سلاسل المنجد - دروس و تمارين

علوم فيزيائية

3AS

الشعب العلمية و الرياضية

السلسلة 3-05-1

تطور جملة ميكانيكية

عرض نظري و تمارين 01

يمكن تحميل نسخة من هذا الملف من الموقع :

www.sites.google.com/site/faresfergani

للمزيد (عرض نظري مفصل – تمارين – فيديوهات ......)
يرجى زيارتنا على صفحة الوحدة في الموقع الإلكتروني

لكي يصلك جديد الموقع تابع صفحة الفايسبوك التالية :

الأستاذ فرقاني فارس أستاذ العلوم الفيزيائية Fergani Fares

الأستاذ فرقاني فارس

ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة

fares_fergani@yahoo.fr

الإصدار : أكتوبر/2021

العلوم الفيزيائية

سلاسل المنجد في العلوم الفيزيائية – ثالثة ثانوي – الوحدة 05

تطور جملة ميكانيكية

إعداد الأستاذ فرقاني فارس
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم - الخروب - قسنطينة
www.sites.google.com/site/faresfergani

****

السلسلة 3 – 05 – 01

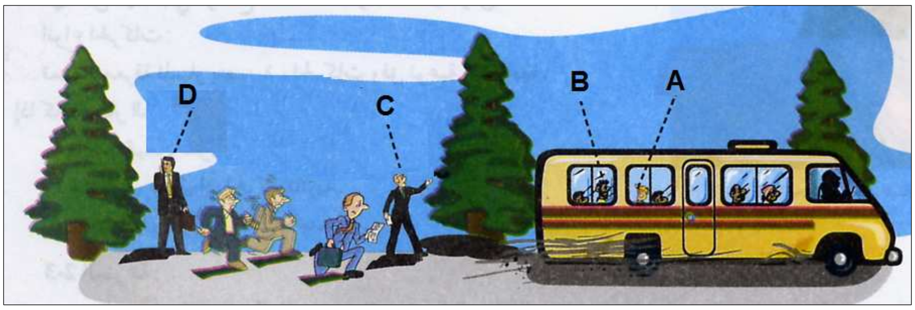
عرض نظري و تمارين

I– مفاهيم أساسية في الميكانكيك

1- المرجع و المعلم

• نسبية الحركة :

يمثل الشكل التالي ، مسافرين ، A ، B راكبين حافلة في حركة مستقيمة منتظمة ، و مسافرين آخرين B و C ، واقفين على رصيف محطة المسافرين (الشكل) .



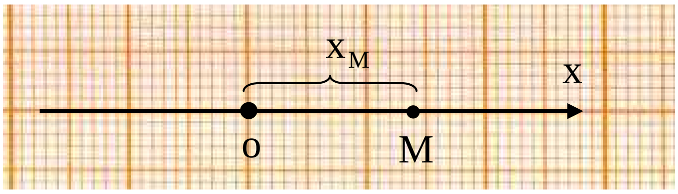
- نلاحظ أن كل مسافر يبدو متحركا و ساكنا في آن واحد ، نستنتج أن الحركة و السكون مفهومان نسبيان .
- عندما ننسب حركة أو سكون أي مسافر بالنسبة لشجرة مثلا ، لا يمكن للمسافر A أن يبدو في حالة سكون بالنسبة للشجرة عندما يكون في حالة حركة بالنسبة إليها ، و لا يمكن للمسافر C أن يكون متحركا بالنسبة للشجرة عندما يكون ساكنا بالنسبة لها . نستنتج أنه لدراسة حركة أو سكون جسم يجب نسب هذا الجسم إلى جسم ثابت بالنسبة للأرض ، يسمى مرجع .

نتيجة :

- الحركة و السكون مفهومان نسبيان ، و لدراسة حركة أي جسم ، يقتضي اختيار مرجع تنسب إليه حركة هذا الجسم و هذا المرجع عادة ما يكون الأرض . أو جسم ساكن بالنسبة للأرض .

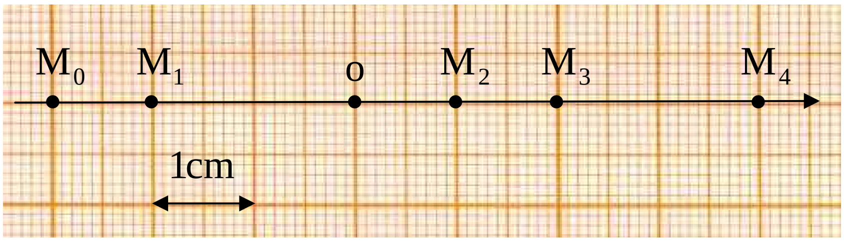
• معلم المسافة و الفاصلة :

- معلم المسافة هو معلم مرتبط بالمرجع ، يرتكز على نقطة ثابتة (O) تدعى مبدأ المعلم (أو مركز الإحداثيات) ، يستعمل هذا النوع من المعالم في تعيين موضع المتحرك عند كل لحظة زمنية ، و هو يوجد على ثلاث أنواع : فضائي ، مستوي ، خطي .
- فاصلة الموضع M لمتحرك على مسار مستقيم في معلم خطي يوازي هذا المسار، هو مقدار جبري يمثل بعد هذا الموضع عن مبدأ المعلم (الشكل) .



مثال :

يمثل الشكل التالي الأوضاع التي يشغلها متحرك خلال أزمنة متساوية .

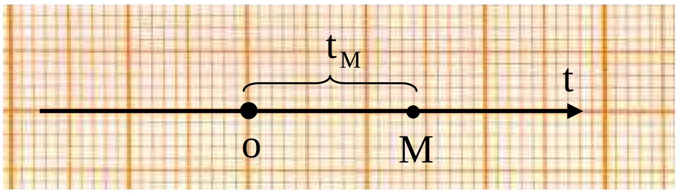


وفق تعريف الفاصلة ، تكون فواصل مواضع المتحرك M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 المبينة في الشكل بالاعتماد على سلم الرسم المرفق كما في الجدول التالي :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
x (m)	- 3	- 2	+ 1	+ 2	+ 4

• معلم الأزمنة و اللحظة الزمنية :

- معلم الأزمنة هو معلم خطي موجه و موحد بوحدات زمنية ، مبدأه يكون كيفي و مختار .
- اللحظة الزمنية عند الموضع M هي مقدار جبري يمثل الفاصل الزمني بين لحظة بلوغ المتحرك النقطة M ، و مبدأ الأزمنة .

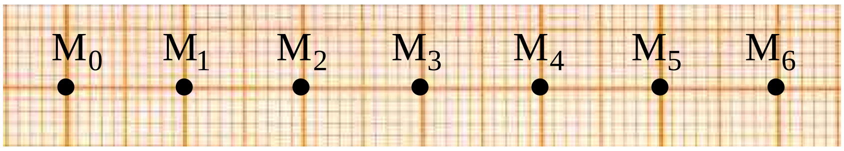


ملاحظة :

يمكن للحظة الزمنية أن تكون سالبة ، لكن نعتبر عادة مبدأ الأزمنة عند بداية الحركة لتفادي اللحظة السالبة .

مثال :

يمثل الشكل التالي الأوضاع المتتالية التي يشغلها متحرك خلال أزمنة متساوية $\tau = 1\ s$.

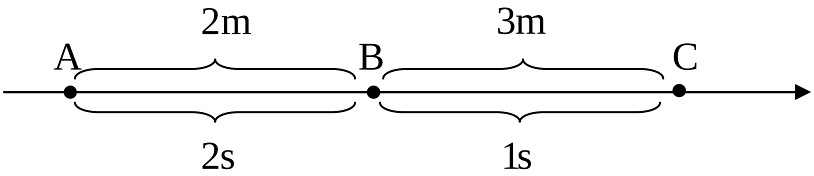


ندون في الجدول التالي لحظات مرور المتحرك بالمواضع M_0 ، M_1 ، ...... ، M_6 باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة مرور المتحرك بالموضع M_2 .

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
t (s)	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4

التمرين (1) : (التمرين : 001 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم نقطي (S) يتحرك على مسار مستقيم ، يبدأ حركته من النقطة (A) باتجاه النقطة (B) ، فيقطع مسافة $AB = 2\ m$ ، بعد $2\ s$ من بدأ حركته ، ثم مسافة $BC = 3\ m$ بعد 1s من مروره بالنقطة (B) باتجاه نقطة أخرى (C) .



- في معلم خطي منطبق على مسار الحركة أوجد فواصل النقاط (A) ، (B) ، (C) ، و كذا لحظة مرور المتحرك بهذه النقاط في الحالات التالية :

1- مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة (A) .

2- مبدأ الأزمنة و الفواصل عند النقطة (B) .

3- مبدأ الأزمنة عند النقطة (A) و مبدأ الفواصل عند النقطة (B) .

الأجوبة :

1)

	A	B	C
t (s)	0	2	3
x (m)	0	2	5

2)

	A	B	C
t (s)	-2	0	1
x (m)	-2	0	3

3)

	A	B	C
t (s)	0	2	3
x (m)	-2	0	3

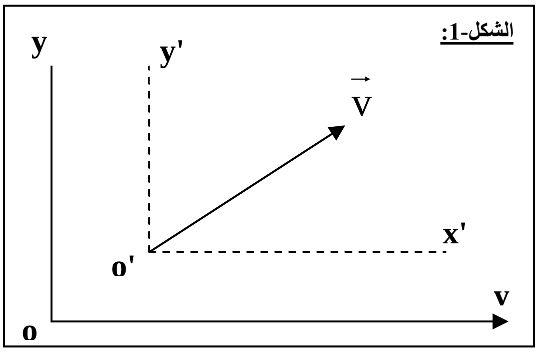
2- تحليل الأشعة

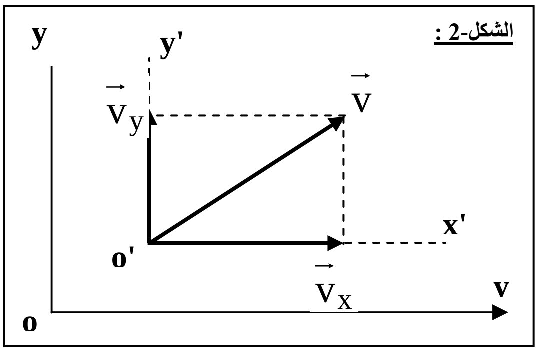
• كيفية تحليل شعاع إلى مركبتيه في معلم مستوي :

لتحليل شعاع و ليكن شعاع السرعة $\vec{v}$ إلى مركبتيه $\vec{v}_x$ وفق المحور ox و $\vec{v}_y$ وفق المحور oy نقوم بما يلي :

- نرسم مستقيمين مارين بمبدأ الشعاع $\vec{v}$ الأول (o'x') يوازي المحور (ox) و الثاني (o'y') يوازي المحور (oy) (الشكل-1) .

- نسقط عموديا الشعاع $\vec{v}$ على المستقيمين (o'x') ، (o'y') فنحصل على الشعاع $\vec{v}_x$ الذي يمثل مركبة الشعاع $\vec{v}$ على المحور (ox) و على الشعاع $\vec{v}_y$ الذي يمثل مركبة على الشعاع $\vec{v}$ المحور (oy) (الشكل-2)





ملاحظة :

إذا كان المعلم خطي ox يكون لأي شعاع و ليكن $\vec{v}$ مركبة واحدة $\vec{v}_x$ تكون منطبقة على الشعاع الأصلي $\vec{v}$ أي :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x}$$

• القيمة الجبرية لمركبة شعاع

- القيمة الجبرية لمركبة شعاع وليكن $\vec{v}_x$ ، التي يرمز لها بـ v_x (بدون شعاع) ، هي مقدار جبري يمثل طويلة مركبة الشعاع بالموجب (+) عندما تكون مركبة الشعاع في الجهة الموجبة للمحور ، و طويلة مركبة الشعاع بالسالب (-) إذا كانت مركبة الشعاع في الجهة السالبة (-) للمحور (ox) ، أي :

- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ في جهة المحور ox يكون :

$$v_x = + \left\| \vec{v}_x \right\|$$

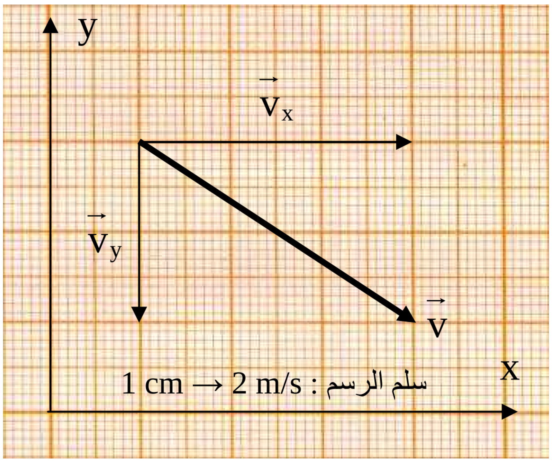
- عندما يكون الشعاع $\vec{v}_x$ عكس جهة المحور ox يكون :

$$v_x = - \left\| \vec{v}_x \right\|$$

- يمكن كتابة شعاع و ليكن $\vec{v}$ بدلالة مركبتيه v_x ، v_y و شعاعي الوحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ كما يلي :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}}$$

<u>مثال :</u>



- مركبة شعاع السرعة على المحور ox في الجهة الموجبة للمحور ox و عليه يكون :

$$v_x = + \left\| \vec{v}_x \right\| = + (3 . 2) = + 6 \ m/s$$

- مركبة شعاع السرعة على المحور oy في الجهة السالبة للمحور oy و عليه يكون :

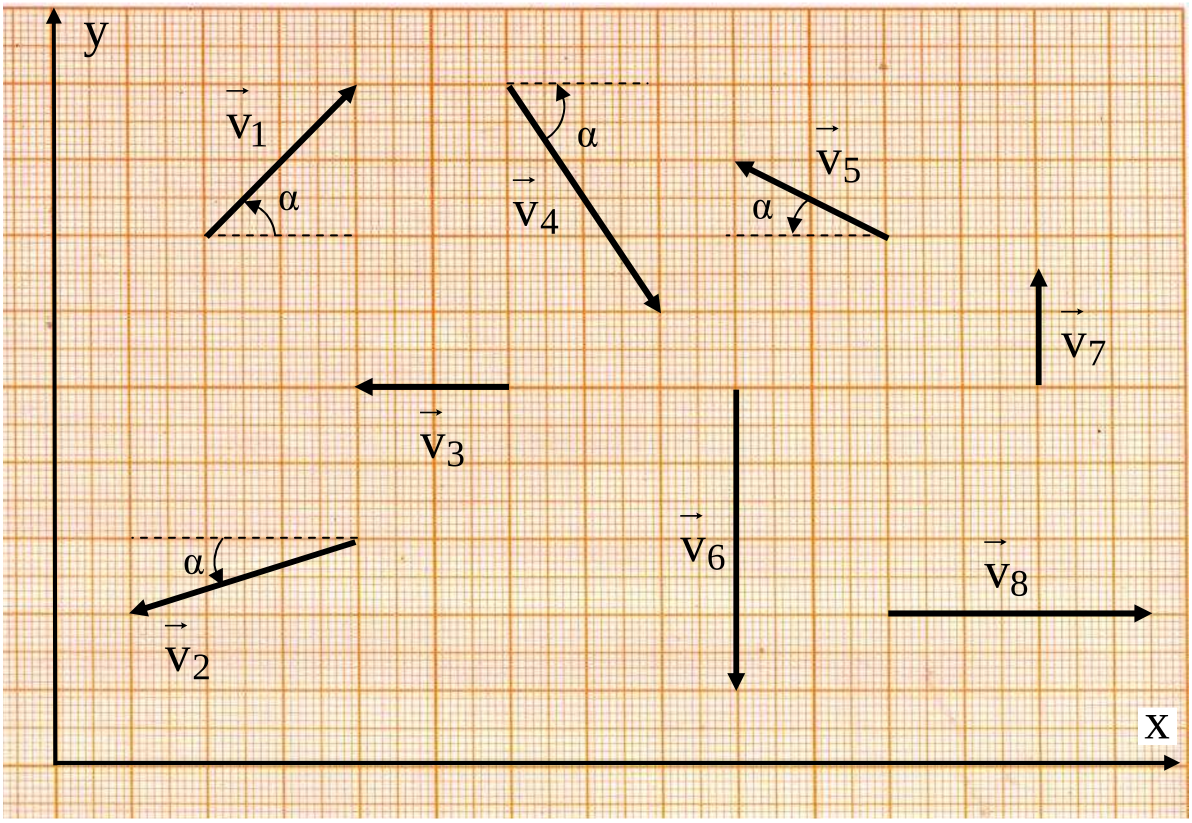
$$v_y = - \left\| \vec{v}_y \right\| = - (2 . 2) = - 4 \ m/s$$

- عبارة شعاع السرعة بدلالة مركبتيه v_x ، v_y و شعاعي الوحدة $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ تكتب كما يلي :

$$\vec{v} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$

<u>التمرين (2) :</u> <u>(التمرين : 003 في بنك التمارين على الموقع) (*)</u>

1- يمثل الشكل التالي أشعة للسرعة في معلم مستوي (o,x,y) :



1- من خلال هذا الشكل و اعتمادا على سلم السرعة : 1 cm → 2 m/s أكتب عبارت أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$.

2- عبر عن مركبتي كل شعاع بدلالة طويلة شعاع السرعة v و الزاوية α التي يصنعها شعاع السرعة مع المحور ox .

الأجوبة :

1-كتابة عبارات أشعة السرعة على الشكل $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$:

$$\vec{v_1} = +4\vec{i} + 4\vec{j}\ ,\quad \vec{v_2} = -6\vec{i} - 2\vec{j}\ ,\quad \vec{v_3} = -4\vec{i}\ ,\quad \vec{v_4} = +4\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{v_5} = -4\vec{i} + 2\vec{j}\ ,\quad \vec{v_6} = -8\vec{j}\ ,\quad \vec{v_7} = +3\vec{j}\ ,\quad \vec{v_8} = +7\vec{i}\ .$$

2- عبارتي v_x ، v_y بدلالة v ، α :

$$\vec{v_1}\begin{cases} v_{1x} = +v_1\cos\alpha \\ v_{1y} = +v_1\sin\alpha \end{cases}\qquad \vec{v_2}\begin{cases} v_{2x} = -v_2\cos\alpha \\ v_{2y} = -v_2\sin\alpha \end{cases}\qquad \vec{v_3}\begin{cases} v_{3x} = -v_3 \\ v_{3y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v_4}\begin{cases} v_{4x} = +v_4\cos\alpha \\ v_{4y} = -v_4\sin\alpha \end{cases}\qquad \vec{v_5}\begin{cases} v_{5x} = -v_5\cos\alpha \\ v_{5y} = +v_5\sin\alpha \end{cases}\qquad \vec{v_6}\begin{cases} v_{6x} = 0 \\ v_{6y} = -v_6 \end{cases}$$

$$\vec{v_7}\begin{cases} v_{7x} = +0 \\ v_{7y} = +v_7 \end{cases}\qquad \vec{v_8}\begin{cases} v_{8x} = +v_8 \\ v_{8y} = 0 \end{cases}$$

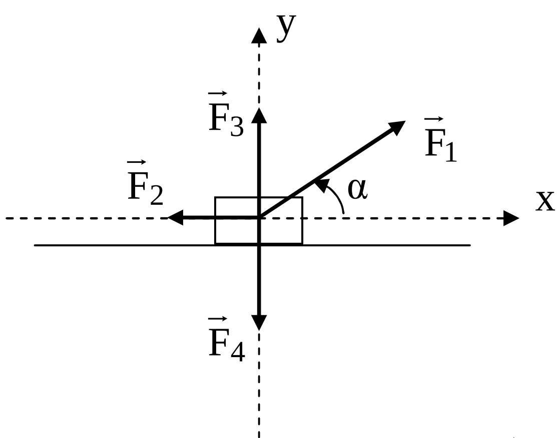
• **تحليل علاقة شعاعية بالنسبة في معلم مستوي :**

- يعتمد مبدأ تحليل علاقة شعاعية على مبدأ تحليل شعاع كما يلي :

$$\boxed{\vec{A} = \alpha\vec{B} \rightarrow A_x\vec{i} + A_y\vec{j} = \alpha B_x\vec{i} + \alpha B_y\vec{j} \rightarrow \begin{cases} A_x = \alpha B_x \\ A_y = \alpha B_y \end{cases}}$$

التمرين (3) : (التمرين : 004 في بنك التمارين على الموقع) (*)

نعتبر جسم (S) خاضع إلى تأثير مجموعة من القوى كما مبين في الشكل التالي :



حلل العلاقة الشعاعية التالية وفق المحورين ox ، oy :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = m\vec{a}$$

حيث m كتلة الجسم و الشعاع $\vec{a}$ هو شعاع يميز حركة الجسم .

<u>الأجوبة :</u>

<u>- تحليل العلاقة الشعاعية :</u>

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = m.a_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = m.a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 + 0 + 0 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + 0 + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1.\cos\alpha - F_2 = m.a_x \\ F_1.\sin\alpha + F_3 - F_4 = m.a_y \end{cases}$$

<u>II– مقاربة تاريخية لميكانيك نيوتن</u>

<u>1- تذكير بالقانونين الأول و الثاني لنيوتن</u>

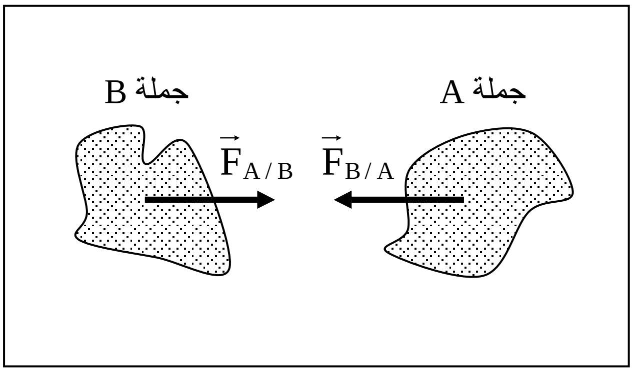
<u>• القانون الأول لنيوتن :</u>

ينص على ما يلي :
في المراجع العاليلية **" يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخل قوة لتغيير حالته الحركية "**

<u>• القانون الثالث لنيوتن :</u>

" إذا أثرت الجملة (A) على الجملة (B) بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة (B) تأثر أيضا وبصفة آنية على الجملة (A) بقوة $\vec{F}_{B/A}$ تساوي القوة $\vec{F}_{A/B}$ في الشدة و تعاكسها في الإتجاه أي : $\vec{F}_{A/B} = -\ \vec{F}_{B/A}$ " .

▪ مبدأ الفعلين المتبادلين هو القانون الثالث من بين القوانين الثلاثة التي صاغها العالم نيوتن ، مع التذكير بأن القانون الأول هو مبدأ العطالة الذي تطرقنا إليه سابقا .

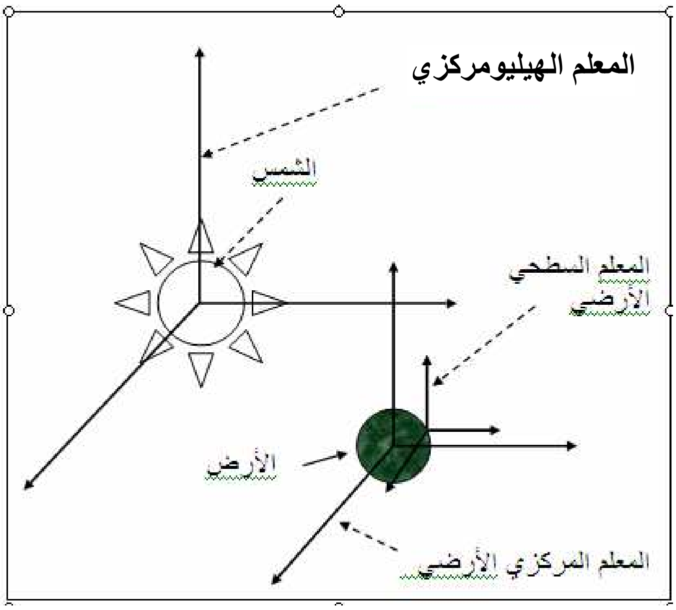


<u>2- المراجع الغاليلية</u>

<u>• تعريف المرجع الغاليلي :</u>

- المرجع الغاليلي هو كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة ، و كل مرجع في حركة مستقيمة منتظمة مع مرجع غاليلي هو كذلك مرجع غاليلي .
- لتعريف المراجع الغاليلية نبحث عن مرجع ساكن أصلا ، لذلك اختير مركز الشمس و اعتبر مرجعا غاليليا .

• أمثلة عن المراجع الغاليليلة :



المرجع المركزي الشمسي (الهيليو مركزي) :

- المرجع المركزي الشمسي (الهيليومركزي) هو مرجع منطبق على مركز الشمس يكون مرفق بمعلم محاوره الثلاثة متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الشمس (الشكل) .
- يعتبر المرجع الهيليومركزي غاليليا إلى حد كبير .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتحرك حول الشمس كالأرض و بقية الكواكب .

المرجع المركزي الأرضي (الجيومركزي) :

- المرجع المركزي الأرضي (الجيومركزي) هو مرجع منطبق على مركز الأرض يكون مرفق بمعلم محاوره الثلاثة تكون متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لمركز الأرض (الشكل) .
- في الحقيقة إن المرجع المركزي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار إهليليجي حول الشمس ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصيرا مقارنة مع مدة دوران مركز الأرض حول الشمس يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة مركز الأرض حول الشمس في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتحرك حول الأرض ، مثل الأقمار الاصطناعية .

