} \left(\frac{1-x}{x+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\ln x}{x} \left(\frac{1-x}{x+1} \right) &\leq 0 & \text{إذن : } & \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \\
 f(x) - \frac{\ln x}{x} &\leq 0 & \text{منه : } & \frac{\ln x}{x} \geq 0
 \end{aligned} \right\} \text{بما أن } x \geq 1 \text{ فإن}$$

أي : $f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ (1)

$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x^2 + x} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{\ln x}{x} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{\ln x}{x} \left(\frac{x-1}{x^2+x} \right)$$

من جهة أخرى :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{x-1}{x^2+x} \right) \geq 0 \quad \text{إذن} \quad \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x^2+x > 0 \end{array} \right\} \text{بما أن } x \geq 1 \text{ فإن} \\ \frac{\ln x}{x} \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \quad \text{أي}$$

$$(2) \dots \dots \dots f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{أي}$$

نتيجة : من (1) و (2) فإن : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ من أجل $x > 1$

$$I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^4 = \frac{1}{2} (\ln 4)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 = \frac{3}{2} (\ln 2)^2 \quad - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1/x \\ v'(x) = -1/x^2 \end{array} \right\} \text{إذن} \quad \left. \begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v(x) = 1/x^2 \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$J = \left[\frac{-\ln x}{x} \right]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

منه :

$$= \frac{-\ln 4}{4} + \frac{\ln 2}{2} + [-1/x]_2^4$$

$$= \frac{-2 \ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= 1/4$$

$$3 - \text{لدينا من أجل } x > 1 : \frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{إذن}$$

$$J \leq K \leq I \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{3}{2} (\ln 2)^2 \quad \text{أي}$$

4 - حسب الشكل فإن المنحنى (C) فوق محور الفواصل إذن :

$$A = \int_2^4 f(x) dx \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \cdot \text{cm}^2 = K \cdot 4 \text{ cm}^2$$

$$4 \left(\frac{1}{4} \right) \text{ cm}^2 \leq 4 K \text{ cm}^2 \leq 4 \times \frac{3}{2} (\ln 2)^2 \text{ cm}^2 \quad \text{فإن} \quad \frac{1}{4} \leq K \leq \frac{3}{2} (\ln 2)^2 \quad \text{بما أن}$$

$$\text{أي} : 1 \text{ cm}^2 \leq A \leq 6 (\ln 2)^2 \text{ cm}^2 \quad \text{وهو المطلوب .}$$

التمرين 5 -

F و G دالتان أصليتان على $0; +\infty[$ للدالتين $t \mapsto \sin(\ln t)$ و $t \mapsto \cos(\ln t)$ على الترتيب و اللتان تنعدمان عند 1

$$1 - \text{بين باستخدام التكامل باستجزة أن} : F(x) = x \cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$G(x) = x \sin(\ln x) - F(x) \quad \text{و}$$

2 - استنتج عبارتي F(x) و G(x)

الحل 5 -

$$1 - \text{تعريفا لدينا} : F(x) = \int_1^x \cos(\ln t) dt \quad \text{حيث } x > 0$$

$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= \frac{-1}{t} \sin(\ln t) \\ v(t) &= t \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{aligned} u(t) &= \cos(\ln t) \\ v'(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ نضع}$$

$$F(x) = [t \cos(\ln t)]_1^x - \int_1^x \frac{-t}{t} \sin(\ln t) dt \quad \text{منه :}$$

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt \quad \text{لأن (1).....} = x \cos(\ln x) - \cos(\ln 1) + \int_1^x \sin(\ln t) dt$$

$$= x \cos(\ln x) - 1 + G(x) \quad \text{تعريفا دائما لدينا :}$$

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t) dt \quad \text{حيث } x > 0$$

$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{t} \cos(\ln t) \\ v(t) &= t \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{aligned} u(t) &= \sin(\ln t) \\ v'(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ نضع}$$

$$G(x) = [t \sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} \cos(\ln t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= x \sin(\ln x) - \sin(\ln 1) - \int_1^x \cos(\ln t) dt$$

$$(2)..... = x \sin(\ln x) - F(x)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= x \cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) &= x \sin(\ln x) - F(x) \end{aligned} \right\} \text{ لدينا (1) حسب السؤال (1)}$$

بجمع المساويتين طرف لـ طرف نحصل على :

$$F(x) + G(x) = x \cos(\ln x) - 1 + G(x) + x \sin(\ln x) - F(x)$$

$$2 F(x) = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - 1$$

أي :

$$F(x) = \frac{x}{2} \cos(\ln x) + \frac{x}{2} \sin(\ln x) - \frac{1}{2} \quad \text{منه :}$$

بالتعويض في المساواة (2) نحصل على :

$$G(x) = x \sin(\ln x) - \frac{x}{2} \cos(\ln x) - \frac{x}{2} \sin(\ln x) + \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \frac{x}{2} \sin(\ln x) - \frac{x}{2} \cos(\ln x) + \frac{1}{2} \quad \text{أي :}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cos(\ln x) - \frac{1}{2} \sin(\ln x) + \frac{1}{2} \sin(\ln x) + \frac{1}{2} \cos(\ln x) = \cos(\ln x) \quad \text{تحقيق :}$$

$$G'(x) = \frac{1}{2} \sin(\ln x) + \frac{1}{2} \cos(\ln x) - \frac{1}{2} \cos(\ln x) + \frac{1}{2} \sin(\ln x) = \sin(\ln x)$$

$$F(1) = \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$G(1) = \frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

التمرين - 6

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad \text{بـ } [0; 1] \text{ معرفة على}$$

1 - بين أن f مستمرة و موجبة على $[0; 1]$

2 - أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in]0; 1[$

3 - استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0; 1]$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$

نعتبر النقطة $I(1/2; 0)$ و لتكن M نقطة من (C) فاصلتها x حيث $0 \leq x \leq 1$

4 - أحسب IM^2

5 - بين أن (C) هي نصف دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها

$$6 - فسر هندسيا التكامل $\int_0^1 f(x) dx$ ثم أثبت أن $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \pi/8$$$

الحل - 6

1 - الدالة f هي مركب الدالتين $u: x \mapsto x(1-x)$ و $v: x \mapsto \sqrt{x}$ الموجبتين و المستمريتين على $[0; 1]$

إذن f مستمرة و موجبة على $[0; 1]$
 2 - من أجل كل x من $]0; 1[$:

$$f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2x$ لأن $2\sqrt{x(1-x)} > 0$

| | | | |
|--------|---|-----|---|
| x | 0 | 1/2 | 1 |
| $1-2x$ | | + | 0 |

3 - من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج جدول التغيرات التالي :

| | | | |
|---------|---|-----|---|
| x | 0 | 1/2 | 1 |
| $f'(x)$ | | + | 0 |
| $f(x)$ | 0 | 1/2 | 0 |

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$f(1) = \sqrt{0} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

4 - M نقطة من (C) فاصلتها x إذن ترتيبها $y = f(x)$
 $M(x; \sqrt{x(1-x)})$ حيث $0 \leq x \leq 1$ منه :

$$\vec{IM} \left(x - \frac{1}{2}, \sqrt{x(1-x)} - 0 \right) \quad \text{أي} \quad \vec{IM} \left(x - \frac{1}{2}, \sqrt{x(1-x)} \right)$$

$$IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x(1-x)}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + x - x^2 = \frac{1}{4} \quad \text{منه :}$$

5 - حسب السؤال السابق $IM^2 = 1/4$ إذن : $IM = 1/2$ أي النقطة M من (C) تبعد بمسافة ثابتة عن النقطة I و

تساوي $1/2$ إذن فهي تنتمي إلى الدائرة ذات المركز $I(1/2; 0)$ و نصف القطر $1/2$
 بما أن الدالة f موجبة فإن (C) هو نصف هذه الدائرة الذي يقع فوق محور الفواصل

6 - المنحنى (C) يقع فوق محور الفواصل لأن f موجبة إذن التكامل $\int_0^1 f(x) dx$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C) و

محور الفواصل و المستقيمتان التي معادلاتها $x=0$ و $x=1$ أي هو نصف مساحة الدائرة ذات المركز I و نصف القطر $1/2$

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8} \quad \text{أي} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\pi \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \quad \text{منه :}$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدره بوحدة القياس .