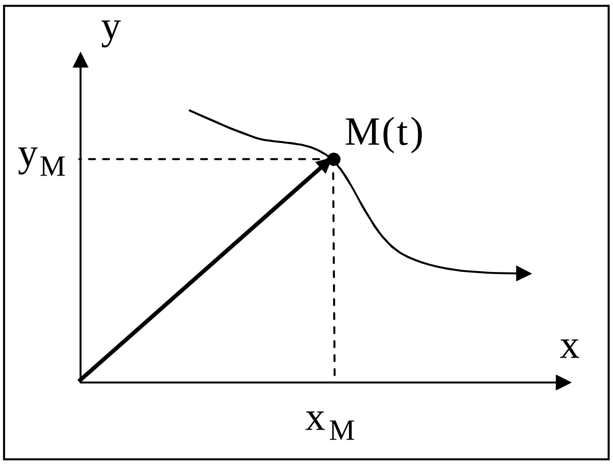
المرجع السطحي الأرضي :

- المرجع السطحي الأرضي هو مرجع منطبق على نقطة من سطح الأرض يكون مرفق بمعلم محاوره الثلاثة تكون متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تعتبر ثابتة بالنسبة لنقطة من سطح الأرض (الشكل) .
- في الحقيقة إن المرجع السطحي الأرضي ليس غاليليا بالمعنى الدقيق ، لكون مبدأ معلمه له مسار دائري بسبب دوران الأرض حول نفسها ، غير أنه بالنسبة للتجارب التي تدوم وقتا قصير مقارنة مع مدة دوران الأرض حول نفسها يمكن اعتبار هذا المرجع غاليلي إذ أن حركة مركز الأرض حول نفسها في هذا المجال الزمني (زمن التجربة القصير) تكون مستقيمة منتظمة تقريبا مع المرجع الهيليومركزي الغاليلي .
- يعتمد على هذا المرجع في دراسة حركة الأجسام التي تتم على سطح الأرض مثل حركة قذيفة ، حركة جسم على مستوي مائل ، حركة نواس ....

3- شعاع التسارع و المعادلات الزمنية للحركة

• شعاع الموضع – الإحداثيات الديكارتية :

- تجري دراسة الحركة في معالم ثابتة قد تكون هذه المعالم فضائية أو مستوية أو خطية ، و ذلك حسب ما تقتضيه نوع كل حركة .



- إذا اعتبرنا الدراسة في معلم مستوي كما في (الشكل) التالي :
فإن الموضع (M) للنقطة المادية في اللحظة الزمنية (t) يتعين بشعاع يسمى شعاع الموضع ، يرمز له بـ $\vec{r}$ و هو يعطى بالعلاقة الشعاعية التالية :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

- تسمى المقادير الجبرية x ، y **بالإحداثيات الديكارتية** لشعاع الموضع $\vec{r}$.
- طويلة شعاع الموضع يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- إذا كانت النقطة المادية (M) ثابتة تكون الإحداثيات الديكارتية x ، y مستقلة عن الزمن (ثابتة) .
- إذا كانت النقطة المادية (M) في حالة حركة تكون الإحداثيات الديكارتية x ، y دوال في الزمن (ذات المتغير t) .
و تكتب في هذه الحالة الإحداثيات x ، y على شكل دوال ذات المتغير t كما يلي :

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

تسمى هذه العلاقات الزمنية و التي تعبر عن الإحداثيات الكارتيزية بدلالة الزمن **بالمعادلات الزمنية** للحركة .
- المسار هو مجموعة النقط التي يشغلها المتحرك في كل لحظة ، و عند إيجاد علاقة تربط بين الإحداثيات الديكارتية للمتحرك نحصل على ما يسمى **معادلة المسار** ، نذكر بما يلي :
- معادلة مستقيم من الشكل : $y = ax + b$.
- معادلة قطع مكافيء : $y = ax^2 + bx + C$.

• شعاع الانتقال :

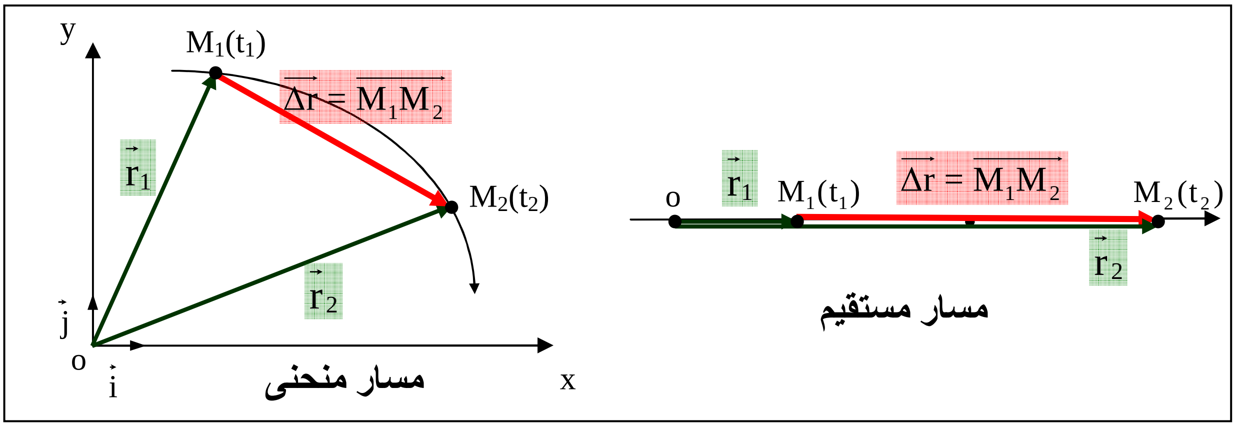
- إذا انتقلت النقطة المادية من الموضع M_1 عند اللحظة t_1 أين يكون شعاع موضعها $\vec{r}_1$ إلى الموضع M_2 عند اللحظة t_2 أين يكون شعاع موضعها $\vec{r}_2$ فإنه يعبر عن هذا الانتقال بشعاع يدعى **شعاع الانتقال** $\overrightarrow{\Delta r}$ يساوي التغير في شعاع الموضع بين اللحظتين t_1 ، t_2 و يكون :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}}$$

و إذا كان : $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ ، $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ يكون :

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}}$$

- تكون جهة شعاع الإنتقال في نفس جهة الحركة كما موضح في (الشكل) .
- في حالة مسار مستقيم يكون شعاع الإنتقال محمولا على المسار (الشكل)

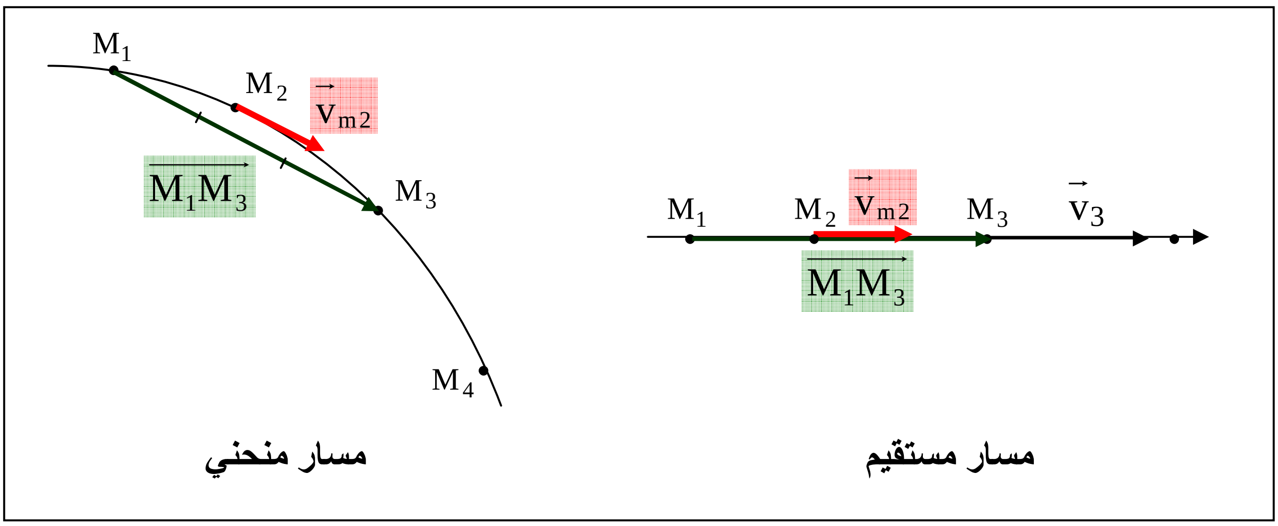


● **<u>شعاع السرعة :</u>**

- شعاع السرعة المتوسطة الذي يرمز له بـ $\vec{v}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع الإنتقال $\Delta\vec{r}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}}$$

- يمثل شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ و ليكن $\vec{v}_{m2}$ عند الموضع M_2 بشعاع يوازي شعاع الانتقال $\overrightarrow{M_1M_3}$ و في نفس جهته و طويلته $\left\|\vec{v}_m\right\| = \frac{1}{\Delta t}\left\|\overrightarrow{M_1M_3}\right\|$ كما مبين في الشكل التالي أين نعتبر $\Delta t = 3\ s$ فتكون طويلة شعاع السرعة المتوسطة ثلث طويلة شعاع الإنتقال .



- عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ هو مشتق شعاع الموضع $\vec{r}$ بالنسبة للزمن ، أي :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

و إذا كان : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ يكون :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}}$$

أو :

$$\boxed{\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}}$$

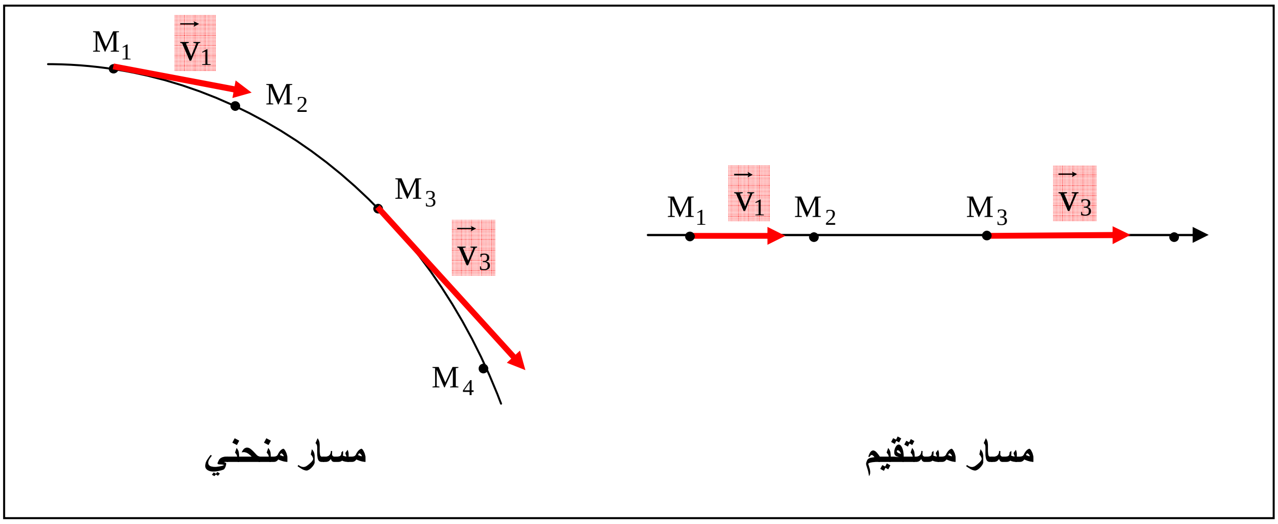
حيث :

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt}}$$

- كما يكون :

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

- يكون شعاع السرعة اللحظية مماسي للمسار في كل موضع عند كل لحظة و دوما في جهة الحركة (الشكل) ، و لا يكون أبدا شعاع السرعة عكس جهة الحركة .
- في حالة مسار مستقيم يكون شعاع السرعة محمول على المسار و يتميز بنفس الخصائص السابقة .

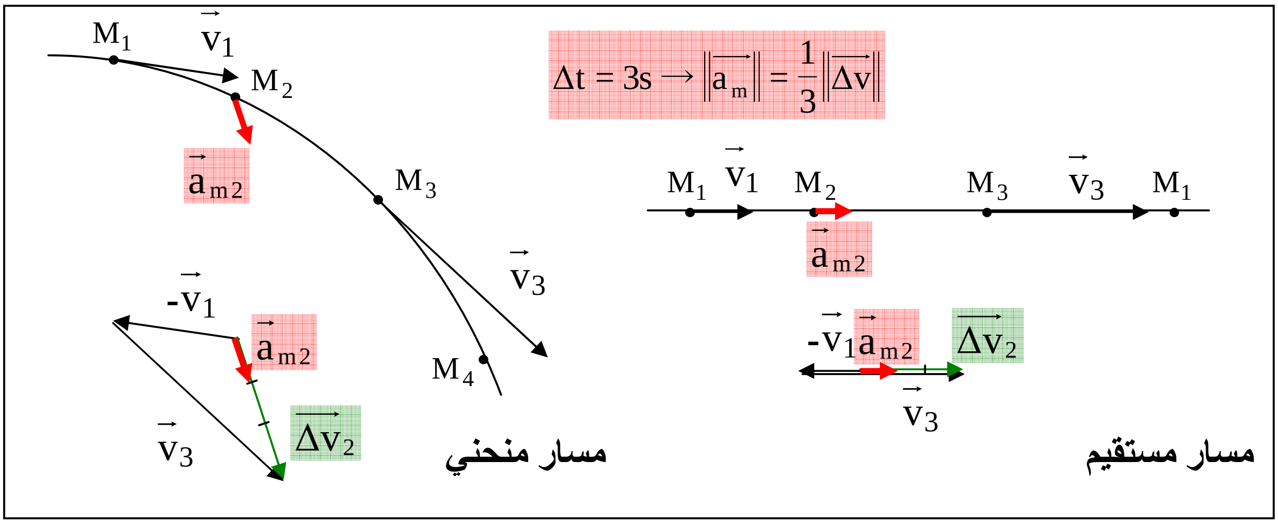


• شعاع التسارع :

- شعاع التسارع المتوسط الذي يرمز له بـ $\vec{a}_m$ بين لحظتين t_1 ، t_2 هو النسبة بين شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v}$ بين هاتين اللحظتين و المجال الزمني $\Delta t = t_2 - t_1$ أي :

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

- يمثل شعاع السرعة التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ و ليكن $\vec{a}_{m2}$ في الموضع M_2 بشعاع يوازي شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v_2}$ عند هذا الموضع و في نفس جهته و طويلته $\left\|\vec{a}_{m2}\right\| = \frac{1}{\Delta t}\left\|\overrightarrow{\Delta v_2}\right\|$ (الشكل التالي) أين نعتبر $\Delta t = 3\ s$ فتكون طويلة شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_{m2}$ في الموضع M_2 ثلث طويلة شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v_2}$ عند هذا الموضع .
- نذكر أنه لتمثيل شعاع تغير السرعة $\overrightarrow{\Delta v}$ عند الموضع M_2 ، نمثل عند هذا الموضع شعاعين مسايرين للشعاعين $\vec{v}_3$ ، $-\vec{v}_1$ و نجعل لهما نفس المبدأ ، ثم نرسم الشعاع $\overrightarrow{\Delta v_2}$ الذي يكون من بداية الشعاع الأول $-\vec{v}_1$ إلى نهاية الشعاع الثاني $\vec{v}_3$ (الشكل) (هناك طرق أخرى) .



- عندما يؤول Δt نحو الصفر ، ينتهي شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ نحو شعاع يدعى شعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ هو مشتق شعاع السرعة $\vec{v}$ أي :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

و إذا كان : $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ يكون :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}}$$

أو :

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

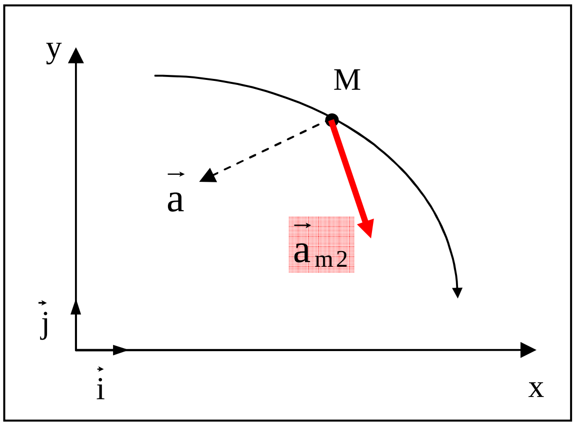
حيث :

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

- كما يكون :

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

- يكون شعاع التسارع اللحظي متجه دوما نحو تقعر المسار في حالة مسار منحني و محمول على المسار في حالة مسار مستقيم ، و ليس بالضرورة يكون في جهة الحركة (الشكل) .



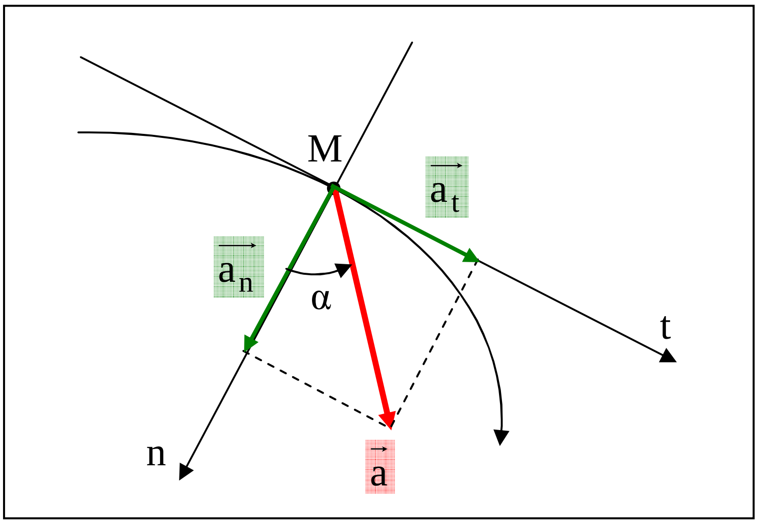
ملاحظة-1 :

- وحدة السرعة هي : m/s ، و وحدة التسارع هي : m/s^2 .

• مركبتي شعاع التسارع في معلم فريني :

- معلم فريني في الحركات المنحنية هو معلم مبدأه موضع المتحرك M في لحظة ما يتكون من محورين متعامدين أحدهما (ot) يكون مماسي للمسار في الموضع M جهته هي جهة الحركة و الآخر (on) ناظمي ، يتجه نحو مركز المسار (الشكل)

- يمكن تحليل شعاع التسارع عند الموضع M في اللحظة t ، الى مركبتين : مماسية $\vec{a}_t$ ، وناظمية $\vec{a}_n$ وفق المحورين المماسي و الناظمي ، كما مبين في (الشكل) التالي :



و نكتب :

$$\boxed{a = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}}$$

حيث :

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

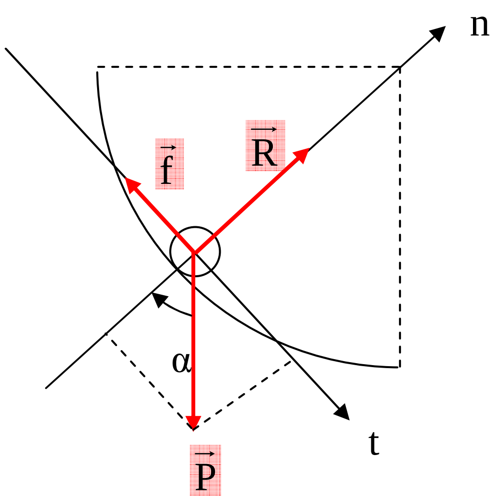
$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

▪ v : طويلة شعاع السرعة عند اللحظة t .
▪ r : نصف قطر المسار المنحني عند اللحظة t .

كما يكون :

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}}}$$

التمرين (4): (التمرين : 012 في بنك التمارين على الموقع) (*)



جسم نقطي (S) يتحرك على مسار دائري خاضع إلى تأثير القوى : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

نعتبر العلاقة الشعاعية التالية :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ هو شعاع التسارع اللحظي .

1- حلل هذه العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فرينـي المماسي (ot) ، و الناظمي (on) .

2- أكتب عبارة التسارع المماسي a_t بدلالة : m ، g ، f ، α .

3- عبر عن شدة قوة رد الفعل بدلالة m ، g ، α ، v ، r .

الأجوبة :

1- تحليل العلاقة الشعاعية في معلم فريني :

لدينا :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محوري معلم فريني نجد :

$$\begin{cases} P.\sin\alpha - f = m.a_t \quad .... (1) \\ -P.\cos\alpha + R = m.a_n \quad .... (2) \end{cases}$$

2- عبارة التسارع المماسي a_n :

من العلاقة (1) لدينا :

$$m.g.\sin\alpha - f = m.a_t \rightarrow a_t = \frac{m.g.\sin\alpha - f}{m}$$

3- عبارة شدة قوة رد الفعل R بدلالة m ، g ، α ، v ، r :

لدينا $P = m.g$ ، $a_n = \frac{v^2}{R}$ و منه يمكن كتابة العلاقة (2) كما يلي :

$$-m.g.\cos\alpha + R = m.\frac{v^2}{r}$$

$$R = m.g.\cos\alpha + m.\frac{v^2}{r} \rightarrow R = m(g.\cos\alpha + \frac{v^2}{r})$$

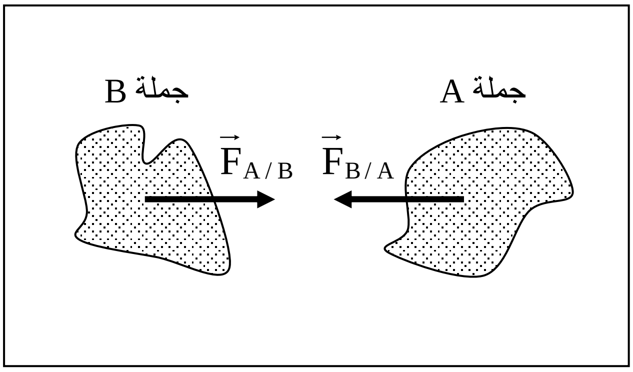
4- القانون الثاني لنيوتن

• تذكير بالقانونين الأول و الثالث لنيوتن :

• القانون الأول لنيوتن :

ينص على ما يلي :
في المراجع العاليلية **" يحافظ كل جسم على سكونه أو حركته المستقيمة المنتظمة إذا لم تتدخل قوة لتغيير حالته الحركية "**

• القانون الثالث لنيوتن :

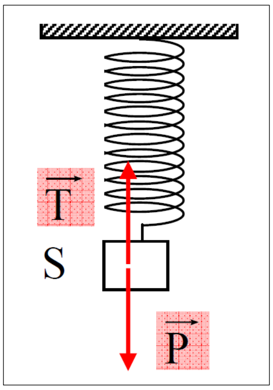


" إذا أثرت الجملة (A) على الجملة (B) بقوة $\vec{F}_{A/B}$ ، فإن الجملة (B) تأثر أيضا وبصفة آنية على الجملة (A) بقوة $\vec{F}_{B/A}$ تساوي القوة $\vec{F}_{A/B}$ في الشدة و تعاكسها في الإتجاه أي : $\vec{F}_{B/A} = - \vec{F}_{A/B}$ " .

▪ مبدأ الفعلين المتبادلين هو القانون الثالث من بين القوانين الثلاثة التي صاغها العالم نيوتن ، مع التذكير بأن القانون الأول هو مبدأ العطالة الذي تطرقنا إليه سابقا .

• تذكير بمفهوم الجملة الميكانيكية و القوى الخارجية :

- الجملة الميكانيكية هو الجسم أو جزء من الجسم أو مجموعة من الأجسام التي تكون محل الدراسة الفيزيائية .
- إذا كان جسم (A) خاضع إلى قوة $\vec{F}$ فإن هذه القوة تكون حتما ناتجة عن تأثير جسم آخر (B) عليه ، أي في كل قوة هناك مؤثر و متأثر بها .
- تكون قوة داخلية إذا كان الجسمين المؤثر و المتأثر بهذه القوة ينتميان إلى نفس الجملة ، أما اذا كان أحد الجسمين داخل الجملة و الآخر خارجها نقول عن القوة أنها خارجية .
- إذا كانت الجملة لا تخضع إلى قوى خارجية نقول عنها معزولة أما إذا كان تخضع إلى قوى خارجة محصلتها معدومة نقول عن الجملة أنها شبه معزولة .



مثال :

في الشكل المقابل يخضع الجسم (S) إلى تأثير قوتين الأولى قوة الثقل ($\vec{P}$) الناتجة عن تأثير (جذب) الأرض للجسم (S) و الثانية قوة توتر النابض ($\vec{T}$) الناتجة عن تأثير النابض على الجسم (S)

-القوتين : الثقل $\vec{P}$ و التوتر $\vec{T}$ يمكن أن تكون داخلية أو خارجية حسب الجملة المختارة كما مبين في الجدول التالي :

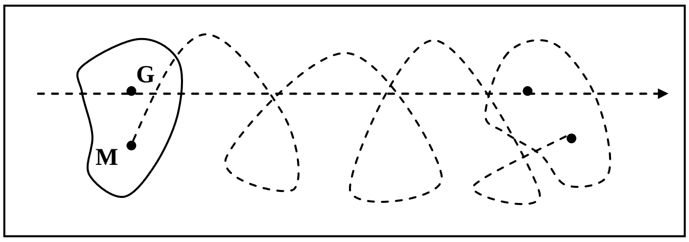
الجملة	الثقل $\vec{P}$	التوتر $\vec{T}$
(جسم + أرض)	داخلية	خارجية
(جسم)	خارجية	خارجية
(جسم + نابض)	خارجية	داخلية
(جسم + أرض + نابض)	داخلية	داخلية

• مفهوم النقطة المادية و الجسم الصلب :

- الجسم الصلب هو الجملة التي لا يتغير شكلها أثناء قيامها بحركة ، أي أن المسافة بين كل نقطتين من هذا الجسم تبقى ثابتة أثناء الحركة .
- النقطة المادية هي كل جسم ذو أبعاد مهملة أمام المرجع الذي يدرس بالنسبة إليه هذا الجسم ، و كتلة النقطة المادية هي كتلة هذا الجسم .

• مفهوم مركز العطالة :

- عندما يكون جسم صلب معزولا أو شبه معزول في مرجع غاليلي ، ويتحرك بحركة كيفية (الشكل) فإنه توجد نقطة وحيدة من هذا الجسم حركتها مستقيمة منتظمة ، ندعوها بمركز عطالة هذا **الجسم الصلب**.



- مركز عطالة جسم متناظر منطبق على مركز تناظره ، مثلا مركز عطالة كرة منطبق على مركزها .

• نص القانون الثاني لنيوتن :

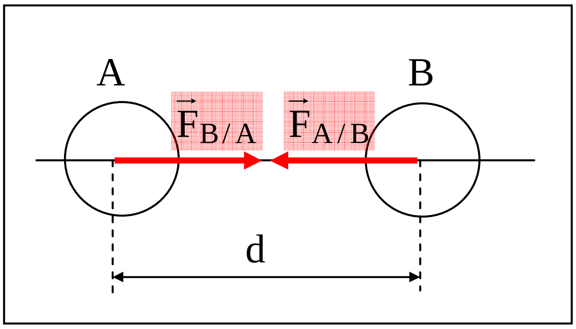
ينص على ما يلي :

" في معلم غاليلي ، المجموع الشعاعي $\sum \vec{F}_{ext}$ للقوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة جملة مادية يساوي في كل لحظة جداء كتلتها في شعاع تسارع مركز عطالتها "

- يكتب القانون الثاني لنيوتن كما يلي :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$$

• قانون الجذب العام:



- في عام 1687 ، أعطى إسحاق نيوتن قانون الجذب العام في كتابه الشهير على الشكل التالي :

" جسمان كيفيان يتجاذبان بقوة تتناسب مباشرة مع جداء كتلتيهما و عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما "

- يمكن نمذجة قوة الجذب العام ، المتبادلة بين جسمين A و B كتلتهما على الترتيب M_A و M_B تفصلهما المسافة d ، بعلاقة رياضية تسمح بتحديد شدة هذه القوة بدلالة الكتلتين و المسافة الفاصلة بين مركزي الجسمين ، تكون كما يلي :

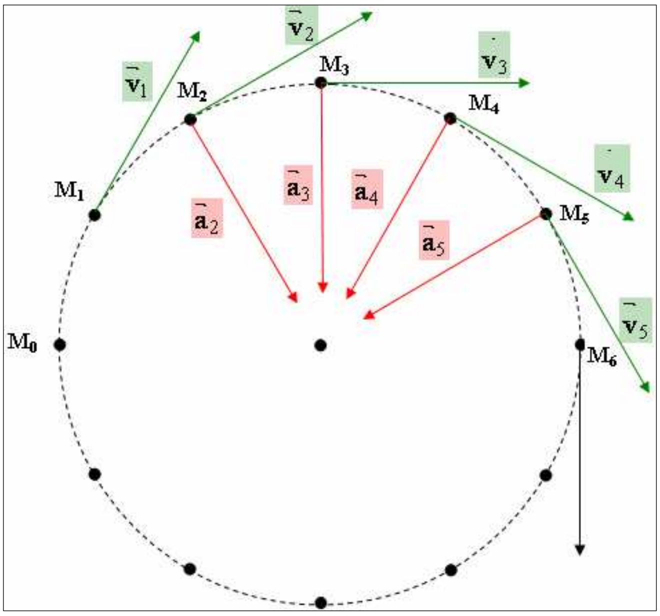
$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = G\,\frac{M_A.M_B}{d^2}}$$

حيث G ثابت التناسب يدعى **ثابت الجذب العام** و يقدر في الجملة الوحدات الدولية (SI) بالنيوتن في المتر مربع على الكيلوغرام المربع $(N.m^2/kg^2)$ ، و قيمته : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$.

III – شرح حركة كوكب أو قمر اصطناعي

1- خواص الحركة الدائرية المنتظمة

• شعاعي السرعة و التسارع :



- نقول عن حركة جسم أنها دائرية منتظمة إذا كان مسارها دائريا و سرعتها ثابتة .

- يحافظ شعاع السرعة $\vec{v}$ في الحركة الدائرية المنتظمة على قيمته بينما منحاه يكون مماسي للمسار في كل لحظة (الشكل)

- في الحركة الدائرية المنتظمة يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في القيمة و متجه دوما نحو مركز للمسار (عمودي على شعاع السرعة) (الشكل) .

• دور الحركة الدائرية المنتظمة :

- دور الحركة الدائرية المنتظمة الذي يرمز له بـ T و وحدته الثانية (s) هو المدة اللازمة لإنجاز دورة واحدة ، يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\boxed{T = \frac{2\pi . r}{v}}$$

حيث :

▪ r : نصف قطر المسار الدائري (يقدر بالمتر m) .

▪ v : سرعة المتحرك على المسار الدائري (تقدر بالمتر على الثانية m/s) .

مثال-1 :

جسم نقطي (S) ، يتحرك على مسار دائري نصف قطره r = 50 cm بسرعة v = 2 m/s . نحسب دور حركة هذا الجسم .

$$T = \frac{2\pi . r}{v} = \frac{2\pi . 0.5}{2} = 0.5\,\pi = 1.57\,s$$

مثال-2 :

جسم نقطي (S) ، يدور بمعدل 600 دورة في الدقيقة ، نحسب دور حركة هذا الجسم .

- حسب تعريف الدور و المتمثل في أنه الزمن اللازم لإنجاز دورة واحدة ، يكون حسب القاعدة الثلاثة :

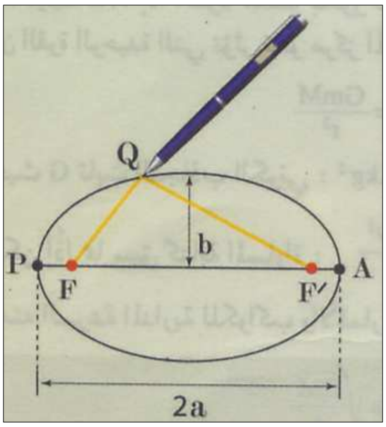
$$\begin{cases} 600 \text{ دورة} \longrightarrow 60\text{ s } (1\text{min}) \\ 1 \text{ دورة} \longrightarrow T\text{ s} \end{cases}$$

و منه :

$$T = \frac{60 \, . \, 1}{600} = 0.1\,s$$

2- قوانين كبلر

● خواص الإهليليج :



- الإهليليج هو منحنى يكون فيه دائما مجموع المسافتين من نقطة منه إلى المحرقين F و 'F ثابتا (الشكل) .

● القانون الأول لكبلر :

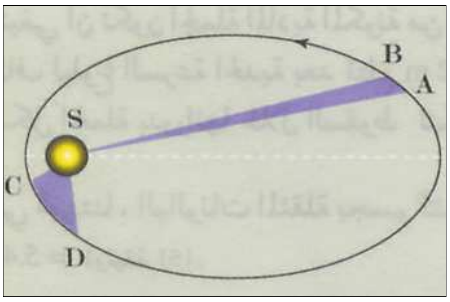
- ينص على ما يلي :

" إن الكواكب تتحرك وفق مدارات اهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقيها "

● القانون الثاني لكبلر :

- ينص على ما يلي :

" إن المستقيم الرابط بين الشمس و كوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية "



مثال :

إذا فرضنا أن خلال مجال زمني معين ، ينتقل كوكب من النقطة A إلى النقطة B و ينتقل من C إلى D خلال مجال زمني آخر مساوي للمجال الزمني الأول .

- من الشكل نلاحظ $CD > AB$ ، يدل ذلك على أن سرعة الكوكب ليست ثابتة و تزداد كلما اقترب الكوكب من الشمس

● القانون الثالث لكبلر :

- ينص على ما يلي :

" إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس أي : $T^2 = k\, r_m^3$ "

$$\boxed{T^2 = k\, r^3 \Leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = k}$$

و بعبارة أخرى :

$$\boxed{\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_3^2}{r_3^3} = \dots\dots\dots = k}$$

k : ثابت صالح لكل الكواكب و مستقل عن كتلة الكواكب.

التمرين (5): (التمرين : 015 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يتحرك قمر إصطناعي (S) بسرعة ثابتة على مدار دائري حول الأرض نصف قطره r .

1- أكتب عبارة شدة القوة المؤثرة على القمر الإصطناعي بدلالة G ، m ، M ، r ، حيث G : ثابت الجذب العام ، m : كتلة القمر الإصطناعي ، M : كتلة الأرض ، r : نصف قطر مسار القمر الإصطناعي حول الأرض .

2- أوجد باستعمال التحليل البعدي وحدة ثابت الجذب العام (G) في الجملة الدولية (SI) .

3- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن استنتج عبارة التسارع الناظمي a_n بدلالة G ، M ، r .

4- أوجد عبارة سرعة القمر الإصطناعي v بدلالة G ، M ، r . .

5- أوجد عبارة دور القمر الاصطناعي T بدلالة v ، r .

6- أكتب عبارة دور القمر الاصطناعي T بدلالة بدلالة G ، M ، r .

7- أثبت أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة من أجل أي قمر اصطناعي .

8- ما معنى قمر إصطناعي جيو مستقر . أوجد ارتفاع هذا القمر الإصطناعي على سطح الأرض و كذا سرعته على مداره .

<u>المعطيات :</u>

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ SI$.
- كتلة الأرض : $M = 5.98 \cdot 10^{24}\ kg$.
- نصف قطر الأرض : $R = 6.37 \cdot 10^{6}\ m$.
- دور حركة الأرض حول نفسها : $T = 23\ h\ ,\ 56\ min$.

الأجوبة :

<u>1- عبارة شدة القوة المؤثرة :</u>

حسب قانون الجذب العام يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة $\vec{F}_{T/S}$ ناتجة عن جذب الأرض (T) للقمر الاصطناعي (S) و حسب ذات القانون شدة هذه القوة هي : $F = G\frac{m \cdot M}{r^2}$

<u>2- وحدة G :</u>

- لدينا :

$$F = \frac{G.m.M}{r^2} \rightarrow G = \frac{F.r^2}{m.M} \rightarrow [G] = \frac{[F].[r]^2}{[M].[M]}$$

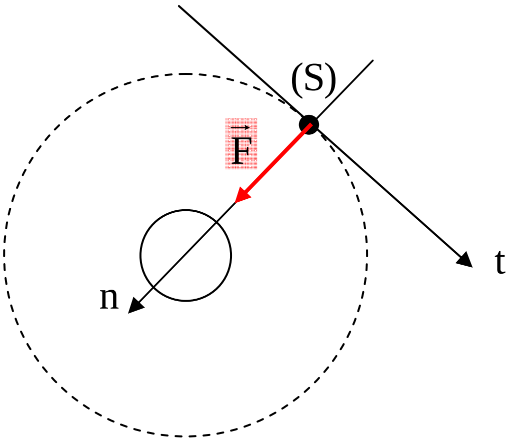
حسب قانون نيوتن الثاني يمكن كتابة :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} \rightarrow [F] = [M].[a]$$

و منه يصبح :

$$[G] = \frac{[M].[a].[r]^2}{[M].[M]} \rightarrow [G] = \frac{[a].[r]^2}{[M]} \rightarrow [G] = \frac{\frac{m}{s^2}.m^2}{kg}$$

$$[G] = \frac{\frac{m}{s^2}.m^2}{kg} \rightarrow [G] = m^3/s^2.kg\ .$$



3- عبارة a_n :

- الجملة المدروسة : قمر اصطناعي (S) .
- مرجع الدراسة : مركزي أرضي نعتبره غاليلي (جيومركزي) .
- القوة الخارجية المؤثرة على الجملة : القوة $(\vec{F}_{T/S})$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحورين المماس (ot) و الناظمي (on) .

$$\begin{cases} 0 = m\,a_t & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ F = m\,a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

من العلاقة (2) :

$$G\frac{m.M}{r^2} = m\,a_n \quad \rightarrow \quad a_n = G\frac{M}{r^2}$$

4- عبارة سرعة القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة G ، M ، r :

لدينا من جهة :

$$a_n = G\frac{M}{r^2}$$

ومن جهة أخرى :

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

ومنه :

$$\frac{v^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

5- عبارة الدور بدلالة v ، r :

$$T = \frac{2\pi\,r}{v}$$

6- عبارة الدور بدلالة G ، M_T ، r :

بتعويض عبارة السرعة $v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$ في عبارة الدور $T = \frac{2\pi\,r}{v}$ نجد :

$$T = \frac{2\pi\,r}{\sqrt{\frac{G.M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\,r^2}{\frac{G.M}{r^2}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\,r^3}{G.M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G.M}}$$

7- إثبات أن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة :

مما سبق لدينا :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G.M} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

π ، G ، M ثوابت ، إذن النسبة $\frac{T^2}{r^3}$ ثابتة بالنسبة لكل الأقمار الاصطناعية .

8- معنى قمر جيو مستقر :

يعني أثناء حركته يكون ثابت بالنسبة لنقطة من سطح الأرض ، و بالتالي فهو يتميز بالخصائص التالية :

- دور حركته مساوي لدور حركة الأرض حول نفسها .
- يتحرك في جهة حركة دوران الأرض .
- يدور على خط الإستواء .

- ارتفاع القمر الجيومستقر :

إذا كان z هو ارتفاع القمر الاصطناعي بالنسبة للأرض و كان R هو نصف قطر الأرض يكون : $r = R + z$

و منه يمكن كتابة :

$$\frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$$

$$(R+z)^3 = \frac{T^2 G\,M}{4\pi^2} \rightarrow (R+z) = \sqrt[3]{\frac{T^2\,G\,M}{4\pi^2}} \rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{T^2\,G\,M}{4\pi^2}} - R$$

$$T = (23\,.\,3600) + (56\,.\,60) = 86160\ s$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{(86160)^2\,.\,6.67\,.\,10^{-11}\,.\,5.98\,.\,10^{24}}{4\pi^2}} - 6.37\,.\,10^6 = 3.5816\ 10^7\ m = 35816\ km$$

- سرعة القمر الاصطناعي على مساره :

مما سبق يمكن كتابة :

$$v = \sqrt{\frac{G\,.\,M}{(R+z)}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{6,67\,.\,10^{-11}\,.\,5,98\,.\,10^{24}}{(6,37\,.\,10^6 + 3,58\,.\,10^7}} = 3075,47\ m/s$$

التمرين (6) : (التمرين : 016 في بنك التمارين على الموقع) (*)

كوكب كتلته m يدور حول الشمس ذات الكتلة M متبعا مسارا نعتبره دائريا مركزه o هو مركز عطالة الشمس .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أن حركة مركز عطالة هذا الكوكب دائرية منتظمة بالنسبة للمرجع الهيليومركزي .

2- أوجد عبارة سرعة الكوكب v بدلالة كل من ثابت الجذب العام G ، كتلة الشمس M و البعد r بين مركزي العطالة لكل من الكوكب و الشمس .

3- اذكر نص قانون كبلر الثالث .

4- كوكبا الأرض و المريخ يدوران حول الشمس على مدارين يمكن اعتبارهما دائريين ، مركزهما هو مركز الشمس o . بتطبيق قانون كبلر الثالث ، استنتج قيمة r_m نصف قطر مدار المريخ .

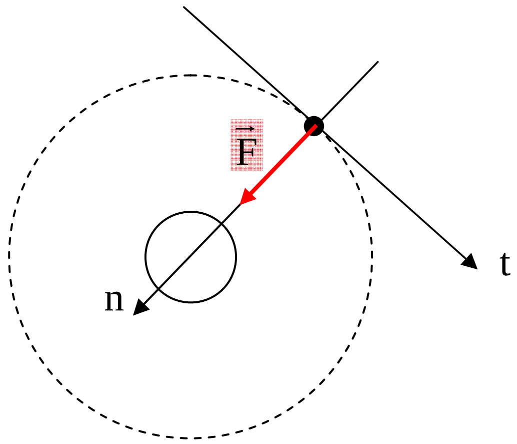
المعطيات :

- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 . 10^{-11}$ SI .
- نصف قطر مدار الأرض حول الشمس : $r_t = 150 . 10^6$ km .
- مدة دوران الأرض حول الشمس : $T_t = 365.25$ j .
- مدة دوران كوكب المريخ حول الشمس : $T_m = 687$ j .

الأجوبة :

1- إثبات أن حركة الكوكب دائرية منتظمة :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .
- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .
- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب
- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين المماسي و الناظمي :

$$\begin{cases} 0 = m.a_t \text{ .... } (1) \\ F = m.a_n \text{ .... } (2) \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

- من العلاقة (1) :

$$a_t = 0$$

و حيث أن : $a_t = \frac{dv}{dt}$ يكون :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v = C$$

أي أن سرعة القمر الاصطناعي ثابتة ، و كون أن مساره دائري ، تكون حركته دائرية منتظمة .

الطريقة الثانية :

نحسب قيمة التسارع :

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2}$$

- من العلاقة (1) و مما سبق وجدنا : $a_t = 0$.

من العلاقة (2) نكتب :

$$\frac{G.m.M}{r^2} = m\,a_n \rightarrow a_n = \frac{GM}{r^2}$$

و منه يصبح :

$$a = a_n = \frac{GM}{r^2}$$

G ، M ، r ثوابت و منه التسارع يكون ثابت ، و كون أن المسار دائري ، فحركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة .

2- عبارة v بدلالة G ، M ، r :

من العلاقة (2) :

$$F = m\,a_n \quad G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3- قانون كبلر الثالث :

يتناسب مربع دور كوكب T^2 مع مكعب البعد المتوسط r^3 للكوكب عن الشمس أي :

$$T^2 = \alpha\, r^3$$

أو :

$$\frac{T_1^{\,2}}{r_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{r_2^{\,3}} = \frac{T_3^{\,2}}{r_3^{\,3}} = ... = \alpha$$

حيث α هو ثابت التناسب

4- نصف قطر كوكب المريخ :

بتطبيق قانون كبلر الثالث بالنسبة لكوكب الأرض t و كوكب المريخ m نكتب :

$$\frac{T_t^{\,2}}{r_t^{\,3}} = \frac{T_m^{\,2}}{r_m^{\,3}} \rightarrow r_m = \sqrt[3]{\frac{T_m^{\,2}.\,r_t^{\,3}}{T_t^{\,2}}} \;\rightarrow\; r_m = \sqrt[3]{\frac{(687\text{ jours})^2\,(150.10^6\text{ km})^3}{(365.25\text{ jours})^2}} = 2.29\,.10^8\text{km}$$

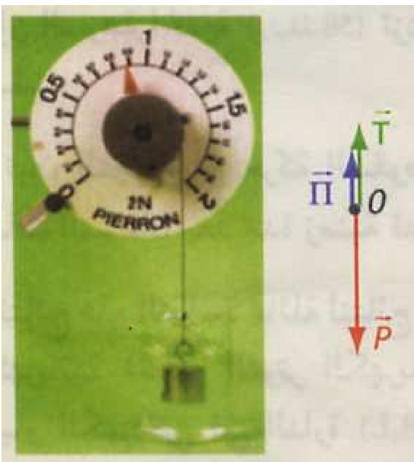
IV – دراسة حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء

• القوى المؤثرة على جسم صلب يسقط في الهواء :

- أثناء سقوط جسم صلب في الهواء تحدث تأثيرات متبادلة بين هذا الجسم الصلب و الوسط الخارجي تتمثل في الهواء ، الأرض ، ..... .

و ينتج عن هذه التأثيرات خضوع الجسم الصلب إلى قوى أهمها :

▪ قوة الثقل :



- يرمز لها بـ $\vec{P}$ ناتجة عن تأثير الأرض على الجسم الصلب .

- تتناسب قوة الثقل $\vec{P}$ مع شعاع حقل الجاذبية $\vec{g}$ وفق العلاقة الشعاعية :

$\vec{P} = m\,\vec{g}$.

- بجوار سطح الأرض أين يكون شعاع حقل الجاذبية ثابت و عمودي على سطح الأرض (الشكل-34) تكون قوة الثقل ثابتة و متجهة عموديا نحو سطح الأرض في كل نقطة من حقل الجاذبية الأرضية .

- شدة قوة ثقل جسم صلب كتلته m موجود في نقطة من حقل الجاذبية الأرضية شدته g عند هذه النقطة يعطى بالعبارة :

$$\boxed{P = m\,g}$$

▪ قوة الإحتكاك :

- يخضع كل جسم صلب يتحرك في مائع لعدة قوى موزعة على سطحه ، تتعلق بطبيعة المائع و شكل الجسم الصلب و كذا خشونة السطح .

- تزداد قيمة هذه القوى بتزايد السرعة.

- يمكن نمذجة المجموع الشعاعي لهذه القوى التلامسية بقوة شاقولية ، معاكسة لجهة الحركة ، تدعى قوة الإحتكاك.
- التعبير عن قوة الاحتكاك بدلالة السرعة معقد ماعدا في الحالتين التاليتين :
- عندما تكون السرعة ضعيفة تكون قيمة القوة متناسبة مع قيمة السرعة : $f = kv$
- عندما تكون قيمة السرعة كبيرة تكون قيمة القوة متناسبة مع مربع قيمة السرعة : $f = kv^2$

- في كلتي الحالتين ، الشعاع $\vec{f}$ معاكس للشعاع $\vec{v}$.

ملاحظة :

سقوط الأجسام الصلبة في السوائل خارج المنهاج

▪ دافعة أرخميدس :

- كل جسم صلب مغمور في مائع (هواء أو سائل) يخضع لفعل ميكانيكي يدعى دافعة أرخميدس.
- ننمذج دافعة أرخميدس بقوة شاقولية يرمز لها بـ $\vec{\Pi}$ متجهة نحو الأعلى قيمتها تساوي ثقل المائع المزاح و عليه يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{\Pi = \rho\ Vg}$$

حيث : ρ : الكتلة الحجمية للمائع يقدر بـ kg/m^3.

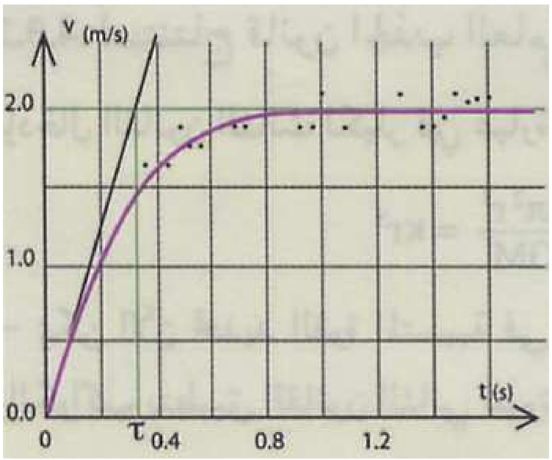
V : حجم المائع المنزاح و يساوي حجم الجسم الصلب يقدر بـ m^3 ، g : الجاذبية تقدر بـ m/s^2.

• دراسة حركة السقوط الحقيقي لجسم صلب في الهواء :

- نعتبرجملة مادية مكونة من أربعة بالونات خفيفة مثقلة بجسم (S) خفيف كتلة m_S وذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية بعد قطع 1m تقريبا من السقوط ، و أن لا يسمح شكل الجملة بدورانه خلال السقوط لتكون الحركة انسحابية شاقولية (الشكل) .
- نترك من أرتفاع $h > 1\ m$ عند اللحظة $t = 0$ الجملة من دون سرعة ابتدائية ؟
- البيان التالي يمثل تطور سرعة البالونات بدلالة الزمن .
- من البيان يتضح وجود نظامين :

▪ نظام إنتقالي : تكون فيه قيمة السرعة متزايدة بشكل سريع في البداية و أقل فأقل مع مرور الزمن. إذن حركة البالونات متسارعة في هذه المرحلة . (النظام الانتقالي)

▪ نظام دائم : تكون فيه قيمة السرعة ثابتة حيث تبلغ قيمتها الحدية $v_\ell = 2.0\ m/s$ في هذه المرحلة و تصبح حركة البالونات منتظمة.



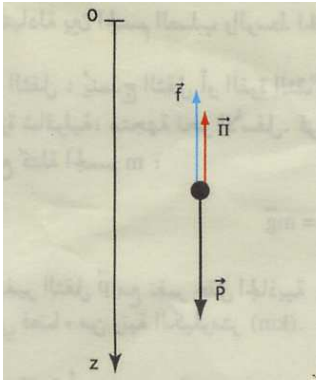
الزمن المميز للسقوط τ :

يقطع مماس البيان $v(t)$ عند اللحظة $t = 0$ في حالة $f = kv$ الخط المقارب $v = v_\ell$ في لحظة تمثل مقدار يدعى الزمن المميز للسقوط يرمز له بـ τ و وحدته الثانية s .

• إبراز المعادلة التفاضلية :

▪ الحالة : $f = kv$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملتين :

- الجملة المعتبرة : بالونات .
- مرجع الدارسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ؛ دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الإحتكاك $\vec{f}$.



- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m_S\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية على المحور (Oz) :

$$P - \Pi - kv = m_S\,a_z \;\rightarrow\; \rho_S V_S\,g - \rho_{air} V_{air}.g - kv = m_S \frac{dv}{dt}$$

حجم المائع (الهواء) المنزاح هو نفسه حجم الجملة S بمعنى $V_{air} = V_S$ و منه يصبح :

$$\rho_S V_S\,g - \rho_{air} V_S\,g - kv = m_S \frac{dv}{dt}$$

$$m_S \frac{dv}{dt} + kv = \rho_S V_S\,g - \rho_{air} V_S\,g \;\rightarrow\; m_S \frac{dv}{dt} + kv = V_S\,g\,(\rho_S - \rho_{air})$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_S} v = \frac{V_S\,g\,(\rho_S - \rho_{air})}{m_S} \;\rightarrow\; \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_S} v = \frac{V_S\,g\,(\rho_S - \rho_{air})}{\rho_S.V_S}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_S} v = g\,\frac{\rho_S - \rho_{air}}{\rho_S} \;\rightarrow\; \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_S} v = g\,(\frac{\rho_S - \rho_{air}}{\rho_S})$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m_S} v = g\,(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_S})}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى حلها من الشكل :

$$\boxed{v = v_\ell\,(1 - e^{-t/\tau})}$$

حيث $\tau = \frac{m}{K}$ هو الزمن المميز للسقوط و بيانيا يحسب من خلال تقاطع مماس البيان $v = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$ مع المستقيم المقارب في النظام الدائم .

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt} = 0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ يكون بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$0 + \frac{K}{m_S} v_\ell = g\,(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_S}) \rightarrow v_\ell = \frac{m_S.g}{K}(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_S}) \;\rightarrow\; v_\ell = \frac{\rho_S.V_S.g}{K}(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho_S})$$

و منه :

$$\boxed{v_\ell = \frac{V_S.g}{K}(\rho_S - \rho_{air})}$$

▪ الحالة : $f = kv^2$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملتين :

تكون المعادلة من الشكل :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{K}{m_S}v^2 = g\,(1-\frac{\rho_{air}}{\rho_S})}$$

- في النظام الدائم أين يكون $\frac{dv}{dt}=0$ و تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ ، بنفس الطريقة المتبعة سابقا يكون :

$$\boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{V_S.g}{k}(\rho_S - \rho_{air})}}$$

▪ الحالة : $f = kv$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ مهملة و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ غير مهملة :

في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{K}{m_S}v = g}$$

ملاحظة :

في اللحظة $t = 0$ أين $(v = 0)$ تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$(\frac{dv}{dt})_{t=0} + 0 = g \;\rightarrow\; a_0 = g$$

هذا يعني أنه في اللحظة $t = 0$ إذا كان $a_0 = g$ فإن دافعة أرخميدس معدومة أو مهملة حتما .