التمرين 7 -

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ معرفة على $[0; 1]$ →

1 - أحسب مشتقة الدالة $u : x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2}$

2 - استنتج $f'(x)$

$$3 - \text{أحسب} \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$4 - \text{نضع} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad \text{و} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

تحقق أن : $J + 2I = K$

5 - باستعمال التكامل بالتجزئة لحساب K بين أن : $K = \sqrt{3} - J$

6 - استنتج قيم كل من J و K

الحل - 7

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

- 1

$$f'(x) = \frac{1+u'(x)}{x+u(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

- 2

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$$

- 3

$$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} dx - 4$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx = K$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx \quad \text{لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كما يلي :} \quad - 5$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ v(x) = x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} u(x) = \sqrt{x^2+2} \\ v'(x) = 1 \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

$$K = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx = \sqrt{3} - J \quad \text{منه :}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} \\ (2) \dots\dots J+2I = K \\ (3) \dots\dots K = \sqrt{3} - J \end{array} \right\} \text{لدينا :} \quad - 6$$

$$\text{نعوض (3) في (2) نحصل على :} \quad J+2I = \sqrt{3} - J$$

$$2J = \sqrt{3} - 2I \quad \text{منه :}$$

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \quad \text{أي :}$$

$$(4) \dots\dots J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2} \quad \text{أي :}$$

$$\text{نعوض (4) في (3) نحصل على :} \quad K = \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2} \right)$$

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} \quad \text{أي :}$$

التمرين - 8

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نضع } I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin x dx \text{ و } J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos x dx$$

1 - أحسب I_0 و J_0

$$\left. \begin{array}{l} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\pi/2} \end{array} \right\} \text{نضع } n \geq 1 \text{ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن}$$

3 - استنتج عبارة I_n و J_n بدلالة n من أجل $n \geq 1$

الحل - 8

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

- 1

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

2 - ليكن $n \geq 1$

$$\text{لنحسب } I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin x dx \text{ بالتجزئة :}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = -n e^{-nx} \\ v(x) = -\cos x \end{array} \right\} \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \sin x \end{array} \right\} \text{نضع}$$

$$I_n = [-e^{-nx} \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} n e^{-nx} \cos x dx = 1 - n \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos x dx = 1 - n J_n$$

نتيجة : $I_n = 1 - n J_n$ منه : $I_n + n J_n = 1$ (1)

لنحسب $J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \cos x dx$ بالتجزئة كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = -n e^{-nx} \\ v(x) = \sin x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = \cos x \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$J_n = [e^{-nx} \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -n e^{-nx} \sin x dx = e^{-n \frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\pi/2} e^{-nx} \sin x dx = e^{-n \frac{\pi}{2}} + n I_n \quad \text{ منه :}$$

نتيجة : $J_n = e^{-n \frac{\pi}{2}} + n I_n$ منه : $-n I_n + J_n = e^{-n \frac{\pi}{2}}$ (2)

خلاصة : $\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots\dots I_n + n J_n = 1 \\ (2) \dots\dots\dots -n I_n + J_n = e^{-n \frac{\pi}{2}} \end{array} \right\}$

3 - نضرب طرفي المساواة (1) في n نحصل على :

$$n I_n + n^2 J_n - n I_n + J_n = n + e^{-n \frac{\pi}{2}} \quad \text{ نجمع المساويتين (3) و (2) طرف لطرف نحصل على :}$$

$$(1 + n^2) J_n = n + e^{-n \frac{\pi}{2}} \quad \text{ أي :}$$

$$J_n = \frac{n + e^{-n \frac{\pi}{2}}}{1 + n^2} \quad \text{ منه :}$$

$$I_n = 1 - n \left(\frac{n + e^{-n \frac{\pi}{2}}}{1 + n^2} \right) \quad \text{ بتعويض J_n في المساواة (1) نحصل على :}$$

$$I_n = 1 - \frac{n^2 + n e^{-n \frac{\pi}{2}}}{1 + n^2} \quad \text{ أي :}$$

التمرين 9

(u_n) و (v_n) متاليتان معرفتان على \mathbb{N}^* كما يلي : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} : n \geq 2 \end{cases}$

و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل كل $n \geq 1$

1 - أحسب u_2 ؛ u_3 ؛ u_4

2 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

3 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

4 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ و $0 \leq v_n \leq 1$

5 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

6 - استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

7 - بين أن المتتالية (v_n) متقاربة نحو λ (لا يطلب تعيين λ)

8 - ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحل 9

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad - 1$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$u_4 = u_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12}$$

2 - لنثبت بالتراجع على n صحة الخاصية $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ من أجل $n \geq 1$

من أجل $n = 1$: $u_1 = 1$

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1/1 = 1$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = 3/2$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

بذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$

منه : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ لأن $u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$

أي : $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

3 - لدينا : $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$ على المجال $[1; +\infty[$

f قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة :

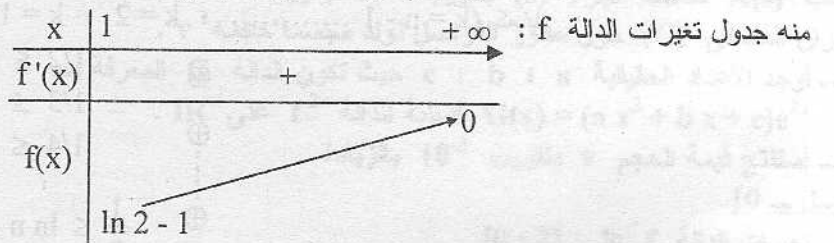
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2 - x(x+1) + x+1} \\ &= \frac{1}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) > 0$ على المجال $[1; +\infty[$

منه : f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

$$f(1) = \ln 2 - \ln 1 - 1 = \ln 2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0$$



من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن :

من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \leq 0$

منه : من أجل كل x من $[1; +\infty[$: $\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

و خاصة $k \in \mathbb{N}^*$ من أجل $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

نعتبر الآن الدالة $g: x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$ على المجال $[1; +\infty[$

g قابلة للاشتقاق و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

إذن : $g'(x) < 0$ من أجل كل x من $[1; +\infty[$

منه : g متناقصة تمامًا على $[1; +\infty[$

$$g(1) = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = 0$$

منه جدول تغيرات الدالة g :

| | | |
|---------|-----------------------|-----------|
| x | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | - |
| $g(x)$ | $\ln 2 - \frac{1}{2}$ | 0 |

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن $g(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[1; +\infty[$

أي $\ln(x+1) - \ln x \geq \frac{1}{x+1}$ منه $\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \geq 0$

و خاصة $k \in \mathbb{N}^*$ من أجل $\ln(k+1) - \ln k \geq \frac{1}{k+1}$

نتيجة : من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$ فإن $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

أي : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

4 - حسب السؤال (2) فإن من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

لنكتب هذه المساواة (n-1) مرة (k=1 ; k=2 ; ; k=n-1) كمايلي :

$$\begin{aligned} \oplus & \quad 1/2 \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1/1 \quad : k=1 \\ \oplus & \quad 1/3 \leq \ln 3 - \ln 2 \leq 1/2 \quad : k=2 \\ & \quad \vdots \\ \oplus & \quad 1/n \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1} \quad : k=n-1 \end{aligned}$$

بجمع هذه المتباينات طرف لطرف نحصل على :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - 1 \leq \ln n \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n} \quad : \text{أي}$$

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \quad : \text{أي}$$

إذن : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ منه
 $-u_n + \frac{1}{n} \leq -\ln n \leq -u_n + 1$
 أي $1/n \leq u_n - \ln n \leq 1$
 و خاصة : $0 \leq u_n - \ln n \leq 1$ لأن $1/n \geq 0$
 أي : $0 \leq v_n \leq 1$

5 - من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$
 $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - (u_n - \ln n)$
 $= u_{n+1} - u_n - [\ln(n+1) - \ln n]$

لأن $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ لأن $\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

6 - حسب السؤال (3) لدينا من أجل $n = k$
 $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$

أي : $-\frac{1}{n} \leq -\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{-1}{n+1}$

منه : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$

أي : $\frac{-1}{n(n+1)} \leq v_{n+1} - v_n \leq 0$

و خاصة $v_{n+1} - v_n \leq 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة

7 - حسب السؤال (4) فإن $0 \leq v_n \leq 1$ إذن : (v_n) متتالية محدودة و خاصة فهي محدودة من الأسفل .
 خلاصة : (v_n) متتالية متناقصة .
 (v_n) متتالية محدودة من الأسفل

إذن : (v_n) متتالية متقاربة و لتكن λ نهايتها .

8 - لدينا : $v_n = u_n - \ln n$ إذن : $u_n = v_n + \ln n$

منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda \in \mathbb{R}$

التمرين 10

f دالة معرفة على $[0; 2]$ بـ $f(x) = (x-2)e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس .

1 - أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم (C) على المجال $[0; 2]$

2 - (s) هو جزء المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل .

أحسب A(s) مساحة الجزء (s) بتقريب 10^{-2} بالزيادة

بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل نولد مجسما حجمه v .

3 - أوجد الأعداد الحقيقية a ؛ b ؛ c حيث تكون الدالة G المعرفة بـ

$G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ أصلية للدالة f^2 على \mathbb{R} .

4 - إستنتج قيمة الحجم v بتقريب 10^{-3} بالزيادة .