▪ الحالة : دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة الاحتكاك $\vec{f}$ مهملتين (السقوط الحر) :

في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g}$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v = g\,t + C$$

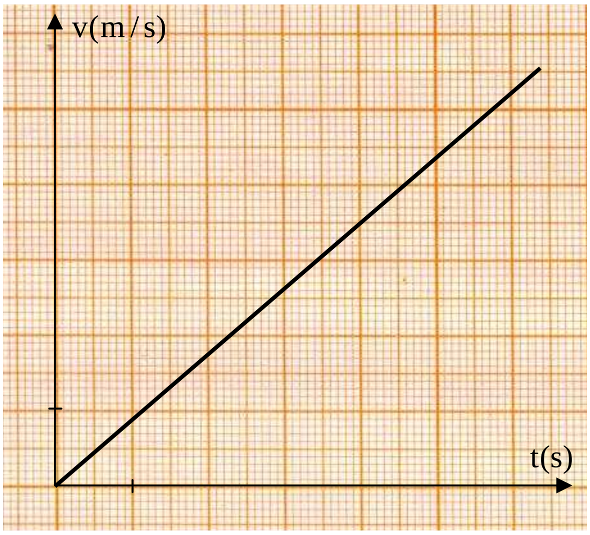
من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C = 0$$

يصبح :

$$\boxed{v = a\,t}$$

نستنتج أنه عند إهمال تأثير الهواء على الجسم (S) أي دافعة أرخميدس و قوة الإحتكاك كلاهما معدوم ، تكون حركة مركز عطالة الجسم (S) مستقيمة متغيرة بانتظام ، تسمى السقوط في هذه الحالة **سقوط حرا** ، و نقول ـن في السقوط الحر تكون الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام تسارعها مساوي لتسارع الجاذبية الأرضية أي : $\mathbf{a = g}$.



• تعريف السقوط الحر :

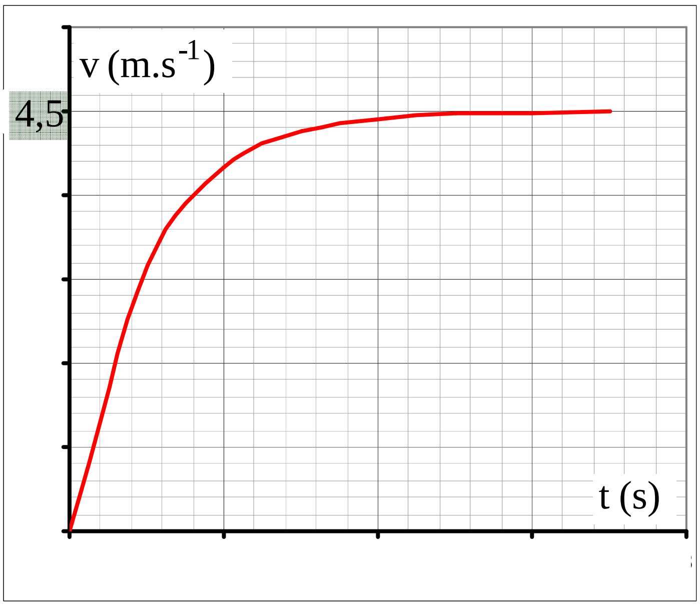
نقول عن جسم أنه في سقوط حر ، عندما يتحرك تحت تأثير ثقله فقط ، أي بإهمال تـأثيرات الهواء عليه المتمثلة في قوة الاحتكاك و دافعة أرخميدس .

التمرين (7) : (التمرين : 019 في بنك التمارين على الموقع) (*)

عند اللحظة $t = 0$ و بدون سرعة ابتدائية ، يسقط شاقوليا مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ فيبلغ سرعة ثابتة حدية قيمتها $v_\ell = 4.5\ m.s^{-1}$ ، نهمل خلال السقوط دافعة أرخميدس أمام القوى الأخرى المطبقة على المظلي و تجهيزه ، نعتبر أن قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على المظلي من الشكل $f = k\,v^2$.

يعطى : $g = 9.8\ m/s^2$

المنحنى البياني التالي يمثل تغيرات سرعة (المظلي و مظلته) بدلالة الزمن .

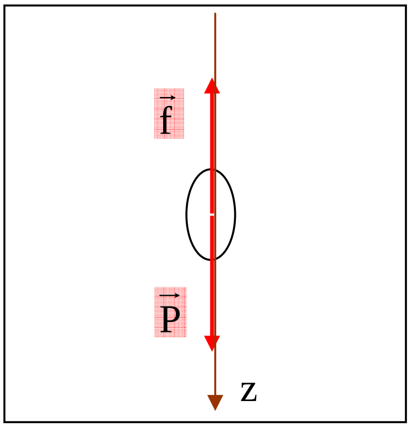


1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تعبر عن سرعة حركة مركز عطالة المظلي و تجهيزه .
2-. فسر لماذا يمكن للسرعة أن تصبح ثابتة .
3- أحسب المعامل k الذي يتدخل في قوة الاحتكاك .

الأجوبة :

1- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : المظلي و تجهيزه .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور (oz) شاقولي و متجه نحو الأسفل يكون :

$$P - f = m\,a$$

$$m\,g - kv^2 = ma \rightarrow m\,g - k\,v^2 = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m\frac{dv}{dt} + k\,v^2 = m\,g \quad \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

2- تفسير الحركة المستقيمة المنتظمة (ثبات السرعة) :

قوة الثقل لا تتغير أثناء الحركة ، في بداية الحركة تكون سرعة الجسم معدومة و بالتالي قوة الاحتكاك تكون معدومة أيضا ، و أثناء الحركة أين تكون حركة (المظلي مع تجهيزه) متسارعة ، تزداد سرعة المضلي مع تجهيزه ما يجعل قوة الاحتكاك تزداد تدريجيا إلى أن تصبح مساوية للثقل في الشدة $P = f$ ، و بالعودة إلى قانون نيوتن الثاني نجد في هذه الحالة :

$$P - f = m\,a$$
$$P - P = m\,a \;\rightarrow\; a = 0 \;\rightarrow v \text{ (ثابتة)}$$

3- قيمة k :

في النظام الدائم اين $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ تصبح المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{k}{m}v_\ell^2 = g \quad \rightarrow k = \frac{mg}{v_\ell^2}$$

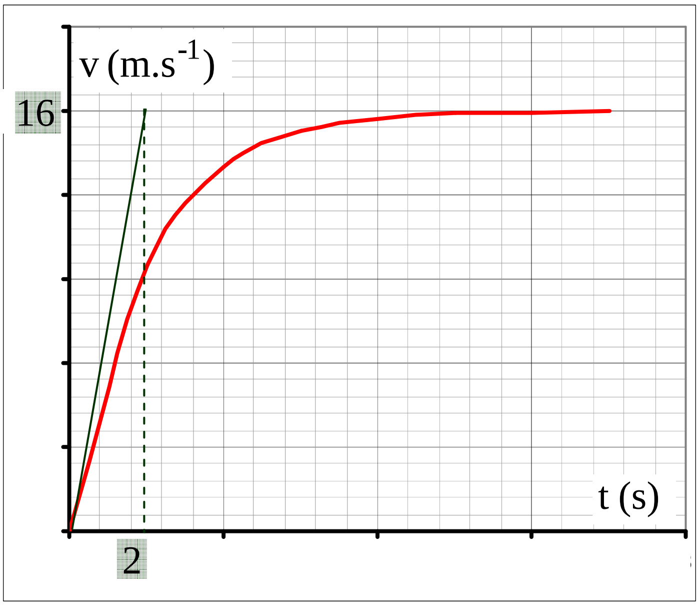
من البيان : $v_\ell = 4{,}5\ m/s$ و منه :

$$k = \frac{100\,.\;9{,}8}{(4{,}5)^2} = 48{,}4\ kg/m$$

التمرين (8) : (التمرين : 020 في بنك التمارين على الموقع) (*)

قام فوج من التلاميذ في حصة للأعمال المخبرية بدراسة السقوط الشاقولي لجسم صلب (S) في الهواء كتلته $m = 19\ g$ ، و ذلك باستعمال كاميرا رقمية (Webcam) ، عولج شريط الفيديو ببرمجية "Avistep" بجهاز الإعلام الآلي فتحصلوا على البيان $v = f(t)$ الذي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة (S) بدلالة الزمن (الشكل) .

يعطى : $g = 10\ N.kg^{-1}$.



1- حدد طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) في النظامين الإنتقالي و الدائم . علل .

2- بالاعتماد على البيان عين :

أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط .

ب- تسارع الحركة في اللحظة $t = 0$ ، و عند اللحظة $t = 12\ s$ ؟

جـ- أثبت أن دافعة أرخميدس غير مهملة .

د- قيمة الطاقة الحركية للجسم (S) في النظام الدائم .

3- كيف يكون الجسم الصلب (S) متميزا و هذا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظاميين انتقالي و دائم ؟

4- بين أن المعادلة التفاضلية لحركة (S) بالعبارة : $\frac{dv}{dt} + Av = C(1 - \frac{\rho V}{m})$ حيث A و C ثابتين يطلب كتابة عبارتهما ، نذكر أن : ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم الجسم (S) .

5- استنتج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة k .

6- توقع شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء . علل .

الأجوبة :

1- طبيعة حركة مركز عطالة الجسم (S) :

النظام الانتقالي :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن خط منحني ، و بما أن السرعة متزايدة تكون طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة متسارعة من دون انتظام .

النظام الدائم :

المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، إذن طبيعة الحركة في هذه المرحلة مستقيمة منتظمة .

2- أ- السرعة الحدية v_ℓ ، و ثابت الزمن τ المميز للسقوط :

من البيان مباشرة : $v_\ell = 16\ m/s$ ، $\tau = 2\ s$.

ب- تسارع الحركة في اللحظتين $t = 0$ ، $t = 12\ s$:

تسارع الحركة في لحظة t مساوي لميل مماس المنحنى $v = f(t)$ عند هذه اللحظة ، لذا يكون :

▪ $t = 0 \rightarrow a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{16}{2} = 8.0\ m/s^2$

▪ $t = 12\ s \rightarrow a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ (نظام دائم)

جـ- في اللحظة $t = 0$ لا يخضع الجسم (S) إلى قوة احتكاك ($v = 0 \rightarrow f = k\ v\ \ 0$) فهو يخضع إلى قوة الثقل و كذا دافعة أرخميدس ، فإذا كانت دافعة أرخميدس معدومة أو مهملة يكون حسب القانون الثاني لنيوتن يكون عند اللحظة $t = 0$:

$$P = m.a_0 \rightarrow m.g = m.a_0 \rightarrow a_0 = g$$

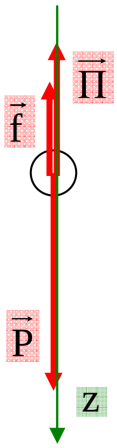
لدينا : $a_0 = 8\ m/s \neq g$ ، إذن دافعة أرخميدس غير مهملة .

د- <u>الطاقة الحركية في النظام الدائم :</u>

$$E_C = \frac{1}{2} m\, v^2$$

من البيان و في النظام الدائم يكون : $v = v_\ell = 19\ m/s$ و منه :

$$E_C = 0.5\ .\ 19.10^{-3}\ (16)^2 = 2.43\ J$$



3- للحصول على حركة مستقيمة شاقولية إنسحابية في نظامين انتقالي و دائم ، يجب أن يكون الجسم (S) خفيف و ذو حجم كاف لبلغ السرعة الحدية ، كما لا يكون شكله انسيابي كي يجعل تأثير قوة الاحتكاك أكبر .

4- <u>المعادلة التفاضلية :</u>

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\ \vec{F} = m\ \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) :

$$P - \Pi - f = m\,a$$

$$m.g - m_{air} g - kv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m.g - \rho_{air} V.g - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + k\,v = m\,g - \rho_{air} V.g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g - \frac{\rho_{air} V}{m}.g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g\,(1 - \frac{\rho_{air} V}{m})$$

المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + A\,v = C\,(1 - \frac{\rho_{air} V}{m})$$

حيث : $C = g$ ، $A = \dfrac{k}{m}$.

5- قيمتي Π ، k :

مما سبق يمكن كتابة :

$$mg - f\,v - \Pi = m\,a$$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا : $a = a_0 = 8\,m/s^2$ ، $v = 0$ بالتعويض :

$$mg - f\,(0) - \Pi = m\,a_0$$

$$mg - \Pi = m\,a_0 \rightarrow \Pi = mg - m\,a_0 \rightarrow \Pi = m(g - a_0)$$

$$\Pi = 0.019\,(10 - 8) = 3{,}8 \cdot 10^{-2}\ N$$

قيمة K :

- مما سبق يمكن أيضا كتابة :

$$mg - k.v - \Pi = ma$$

- في النظام الدائم : $a = 0$ ، $v = v_\ell$ ، بالتعويض :

$$mg - k.v_\ell - \Pi = 0$$

$$K.v_\ell = mg - \Pi \rightarrow k = \frac{mg - \Pi}{v_\ell} \rightarrow K = \frac{(19.10^{-3}\,.9.8) - 1.96.10^{-2}}{1.14} = 0.15$$

6- شكل مخطط السرعة عند إهمال دافعة أرخميدس و مقاومة الهواء :

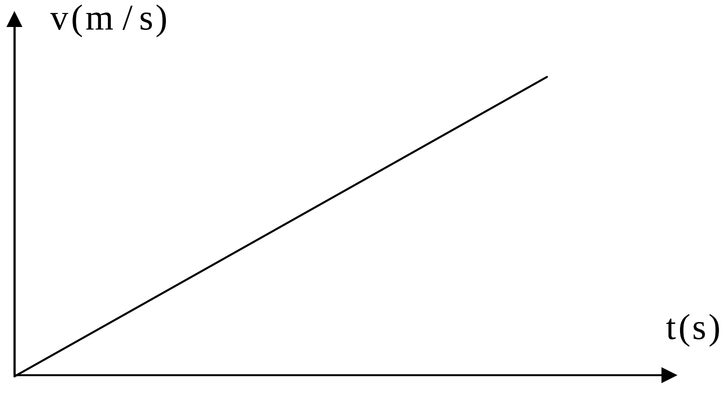
عند إهمال قوة الاحتكاك و كذا دافعة أرخميدس ، تكون المعادلة التفاضلية كما يلي :

$$\frac{dv}{dt} = g \rightarrow v = g\,t + C$$

- من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow v = gt$$

أي أن المنحنى $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ ، معادلته من الشكل $v = a\,t$ كما يلي :

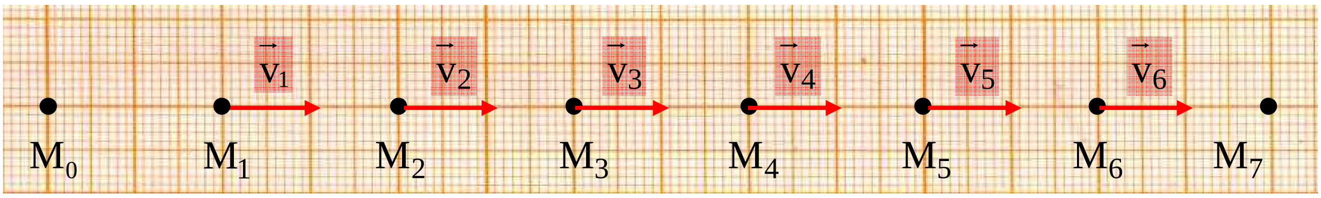


V – تطبيقات – حركة مركز عطالة جسم على مستوي

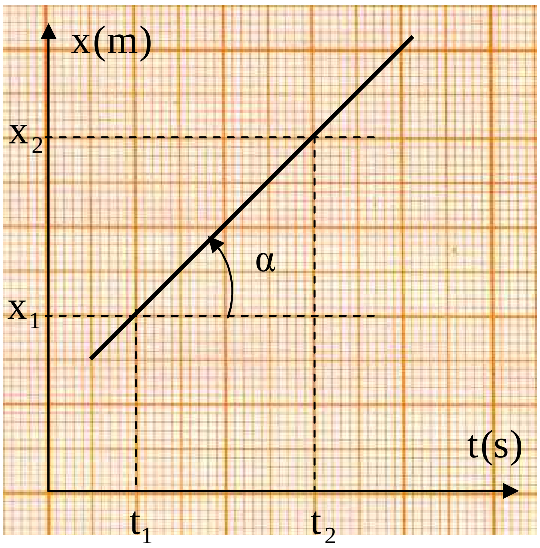
1- خواص الحركة المستقيمة المتظمة و المتغيرة بانتظام

• الحركة المستقيمة المنتظمة

- الحركة المستقيمة المنتظمة هي حركة مسارها مستقيم و سرعتها ثابتة ، يقطع فيها المتحرك مسافات متساوية d خلال أزمنة متساوية τ .
- في الحركة المستقيمة المنتظمة لا يخضع المتحرك إلى أي قوة (مبدأ العطالة) أو يخضع إلى قوى مجموعها الشعاعي معدوم .
- في الحركة المستقيمة المنتظمة يكون شعاع السرعة ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة . و عليه يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ معدوم .
- في الحركة المستقيمة المنتظمة يكون شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ ثابت في أي مجال زمني و يكون مساوي لشعاع السرعة اللحظية $\vec{v}$ الذي يكون ثابت أصلا في هذه الحركة .



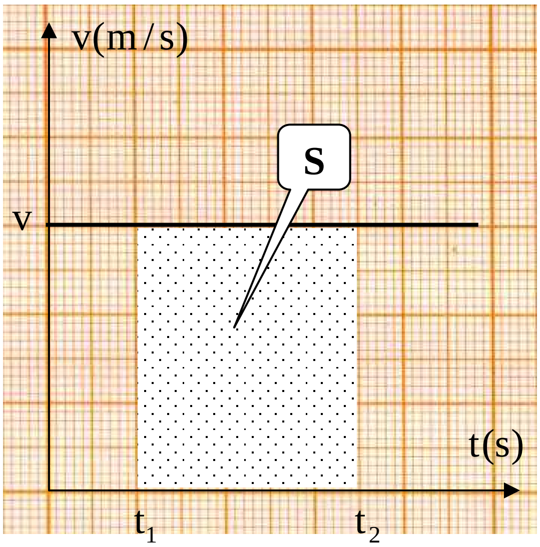
- مخطط المسافة $x = f(t)$ في الحركة المستقيمة المنتظمة هو مستقيم معادلته من الشكل : $x = a\,t + b$ (a : ميل هذا المستقيم) ، كما مبين في (الشكل) التالي :



- ميل المنحنى $x(t)$ (المستقيم) يمثل سرعة المتحرك ، أي :

$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

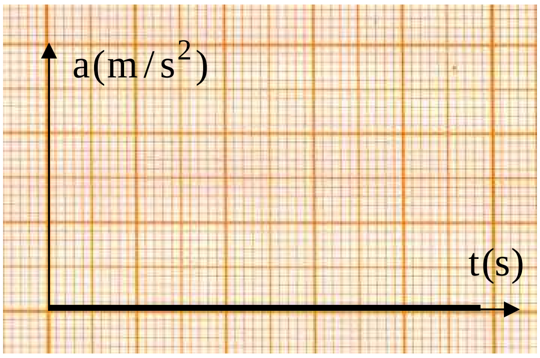
- مخطط السرعة $v = f(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) التالي :



- تساوي المسافة المقطوعة d ، من طرف متحرك بين لحظتين t_1 ، t_2 بيانيا من مخطط السرعة ، مساحة السطح (S) المحصور بين المنحنى $v = f'(s)$ و محور الأزمنة و المستقيمين العموديين على محور الأزمنة (ot) في اللحظتين t_1 ، t_2 (الشكل) أي :

$$\boxed{d = S = v(t_2 - t_1)}$$

- مخطط التسارع $a = f(t)$ هو مستقيم منطبق على محور الأزمنة (ot) كما مبين في (الشكل) التالي :



- يعبر عن الحركة المستقيمة المنتظمة بمعادلة زمنية x(t) تكون دوما من الشكل :

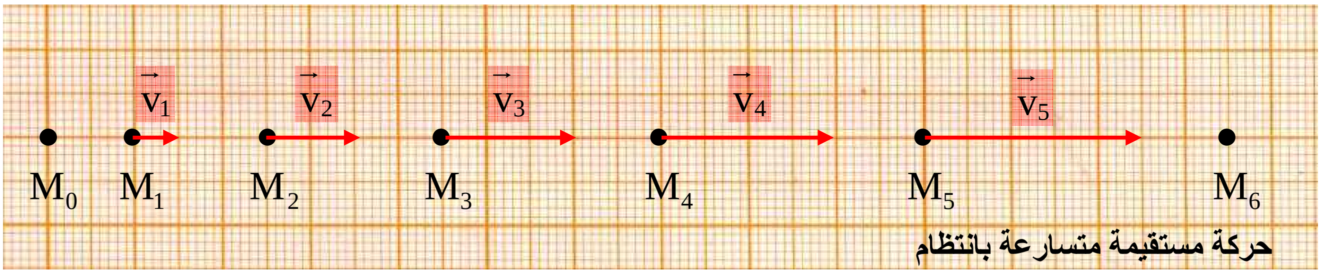
$$\boxed{x = v\,t + x_0}$$

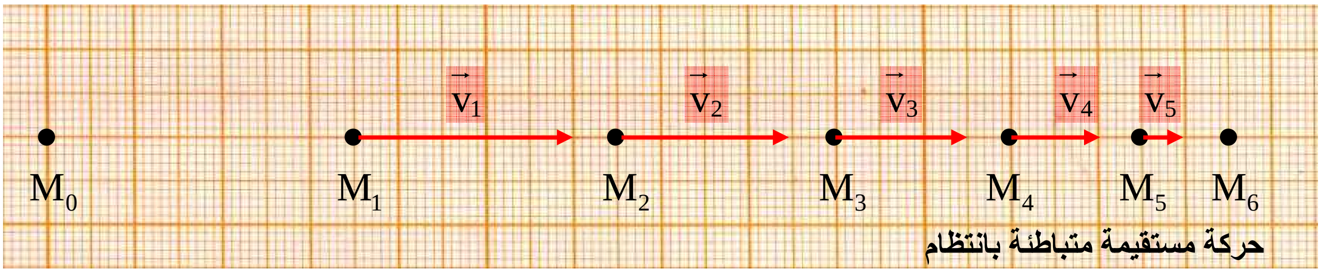
حيث : v سرعة الحركة ، x_0 الفاصلة الابتدائية (عند اللحظة $t = 0$)

• الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

- عندما يخضع جسم متحرك إلى قوة $\vec{F}$ ثابتة (في المنحى و الجهة و الطويلة) تكون حركة هذا الجسم مستقيمة متغيرة بانتظام ، فإذا كانت هذه القوة في جهة حركته تكون الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام أما إذا كانت في الجهة المعاكسة لجهة حركته تكون الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .

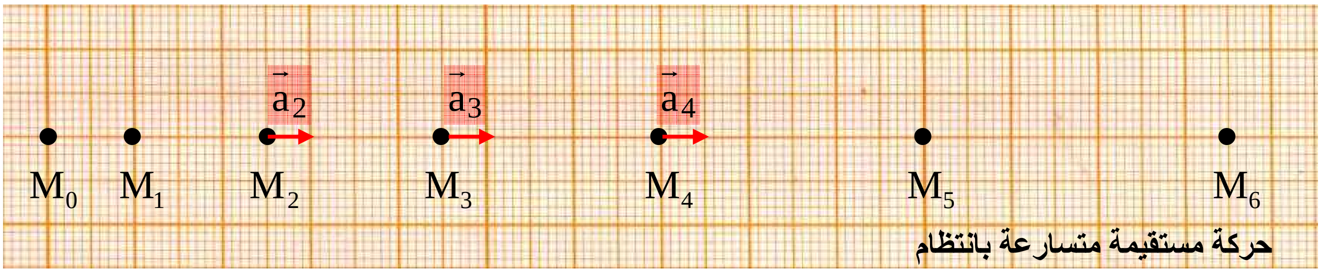
- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يحافظ شعاع السرعة $\vec{v}$ على منحاه و جهته و طويلته تتغير بانتظام حيث تتزايد بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و تتناقص بانتظام في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .

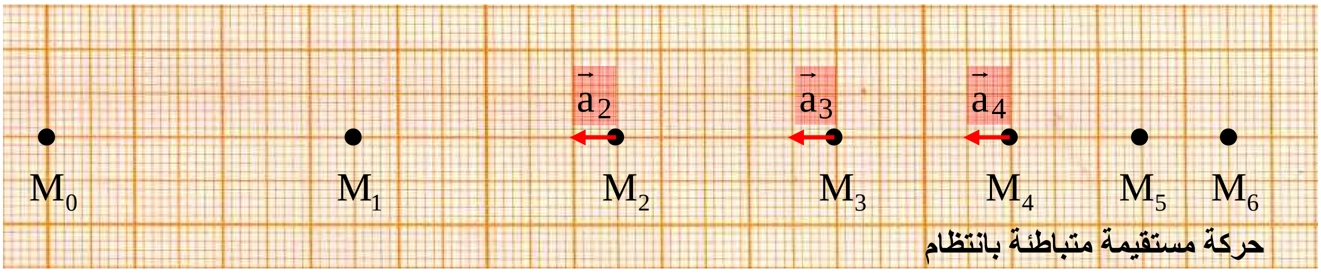




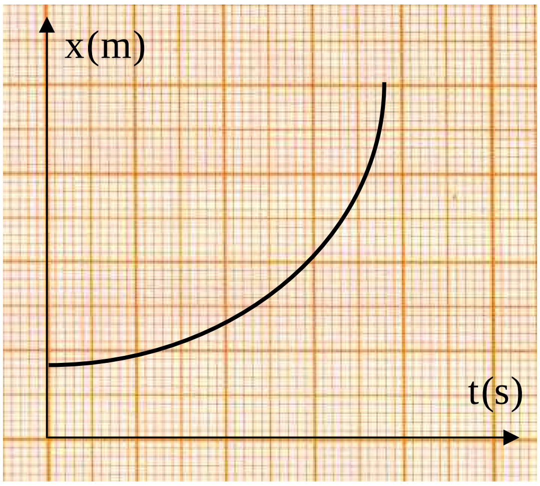
- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام يكون شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت في المنحى و الجهة و الطويلة ، و يكون في جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام و عكس جهة الحركة في حالة الحركة المستقيمة المتباطئة بانتظام .

- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام لا يكون شعاع السرعة المتوسطة $\vec{v}_m$ ثابتا ، لكن شعاع التسارع المتوسط $\vec{a}_m$ يكون ثابت و مساوي لشعاع التسارع اللحظي $\vec{a}$ الثابث أصلا في هذه الحركة .





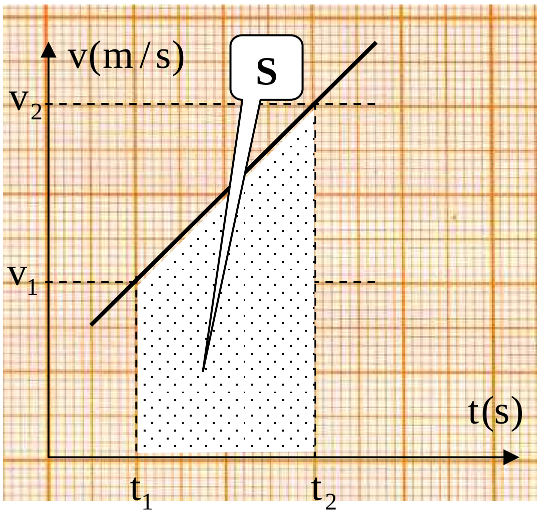
- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام مخطط المسافة $x = f(x)$ هو خط منحني ، ففي الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط المسافة $x = f(t)$ كما في (الشكل) التالي :



- من المنحنى $x(t)$ يساوي سرعة المتحرك في لحظة t ميل المماس عند هذه اللحظة ، أي :

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ (ميل المماس)}$$

- مخطط السرعة $v = f(x)$ في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام هو مستقيم معادلته من الشكل : $v = a\,t + b$ ، و في الحركة المستقيمة المتسارعة بانتظام يكون مخطط السرعة كما مبين في (الشكل) التالي :



- ميل المنحنى $v(t)$ (المستقيم) يمثل تسارع الحركة ، أي :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

تساوي المسافة المقطوعة d من طرف متحرك بين لحظتين t_2 ، t_1 ، بيانيا من خلال مخطط السرعة ، مساحة السطح (S) (لشبه المنحرف مثلا) المحصور بين المنحنى $v = f(t)$ و محور الأزمنة (ot) و المستقيمين العموديين على محور الأزمنة في اللحظتين t_1 ، t_2 ، أي :

$$d = S = \frac{\text{ق ك} + \text{ق ص}}{2}\,\text{إ} = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$$

- في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام مخطط التسارع $a = f(t)$ هو مستقيم يوازي محور الأزمة .

- يعبر عن الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام بمعادلات زمنية تكون دوما من الشكل :

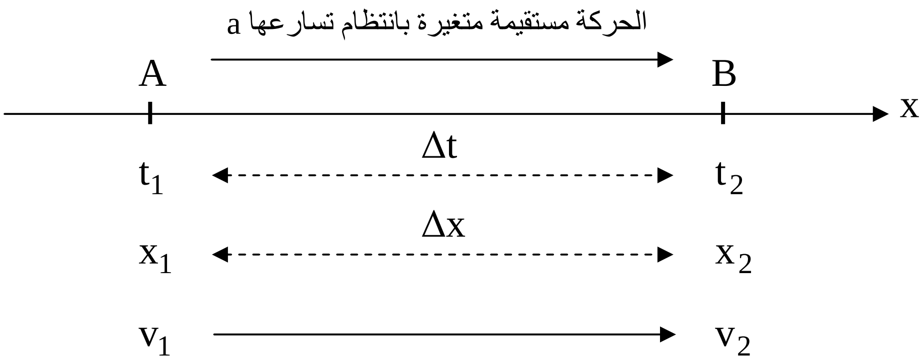
$$v = a\,t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t + x_0$$

حيث : a تسارع الحركة ، x_0 ، v_0 الفاصلة و السرعة الابتدائيتين (عند اللحظة $t = 0$)

ملاحظة مهمة :

نعتبر جسم نقطي ينتقل من موضع A إلى موضع B على محور موجه ox بحركة مستقيمة متغيرة بانتظام تسارعها ثابت a ، إذا اعتبرنا t_1 ، x_1 ، v_1 هي اللحظة و الفاصلة و السرعة عند الموضع A و t_2 ، x_2 ، v_2 هي اللحظة و الفاصلة و السرعة عند الموضع B يكون :



- المدة الزمنية المستغرقة بين الموضعين A و B :

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

• المسافة المقطوعة بين الموضعين A و B عندما لا يغير جهة حركته بين هذين الموضعين :

$$\boxed{d = |\Delta x| = |x_2 - x_1|}$$

كما يكون :

$$\boxed{v_2^2 - v_1^2 = 2\,a\,\Delta x}$$

تسمى هذه العلاقة بمحذوفية الزمن

$$\boxed{v_2 - v_1 = a\,\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{1}{2} a\,\Delta t^2 + v_1 \Delta t}$$

مثال :

جسم نقطي (S) ينطلق بسرعة ابتدائية $v_A = 4\ m/s^2$ من موضع A باتجاه موضع B ، حيث يبلغ هذا الموضع بسرعة $v_B = 6\ m/s$ ، يستغرق اثناء هذا الانتقال AB مدة زمنية قدرها : $\Delta t = 1s$.

1- أحسب تسارع الحركة .

2- أحسب المسافة AB .

الجواب :

1- تسارع الحركة :

$$v_B - v_A = a.\Delta t \rightarrow \quad a = \frac{v_B - v_A}{\Delta t}$$

$$a = \frac{6 - 4}{1} = 2 m/s^2$$

2- المسافة AB :

الطريقة الأولى :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a.AB \rightarrow \quad AB = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2.a}$$

$$AB = \frac{6^2 - 4^2}{2\ .\ 2} = 5\,m$$

الطريقة الثانية :

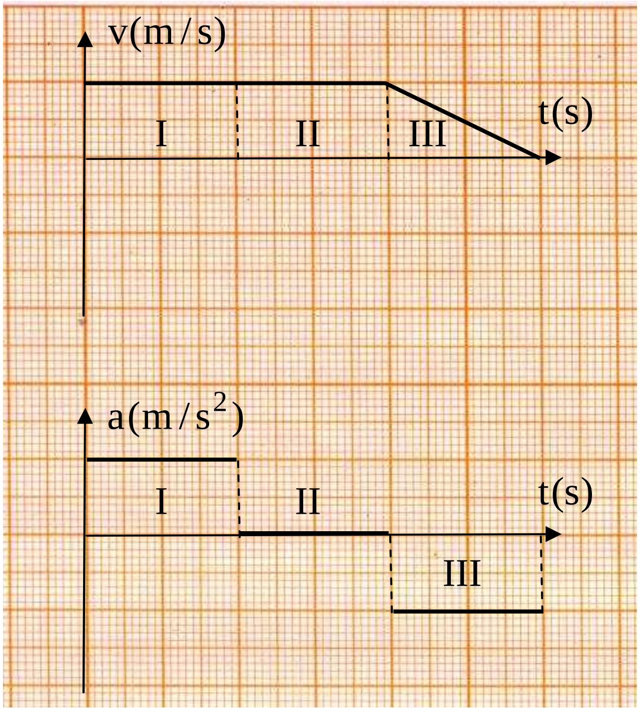
$$AB = \frac{1}{2} a\,\Delta t^2 + v_A \Delta t$$

$$AB = \frac{1}{2} . 2\,(1)^2 + (4\ .\ 1) = 5\,m$$

ملاحظة مهمة-1 :

- يمكن تحديد طبيعة الحركة (مستقيمة منتظمة ، مستقيمة متغيرة بانتظام ، دائرية منتظمة ، بناءا على شعاع التسارع أو قيمته كما يلي :

- إذا كان شعاع التسارع معدوم تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
- إذا كان شعاع التسارع $\vec{a}$ ثابت تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .
- إذا كانت قيمة التسارع a معدومة تكون الحركة مستقيمة منتظمة .
- إذا كانت قيمة التسارع a ثابتة ، تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام أو دائرية منتظمة ، فإذا كان المسار مستقيم أو السرعة من الشكل $v = at + b$ تكون الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، أما إذا كان المسار دائري أو السرعة v ثابتة فالحركة دائرية منتظمة .



مثال :

المخططين البيانيين المقابلين يمثلان تطور السرعة و التسارع لمتحرك نقطي على مسار ذو ثلاث أجزاء I ، II ، III ، أحدهما دائري و الآخرين مستقيم .

- نريد تحديد طبيعة الحركة في كل جزء من المسار .

الجواب :

الجزء I : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع ثابت و السرعة ثابتة ، هذا يتحقق فقط في الحركة الدائرية المنتظمة ، إذن المسار في هذا الجزء دائري و الحركة دائرية منتظمة .

الجزء II : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع معدوم و السرعة ثابتة ، هذا يتحقق فقط في الحركة المستقيمة المنتظمة ، إذن المسار في هذا الجزء مستقيم و الحركة مستقيمة منتظمة .

الجزء III : نلاحظ في هذا الجزء من الحركة أن التسارع ثابت و السرعة دالة تآلفية من الشكل $v = a\,t = b$ ، هذا يتحقق فقط في الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام ، إذن المسار في هذا الجزء مستقيم و الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .

ملاحظة مهمة-2 :

- تعتمد طبيعة الحركة المستقيمة (متسارعة أو متباطئة) على الجداء السلمي $\vec{v}\,.\,\vec{a}$ حيث :

- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} > 0)$ تكون جهة شعاع التسارع في نفس جهة شعاع السرعة أي يكون شعاع التسارع في جهة الحركة (جهة شعاع السرعة دوما في جهة الحركة) و بالتالي تكون الحركة مستقيمة متسارعة .
- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} < 0)$ تكون جهة شعاع التسارع معاكسة لجهة شعاع السرعة أي يكون شعاع التسارع في الجهة المعاكسة لجهة الحركة و بالتالي تكون الحركة مستقيمة متباطئة .
- إذا كان $(\vec{a}\,.\,\vec{v} = 0)$ و الجسم في حالة حركة مستقيمة $(\vec{v} \neq 0)$ فحتما يكون شعاع التسارع معدوم و بالتالي تكون الحركة مستقية منتظمة .

- نذكر بأنه في معلم مستوي مثلا يكون :

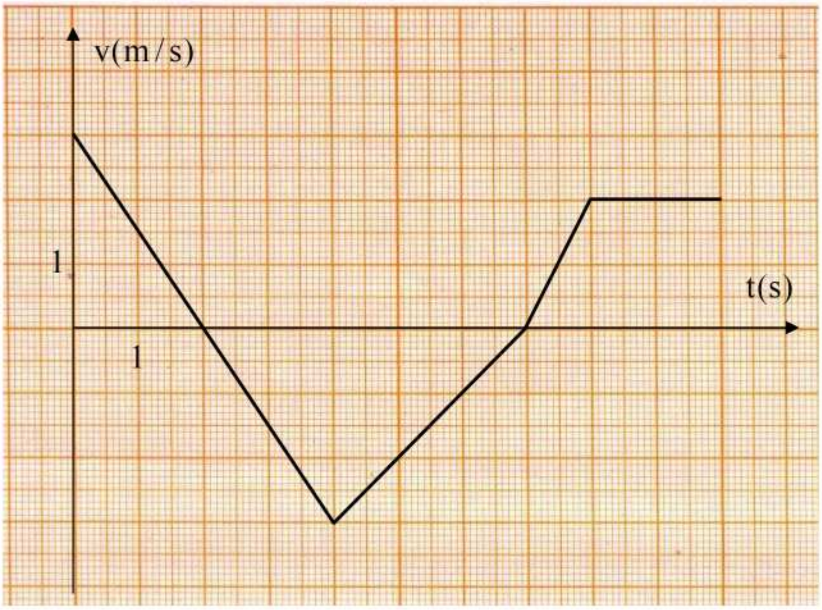
$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{v} = a_x v_x + a_y v_y}$$

و في معلم خطي يكون :

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{v} = a_x v_x}$$

التمرين (9) : (التمرين : 013 في بنك التمارين على الموقع) (*)

جسم صلب (S) يتحرك على محور موجه ox ، المخطط البياني التالي يمثل تغيرات سرعة مركز عطالة هذا الجسم بدلالة الزمن .

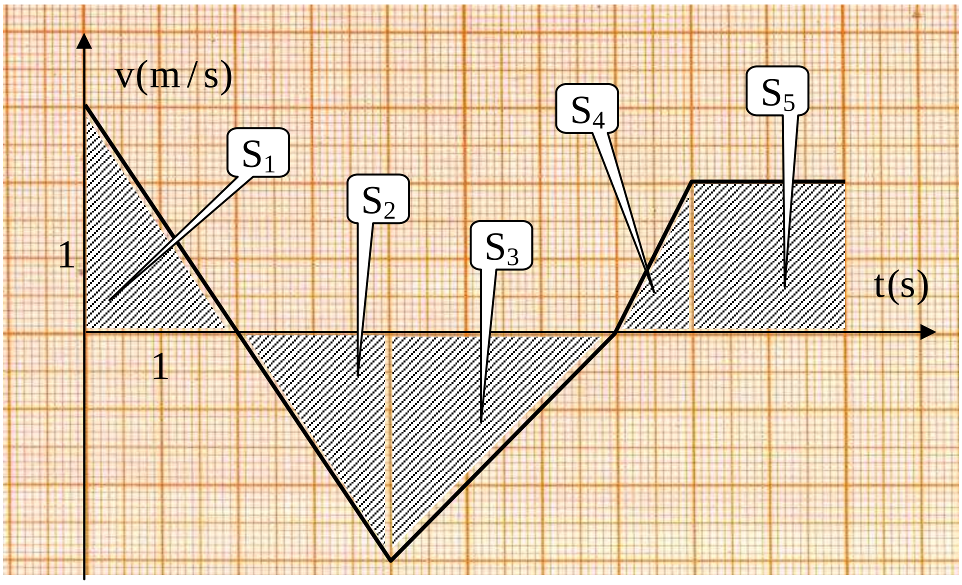


1- حدد في كل طور :
- طبيعة الحركة .
- قيمة التسارع .
- المسافة المقطوعة .

2- أرسم المنحنى البياني الممثل لتغيرات تسارع مركز عطالة الجسم (S) بدلالة الزمن t .

الأجوبة :

1- تحديد طبيعة الحركة ، قيمة التسارع ، المسافة المقطوعة ، في كل طور :



الطور الأول :

المنحنى v(t) عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث أن : $v > 0$ ، $a < 0$ (الميل سالب) يكون $a.v < 0$ (أي شعاع التسارع معاكس لجهة شعاع السرعة و بالتالي معاكس لجهة الحركة) ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

- $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{3 \, . \, 1}{2 \, . \, 1} = -1.5 \, m/s^2$
- $d_1 = S_1 = \frac{3 \, . 2}{2} \; = \; 3 \, m$

الطور الثاني :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث أن : $v < 0$ ، $a < 0$ (الميل سالب) يكون $a.v > 0$ (أي شعاع التسارع في جهة شعاع السرعة و بالتالي في جهة الحركة) ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

- $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{3 \, . \, 1}{2 \, . \, 1} = -1.5 \, m/s^2$
- $d_2 = S_2 = \frac{3 \, . 2}{2} \; = \; 3 \, m$

الطور الثالث :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث أن : $v < 0$ ، $a > 0$ (الميل موجب) يكون $a.v < 0$ (أي شعاع التسارع معاكس لجهة شعاع السرعة و بالتالي معاكس لجهة الحركة) ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

- $a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = +\frac{3 \, . \, 1}{3 \, . \, 1} = \; 1 \, m/s^2$
- $d_3 = S_3 = \frac{3 \, . 3}{2} \; = \; 4.5 \, m$

الطور الرابع :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث أن : $v > 0$ ، $a > 0$ (الميل موجب) يكون $a.v > 0$ (أي شعاع التسارع في جهة شعاع السرعة و بالتالي في جهة الحركة) ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

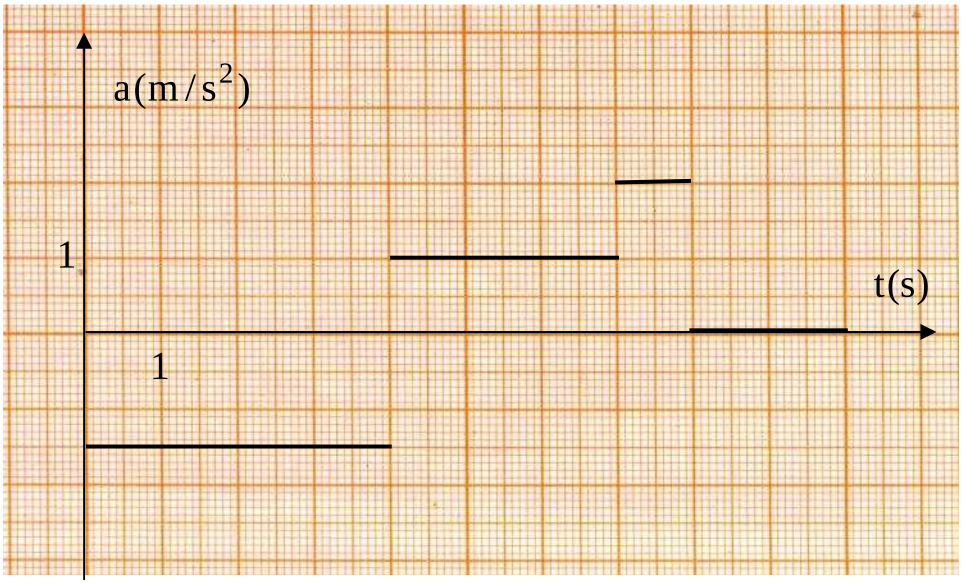
- $a_4 = \tan\alpha = -\frac{2 \, . \, 1}{1 \, . \, 1} = 2 \, m/s^2$
- $d_4 = S_4 = \frac{2 \, . 1}{2} \; = \; 1 \, m$

الطور الخامس :

المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم يوازي محور الأزمنة ، و منه الحركة في هذا الطور مستقيمة منتظمة .

- $a_5 = 0$
- $d_5 = S_5 = (\, 2 \, . \, 2 \,) = 4 \, m$

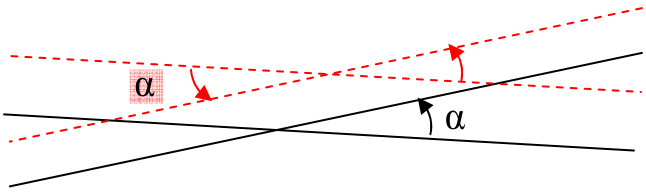
2- المنحنى البياني a(t) :



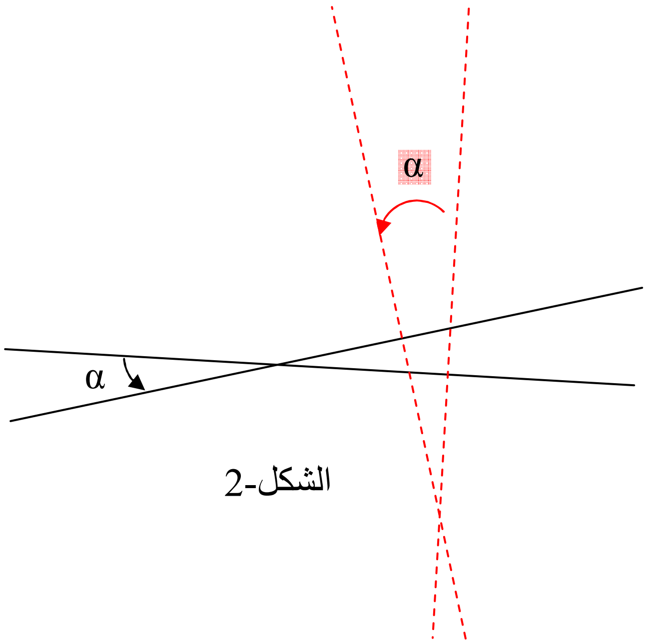
2- دراسة الحركة على المستوى الأفقي و المستوى المائل

قاعدة :

- إذا كان لدينا مستقيمين الزاوية بينهما α (الزاوية الحادة) ، فإن المستقيمين الموازيين لهما كذلك الزاوية الحادة بينهما هي α (الشكل-1) .
- إذا كان لدينا مستقيمين الزاوية بينهما α (الزاوية الحادة) ، فإن المستقيمين العموديين عليهما كذلك الزاوية الحادة بينهما هي α (الشكل-2) .



الشكل-1

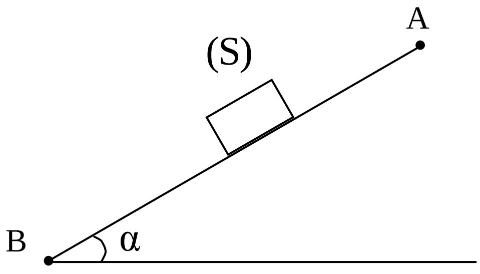


الشكل-2

التمرين (10): (التمرين : 026 في بنك التمارين على الموقع) (*)

على مستوي مائل $AB = 2\ m$ يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ ، نترك (بدون سرعة ابتدائية) عند اللحظة $t = 0$ جسم صلب (S) كتلته $m = 1\ kg$ من موضع A نعتبره مبدأ الاحداثيات باتجاه موضع B أسفل المستوي المائل ، الجسم (S) يخضع إلى قوى إحتكاك تكافئ قوة ثابتة $\vec{f}$.

يعطى : $g = 10\ m/s^2$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد عبارة تسارع حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء حركته على المستوي المائل ثم استنتج طبيعة الحركة .

2- يصل الجسم (S) إلى الموضع B بسرعة $v_B = 4\ m/s$ ، أوجد :

أ- قيمة تسارع الحركة a .

ب- المدة الزمنية المستغرقة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B .

جـ- أحسب شدة قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

د- شدة قوة رد الفعل $\vec{R}$.

3- أكتب المعادلات الزمنية $v(t)$ ، $x(t)$ المميزة لحركة مركز عطالة (S) .

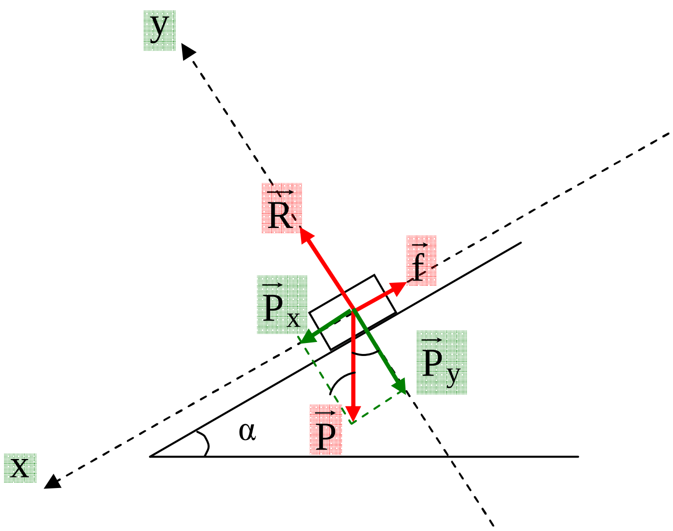
الأجوبة :

1- عبارة التسارع و طبيعة الحركة :

- الجملة المدروسة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$



بتحليل (بإسقاط) العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x + R_x + f_x = m_1\, a_x \\ P_y + R_y + f_y = m_1\, a_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} P \sin\alpha + 0 - f = m\, a \\ - P \cos\alpha + R + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\, g \sin\alpha - f = m\, a \quad .... (1) \\ - m\, g \cos\alpha + R = 0 \quad .... (2) \end{cases}$$

من العلاقة (1) يكون :

$$\boxed{a = \frac{m\, g \sin\alpha - f}{m}}$$

f ، m ، α ، g ثوابت لذلك يكون a ثابت و كون أن مسار مركز عطالة الجسم (S) مستقيم تكون حركته على المستوي المائل مستقيمة متغيرة بانتظام .