الحل - 10

1 - تغيرات الدالة f على $[0; 2]$

f معرفة على \mathbb{R} و خاصة على $[0; 2]$: $f(0) = -2$ ؛ $f(2) = 0$

f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة : $f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $e^x > 0$ كما يلي :

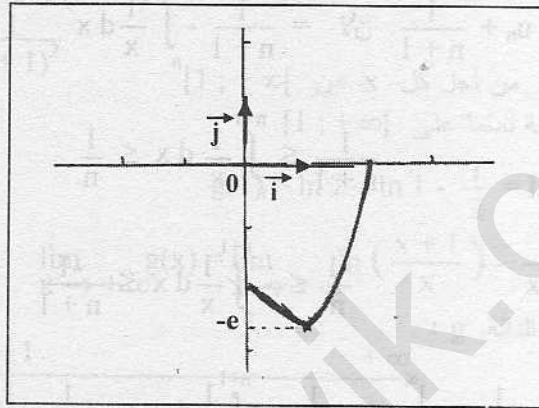
| | | | |
|-----|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| x-1 | - | 0 | + |

| | | | |
|-------|----|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| f'(x) | | - | 0 |
| f(x) | -2 | | 0 |

منه جدول تغيرات الدالة f

$$f(1) = -e$$

المنحنى :



2 - حسب الشكل المنحنى (C) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[0; 2]$ إذن :

$$A(s) = - \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 (x-2) e^x dx$$

التكامل بجزئة :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x - 2 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \text{إذن :} \quad \left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\}$$

$$A(s) = [(x-2) e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx$$

$$= -2 \cdot [e^x]_0^2$$

$$= -2 - (1 - e^2)$$

$$= e^2 - 3$$

منه :

$$\approx 4,39 \text{ (بالزيادة)}$$

3 - من أجل كل x من IR لدينا :

$$G'(x) = (2ax + b) e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c) e^{2x}$$

$$= (2ax^2 + 2bx + 2c + 2ax + b) e^{2x}$$

$$= [2ax^2 + 2(a+b)x + 2c + b] e^{2x}$$

$$f^2(x) = (x-2)^2 e^{2x} = (x^2 - 4x + 4) e^{2x}$$

من جهة أخرى :

إذن تكون G دالة أصلية لـ f^2 إذا و فقط إذا كان :

$$\left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -5/2 \\ c = 13/4 \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 - \frac{1}{2} \\ c = \frac{4-b}{2} \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} a = 1/2 \\ a + b = -2 \\ c = \frac{4-b}{2} \end{array} \right\} \text{أي} \quad \left. \begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -4 \\ 2c + b = 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{نتيجة : } G(x) = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2} x + \frac{13}{4} \right) e^{2x}$$

$$G'(x) = \left(x - \frac{5}{2} \right) e^{2x} + 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{2} x + \frac{13}{4} \right) e^{2x}$$

$$= \left(x - \frac{5}{2} + x^2 - 5x + \frac{13}{2} \right) e^{2x}$$

تحقيق :

$$= (x^2 - 4x + 4) e^{2x}$$

$$= [f(x)]^2$$

$$v = \pi \int_0^2 f^2(x) dx$$

$$= \pi [G(x)]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{10}{2} + \frac{13}{4} \right) e^4 - \left(\frac{13}{4} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4} e^4 - \frac{13}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^4 - 13)$$

بالزيادة $\approx 32,671$

ملاحظة : هذه القيم مقدرة بوحدة القياس .

التمرين 11

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 e^{1-x}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$ الوحدة 2 cm

1 - عين نهاية الدالة f عند: $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2 - أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم المنحنى (C)

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نعرف التكامل $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ بـ

3 - عين علاقة بين I_n و I_{n+1}

4 - أحسب I_1 و I_2

5 - أعط تفسيرا هندسيا لـ I_2

6 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 1]$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

7 - إستنتج حصر لـ I_n ثم نهاية I_n لما n يؤول إلى $+\infty$

الحل 11

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty$$

لنحسب إذن :

التفسير الهندسي : المنحنى (C) يقبل فرعا من قطع مكافئ في إتجاه محور الترتيب عند $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e}{e^x} = 0$$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

2 - تغيرات الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x) e^{1-x}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(2-x)$ لأن $e^{1-x} > 0$ كما يلي :

| | | | | |
|----------|-----------|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $x(2-x)$ | - | 0 | + | 0 |

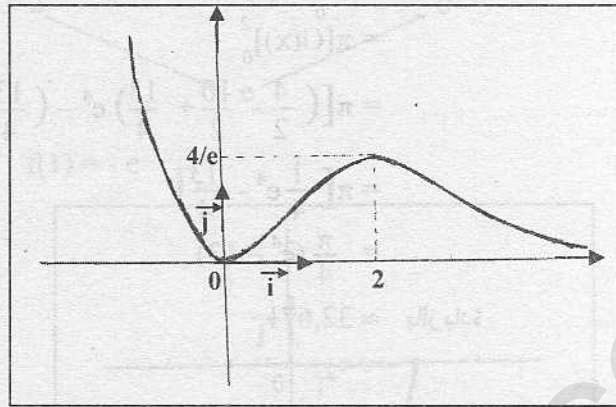
منه جدول تغيرات الدالة f :

| | | | | |
|---------|-----------|---|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 |
| f(x) | $+\infty$ | 0 | $4/e$ | 0 |

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 4/e$$

الإثشاء :



$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx \quad \text{إذن} \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad - 3$$

لنحسب I_{n+1} بالتجزئة كماليلي :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array} \right\} \text{ نضع} \quad \text{إذن} \quad \left. \begin{array}{l} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{1-x} \end{array} \right\}$$

$$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx$$

$$= -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$= -1 + (n+1) I_n$$

نتيجة : $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

$$I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx \quad \text{ربالتجزئة} \quad - 4$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{array} \right\} \text{ نضع} \quad \text{إذن} \quad \left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{array} \right\}$$

$$I_1 = [-x e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx$$

$$= -1 - [e^{1-x}]_0^1$$

$$= -1 - (1 - e)$$

$$= e - 2$$

$$I_2 = 2 I_1 - 1 = 2(e - 2) - 1 = 2e - 5 \quad \text{منه} :$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x} dx = \int_0^1 f(x) dx \quad - 5$$

بما أن الدالة f موجبة على المجال $[0; 1]$ فإن $\int_0^1 f(x) dx$ هو مساحة الحيز المحدود بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=1$ إذن : I_2 هي هذه المساحة مقدرة بـ 4 cm^2

ليكن $x \in [0; 1]$ و $n \in \mathbb{N}^*$ - 6

$$x^n e^{1-x} - x^n e = x^n e (e^{-x} - 1)$$

$$= x^n e \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)$$

$$= \frac{x^n e}{e^x} (1 - e^x) \quad \text{من إشارة } 1 - e^x \text{ كماليلي} :$$

$$1 \leq e^x \leq e \quad \text{إذن} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$-e \leq -e^x \leq -1 \quad \text{منه} :$$

$$1 - e \leq 1 - e^x \leq 0 \quad \text{أي} \\ \frac{x^n e}{e^x} (1 - e^x) \leq 0 \quad \text{و خاصة } 1 - e^x \leq 0 \text{ منه}$$

(1)..... أي : $x^n e^{1-x} - x^n e \leq 0$
 من جهة أخرى : $x^n e^{1-x} - x^n = x^n (e^{1-x} - 1)$ إشارة $e^{1-x} - 1$

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{إذن} : -1 \leq -x \leq 0$$

$$\text{منه} : 0 \leq 1 - x \leq 1$$

$$\text{إذن} : 1 \leq e^{1-x} \leq e$$

$$\text{منه} : 0 \leq e^{1-x} - 1 \leq e - 1$$

$$\text{و خاصة } e^{1-x} - 1 \geq 0 \quad \text{إذن} : x^n (e^{1-x} - 1) \geq 0$$

$$(2)..... أي : $x^n e^{1-x} \geq x^n$$$

من العلاقتين (1) و (2) : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$: $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$: إذن : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$: لدينا : 7

$$\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx \quad \text{أي} : \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{أي} : \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{أي} : \frac{1}{n+1} - 0 \leq I_n \leq e \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right)$$

$$\text{أي} : \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

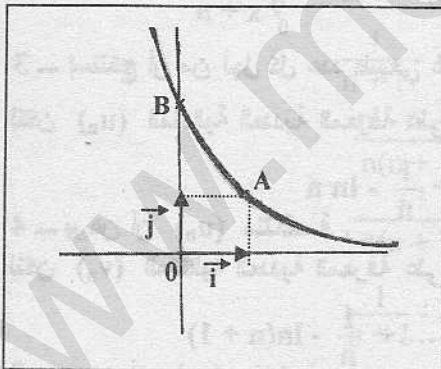
$$\text{منه} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1}$$

$$\text{أي} : 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq 0$$

$$\text{إذن} : \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

التمرين 12 -

لتكن f الدالة العددية القابلة للاشتقاق على \mathbb{R} حيث f هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ و تحقق $f(0) = e$.
 إليك منحنى الدالة f في الشكل المقابل



1 - عين عبارة $f(x)$

ليكن t عدد حقيقي من المجال $[1; e]$

2 - حل في \mathbb{R} المعادلة $e^{1-x} = t$ ذات المجهول x .

لتكن A و B نقطتان من منحنى الدالة f فواصلهما على الترتيب 1 و 0 .