2- أ- تسارع الحركة :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2.a.AB \rightarrow a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2.AB} \rightarrow a = \frac{(4)^2 - (0)^2}{2.2} = 4\ m/s^2$$

ب- المدة الزمنية المستغرقة أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B :

$$v_B - v_A = a\,\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v_B - v_A}{a} \rightarrow \Delta t = \frac{4-0}{4} = 1\,s$$

جـ- شدة قوة الاحتكاك f :

لدينا سابقا :

$$a = \frac{m\,g\sin\alpha - f}{m} \rightarrow m.a = m.g.\sin\alpha - f$$

$$f = m.g.\sin\alpha - m.a \rightarrow f = m(g.\sin\alpha - a) \rightarrow f = 1((10.\sin30) - 4) = 1\,N$$

د- شدة قوة رد الفعل :

من العلاقة (2) السابقة يكون :

$$- m.g.\cos\alpha + R = 0 \rightarrow R = m\,g\cos\alpha$$

$$R = 1\,.\,10\,.\cos30° = 8.6\ N$$

3- المعادلات الزمنية للحركة :

المعادلة v(t) :

$$v = a\,t + v_0$$

▪ $a = 4\ m/s^2$

▪ $t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow v_0 = 0 \rightarrow \mathbf{v = 4\,t}$

المعادلة x(t) :

$$x = \frac{1}{2} a\,t^2 + x_0$$

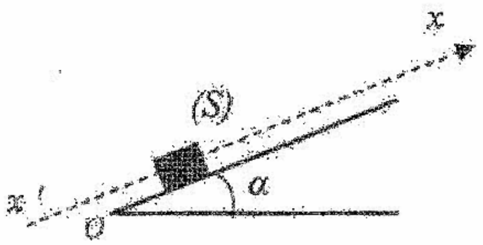
$$x = \frac{1}{2} 4\,t^2 + x_0$$

$$x = 2\,t^2 + x_0$$

▪ $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = 0 \rightarrow \mathbf{x = 2\,t^2}$

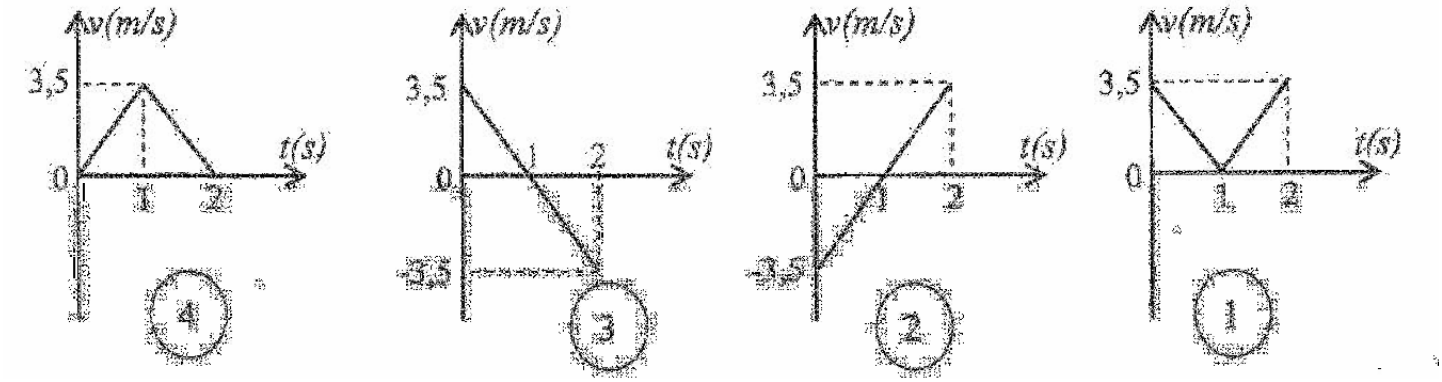
التمرين (11): (بكالوريا 2012 - رياضيات) (التمرين : 028 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- لغرض حساب زاوية الميل α لمستو يميل على الأفق . قام فوج من التلاميذ بقذف جسم صلب (S) كتلته m = 1 kg في اللحظة t = 0 من النقطة O بسرعة $\vec{v}_0$ نحو الأعلى وفق خط الميل الأعظم لمستو أملس (الشكل-4) .



الشكل- 4

باستعمال تجهيز مناسب تمكن التلاميذ من دراسة حركة مركز عطالة (S) و الحصول على أحد مخططات السرعة v = f(t) التالية :



أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، ادرس حركة الجسم (S) بعد لحظة قذفه من O .
ب- من بين المخططات الأربعة (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، ما هو المخطط الموافق لحركة الجسم (S) برر .
جـ- احسب قيمة الزاوية α .
د- احسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين : $t = 0$ و $t = 2s$.
2- في الحقيقة يخضع الجسم أثناء انزلاقه على المستوي المائل إلى قوة احتكاك شدتها ثابتة f .
أ- أحص و مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) .
ب- ادرس حركة مركز عطالة (S) ، ثم استنتج العبارة الحرفية لتسارع حركته .
جـ- احسب قيمة التسارع من أجل $f = 1.8\ N$.
تعطى : $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

الأجوبة :

1- أ- طبيعة حركة الجسم (S) :
- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (ox) :

$$P_x = -\,m\,a_0$$
$$mg\sin\alpha = -\,m\,a_x \rightarrow a_x = -\,g\sin\alpha$$

نلاحظ أن التسارع ثابت و كذلك $a_x < 0$ ($g\sin\alpha < 0$) ، و كون أن $v_x > 0$ ($\vec{v}$ في جهة المحور ox) يكون : $a_x . v_x < 0$ ، و بما أن المسار مستقيم تكون حركة مركز عطالة الجسم (S) أثناء صعوده في المستوي المائل مستقيمة متباطئة بانتظام .

ب- المخطط الموافق للحركة :
- عند وصل الجسم (S) إلى أعلى المستوي المائل أين تنعدم سرعته يعود إلى أسفل المستوي المائل بحركة مستقيمة متسارعة بانتظام (القوة المؤثرة ثابتة) ، يمكن القول أن حركة الجسم (S) على المستوي المائل لها طورين :
طور I (صعود) : تكون فيه الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام .
طور II (نزول) : تكون فيه الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام حيث $v < 0$ (الحركة عكس المحور) ، $a_G < 0$ ($\vec{P}_x$ جهتها معاكسة لجهة المحور) و إذا أخذنا بعين الاعتبار أن ميل المنحنى $v = f(t)$ يمثل ميل المماس فإن هذه المعلومات تطابق البيان (3) ولا تطابق البيانات الأخرى .

جـ- قيمة الزاوية α :

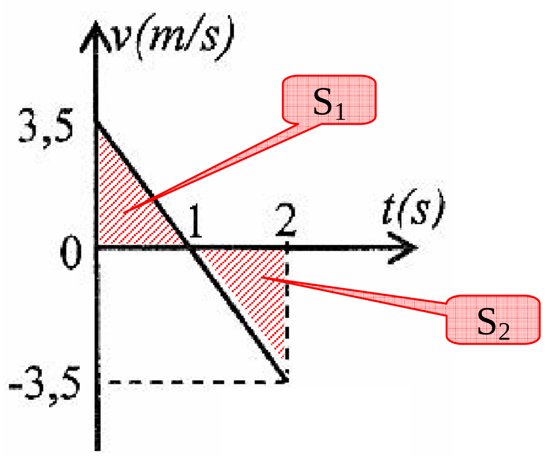
- من البيان (3) :

$$a = \tan\alpha = \frac{0 - 3.5}{1 - 0} = -3.5\ m/s^2$$

و لدينا سابقا من الدراسة النظرية :

$$a = -g\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = -\frac{a}{g} \rightarrow \sin\alpha = -\frac{(-3.5)}{9.8} = 0.36 \rightarrow \alpha \approx 21°$$

د- المسافة المقطوعة بين t = 0 و t = 2s :



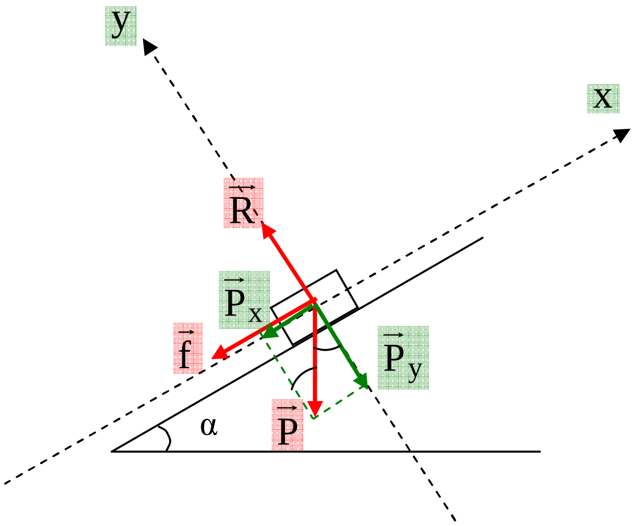
$$d = S_1 + S_2$$

- $S_1 = \frac{1 \times 3.5}{2} = 1.75\ m$
- $S_1 = \frac{(2-1) \times (0-(-3.5))}{2} = 1.75\ m$

$$d = 1.75 + 1.75 = 3.5\ m$$

2- أ- إحصاء و تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم (S) :

- يخضع الجسم (S) إلى القوى الخارجية التالية : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.



ب- دراسة حركة مركز عطالة (S) :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم S) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) :

$$-P\sin\alpha - f = m\,a$$

$$-mg\sin\alpha - f = m\,a \rightarrow a = -g\sin\alpha - \frac{f}{m}$$

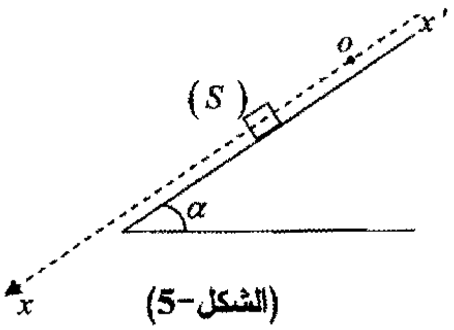
جـ- قيمة التسارع من أجل f = - 9.8 N :

$$a = (-9.8 \,.\, \sin 21°) - (\frac{1.8}{1}) = -5.3\ m/s^2$$

التمرين (12) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (التمرين : 071 في بنك التمارين على الموقع) (*)

ينزلق جسم صلب (S) كتلته $m = 100\ g$ على طول مستو مائل عن الأفق بزاوية $\alpha = 20°$ وفق المحور $\overrightarrow{xx'}$ (الشكل-5) .

قمنا بالتصوير المتعاقب بكاميرا رقمية (Webcam) ، و علوج شريط الفيديو برمجية "Aviméca" بجهاز الإعلام الآلي و تحصلنا على النتائج التالية :



(الشكل-5)

t(s)	0.00	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
$v(m.s^{-1})$	v_0	0.16	0.20	0.24	0.28	0.32

1/ أرسم البيان $v = f(t)$.

2/ باعتماد على البيان :

أ/ بين طبيعة حركة (S) و استنتج القيمة التجريبية للتسارع a .

ب/ استنتج قيمة السرعة v_0 في اللحظة $t = 0$.

جـ/ احسب المسافة المقطوعة بين اللحظتين : $t_1 = 0.04\ s$ و $t_2 = 0.08\ s$.

3/ بفرض أن الاحتكاكات مهملة :

أ/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد العبارة الحرفية للتسارع a_0 ثم أحسب قيمته .

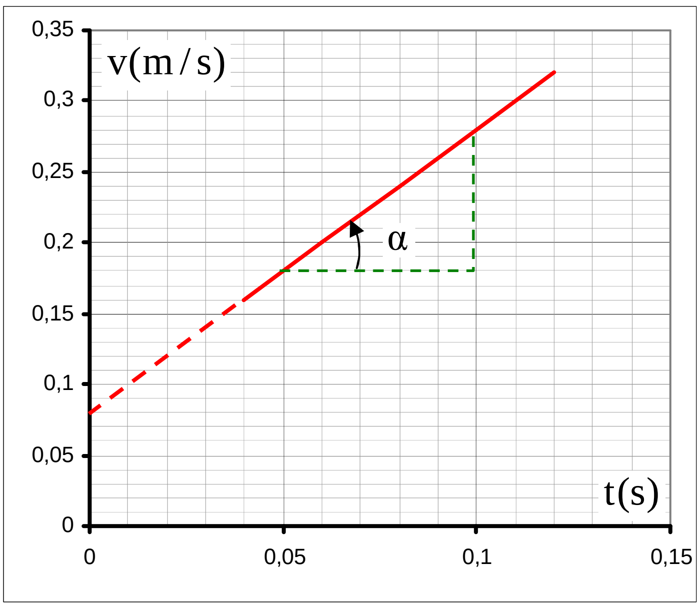
ب/ قارن بين a_0 و a . كيف تبرر الاختلاف ؟

4/ أوجد شدة القوة $\vec{f}$ المنمذجة للاحتكاكات على طول المستوي المائل .

يعطى : $g = 10\ m.s^{-2}$ ، $\sin20° = 0.34$.

الأجوبة :

1- البيان $v = f(t)$:



2- أ- طبيعة الحركة :

البيان $v = f(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ و حيث أن السرعة تتزايد ، فالحركة إذن مستقيمة متسارعة بانتظام .

- قيمة التسارع :

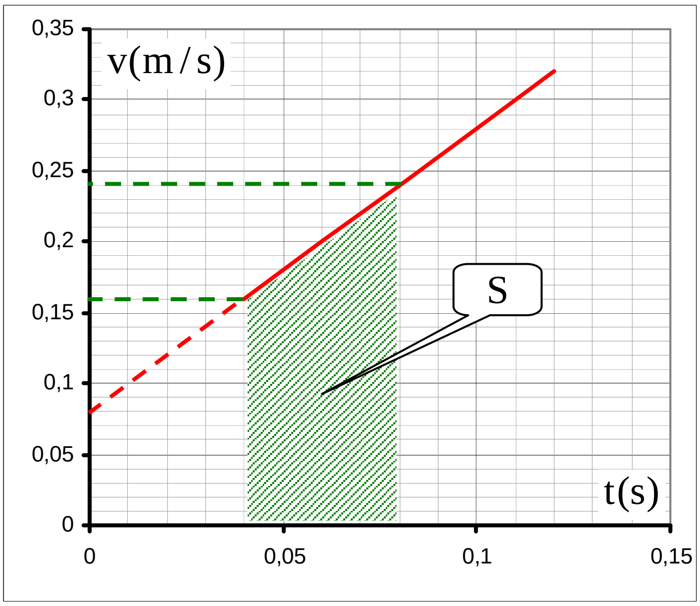
يمثل تسارع الحركة ميل المنحنى البياني (المستقيم) ، فإذا رمزنا لميل هذا المستقيم بـ $\tan\alpha$ يكون :.

$$a = \tan\alpha = \frac{0.28 - 0.18}{0.1 - 0.05} = 2\ m/s^2$$

ب- قيمة v_0 :

بتمديد المنحنى البياني (المستقيم) السابق نحصل على : $v_0 = 0.08\ m/s$ و هي سرعة الجسم (S) عند اللحظة $t = 0$

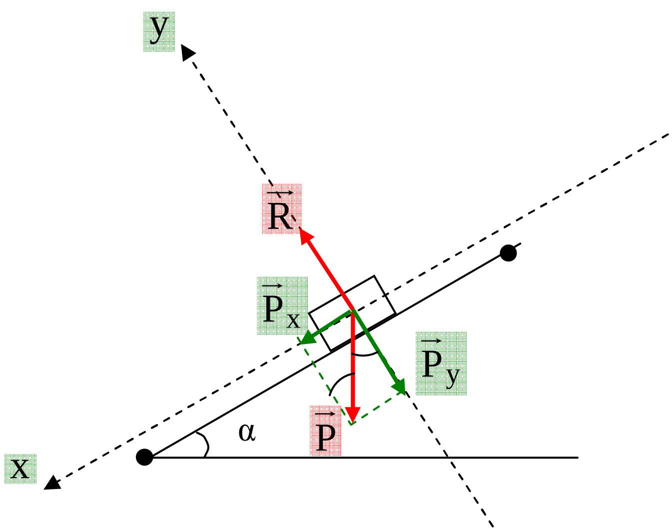
جـ- المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1 = 0.04\ s$ ، $t_2 = 0.08\ s$:



$$d = S = \frac{ق ك + ق ص}{2} \text{ إ}$$

$$d = S = \frac{(0.16 - 0) + (0.24 - 0)}{2}(0.08 - 0.04) = 8.10^{-3}\ m$$

3- عبارة a_0 :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) ، (oy) :

$$\begin{cases} P_x = m\,a_0 \\ -P_y + R = 0 \end{cases}$$

- $\sin\alpha = \dfrac{P_x}{P} \longrightarrow P_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$
- $\cos\alpha = \dfrac{P_y}{P} \longrightarrow P_y = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$

يصبح لدينا :

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = m\,a_0 \\ -m\,g\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g\sin\alpha = a_0 \text{ .... } (1) \\ -m\,g\cos\alpha + R = 0 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

من العلاقة (1) :

$$a_0 = g\sin\alpha = 10 \,.\, 0.34 = 3.4\ m/s^2$$

<u>- سبب الإختلاف :</u>

نلاحظ أن $a_0 > a$ ، و هذا راجع إلى إهمال قوى الاحتكاك في الدارسة النظرية و التي لم تهمل في الدراسة التجريبية التي نتج عنها الجدول السابق .

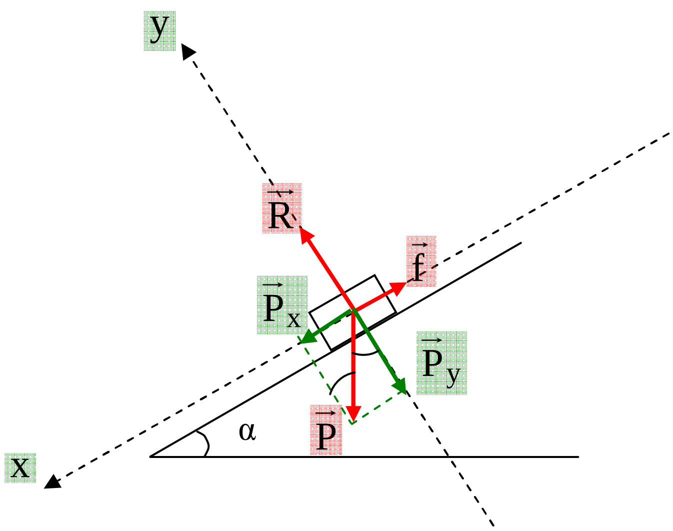
<u>4- شدة قوة الإحتكاك :</u>

- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحورين (ox) :

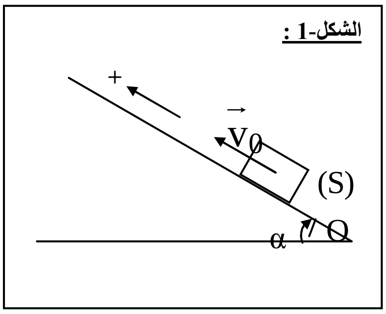
$$P\sin\alpha - f = m\,a$$
$$f = P\sin\alpha - m\,a$$
$$f = mg\sin\alpha - m\,a$$

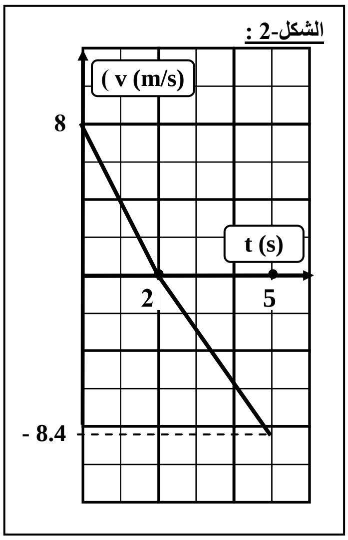


$$f = m\,(g\sin\alpha - a)$$
$$f = 0.1\,(\,(10 \,.\, 0.34\,) - 2\,) = 0.14\ N$$

التمرين (13) : (التمرين : 029 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يقذف جسم صلب (S) كتلته $m = 900\ g$ عند اللحظة $t = 0$ من النقطة (O) نعتبرها مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ وفق خط الميل الأعظم لمستوي يميل عن المستوي الأفقي بزاوية $\alpha = 20°$ (الشكل-1) . يمثل البيان الموضح في (الشكل-2) مخطط السرعة لحركة الجسم (S) .





1- أ- حدد المجال الزمني لكل طور من طوري الحركة .
ب- حدد طبيعة الحركة في كل طور .
جـ- استنتج تسارع الحركة في كل طور .
2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، بين أنه توجد قوة احتكاك ثابتة $\vec{f}$ ، أحسب شدتها .
3- أكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة الجسم (S) في كل طور باعتبار مبدأ الأزمنة لحظة القذف ، و مبدأ الفواصل عند النقطة (O) .
4- أحسب فاصلة مركز عطالة (S) عند اللحظة $t = 5\ s$ بطريقتين مختلفتين .
يعطى : $\sin 20° = 0.34$ ، نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

1- أ- المجال الزمني لكل طور :
- الطور I : $(t = 0 \rightarrow t = 2\ s)$.
- الطور II : $(t = 2\ s \rightarrow t = 5\ s)$.

ب- طبيعة الحركة في كل طور :

الطور I :
المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v > 0$ يكون $a.v < 0$ ، أي جهة شعاع التسارع معاكسة لجهة شعاع السرعة و بالتالي معاكس لجهة الحركة . إذن الحركة في هذا الطور مستقيمة متباطئة بانتظام .

الطور II :
المنحنى $v(t)$ عبارة عن مستقيم معادلته من الشكل $v = at + b$ ، و حيث ان $a < 0$ (الميل سالب) ، $v < 0$ يكون $a.v > 0$ ، أي جهة شعاع التسارع في جهة شعاع السرعة و بالتالي في جهة الحركة ، إذن الحركة في هذا الطور مستقيمة متسارعة بانتظام .

جـ- تسارع الحركة في كل طور :

الطور I :

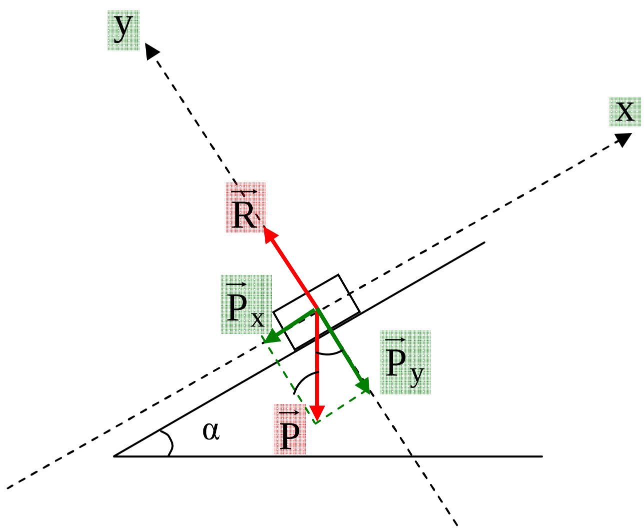
$$a_1 = \frac{0-8}{2-0} = -4\ m/s^2$$

الطور II :

$$a_2 = \frac{-8.4-0}{5-2} = -2.8\ m/s^2$$

2- إثبات أنه توجد قوة احتكاك :

لإثبات أنه توجد قوة احتكاك نبحث عن قيمة التسارع النظرية باعتبار الاحتكاك مهمل ثم نقارنها بقيمة التسارع التجريبية (نعتبر الطور الأول) .



- الجملة المعتبرة : الجسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليليا .
- القوى الخارجية المؤثرة على الجملة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) .

$- P\sin\alpha = m.a_1'$

$- m.g.\sin\alpha = m.a_1' \rightarrow a_1' = - g.\sin\alpha$

$a_1' = - 10.\sin20 = - 3.4\ m/s^2$

نلاحظ أن $a_1' \neq a_1$ ، يدل ذلك على أن فرضية عدم وجود الاحتكاك خاطئة و بالتالي الاحتكاك موجود .

- شدة قوة الاحتكاك :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) مع الأخذ بعين الاعتبار شدة قوة الاحتكاك (نعتبر الطور I) :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق محور الحركة (ox) .

$- P\sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - f = m.a_1$

$- m.g.\sin\alpha - m.a_1 = f \quad \rightarrow \quad f = - m \qquad {}_1)$

$f = - 0.9(10.\sin20 + (-4)) = 0.54\ N$

3- المعادلات الزمنية x(t) في كل طور :

الطور I :

المعادلة v(t) :

$v = at + v_0$

- $a = -4$
- $t = 0 \rightarrow v = 3.5\ m/s \rightarrow v_0 = 0$ (من المنحنى)

تصبح المعادلة v(t) كما يلي :

$$v = -4t + 8$$

<u>المعادلة x(t) :</u>

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = -2t^2 + 8t + x_0$$

▪ $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = 0$

تصبح المعادلة x(t) كما يلي :

$$x = -2t^2 + 8t$$

<u>الطور II :</u>

<u>المعادلة v(t) :</u>

$$v = at + v_0$$

▪ $a_2 = -2.8$

▪ $t = 2 \rightarrow v = 0$ (من المنحنى)

بالتعويض نجد :

$$0 = -2.8\,(2) + v_0 \rightarrow v_0 = 5.6$$

يمكن الحصول على قيمة v_0 بتمديد المنحنى v(t) في الطور الثاني حتى يقطع محور التراتيب (ov) .

تصبح المعادلة v(t) كما يلي :

$$v = -2.8\,t + 5.6$$

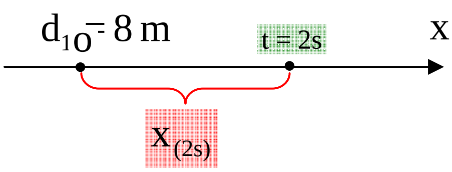
<u>المعادلة x(t) :</u>

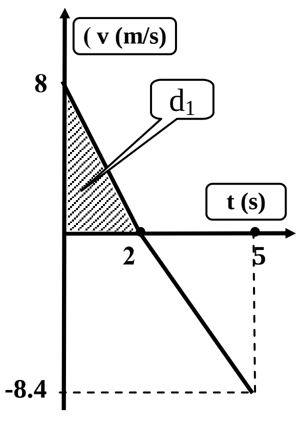
$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = -1.4\,t^2 + 5.6\,t + x_0$$

▪ $t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow x_0 = d$

حيث d هي المسافة المقطوعة في الطور الأول لأن مبدأ الفواصل عند بداية الطور الأول ، و لحساب المسافة نستعمل طريقة المساحة من المنحنى v(t) كما يلي :





$$d = \frac{8 \ . \ 2}{2} = 8$$

إذن :

$t = 2\ s \rightarrow x = 8\ m$

بالتعويض في المعادلة $x(t)$ نجد :

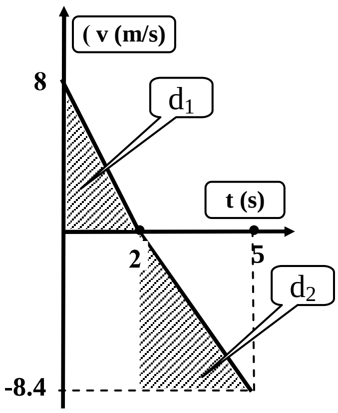
$8 = -1.4\,(2)^2 + 5.6\,(2) + C_2 \rightarrow C_2 = 8 + (1.4\,.\,2^2) - (5.6\,.\,2) = 2.4$

و منه تصبح المعادلة $x(t)$ في الطور II كما يلي :

$x = -1.4\,t^2 + 5.6\,t + 2.4$

4- فاصلة مركز عطالة (S) عند اللحظة $t = 5\ s$ بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :



بتعويض $t = 5\ s$ في المعادلة الزمنية $x(t)$ في الطور الثاني :

$x = -1.4\,t^2 + 5.6\,t + 2.4$

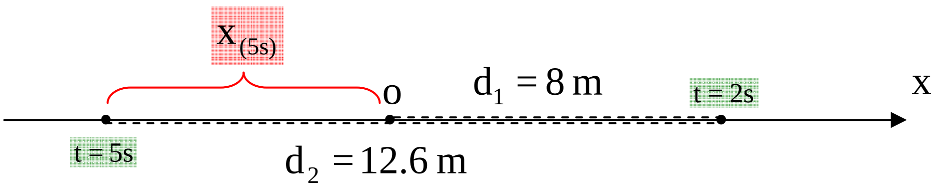
$x_{(5s)} = -1.4\,(5)^2 + (5.6\,.\,5) + 2.4 = -4.6\ m$

الطريقة الثانية :

المتحركة في الطور الأول قطع مسافة $d_1 = 8\ m$ ، و في الطور الثاني قطع مسافة d_2 حيث :

$$d_2 = \frac{(5-2)\,8.4}{2} = 12.6\ m$$

نلاحظ : $d_2 > d_1$ و عليه :



إذن :

$t = 5\ s \rightarrow x_{(5s)} = d_1 - d_2 = 8 - 12.6 = -4.6\ m$

3- العمل و الطاقة

● أشكال الطاقة و أنماط التحويل :

- للطاقة ثلاث أشكال (لا رابع لهما) : طاقة حركية E_C ، طاقة كامنة E_P ، طاقة داخلية E_i .
- تتحول الطاقة من شكل إلى آخر (كتحولها من الحركية إلى الكامنة أو العكس) عبر سبيل معين ندعوه **نمط التحويل** ، و أنماط التحويل أربع (لا خامس لهما) : تحويل ميكانيكي W_m ، تحويل كهربائي W_e ، تحويل حراري Q ، تحويل اشعاعي E_r .