نعتبر الجسم المحصل بدوران قوس المنحنى \widehat{AB} حول محور الترتيب

$$\text{نرمز بـ } v \text{ إلى حجم هذا الجسم. ونقبل أن } v = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$$

3 - أحسب v بالتكامل بالتجزئة

الحل - 12

1 - تعيين $f(x)$:

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y$$

$$\Rightarrow y = c e^{-x} \text{ حيث } c \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{إذن} : f(x) = c e^{-x}$$

$$\text{منه} : f(0) = c \text{ أي } c = e$$

$$\text{نتيجة} : f(x) = e \cdot e^{-x} \text{ أي } f(x) = e^{1-x} \text{ و هي عبارة } f(x)$$

$$e^{1-x} = t \Rightarrow 1 - x = \ln t \quad \text{2 - } 1 \leq t \leq e$$

$$\Rightarrow x = 1 - \ln t \text{ و هو الحل المطلوب.}$$

$$v = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt \quad \text{3 -}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_1^e 1 - 2 \ln t + (\ln t)^2 dt \\
 &= \pi \int_1^e 1 dt - 2 \pi \int_1^e \ln t dt + \pi \int_1^e (\ln t)^2 dt \\
 &= \pi [t]_1^e - 2 \pi [t \ln t - t]_1^e + \pi \int_1^e (\ln t)^2 dt \\
 &= \pi(e-1) - 2 \pi(e-e+1) + \pi \int_1^e (\ln t)^2 dt \\
 (1) \dots\dots\dots &= \pi(e-3) + \pi \int_1^e (\ln t)^2 dt
 \end{aligned}$$

لنحسب $\int_1^e (\ln t)^2 dt$ بالتجزئة :

$$\left. \begin{aligned} u'(t) &= \frac{2}{t} \ln t \\ v(t) &= t \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{aligned} u(t) &= (\ln t)^2 \\ v'(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ نضع}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^e (\ln t)^2 dt &= [t(\ln t)^2]_1^e - \int_1^e 2 \ln t dt && \text{إذن :} \\
 &= e - 0 - 2 \int_1^e \ln t dt \\
 &= e - 2[t \ln t - t]_1^e \\
 &= e - 2(e - e + 1) \\
 &= e - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= \pi(e-3) + \pi(e-2) && \text{بالتعويض في المساواة (1) نحصل على :} \\
 &= \pi(2e-5)
 \end{aligned}$$

ملاحظة : هذا الحجم مقدر بوحدة القياس .

التمرين 3

1 - بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 1]$ فإن :

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$$

2 - أحسب $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$

3 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :
 لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

4 - برهن أن (u_n) متناقصة .
 لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

5 - برهن أن (v_n) متزايدة .
 6 - برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l (لا يطلب تعيين l) .

الحل 13

1 - ليكن $x \in [0; 1]$ و $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{n-x-n}{n(x+n)} = \frac{-x}{n(x+n)}$$

بما أن $x \geq 0$ فإن $-x \leq 0$ إذن : $\frac{-x}{n(x+n)} \leq 0$ أي $\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \leq 0$

$$\text{منه : } \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad (1) \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} + \frac{x}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - n(x+n) + x(x+n)}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{n^2 - nx - n^2 + x^2 + nx}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{x^2}{n^2(x+n)}$$

إذن : $\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right) \geq 0$ منه : $\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$ (2)

نتيجة : من (1) و (2) : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

2 - $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx = [\ln(x+n)]_0^1 = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

3 - لدينا : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

إذن : $\int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx$

أي : $\frac{1}{n} [x]_0^1 - \frac{1}{2n^2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [x]_0^1$

أي : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ وهو المطلوب

4 - $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

لكن $-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$ إذن : $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

منه : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$

أي : $\frac{n-n-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{2n^2+n+1-2n(n+1)}{2n^2(n+1)}$

أي : $\frac{-1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1-n}{2n^2(n+1)}$

بما أن $\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$ فإن $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ و $\frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leq 0$

أي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ منه المتتالية (u_n) متناقصة

5 - $v_n - v_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n\right)$

$$= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$$

$$= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

بما أن $\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq 0$ فإن $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$

أي $v_n - v_{n-1} \geq 0$ منه المتتالية (v_n) متزايدة .

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$$

$$= -\ln n + \ln(n+1)$$

$$(u_n - v_n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

منه :

(u_n) متناقصة(v_n) متزايدة

نتيجة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

إذن : المتتاليات (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن : فهما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

التمرين 14

f و g دالتان معرفتان على IR كما يلي : f(x) = e^{-x²} و g(x) = x² e^{-x²}
 نسمي (C_f) و (C_g) منحاهما على الترتيب في معلم متعامد و متجانس (O ; I ; J)

- 1- أدرس شفعية الدالتين f و g .
- 2- أدرس تغيرات الدالتين f و g على [0 ; +∞[ثم إستنتج جدولي تغيراتهما على IR .
- 3- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g) . ثم أنشأهما .

لتكن G الدالة المعرفة على R بـ $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

- 4- ماذا تمثل الدالة G بالنسبة إلى الدالة g ؟
- 5- أعط تفسيراً هندسياً لـ G(x) من أجل x > 0
- 6- أدرس تغيرات الدالة G على IR (لا يطلب حساب النهايات)

لتكن F الدالة المعرفة على IR بـ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

7- بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x : $G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$

نقبل أن الدالة F تقبل نهاية منتهية h عند +∞

8- بين أن الدالة G تقبل نهاية منتهية عند +∞ . يطلب تعيينها .

9- فسر هندسياً العدد N حيث $N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt$

الحل 14

1- من أجل كل x من IR فإن (-x) ∈ IR و : $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$
 $g(-x) = (-x)^2 e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} = g(x)$

نتيجة : الدالتين f و g زوجيتان

$$f(0) = 1$$

2- تغيرات الدالة f على [0 ; +∞[:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

إذن : f'(x) ≤ 0 على المجال [0 ; +∞[لأن -2x ≤ 0

أي : f متناقصة على [0 ; +∞[

بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة f على IR كما يلي :

| | | | |
|-------|----|---|----|
| x | -∞ | 0 | +∞ |
| f'(x) | + | 0 | - |
| f(x) | 0 | 1 | 0 |

تغيرات الدالة g على $[0; +\infty[$: $g(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$g'(x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = (1 - x^2) 2x e^{-x^2}$$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(1 - x^2)$ كما يلي :

| | | | |
|--------------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $1 - x^2$ | + | 0 | - |
| $x(1 - x^2)$ | 0 | + | 0 |

بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب نحصل على جدول تغيرات الدالة g على \mathbb{R} كمايلي :

| | | | | | |
|---------|-----------|------------|------------|------------|------------|
| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $g(x)$ | 0 | \nearrow | \searrow | \nearrow | \searrow |

$$g(-1) = g(1) = e^{-1} = 1/e$$

3- الوضعية النسبية لـ (C_g) و (C_f)

$$f(x) - g(x) = e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} = (1 - x^2) e^{-x^2}$$

إذن إشارة $f(x) - g(x)$ هي إشارة $1 - x^2$ كما يلي :

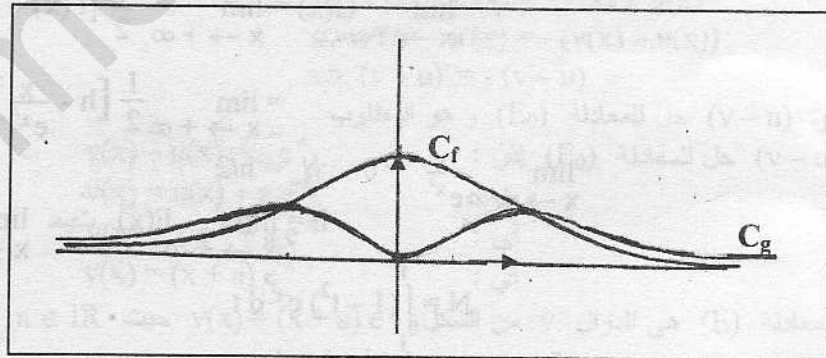
| | | | | |
|-----------|-----------|----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
| $1 - x^2$ | - | 0 | + | 0 |

خلاصة : لما $(C_f) : x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ يقع تحت (C_g)

لما $(C_f) : x \in \{-1; 1\}$ يقطع (C_g)

لما $(C_f) : x \in]-1; 1[$ يقع فوق (C_g)

الإتشاء :



$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^x g(t) dt \quad - 4$$

إذن : G هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تتعدم عند 0 أي $G(0) = 0$ $G'(x) = g(x)$

5- من أجل $x > 0$ فإن العدد $G(x)$ يمثل مساحة حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_g)

و محور الفواصل على المجال $[0; x]$ لأن المنحنى يقع فوق محور الفواصل

6- تغيرات الدالة G على \mathbb{R} : $G'(x) = g(x)$

إذن : إشارة $G'(x)$ هي إشارة $g(x)$ كما يلي :

| | | | |
|--------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | + | 0 | + |

منه جدول تغيرات الدالة G :

| | | | |
|-------|-------------------------------------|---|-------------------------------------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| G'(x) | + | 0 | + |
| G(x) | $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$ | 0 | $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ |

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x f(t) dt \quad - 7$$

إذن : F هي دالة أصلية للدالة f و التي تتعدم عند 0 أي

لتكن ϕ الدالة المعرفة على IR بـ $\phi(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$

لدينا ϕ قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{1}{2} [f(x) - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}] \\ &= \frac{1}{2} [e^{-x^2} - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}] \\ &= x^2 e^{-x^2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : ϕ هي دالة أصلية للدالة g .

$$\phi(0) = \frac{1}{2} [F(0) - 0 e^{-0}] = \frac{1}{2} (0) = 0 \quad \text{من جهة أخرى :}$$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} \phi'(x) = g(x) \\ \phi(0) = 0 \end{array} \right\}$ إذن : ϕ هي الدالة الأصلية للدالة g و التي تتعدم عند 0

$$G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}] \quad \text{إذن : } \phi = G \quad \text{أي :}$$

8 - نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = h$ حيث $h \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}] \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}] \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[h - \frac{x}{e^{x^2}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \quad \text{لأن } h/2$$

نتيجة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = h/2$ حيث $h = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^1 e^{-t^2} - t^2 e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^1 f(t) - g(t) dt \end{aligned} \quad - 9$$

بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق المنحنى (C_g) على المجال $[0; 1]$ فإن العدد $N = \int_0^1 f(t) - g(t) dt$ يمثل مساحة

حيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المنحنى (C_g) و المستقيمت التي معادلاتها $x=0$ و $x=1$

التمرين = 15

الجزء I : لتكن المعادلة التفاضلية $(E) \dots \dots \dots y' + y = e^{-x}$

1 - بين أن الدالة u المعرفة على IR بـ $u(x) = x e^{-x}$ حل للمعادلة (E)

2 - حل في IR المعادلة التفاضلية $(E_0) \dots \dots \dots y' + y = 0$

3 - بين أن الدالة v المعرفة و القابلة للاشتقاق على IR تكون حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت $v - u$

حلا للمعادلة (E₀)

4 - استنتج جميع حلول المعادلة (E)

5 - عين الدالة f₂ حل المعادلة (E) والتي تأخذ القيمة 2 من أجل x = 0

الجزء II : k عدد حقيقي معطى . نرمز بـ f_k إلى الدالة المعرفة على IR كمايلي :

$$f_k(x) = (x+k)e^{-x} \quad \text{و نرمز بـ } (C_k) \text{ إلى منحناها في معلم متعامد و متجانس } (O; \vec{I}; \vec{J})$$

1 - عين نهايات الدالة f_k عند -∞ و +∞

2 - أدرس تغيرات الدالة f_k

الجزء III : نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة بـ $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

1 - أحسب I₀

2 - باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$$

3 - استنتج قيم I₁ و I₂

4 - التمثيل البياني المقابل هو للدالة f_k المعرفة في الجزء II .

باستعمال قراءة بيانية عين قيمة k المرفقة بالمنحنى (C_k)

5 - لتكن S مساحة الجزء الملون . عبر عن S

بدلالة I₀ و I₁ ثم استنتج قيمته .

الحل - 15

الجزء I

1 - u قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$u'(x) = e^{-x} - x e^{-x} \quad \text{منه :}$$

$$u'(x) + u(x) = e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}$$

إذن : u هي فعلا حل للمعادلة التفاضلية (E).....

$$y' + y = 0 \quad \text{إذن : } y' = -y \quad -2$$

منه حلول المعادلة (E₀) هي الدوال f من الشكل f(x) = a e^{-x} حيث a ∈ IR

3 - لتكن v حلا للمعادلة (E) إذن :

$$v'(x) + v(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) + u(x) = e^{-x} \quad \text{لكن}$$

$$v'(x) + v(x) = e^{-x} \Leftrightarrow v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x) \quad \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -v(x) + u(x)$$

$$\Leftrightarrow v'(x) - u'(x) = -(v(x) - u(x))$$

$$\Leftrightarrow (v-u)' = -(v-u)$$

أي (v-u) حل للمعادلة (E₀) و هو المطلوب

4 - نتيجة : (v-u) حل للمعادلة (E₀) إذن :

$$v(x) - u(x) = a e^{-x} \quad \text{منه :}$$

$$v(x) = u(x) + a e^{-x} \quad \text{أي :}$$

$$v(x) = x e^{-x} + a e^{-x} \quad \text{أي :}$$

$$v(x) = (x+a) e^{-x} \quad \text{أي :}$$

خلاصة : حلول المعادلة (E) هي الدوال v من الشكل v(x) = (x+a) e^{-x} حيث a ∈ IR

5 - حل للمعادلة (E) f₂ } إذن : f₂(0) = 2

$$f_2(x) = (x+a) e^{-x} \quad \text{أي :}$$

$$a e^0 = 2 \quad \text{أي :}$$

$$f_2(x) = (x+a) e^{-x} \quad \text{أي :}$$

$$a = 2 \quad \text{منه :}$$

$$f_2(x) = (x+2) e^{-x}$$

الجزء II

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+k) e^{-x} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+k) = -\infty \text{ لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+k)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + k e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + k e^{-x} = 0$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} k e^{-x} = 0$)

$f_k - 2$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و دالتها المشتقة : $f_k'(x) = e^{-x} - (x+k)e^{-x} = (1-k-x)e^{-x}$:
 إذن : إشارة $f_k'(x)$ هي، إشارة $(1-k-x)$ لأن $e^{-x} > 0$ كما يلي :

| | | | |
|---------|-----------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | $1-k$ | $+\infty$ |
| $1-k-x$ | | + | - |

منه جدول تغيرات الدالة f_k كما يلي :

| | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $1-k$ | $+\infty$ |
| $f_k'(x)$ | | + | - |
| $f_k(x)$ | | e^{k-1} | 0 |

$$f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)} = e^{k-1}$$

الجزء III :

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-2}^0 = -1 - (-e^2) = e^2 - 1$$

$I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1} e^{-x} dx$ - 2
 لنحسب هذا التكامل بالتجزئة كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} \text{نضع} \quad \left. \begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right\} \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [-x^{n+1} e^{-x}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (n+1)x^n e^{-x} dx \\ &= 0 - (-(-2)^{n+1} e^2) + (n+1) \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx \\ &= (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n \end{aligned}$$

منه :

نتيجة : من أجل $n \geq 0$: $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$

$$I_1 = (-2)^1 e^2 + I_0 = -2e^2 + e^2 - 1 = -e^2 - 1$$

3 - حسب النتيجة السابقة :

$$I_2 = (-2)^2 e^2 + 2I_1 = 4e^2 + 2(-e^2 - 1) = 2e^2 - 2$$

4 - حسب المنحنى الممثل للدالة f_k فإن النقطة A ذات الإحداثيات $(0; 2)$ تنتمي إلى المنحنى

إذن : $f_k(0) = 2$ أي $(0+k)e^0 = 2$ منه $k=2$

نتيجة : المنحنى ممثل للدالة f_2 حيث $f_2(x) = (x+2)e^{-x}$ (أي $k=2$)

5 - منحنى الدالة f_2 يقع فوق محور الفواصل على المجال $[-2; 0]$ إذن عبارة المساحة S هي كما يلي :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 f_2(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x+2)e^{-x} dx \\ &= \int_{-2}^0 x e^{-x} dx + 2 \int_{-2}^0 e^{-x} dx \\ &= \int_{-2}^0 x e^{-x} dx + 2 \int_{-2}^0 e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$= I_1 + 2I_0 \text{ وهو المطلوب}$$

نتيجة : $S = I_1 + 2I_0$

$$= -e^2 - 1 + 2(e^2 - 1)$$

$$= e^2 - 3$$

ملاحظة : هذه المساحة مقدره بوحدة القياس .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$ - 1 أحسب I_1

- 2 بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \leq I_n \leq \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$

- 3 باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

- 4 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = \frac{2^n}{n!}$

- 5 أحسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثم تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

- 6 استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

- 7 استنتج نهاية المتتالية (u_n) ثم نهاية المتتالية (I_n)

- 8 بين أن $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

الحل - 16

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{1!} (2-x)^1 e^x dx \quad - 1$$

$$= \int_0^2 (2-x) e^x dx$$

بالتجزئة : نضع $\left. \begin{array}{l} u(x) = 2-x \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\}$ إذن $\left. \begin{array}{l} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{array} \right\}$

$$I_1 = [(2-x) e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx$$

$$= 0 - 2 + [e^x]_0^2$$

$$= -2 + e^2 - 1$$

$$= e^2 - 3$$

- 2 $0 \leq x \leq 2$ إذن : $\left. \begin{array}{l} e^0 \leq e^x \leq e^2 \\ -2 \leq -x \leq 0 \end{array} \right\}$

منه : $\left. \begin{array}{l} 1 \leq e^x \leq e^2 \\ 0 \leq 2-x \leq 2 \end{array} \right\}$

منه : $\left. \begin{array}{l} 1 \leq e^x \leq e^2 \\ 0 \leq (2-x)^n \leq 2^n \end{array} \right\}$

منه : $0 \leq (2-x)^n e^x \leq 2^n e^2$ (جداء المتباينتين)

منه : $0 \leq \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x \leq \frac{2^n}{n!} e^2$

إذن : $0 \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 dx$

أي : $0 \leq I_n \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^2 dx$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} e^2 [x]_0^2$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} e^2 (2)$

منه : $0 \leq I_n \leq \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$ وهو المطلوب

$$I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!} (2-x)^{n+1} e^x dx \quad - 3$$

$$\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x dx \text{ بالجزءة : } = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x dx \dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \\ v(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{array}{l} u(x) = (2-x)^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$\int_0^2 (2-x)^{n+1} e^x dx = [(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 (n+1)(2-x)^n e^x dx \quad \text{ منه :}$$

$$= - (2)^{n+1} + (n+1) \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$$

$$= - 2^{n+1} + n!(n+1) \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$

$$= - 2^{n+1} + (n+1)! I_n$$

نتيجة : بالرجوع إلى المساواة (1) نحصل على :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} (- 2^{n+1} + (n+1)! I_n)$$

$$I_{n+1} = \frac{- 2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} I_n \quad \text{ أي :}$$