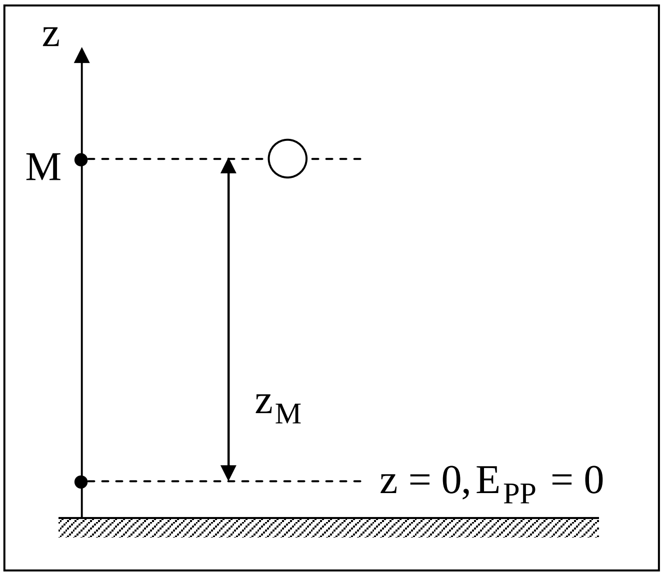
● الطاقة الحركية الانسحابية :

- عندما ينسحب جسم ذو كتلة m بسرعة v فإن طاقته الحركية Ec مقدرة بالجول عند كل لحظة تعطى بالعبارة التالية :

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} m v^2}$$

• الطاقة الكامنة الثقالية :

- نقول عن جملة ميكانيكية أنها تمتلك طاقة كامنة إذا كانت في حالة تشوه ، و الجملة تتشوه عندما يتغير شكلها (حالة الجسم المرن) ، أو تتغير الأبعاد بين النقاط المادية المشكلة لها ، أو تتغير الأبعاد بين الأجسام المكونة لها (حالة جملة تتكون من عدة أجسام) .

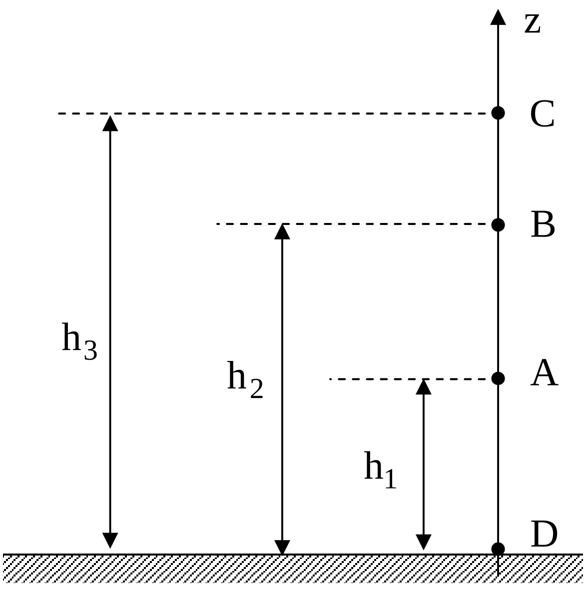


- الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (جسم + أرض) هي مقدار موجب ، لكننا نتعامل معها كمقدار جبري فهي تقاس بالنسبة لمستوي مرجعي نعتبر عنده الطاقة الكامنة الثقالية معدومة . علما أن التغير في الطاقة الكامنة لا يتغير بتغير المستوي المرجعي .
- عندما يكون جسم (S) على ارتفاع z من مستوي مرجعي فإن الجملة (جسم S + أرض) تمتلك طاقة كامنة ثقالية يعبر عنها بالعلاقة :

$$\boxed{E_{pp} = m.g.z}$$

التمرين (14) : (التمرين : 006 في بنك التمارين على الموقع) (*)

من موضع A يقع على ارتفاع $h_1 = 1.2\ m$ من سطح الأرض ، يقذف طفل كرة كتلتها $m = 400\ g$ شاقوليا نحو الأعلى بسرعة v_A ، تمر بالموضع B الذي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار $h_2 = 1.5\ m$ ، ثم بالموضع C التي يبعد عن سطح الأرض بمقدار h_3 و الذي تغير فيه الكرة جهة حركتها راجعة باتجاه الأرض ، تمر مرة ثانية من موضع القذف A لتسقط في النهاية على سطح الأرض في الموضع D .



- أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (كرة + أرض) عند المواضع A ، B ، D باعتبار الوضع المرجعي لحساب الطاقة الكامنة :
- منطبق على الأرض .
- منطبق على المستوي الأفقي المار من النقطة A .

نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

الأجوبة :

- حساب الطاقة الكامنة :

▪ المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون منطبق على سطح الأرض (مار من D) :

- $E_{PPA} = m\ g\ z_A = m\ g\ h_1 = 0.4 \ .\ 10\ .\ 1.2 = 4.8\ J$
- $E_{PPB} = m\ g\ z_B = m\ g\ h_2 = 0.4\ .\ 10\ .\ 1.5 = 6\ J$
- $E_{PPD} = m\ g\ z_D = 0$ (المستوى المرجعي)

▪ المستوي المرجعي لحساب الطاقة الكامنة يكون مار من A:

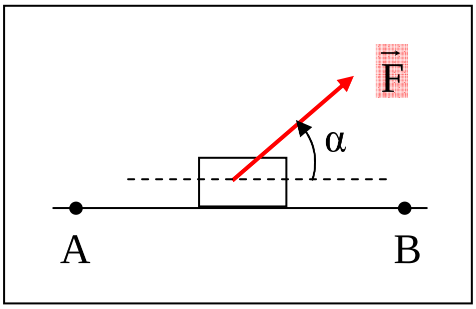
- $E_{PPA} = m\ g\ z_A = 0$ (المستوى المرجعي)
- $E_{PPB} = m\ g\ z_B = m\ g\ (h_2 - h_1) = 0.4\ .\ 10\ .\ (1.5 - 1.2) = 1.2\ J$
- $E_{PPD} = m\ g\ z_D = m\ g\ (- h_1) = 0.4\ .\ 10\ .\ (-1.2) = - 4.8\ J$

● عمل قوة ثابتة في مسار مستقيم:

- نقول عن قوة أنها قامت بعمل إذا انتقلت نقطة تطبيقها من موضع إلى موضع آخر .

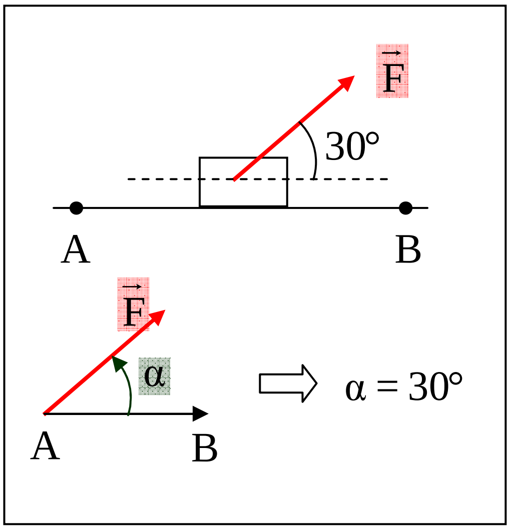
- عمل قوة $\vec{F}$ أثناء انتقال من موضع A إلى موضع B الذي يرمز له بـ $W_{AB}(\vec{F})$ وو حدته الجول هو مقدار جبري يكون موجب إذا كانت القوة $\vec{F}$ في جهة الحركة و يقال عنه **عمل محرك** بينما يكون سالبا إذا كانت القوة $\vec{F}$ معاكسة لجهة الحركة و يقال عنه في هذه الحالة **عمل مقاوم** .

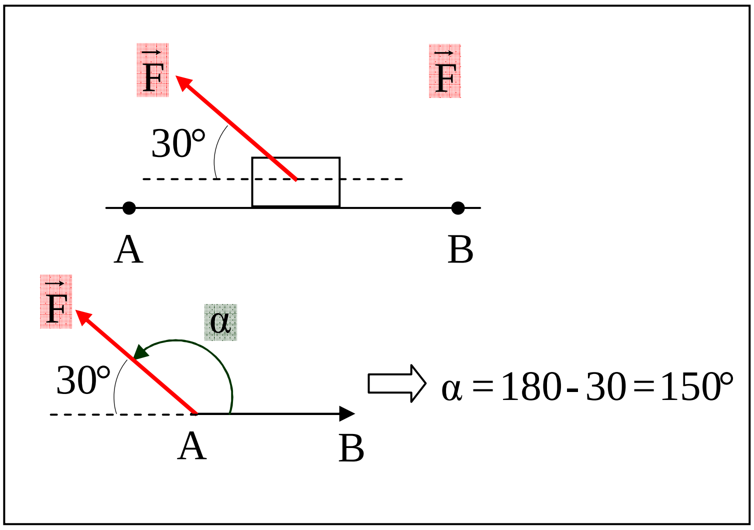
- يعبر عن عمل قوة $\vec{F}$ ثابتة عندما تنتقل نقطة تطبيقها وفق مسار مستقيم AB بالعلاقة :



$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB\ \cos\alpha}$$

حيث α هي الزاوية التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{AB}$ مع شعاع القوة $\vec{F}$ ، كما مبين في المثالين التاليين :

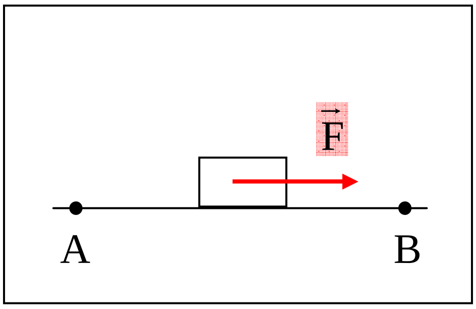




- تقدر المسافة AB بالمتر (m) و شدة القوة $\vec{F}$ بالنيوتن (N) و العمل W بالجول (J) .

حالات خاصة :

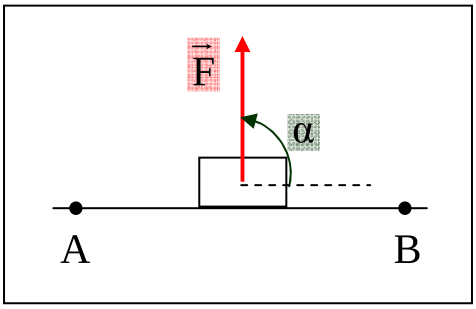
▪ القوة $\vec{F}$ توازي شعاع الإنتقال (أو المسار) و في جهة الحركة :



- في هذه الحالة يكون : $\cos \alpha = 1 \leftarrow \alpha = 0$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = F\ AB}$$

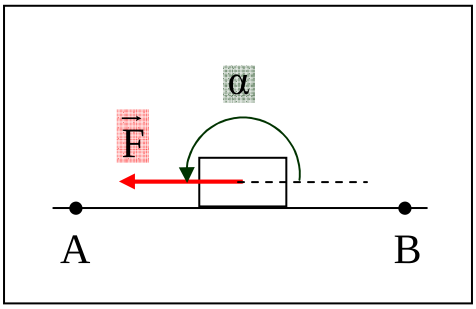
▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على شعاع الانتقال (أو المسار) :



- في هذه الحالة يكون : $\cos \alpha = 0 \leftarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = 0}$$

▪ القوة $\vec{F}$ توازي شعاع الانتقال (أو المسار) و معاكسة لجهة الحركة :



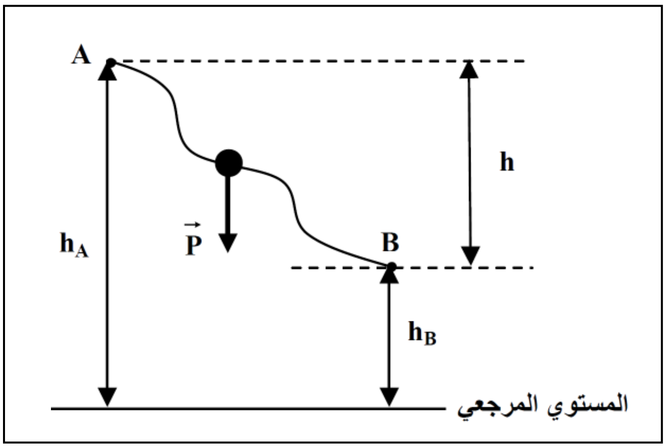
- في هذه الحالة يكون : $\cos \alpha = -1 \leftarrow \alpha = \pi$. ومنه تصبح عبارة العمل كما يلي :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = -\ F\ AB}$$

• عمل قوة الثقل :

عندما ينتقل مركز ثقل جسم من نقطة A الموجودة على ارتفاع z_A في معلم معين إلى نقطة B الموجودة على ارتفاع z_B في نفس المعلم ، فإن عمل ثقل هذا الجسم أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B يعبر عنه بالعلاقة :

$$\boxed{W_{A-B}(\vec{P}) = m.g\,(z_A - z_B)}$$



أو بإحدى العلاقتين :

$W_{A-B}(\vec{P}) = + m.g.h$ (عمل الثقل محرك ، الجسم نازل)

$W_{A-B}(\vec{P}) = - m.g.h$ (عمل الثقل مقاوم ، الجسم صاعد)

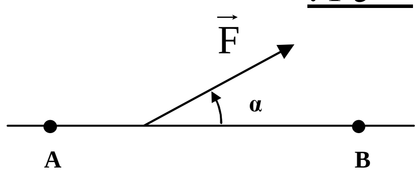
ملاحظة :

عمل الثقل لا يتعلق بالمسار و إنما يتعلق بالموضعين الإبتدائي و النهائي فقط .

التمرين (15) : (التمرين : 008 في بنك التمارين على الموقع) (*)

1- يتحرك جسم M كتلته m ، أفقيا من موضع A إلى موضع B على مسار مستقيم تحت تأثير قوة $\vec{F}$ تصنع زاوية α مع شعاع الانتقال شدتها $F = 20\ N$ (الشكل) .

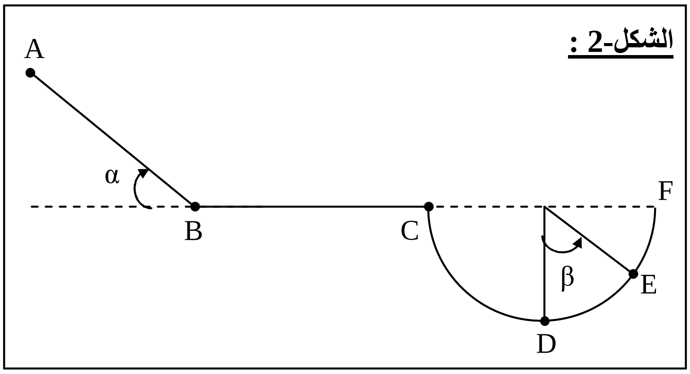
الشكل-1 :



أحسب عمل القوة $\vec{F}$ عندما ينتقل الجسم M مسافة $d = 5\ m$ من الموضع A إلى الموضع B في الحالات التالية :

- القوة $\vec{F}$ تصنع زاوية $\alpha = 60^0$ مع شعاع الانتقال في الإتجاه الموافق لجهة الحركة .
- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و في جهة الحركة .
- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و معاكسة لجهة الحركة .
- القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار .

2- يتحرك جسم (S) كتلته $m = 2\ kg$ بدون احتكاك على المسار ABCDEF الموضح في (الشكل) التالي :



يعطى : $AB = 10\ m$ ، $R = 8\ m$ ، $g = 10\ N/kg$ ، $\alpha = 30°$ ، $\beta = 60°$.

أ- أحسب عمل قوة الثقل في الحالات التالية :

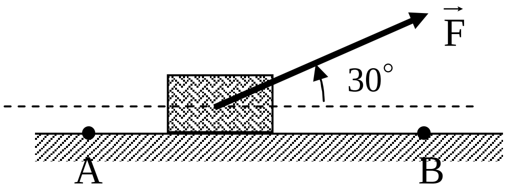
- عند الانتقال من الموضع A إلى الموضع B .
- عند الانتقال من الموضع B إلى الموضع C .
- عند الانتقال من الموضع C إلى الموضع D .
- عند الانتقال من الموضع D إلى الموضع E .

يؤخذ : $AB = 10\ m$ ، $R = 8\ m$ ، $g = 10\ N/m$ ، $\alpha = 30°$ ، $\beta = 60°$.

الأجوبة :

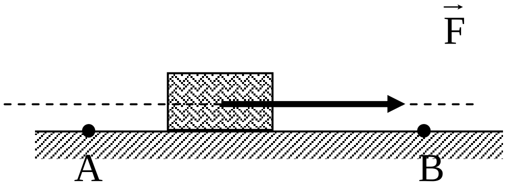
1- عمل القوة $\vec{F}$:

- القوة $\vec{F}$ تصنع الزاوية $\alpha = 60°$ في جهة الحركة :



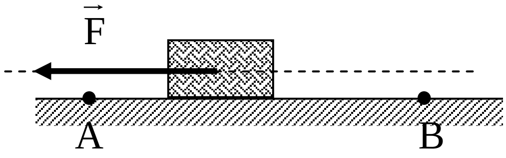
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F\,.\,AB\cos 60°$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20\,.\,5\,.\,0.5 = 50\ J$$

- القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و في جهة الحركة :



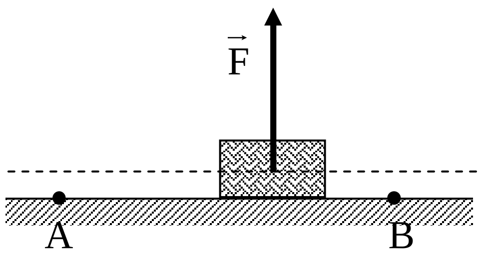
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = F\,.\,AB$$
$$W_{A\text{-}B}(\vec{F}) = 20\,.\,5 = 100\ J$$

▪ القوة $\vec{F}$ موازية للمسار و معاكسة لجهة الحركة :



$$W_{A-B}(\vec{F}) = -F.AB$$
$$W_{A-B}(\vec{F}) = -20.5 = -100\ J$$

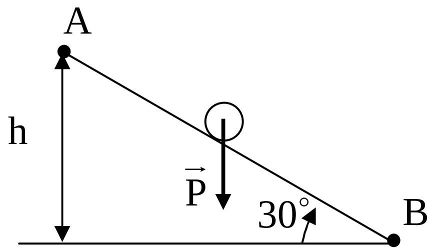
▪ القوة $\vec{F}$ عمودية على المسار :



$$W_{A-B}(\vec{F}) = 0$$

2- أ عمل الثقل :

▪ الانتقال $(A \rightarrow B)$:



$$W_{A-B}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

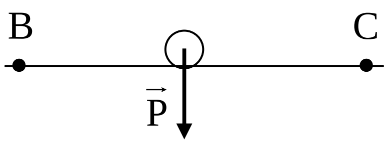
من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB\sin\alpha$$

و منه :

$$W_{A-B}(\vec{P}) = m\,g\,AB\sin\alpha$$
$$W_{A-B}(\vec{P}) = 2.10.10.\sin 30° = 100\ J$$

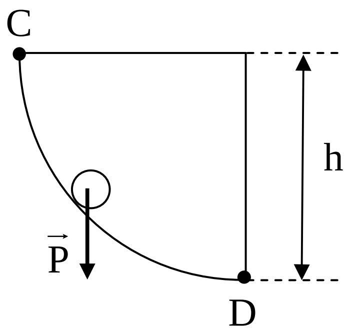
▪ الانتقال $(B \rightarrow C)$:



في هذه الحالة قوة الثقل $\vec{P}$ عمودية على شعاع الانتقال و بالتالي يكون :

$$W_{B-C}(\vec{P}) = 0$$

▪ الانتقال $(C \rightarrow D)$:

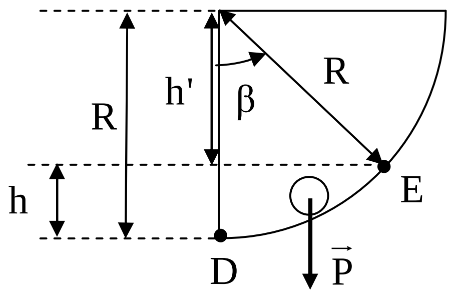


$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,h$$

من الشكل : $h = R$ و منه :

$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = m\,g\,R$$
$$W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = 2.10.8 = 160\ J$$

▪ الانتقال $(D \rightarrow E)$:



$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,h$$

من الشكل :

$$\begin{cases} h = R - h' \\ \cos\beta = \dfrac{h'}{R} \rightarrow h' = R\cos\beta \rightarrow h = R - R\cos\beta \rightarrow h = R\,(1-\cos\beta) \end{cases}$$

و منه تصبح عبارة عمل الثقل :

$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -\,m\,g\,R\,(1-\cos\beta)$$
$$W_{D\text{-}E}(\vec{P}) = -2.\ 10.\ 8\ (1-\cos 60°) = -80\ J$$

• معادلة انحفاظ الطاقة في الجملة الميكانيكية :

إذا انتقلت جملة ميكانيكية من موضع A إلى موضع B و كانت طاقتها عند A هي E_A و طاقتها عند B هي E_B ، فإنه يعبر عن
معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الإنتقال من A إلى B كما يلي :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

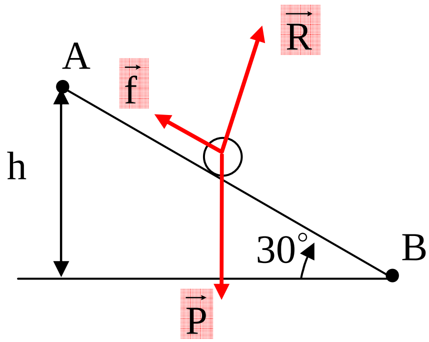
- E_A : أشكال الطاقة عند A : حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة
- $E_{\text{مكتسبة}}$: مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في جهة الحركة
- $E_{\text{مقدمة}}$: مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في عكس جهة الحركة
- E_B : أشكال الطاقة عند B : حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة

و تكون الحصيلة الطاقة الموافقة كما يلي :

مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في جهة الحركة ← [أشكال الطاقة التي تغيرت قيمها أثناء الانتقال من الموضع A إلى الموضع B حركية أو كامنة أو معا ، حسب الجملة المدروسة] ← مجموع أعمال القوى الخارجية التي تكون في عكس جهة الحركة

مثال–1 :

جسم صلب (S) يتحرك على مستوي مائل إنطلاقا من الموضع A أعلى مستوي مائل إلى الموضع B أسفل هذا المستوي المائل ، نريد كتابة معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الانتقال AB .



- الجملة المدروسة : (جسم)

- القوى الخارجية :

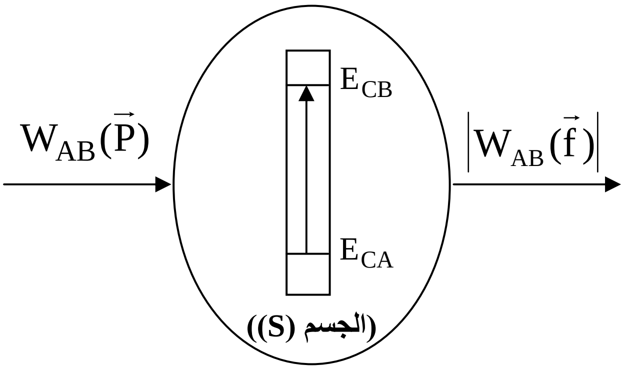
▪ الثقل $\vec{P} \leftarrow W_{AB}(\vec{P}) > 0$

▪ قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$

▪ قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.

- أشكال الطاقة :
- حركية متزايدة .

- الحصيلة الطاقوية :



- معادلة انحفاظ الطاقة :

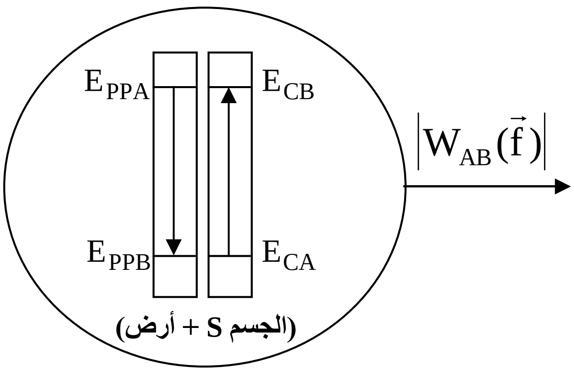
$$\boxed{E_{CA} + W_{AB}(\vec{P}) - |W_{AB}(f)| = E_{CB}}$$

- الجملة المدروسة : (جسم + أرض)

- القوى الخارجية :
- قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$
- قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.

- أشكال الطاقة :
- حركية متزايدة .
- كامنة ثقالية متناقصة .