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ أي : وهو المطلوب}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n \quad - 4 \quad \text{ لكن الخاصية :}$$

$$\text{لنثبت صحتها بالتراجع من أجل كل } n \geq 1 \quad \text{ من أجل } n=1 : 1 + \frac{2}{1!} + I_1 = 1 + 2 + e^2 - 3 = e^2$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n=1$

$$\text{نفرض أن } n > 1 \quad 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2$$

$$\text{هل } 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2 \quad \text{ هل ؟}$$

$$\text{لدينا : } 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} = e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

$$= e^2 - I_n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2 \quad \text{ إذن : الخاصية صحيحة من أجل } (n+1)$$

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n = e^2 \quad \text{ نتيجة : من أجل كل } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \quad - 5$$

$$\text{نتيجة : } n \geq 3 \quad \text{ إذن : } n+1 \geq 4 \quad \text{ منه } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \quad \text{ أي } \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{4}$$

$$\frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ أي}$$

$$\text{أي } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \quad \text{ منه : } u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \quad \text{ وهو المطلوب (لأن } u_n > 0 \text{)}$$

$$- 6 \quad \text{ لنثبت بالتراجع أن من أجل } n \geq 3 \quad u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$\text{من أجل } n=3 \quad \text{ لدينا : } u_3 \leq u_3 \quad \text{ أي } u_3 \leq u_3 \quad \text{ منه الخاصية محققة .}$$

$$\text{نفرض أن } n > 3 \quad u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

هل $u_{n+1} \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

إذن : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

أي $u_{n+1} \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-3}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل $n \geq 3$: $u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

من جهة أخرى : $u_n = \frac{2^n}{n!}$: إذن $u_n \geq 0$ لأن $2^n > 0$ و $n! > 0$

خلاصة : من أجل كل $n \geq 3$: $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

7 - لدينا : $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ من أجل $n \geq 3$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$: إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (حسب الحصر)

حسب السؤال (2) لدينا : $0 \leq I_n \leq \frac{2^{n+1}}{n!} e^2$

أي : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (2e^2)$

أي : $0 \leq I_n \leq 2e^2 u_n$

لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2e^2 u_n = 0$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$: حسب الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

8 - لدينا : من أجل $n \geq 1$: $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

من أجل n يؤول إلى $+\infty$ نحصل على :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n \right]$$

أي : $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right]$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

نتيجة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right) = e^2$

التمرين 17 -

من أجل كل عدد حقيقي $k \geq 0$ نعتبر الدالة f_k المعرفة على \mathbb{R} بـ $f_k(x) = \frac{1 - k e^x}{1 + k e^x} + x$

1 - بين أن الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية $2y' = (y-x)^2 + 1$ (E)

2 - استنتج اتجاه تغير الدالة f_k

نرمز بـ (C_k) إلى منحنى الدالة f_k في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$

في الشكل المقابل رسمنا المستقيمين (d) و (d') اللذين معادلاتهما على الترتيب $y = x - 1$ و $y = x + 1$ وثلاث منحنيات للدالة f_k مرفقة بقيم مختلفة لـ k

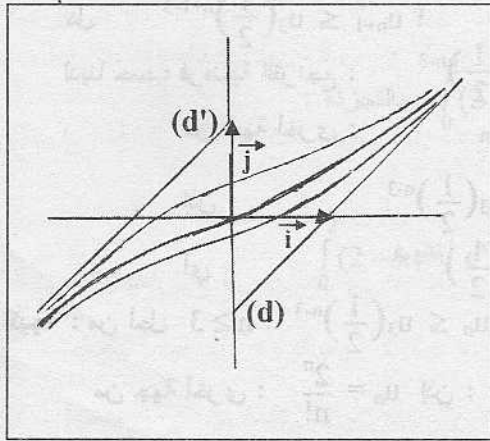
3 - عين العدد الحقيقي k المرفق بالمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ 0 ثم العدد k المرفق بالمنحنى (C') الذي يشمل النقطة $A(1; 1)$

4 - بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k e^x}$ (1)

و $f_k(x) = x + 1 - \frac{2k e^x}{1 + k e^x}$ (2)

5 - من أجل $k > 0$ استنتج ما يلي :

أ - وضعية المنحنى (C_k) بالنسبة إلى المستقيمين (d) و (d')



ب - معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) .

ليكن $k = 1$

6 - بين أن f_1 دالة فردية .

لتكن $F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$ المعرفة على \mathbb{R} بـ

7 - فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x < 0$ و $x > 0$

ثم استنتج شفعية الدالة F

8 - شكل جدول تغيرات الدالة F على \mathbb{R}

(لا يطلب حساب النهايات) .

9 - أحسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f_1(x)$

الحل - 17

1 - من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f_k'(x) = \frac{-k e^x(1 + k e^x) - k e^x(1 - k e^x)}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-k e^x - k^2 e^{2x} - k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-2k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$2 f_k'(x) = \frac{-4k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$(f_k(x) - x)^2 + 1 = \left(\frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{1 - 2k e^x + k^2 e^{2x}}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{1 - 2k e^x + k^2 e^{2x} + 2k e^x - 2k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{1 + 2k e^x + k^2 e^{2x} - 4k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{(1 + k e^x)^2 - 4k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= 1 - \frac{4k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 1$$

$$= \frac{-4k e^x}{(1 + k e^x)^2} + 2 \dots \dots \dots (2)$$

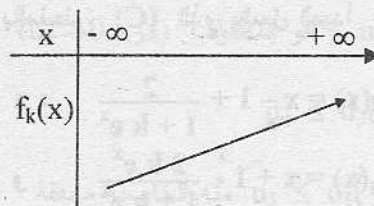
من (1) و (2) نستنتج أن : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$

أي : الدالة f_k حل للمعادلة $2 y' = (y - x)^2 + 1 \dots \dots \dots (E)$

2 - حسب السؤال (1) : $2 f_k'(x) = (f_k(x) - x)^2 + 1$ إذن : $f_k'(x) = \frac{1}{2} [(f_k(x) - x)^2 + 1]$

مله : $f_k'(x) > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}

إذن : f_k متزايدة تماما على \mathbb{R} كما يلي :



3 - المنحنى (C) يشمل الابدأ 0 إذن : $f_k(0) = 0$

$$\frac{1-k}{1+k} + 0 = 0 \Leftrightarrow 1-k=0$$

$$\Leftrightarrow k=1$$

المنحنى (C') يشمل النقطة A(1; 1) إذن : $f_k(1) = 1$

$$\frac{1-ke}{1+ke} + 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1-ke}{1+ke} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-ke=0$$

$$\Leftrightarrow k=1/e$$

4 - من أجل كل x من IR فإن :

$$x-1 + \frac{2}{1+ke^x} = x + \frac{-1-ke^x+2}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

$$x+1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1+ke^x-2ke^x}{1+ke^x} = x + \frac{1-ke^x}{1+ke^x} = f_k(x)$$

5 - ليكن $k > 0$

أ - وضعية (C_k) بالنسبة لـ (d) و (d')

$$f_k(x) - (x-1) = x-1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1) = \frac{2}{1+ke^x} > 0$$

إذن : المنحنى (C_k) فوق المستقيم (d)

$$f_k(x) - (x+1) = x+1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1) = \frac{-2ke^x}{1+ke^x} < 0$$

إذن : المنحنى (C_k) تحت المستقيم (d')

ب - معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_k) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f_k(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x+1 - \frac{2ke^x}{1+ke^x} - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2ke^x}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_k(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x-1 + \frac{2}{1+ke^x} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+ke^x} = 0$$

إذن : المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_k) في جوار $+\infty$

$$f_1(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} + x \quad : k=1 \quad - 6$$

من أجل كل x من IR فإن $(-x) \in \text{IR}$ و :

$$f_1(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - x = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} - x = \frac{e^x-1}{e^x+1} - x = \frac{-(1-e^x)}{(1+e^x)} - x = -\left(\frac{1-e^x}{1+e^x} + x\right) = -f_1(x)$$

إذن : f_1 دالة فردية .

$$F(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x \frac{1-e^t}{1+e^t} + t dt \quad - 7$$

بملاحظة منحنى الدالة f_1 على الشكل (يشمل المبدأ 0) . نستنتج مايلي :

من أجل $x > 0$: المنحنى فوق محور الفواصل .

من أجل $x < 0$: المنحنى تحت محور الفواصل .

نتيجة : نسمي S مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[0; x]$ حيث $x > 0$

و نسمي S' مساحة حيز المستوي المحدد بمنحنى الدالة f_1 و محور الفواصل على المجال $[x; 0]$ حيث $x < 0$

إذن لدينا النتائج التالية :

إذا كان $x > 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t) dt = S$ لأن المنحنى فوق محور الفواصل .

إذا كان $x < 0$ فإن : $\int_0^x f_1(t) dt = -\int_x^0 f_1(t) dt$ (حسب خواص التكامل)

$$= \int_x^0 -f_1(t) dt$$

S' = لأن المنحنى تحت محور الفواصل .
 خلاصة : العدد $\int_0^x f_1(t) dt$ هو مساحة الجزء من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل على المجال

$[0; |x|]$ لأن اندالة f_1 فردية

نتيجة : $F(x) - F(-x) = \int_0^x f_1(t) dt - \int_0^{-x} f_1(t) dt$

منه $F(-x) = F(x) = 0$

إذن : دالة زوجية

8 - $F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$ إذن : F هي الدالة الأصلية لـ f_1 و التي تتعدم عند 0

منه $F'(x) = f_1(x)$ إذن : إشارة $F'(x)$ هي إشارة $f_1(x)$ كما يلي :

| | | | | |
|---------------|------------------|-----------|---|-----------|
| | x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| (حسب المنحنى) | $F'(x) = f_1(x)$ | - | 0 | + |

منه جدول تغيرات الدالة F :

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $F'(x)$ | - | 0 | + |
| $F(x)$ | | | |

9 - حساب $F(x)$: $F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$

$$= \int_0^x \frac{1-e^t}{1+e^t} + t dt$$

$$= \int_0^x t + 1 - \frac{2e^t}{1+e^t} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + t - 2 \ln(1+e^t) \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \ln(1+e^x) + 2 \ln 2$$

نتيجة : عبارة $F(x)$ هي : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \ln(1+e^x) + \ln 4$

تحقيق : $F'(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1+e^x - 2e^x}{1+e^x} = x + \frac{1-e^x}{1+e^x} = f_1(x)$

$$F(0) = 0 - 2 \ln(2) + \ln 4 = -\ln 4 + \ln 4 = 0$$

التمرين - 18

نعتبر الدوال f_n المعرفة على المجال $[0; 1]$ بـ $f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$$

نضع $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ الجزء I

1 - أدرس تغيرات الدالة f_0 ثم أرسم منحنائها في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$ حيث وحدة القياس 6 cm محددًا المماسات عند النقط ذات الفواصل 0 و 1

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; 1]$ نضع $f(x) = -f_0'(x)$

2 - أحسب الدالة المشتقة للدالة f ثم بين أن f متناقصة على المجال $[0; 1]$

3 - استنتج أن من أجل كل x من المجال $[0; 1]$: $1/3 \leq f(x) \leq 1$

الجزء II

1 - أحسب $I_0 + I_1 + I_2$ ثم $I_0 + 2I_1$

2 - أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[0; 1]$

3 - استنتج اتجاه تغير المتتالية (I_n)

4 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل $x \in [0; 1]$: $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

5 - استنتج أن : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

6 - عين نهاية المتتالية (I_n)

7 - باستعمال التكامل بالتجزئة برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : فإن :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx$$

8 - باستعمال حصر العدد $f(x)$ في الجزء I بين أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

9 - بين أن : $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

10 - ابتداء من أي عدد طبيعي n_0 يكون هذا الحصر يقترب بالزيادة إلى 0,01 من I_n

11 - عين قيمة مقربة إلى 0,01 بالزيادة لـ I_n من أجل $n = n_0$

الحل - 18

الجزء I

1 - تغيرات الدالة f_0 على المجال $[0; 1]$:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad \text{إذن : } f_0(0) = 1 \quad \text{و} \quad f_0(1) = 1/3$$

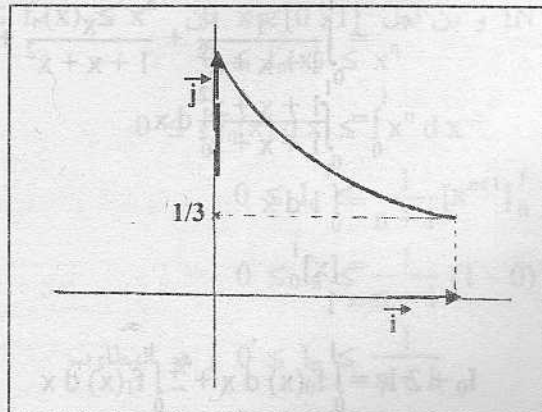
$$f_0'(x) = \frac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2} = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} \quad \text{و} \quad f_0 \text{ قابلة للاشتقاق على } [0; 1]$$

منه : $f_0'(x) < 0$ على المجال $[0; 1]$ لأن $-(2x+1) < 0$

منه جدول تغيرات الدالة f_0 :

| | | |
|-----------|---|-----|
| x | 0 | 1 |
| $f_0'(x)$ | | - |
| $f_0(x)$ | 1 | 1/3 |

الإثشاء :



المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $f_0(0) = 1$: $f_0'(0) = -1$

إذن : المماس له المعادلة $y = -x + 1$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 : $f_0(1) = 1/3$ ؛ $f_0'(1) = -3/9 = -1/3$

إذن : المماس له المعادلة $y = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}$ أي $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

إذن : $f(x) = -f_0'(x) - 2 = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$

إذن : $f'(x) = \frac{2(1+x+x^2)^2 - 2(2x+1)(1+x+x^2)(2x+1)}{(1+x+x^2)^4}$

$$= \frac{1+x+x^2}{(1+x+x^2)^4} [2(1+x+x^2) - 2(2x+1)^2]$$

$$= \frac{1}{(1+x+x^2)^3} (2+2x+2x^2 - 8x^2 - 8x - 2)$$

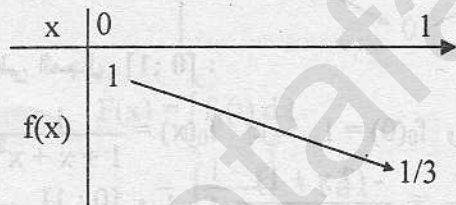
$$= \frac{-6x^2 - 6x}{(1+x+x^2)^3}$$

$$= \frac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

على المجال $[0; 1]$ لدينا $x+1 \geq 0$ و $-6x \leq 0$ إذن $\frac{-6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$

إذن : الدالة f متناقصة على المجال $[0; 1]$

3 - f متناقصة على المجال $[0; 1]$ إذن جدول تغيراتها كما يلي :



$$f(0) = -f_0'(0) = -(-1) = 1$$

$$f(1) = -f_0'(1) = -(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من $[0; 1]$: $1/3 \leq f(x) \leq 1$

الجزء II

$$I_0 + I_1 + I_2 = \int_0^1 f_0(x) dx + \int_0^1 f_1(x) dx + \int_0^1 f_2(x) dx \quad - 1$$

$$= \int_0^1 (f_0(x) + f_1(x) + f_2(x)) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{x}{1+x+x^2} + \frac{x^2}{1+x+x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx$$

$$= [x]_0^1$$

$$= 1$$

$$I_0 + 2I_1 = \int_0^1 f_0(x) dx + 2 \int_0^1 f_1(x) dx$$

$$= \int_0^1 (f_0(x) + 2f_1(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{2x}{1+x+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx \\
 &= [\ln(1+x+x^2)]_0^1 \\
 &= \ln 3 - \ln 1 \\
 &= \ln 3
 \end{aligned}$$

2 - إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$
الحالة الأولى : من أجل $n=0$

$$f_1(x) - f_0(x) = \frac{x}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{x-1}{1+x+x^2}$$

إذن : $f_1(x) - f_0(x) \leq 0$ لأن على المجال $[0; 1]$ فإن $x-1 \leq 0$ و $1+x+x^2 > 0$
الحالة الثانية : من أجل $n > 0$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} - \frac{x^n}{1+x+x^2} = \frac{x^n}{1+x+x^2}(x-1)$$

إذن : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ لأن على المجال $[0; 1]$ فإن $x-1 \leq 0$ و $x^n \geq 0$ و $1+x+x^2 > 0$
خلاصة : من أجل كل n من \mathbb{N} فإن $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$

3 - حسب السؤال السابق فإن على المجال $[0; 1]$:
 $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$
 $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ أي

$$\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$$

منه :

$$I_{n+1} \leq I_n$$

أي

نتيجة : المتتالية (I_n) متناقصة

4 - من أجل $n=0$ لدينا : $f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ إذن : $f_0(x) \geq 0$ على المجال $[0; 1]$

$$f_0(x) \leq 1 : \text{إذن } f_0(x) - 1 = \frac{1}{1+x+x^2} - 1 = \frac{-x-x^2}{1+x+x^2} \leq 0$$

منه : $0 \leq f_0(x) \leq 1$

من أجل $n > 0$ لدينا : $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}$ إذن : $f_n(x) \geq 0$ على المجال $[0; 1]$

$$f_n(x) \leq x^n : \text{إذن } f_n(x) - x^n = \frac{x^n}{1+x+x^2} - x^n = x^n \left(\frac{1}{1+x+x^2} - 1 \right) = \frac{x^n}{1+x+x^2} (-x-x^2) \leq 0$$

منه : $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

خلاصة : من أجل كل n من \mathbb{N} و من أجل $x \in [0; 1]$ فإن $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

5 - حسب السؤال السابق : $0 \leq f_n(x) \leq x^n$

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

إذن :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1$$

أي :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} (1-0)$$

أي :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

أي : وهو المطلوب

6 - لدينا : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ إذن : حسب الحصر فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

7 - لنحسب I_n بالتجزئة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x+x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^n f_0(x) dx$$

بالتجزئة :

$$\left. \begin{aligned} f(x) = -f_0'(x) \text{ لأن } u'(x) = f_0'(x) = -f(x) \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{aligned} u(x) = f_0(x) \\ v'(x) = x^n \end{aligned} \right\} \text{ نضع}$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} f_0(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n+1} x^{n+1} f(x) dx \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{1}{n+1} f_0(1) - 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \quad \text{وهو المطلوب}$$

8 - حسب الجزء I من التمرين فإن :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \frac{1}{3} x^{n+1} \leq f(x) x^{n+1} \leq x^{n+1} \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3} x^{n+1} dx \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{3(n+2)} [x^{n+2}]_0^1 \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2} [x^{n+2}]_0^1 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2} \quad \text{أي وهو المطلوب}$$

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

9 - لدينا :

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3(n+2)} \right) \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+2} \right) \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{منه :}$$

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{أي}$$

10 - يكون الحصر مقتربا من 0,01 بالزيادة إذا و فقط إذا كان :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left[\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \right] \leq 0,01$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq 0,01 \quad \text{أي :}$$

$$\frac{2}{3(n+1)(n+2)} \leq 0,01 \quad \text{أي :}$$

أي : $0,01 \times 3(n+1)(n+2) \geq 2$

أي : $0,03(n^2 + 3n + 2) \geq 2$

أي : $0,03n^2 + 0,09n + 0,06 \geq 2$

أي : $0,03n^2 + 0,09n - 1,94 \geq 0$

أي : $3n^2 + 9n - 194 \geq 0$

لنحل المعادلة $3x^2 + 9x - 194 = 0$ في IR

$x = 81 + 2328 = 2409$

إذن : $x_1 = \frac{-9 + \sqrt{2409}}{6}$ و $x_2 = \frac{-9 - \sqrt{2409}}{6}$

| | | | | |
|-------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| x | $-\infty$ | x_2 | x_1 | $+\infty$ |
| $3x^2 + 9x - 194$ | + | 0 | - | + |

منه إشارة $3x^2 + 9x - 194$ كمايلي :

لاحظ أن $x_1 \approx \frac{-9 + 49,08}{6} \approx \frac{40,08}{6} \approx 6,68$

إذن : أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق $3n_0^2 + 9n_0 - 194 \geq 0$ هو $n_0 = 7$

نتيجة : يكون الحصر يقترب إلى 0,01 بالزيادة ابتداء من $n_0 = 7$

11 - من أجل $n = 7$ نحصل على : $\frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{3 \times 8 \times 9} \leq I_7 \leq \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9}$

أي : $0,0462 \leq I_7 \leq 0,0555$

إذن : $I_7 = 0,05$ بتقريب 0,01 بالزيادة .

التمرين - 19

الجزء I : لتكن f الدالة المعرفة على $IR - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

1 - أدرس تغيرات الدالة f

2 - أكتب $f(x)$ من الشكل $ax + b + \frac{c}{x + 1}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{I}; \vec{J})$

3 - أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين ميلهما 3 عند نقطتين A و B يطلب إحداثيها .

4 - برهن أن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5 - أكتب معادلتى المماسين عند A و B

6 - أثبت أن (C) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) و آخر شاقولي (D)

لتكن I نقطة تقاطع (Δ) و (D)

7 - أثبت أن I مركز تناظر للمنحنى (C) ثم أنشئ (C')

8 - إستنتج إنشاء للمنحنى (C') الممثل للدالة v حيث $v(x) = \frac{x^2 + x - 2}{|x + 1|}$

ليكن D_λ الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمتان التي معادلاتها $x = \lambda$; $x = 1$

حيث $\lambda \in]1; +\infty[$

9 - أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز D_λ ثم عين $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

الجزء II

لتكن g الدالة المعرفة كمايلي : $g(x) = \frac{(\ln x)^2 + \ln x - 2}{\ln x + 1}$

1 - عين مجموعة تعريف الدالة g

2 - أثبت أن g هي مركب الدالة f و دالة أخرى يطلب تعيينها

3 - إستنتج عبارة $g'(x)$ بدلالة $f'(\ln x)$ ثم أدرس إشارتها

4 - أرسم جدول تغيرات الدالة g ثم أنشئ منحنائها (C'') في معلم متعامد و متجانس .

الجزء III

لتكن h_m الدالة المعرفة على IR بـ $h_m(x) = \frac{e^{2mx} + e^{mx} - 2}{e^{mx} + 1}$ حيث m عدد حقيقي معطى غير معدوم .

1 - من أجل $m = 1$ أثبت أن h_1 هي مركب الدالة f و دالة أخرى يطلب تعيينها

2- أدرس تغيرات الدالة h_1

3- ليكن $m \in \mathbb{R}^*$ أثبت أن $h_m = f \circ u_m$ حيث u_m دالة يطلب تعيينها

4- أدرس تغيرات الدالة u_m

5- حل في \mathbb{R} المعادلة $u_m(x) = t$ ذات المجهول x حيث t عدد حقيقي معطى

الحل - 19

1- تغيرات الدالة $f : f$ معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-1-2}{x+1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ و دالتها المشتقة :

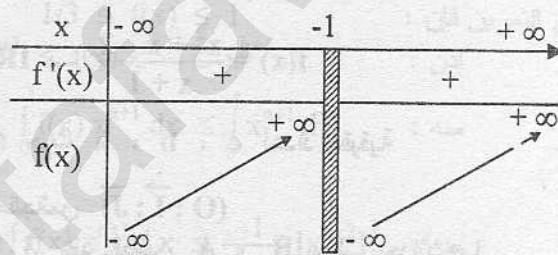
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2+2x+3 كما يلي :

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ إذن : $x^2+2x+3 > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R}

منه : $f'(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$

جدول التغيرات :



2- باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r} x^2+x-2 \quad | \quad x+1 \\ x^2+x \quad \quad | \quad x \\ \hline 0-2 \quad \quad | \quad x \end{array}$$

$$f(x) = x - \frac{2}{x+1} \quad \text{إذن :}$$

3- يكون للمنحنى (C) مماس ميله 3 عند نقطة ذات الفاصلة x_0 إذا و فقط إذا كان x_0 حلا للمعادلة $f'(x) = 3$ $x \neq -1$ كما يلي :

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+6x+3 = x^2+2x+3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = -2$$

نتيجة : (C) يقبل مماسين ميلهما 3 أحدهما عند النقطة $A(0; f(0))$ و الآخر عند النقطة $B(-2; f(-2))$:

$$A(0; -2) \quad \text{إذن : } f(0) = -2$$

$$B(-2; 0) \quad \text{إذن : } f(-2) = \frac{4-2-2}{-1} = 0$$

4- بما أن فاصلة A تساوي ترتيب B و ترتيب A تساوي فاصلة B فإن النقطتين A و B متناظرتين بالنسبة إلى

المستقيم ذو المعادلة $y = x$

5- المماس عند A له المعادلة : $y = 3(x-0) - 2$ أي $y = 3x - 2$

المماس عند B له المعادلة : $y = 3(x+2) + 0$ أي $y = 3x + 6$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - \frac{2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x+1} = 0 \quad -6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x+1} = 0$$

إذن : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$
من جهة أخرى $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ إذن : المستقيم (D) ذو المعادلة $x = -1$ مقارب
شاقولي للمنحنى (C) $x \rightarrow -1$

7 - لتكن نقطة تقاطع (Δ) و (D) .

$I \in (D)$ إذن : $x = -1$

$I \in (\Delta)$ إذن : $y = x$ أي $y = -1$

نتيجة : $I(-1; -1)$

ليكن $x \neq -1$ إذن : $x \neq 1$

منه : $-2 - x \neq -2 + 1$

أي $-2 - x \neq -1$

أي f معرفة من أجل $-2 - x$

$$f(-2-x) = \frac{(-2-x)^2 + (-2-x) - 2}{-2-x+1}$$

$$= \frac{4 + 4x + x^2 - 2 - x - 2}{-2-x+1}$$

$$= \frac{x^2 + 3x}{-x-1}$$

$$2(-1) - f(x) = -2 - \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$$

$$= \frac{-2x - 2 - x^2 - x + 2}{x+1}$$

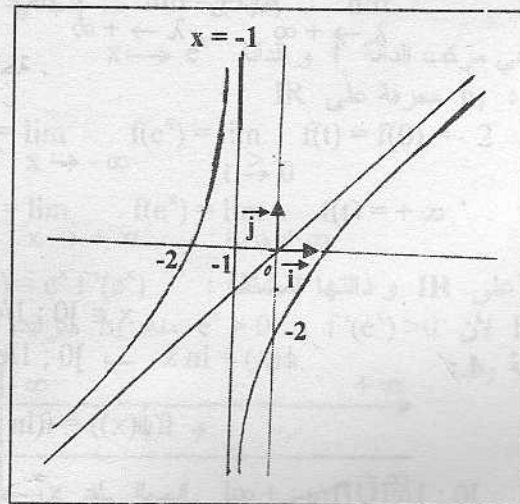
$$= \frac{-x^2 - 3x}{x+1}$$

$$= \frac{x^2 + 3x}{-x-1}$$

نتيجة : $f(-2-x) = 2(-1) - f(x)$

إذن : النقطة $I(-1; -1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C)

الإشياء :



$$v(x) = \frac{x^2 + x - 2}{|x + 1|}$$

الفهرس

| الصفحة | المحور |
|--------|-----------------------------|
| 1 | المحور 1 : التزايد المقارن |
| 4 | حلول تمرين الكتاب المدرسي |
| 30 | حلول لتمرين نماذج للبكلوريا |
| 72 | المحور 2 : الدوال الأصلية |
| 76 | حلول تمرين الكتاب المدرسي |
| 115 | المحور 3 : الحساب التكاملي |
| 121 | حلول تمرين الكتاب المدرسي |
| 168 | حلول لتمرين نماذج للبكلوريا |

سلسلة هباج

TEL : 0773 26 52 81