- الحصيلة الطاقوية :

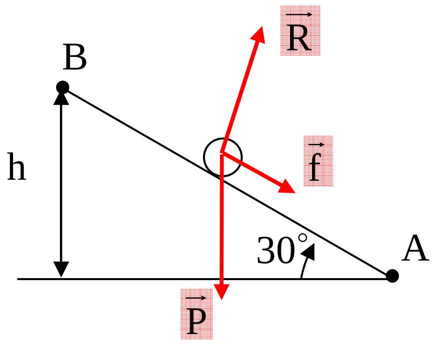


- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\boxed{E_{CA} + E_{PPA} - |W_{AB}(f)| = E_{CB} + E_{PPB}}$$

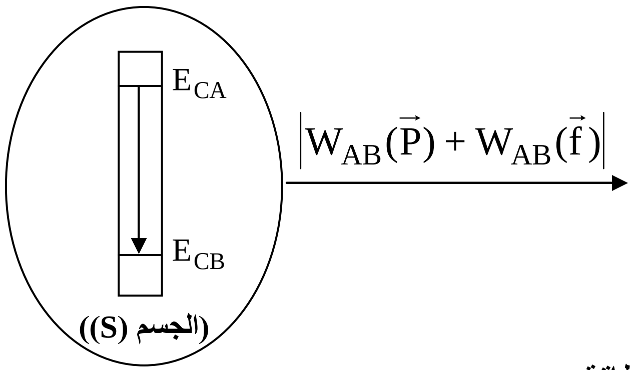
مثال-2:

جسم صلب (S) يتحرك على مستوي مائل إنطلاقا من الموضع A أسفل مستوي مائل إلى الموضع B أعلى هذا المستوي المائل ، نريد كتابة معادلة انحفاظ الطاقة أثناء الانتقال AB .



- الجملة المدروسة : (جسم)

- القوى الخارجية :
  - الثقل $\vec{P} \leftarrow W_{AB}(\vec{P}) < 0$
  - قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$
  - قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.
- أشكال الطاقة :
  - حركية متناقصة .
- الحصيلة الطاقوية :



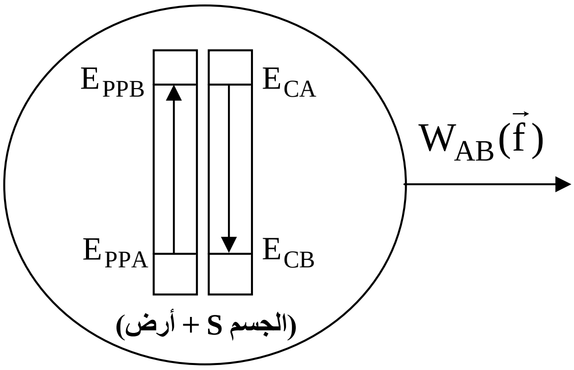
- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\boxed{E_{CA} - |W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f})| = E_{CB}}$$

- الجملة المدروسة : (جسم + أرض)

- القوى الخارجية :
  - قوة رد الفعل $\vec{R} \leftarrow W_{AB}(\vec{R}) = 0$
  - قوة الاحتكاك $\vec{f} \leftarrow W_{AB}(\vec{f}) < 0$.
- أشكال الطاقة :
  - حركية متناقصة .
  - كامنة ثقالية متزايدة .

- الحصيلة الطاقوية :

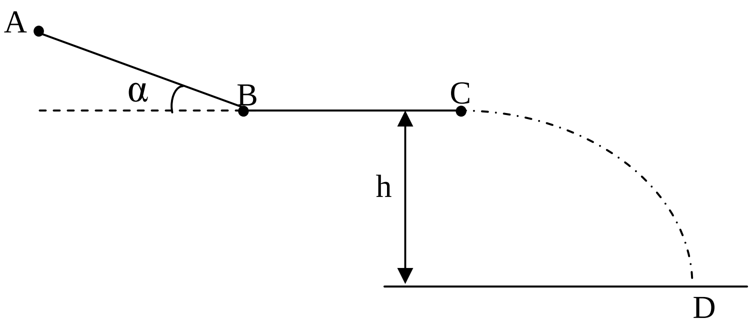


- معادلة انحفاظ الطاقة :

$$\boxed{E_{CA} + E_{PPA} - |W_{AB}(f)| = E_{CB} + E_{PPB}}$$

التمرين (16) : (التمرين : 009 في بنك التمارين على الموقع) (*)

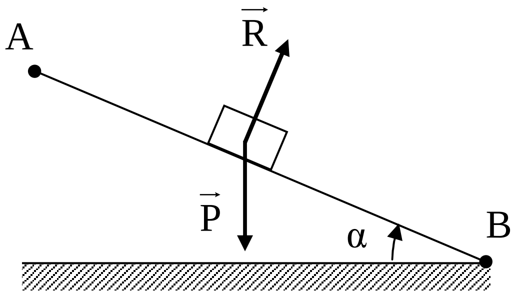
جسم (S) نعتبره نقطي (أبعاده مهملة) كتلته $m = 1\ Kg$ يتحرك على المسار ABCD (الشكل) حيث :
AB : مستوي مائل طوله $AB = 2\ m$ و يميل على الأفق بزاوية $\alpha = 30°$ به الاحتكاك مهمل .
BC : مسار مستقيم أفقي طوله $BC = 2\ m$
يخضع الجسم (S) على المسار BC لقوة احتكاك $\vec{f}$ شدتها ثابتة .
يندفع الجسم (S) من الموضع (A) بسرعة ابتدائية قدرها $v_A = 4\ m/s$. يعطى : $g = 10\ m/s^2$.



1 – أحسب سرعة الجسم (S) عند الموضع (B) أسفل المستوي المائل ، في الحالتين :
أ- باعتبار الجملة (جسم S) .
ب- باعتبار الجملة (جسم S + أرض) ، و بأخذ المستوي الأفقي المار من B مرجعا لحساب الطاقة الكامنة الثقالية .
2 – إذا علمت أن الجسم (S) يصل إلى الموضع C بسرعة قدرها 4 m/s ، أوجد شدة قوة الاحتكاك f .
3 – عند وصول الجسم (S) إلى النقطة C التي تبعد عن سطح الأرض بمقدار h m ، يندفع الجسم في الهواء و يسقط تحت تأثير ثقله حتى يصطدم بالأرض في الموضع D بسرعة $v_D = 7\ m/s$. أحسب الارتفاع h (تهمل كل قوى الاحتكاك و دافعة أرخميدس) .

الأجوبة :

1- السرعة v_B عند B :



أ- الجملة المدروسة : جسم (S) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CA} + W_{A\text{-}B}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_A^{\ 2} + m\, g\, h = \frac{1}{2} m\, v_B^{\ 2}$$

$$\frac{1}{2}\ v_A^{\ 2} + g\, h = \frac{1}{2}\ v_B^{\ 2} \ \rightarrow v_A^{\ 2} + 2g\, h = v_B^{\ 2}$$

من الشكل :

$$\sin\alpha = \frac{h}{AB} \rightarrow h = AB.\sin\alpha$$

و منه :

$$v_A^{\ 2} + 2\, g\, AB \sin\alpha = v_B^{\ 2} \ \rightarrow \ v_B = \sqrt{v_A^{\ 2} + 2\, g\, AB \sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{(4)^2 + (2\ .10\,.2\ .\ 0.5)} = 6\ m/s$$

ب- الجملة المدروسة : (جسم S + أرض) .

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : قوة رد الفعل .
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين A و B :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{cA} + E_{ppA} = E_{cB} + E_{ppB}$$

$$\frac{1}{2} m\, v_A^{\ 2} + m\, g\, z_A = \frac{1}{2} m\, v_B^{\ 2}$$

$$\frac{1}{2}\ v_A^{\ 2} + g\, z_A = \frac{1}{2}\ v_B^{\ 2} \ \rightarrow \ v_A^{\ 2} + 2g\, z_A = v_B^{\ 2}$$

من الشكل :

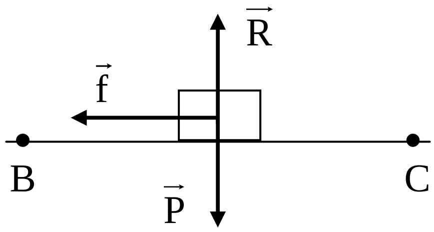
$$\sin\alpha = \frac{z_A}{AB} \rightarrow z_A = AB.\sin\alpha$$

و منه :

$$v_A{}^2 + 2\,g\,AB\sin\alpha = v_B{}^2 \rightarrow v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2\,g\,AB\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{(4)^2 + (2\,.10.2\,.\,0.5)} = 6\ m/s$$

2- قيمة f :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة رد الفعل $\vec{R}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين B و C :

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_B$$

$$E_{CB} - \left|W_{B\text{-}C}(\vec{f})\right| = E_{CC}$$

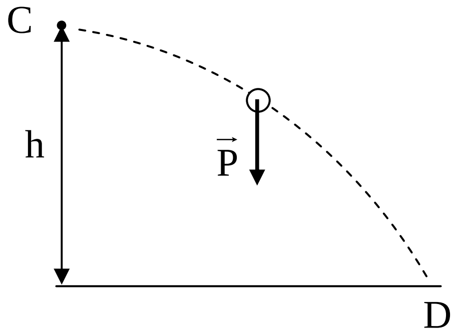
$$\frac{1}{2}m\,v_B{}^2 - \left|-f.BC\right| = \frac{1}{2}m\,v_C{}^2$$

$$\frac{1}{2}m\,v_B{}^2 - f.BC = \frac{1}{2}m\,v_C{}^2 \rightarrow m\,v_B{}^2 - 2\,f\,BC = m\,v_C{}^2$$

$$m\,v_B{}^2 - m\,v_C{}^2 = 2\,f\,BC \rightarrow f = \frac{m\,(v_B{}^2 - v_C{}^2)}{2.BC}$$

$$f = \frac{1\,(6^2 - 4^2)}{2\,.\,2} = 5\ N$$

3- الارتفاع h :



- الجملة المدروسة : جسم (S) .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.
- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين الموضعين C و D حيث :

$$E_C + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مقدمة}} = E_D$$

$$E_{CC} + W_{C\text{-}D}(\vec{P}) = E_{CD}$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 + m g h = \frac{1}{2} m v_D^2$$

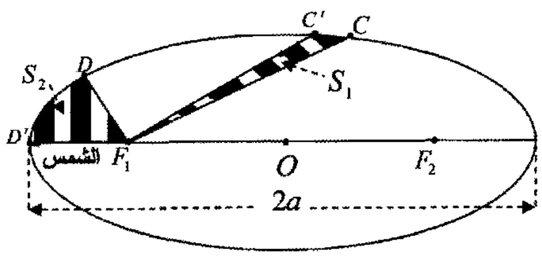
$$v_C^2 + 2 g h = v_D^2$$

$$2 g h = v_D^2 - v_C^2 \rightarrow h = \frac{v_D^2 - v_C^2}{2 g}$$

$$h = \frac{(7)^2 - (4)^2}{2.10} = 1.65\,m$$

VI – تمارين متنوعة

التمرين (17) : (بكالوريا 2010 – رياضيات) (التمرين : 057 في بنك التمارين على الموقع) (*)



(الشكل-4)

أ/ يكون مسار حركة مركز عطالة كوكب حول الشمس اهليليجيا كما يوضحه (الشكل-4) .

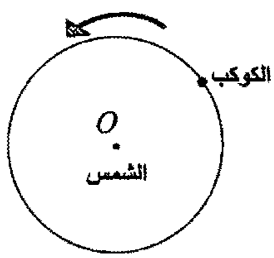
ينتقل الكوكب أثناء حركته على مداره من النقطة C إلى النقطة 'C ثم من النقطة D إلى النقطة 'D خلال نفس المدة الزمنية Δt .

1- اعتمادا على قانون كبلر الأول فسر وجود موقع الشمس في النقطة F_1 ، كيف نسمي عندئذ النقطتين F_1 ، F_2 ؟

2- حسب قانون كبلر الثاني ما هي العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 ؟

3- بين أن متوسط السرعة بين الموضعين C و 'C أقل من متوسط السرعة بين الموضعين D و 'D .

ب/ من أجل التبسيط ننمذج المسار الحقيقي لكوكب في المرجع الهيليومركزي بمدار دائري مركزه O (مركز الشمس) و نصف قطره r (الشكل-5) .



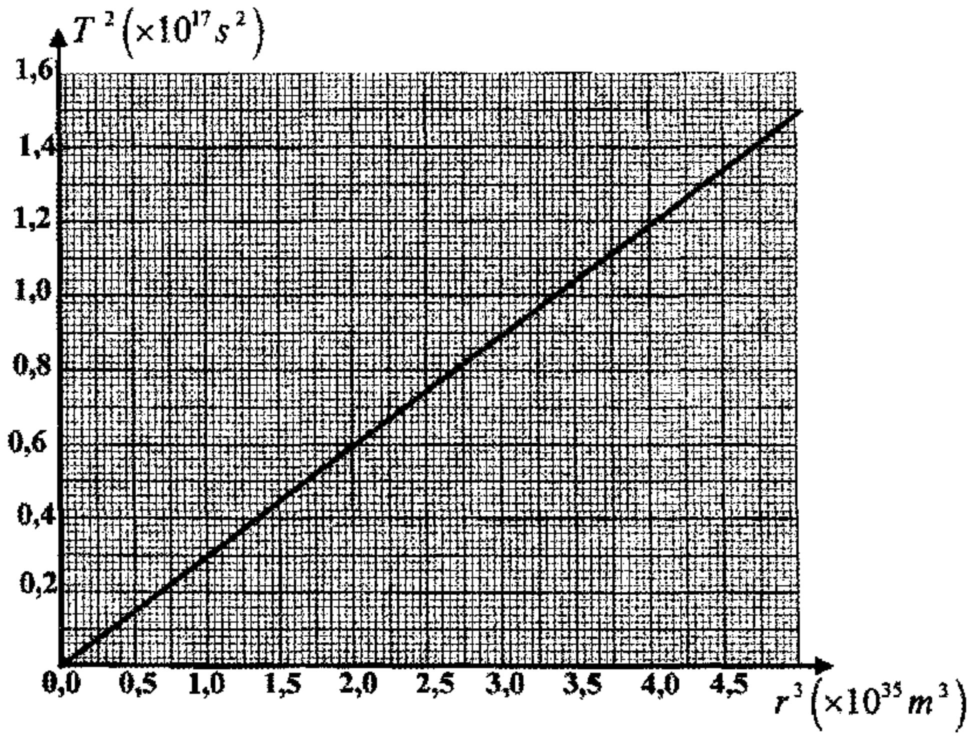
(الشكل-5)

يخضع كوكب أثناء حركته حول الشمس إلى تأثيرها و الذي ينمذج بقوة $\vec{F}$ ، قيمتها تعطى حسب قانون الجذب العام لنيوتن بالعلاقة :

$F = G\dfrac{mM}{r^2}$ ، حيث M كتلة الشمس ، m كتلة الكوكب و G ثابت التجاذب الكوني

$G = 6.67 \,.\, 10^{-11}$ SI

باستعمال برمجية "satellite" في جهاز الإعلام الآلي تم رسم البيان $T^2 = f(r^3)$ (الشكل-6) . حيث T دور الحركة



(الشكل−6)

1/ أذكر نص قانون كبلر الثالث .

2/ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكوكب و باهمال تـأثيرات الكواكب الأخرى ، أوجد عبارة كل من v سرعة الكوكب ، و دور حركته T بدلالة r ، G ، M .

3/ أوجد بيانيا العلاقة بين T^2 و r^3 .

4/ أوجد العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 .

5/ بتوظيف العلاقتين الأخيرتين استنتج قيمة كتلة الشمس M .

الأجوبة :

أ/ 1- تفسير وجود الشمس في النقطة F_1 :

- وجود الشمس في النقطة F_1 يفسر بمسار الكوكب الإهليليجي و الذي تمثل الشمس أحد محرقيه .
- تسمى النقطتين F_1 ، F_2 محرقا المدار الإهليليجي .

2- العلاقة بين متوسط المساحتين S_1 ، S_2 :

حسب قانون كبلر الثاني يكون : $S_1 = S_2$

3- إثبات أن متوسط السرعة بين الموضعين C ، 'C أقل من متوسط السرعة بين D ، 'D .

- من (الشكل-4) المعطى :

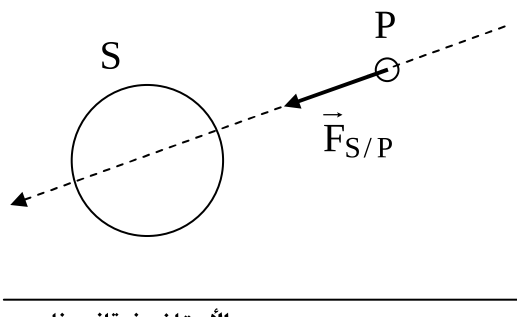
$$\overset{\frown}{C'C} < \overset{\frown}{D'D}$$

و كون أن الكوكب يقطع المسافتين C'C ، D'D في نفس المدة الزمنية يكون بقسمة الطرفين على الزمن :

$$v_{(C'C)} < v_{(D'D)}$$

ب/ 1- قانون كبلر الثالث :

ينص على ما يلي : " مربع دور الكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس "



2- عبارة السرعة v و الدور T بدلالة r ، G ، M :

- الجملة المدروسة : كوكب (P) .
- مرجع الدراسة : هيليو مركزي .
- القوى الخارجية المؤثرة : القوة $\vec{F}_{S/P}$ الناتجة عن جذب الشمس للكوكب

- بتطبيق قانون نيوتن الثاني :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\Sigma \vec{F}_{S/P} = m\,\vec{a} \quad .... (1)$$

- بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور الناظمي :

$$F_{S/P} = m\,a_n$$

$$G\frac{M.m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r}$$

- لدينا : $T = \frac{2\pi r}{v}$ و منه :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM}{r}} = \frac{4\pi^2\, r^3}{GM} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$$

<u>3- العلاقة بين T^2 و r^3 بيانيا :</u>

البيان $T^2 = f(r^3)$ عبارة عن مستقيم يمر من المبدأ لذا يكون :

$$T^2 = \alpha\, r^3$$

حيث α ميل هذا المستقيم .

<u>4- العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 :</u>

من عبارة الدور السابقة يمكن كتابة :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

<u>5- كتلة الشمس :</u>

- بمطابقة مع العلاقتين البيانية و النظرية :

$$\frac{4\pi^2}{GM} = \alpha \rightarrow M = \frac{4\pi^2}{G\,\alpha}$$

من البيان :

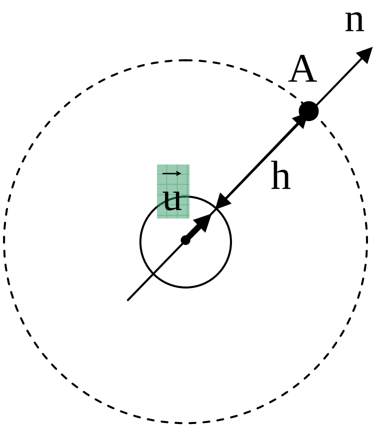
$$\alpha = \frac{0.6\ .10^{17}}{2.10^{35}} = 3.10^{-19}$$

و منه :

$$M = \frac{4\pi^2}{6.67\,.\,10^{-11}\,.3.10^{-19}} = 1.97\,.10^{30}\ Kg$$

التمرين (18) : (التمرين : 031 في بنك التمارين على الموقع) (*)

قمر اصطناعي (S) كتلته m يدور حول الأرض وفق مسار دائري على ارتفاع $h = 7 \,.\, 10^5$ m عن سطحها ، دور حركته $T = 5964$ s .



1- حدد المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة هذا القمر الاصطناعي . عرفه و ما هي الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ؟

2- أثبت أن قيمة الجاذبية على ارتفاع h من سطح الأرض يعبر عنها بالعلاقة :

$$g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$$

3- أثبت أنه يعبر أيضا عن الجاذبية g على ارتفاع h من سطح الأرض بدلالة الجاذبية g_0 على سطح الأرض بالعلاقة :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

4- أعد رسم (الشكل) و مثل عليه شعاع القوة الجاذبة المركزية $\vec{F}$ المطبقة من طرف الأرض على القمر الاصطناعي (S) .

5- عبر عن شعاع القوة $\vec{F}$ بدلالة G ، M ، m ، r ، $\vec{u}$ (شعاع الوحدة) .

7- باهمال تأثير القوى الأخرى على القمر الاصطناعي أمام القوة $\vec{F}$ و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

أ- أوجد عبارة تسارع القمر الاصطناعي في الموضع A بدلالة G ، M ، r ثم استنتج طبيعة حركة القمر الاصطناعي حول الأرض .

ب- أحسب قيمة الجاذبية الأرضية g عند النقطة A من مدار القمر الاصطناعي (S) .

جـ- أوجد عبارة سرعة القمر الاصطناعي و دوره T بدلالة M ، G ، R ، h .

د- أحسب كتلة الأرض M .

<u>يعطى :</u>

- نصف قطر الأرض : $R = 6380$ km .
- ثابت الجذب العام : $G = 6,67 \,.\, 10^{-11}$ SI .
- الجاذبية على سطح الأرض $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$.

<u>الأجوبة :</u>

1- المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع المركزي الأرضي (الجيومركزي) .

<u>تعريفه :</u>

هو مرجع منطبق على مركز الأرض ، معلمه منطبق يتكون من ثلاث محاور تتجه نحو ثلاث نجوم جد بعيدة ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .

- يسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في هذا المرجع ، بعدما يفترض أنه غاليلي .

<u>2- إثبات</u> $g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$:

- يخضع القمر الاصطناعي إلى قوة الجذب العام $\vec{F}$ كما ذكرنا سابقا ، هذه القوة تمثل أيضا قوة الثقل $\vec{P}$ ، أي :

$P = F$

و حيث أن : $P = mg$ ، $F = G\frac{mM}{r^2}$ ، يكون :

$$m\,g = G\frac{m.M}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow g = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

و هي عبارة الجاذبية على الارتفاع h من سطح الأرض .

3- إثبات $g = g_0\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$:

لدينا سابقا :

$$g = \frac{G.M}{(R+h)^2}$$

حيث h هو الارتفاع عن سطح الأرض ، و على سطح الأرض ، أين $h = 0$ ، يمكن كتابة :

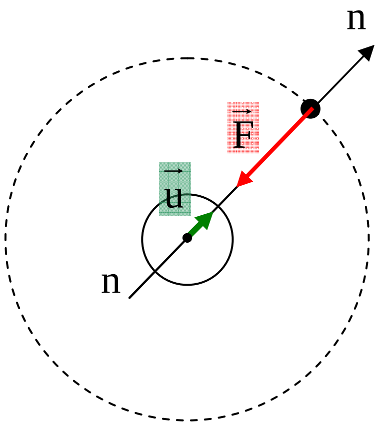
$$g_0 = \frac{G.M}{R^2}$$

حيث g_0 هي قيمة الجاذبية على سطح الأرض .

- بقسمة عبارة g على g_0 طرف إلى طرف نجد :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\dfrac{G.M}{(R+h)^2}}{\dfrac{G.M}{R^2}} = \frac{G.M}{(R+h)^2}\cdot\frac{R^2}{G.M} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

4- تمثيل شعاع القوة الجاذبة المركزية $\vec{F}$ المطبقة من طرف الأرض على القمر الاصطناعي (S) :



.

5- التعبير عن شعاع القوة $\vec{F}_{T/S}$ بدلالة G ، M ، m ، R ، h :

$$\vec{F} = -\frac{G.m.M}{(R+h)^2}\vec{n}$$

شعاع القوة $\vec{F}$ معاكس لشعاع الوحدة و هو سبب وجود الإشارة (-) .

6- أ- عبارة $\vec{a}$:

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجملة (قمر اصطناعي) في المرجع المذكور سابقا باعتباره غاليليا :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور الناظمي :

$$-\frac{G.m.M}{(R+h)^2} = ma \rightarrow a = -\frac{GM}{(R+h)^2}$$

- طبيعة الحركة :

G ، M ، R ، h ثوابت و منه a ثابت و كون أن المسار مركز عطالة القمر الإصطناعي دائري ، فحركته إذن دائرية منتظمة .

ب- قيمة الجاذبية g في نقطة من مدار القمر الإصطناعي :

لدينا سابقا الجاذبية g بدلالة الجاذبية g_0 على سطح الأرض .

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = 9.8.\frac{(6380.10^3)^2}{(6380 \ . \ 10^3 + 7 \ .10^6)^2} = 7.96 \, m/s^2$$

جـ- عبارة v ، T بدلالة M ، G ، R ، h :

اعتمادا على ما سبق

$$a = a_n = \frac{G.M}{(R+h)^2} \qquad (a_t = 0)$$

و حيث أن $a_n = \frac{v^2}{(R+h)}$ يكون :

$$\frac{v^2}{(R+h)} = \frac{G.M}{(R+h)^2} \rightarrow v^2 = \frac{G.M}{(R+h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{(R+h)}}$$

و حيث أن : $T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$ يصبح :

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{G.M}{(R+h)}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^2}{\frac{G.M}{(R+h)}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{G.M}$$

د- قيمة M :

لدينا سابقا :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{G.M_T} \rightarrow M = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{G.T^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2(6380.10^3 + 7.10^5)^3}{6,67.10^{-11}.(5964)^2} = 5,90.10^{24} \, kg$$

التمرين (19) : (بكالوريا 2014 – علوم تجريبية) (التمرين : 032 في بنك التمارين على الموقع) (**)

في مرجع جيومركزي نعتبر حركة الأقمار الاصطناعية دائرية حول مركز الأرض التي نفرض أنها كرة متجانسة كتلتها M_T و نصف قطرها R .

نقبل أن القمر الإصطناعي في مداره يخضع لقوة جذب الأرض $\vec{F}_{T/s}$ فقط .

1- أ- عرف المرجع الجيومركزي .

ب- اكتب العبارة الشعاعية للقوة $\vec{F}_{T/s}$ بدلالة G (ثابت الجذب العام) ، M_T ، R ، m_S (كتلة القمر الاصطناعي) و h ارتفاعه عن سطح الأرض .
جـ- استنتج عبارة $\vec{a}$ شعاع تساع حركة القمر الاصطناعي ، ما طبيعة الحركة .
2- الجدول التالي يعطي بعض خصائص حركة قمرين اصطناعيين حول الأرض .

القمر الاصطناعي	Alsat 1	Astra
$T(s) \;.\; 10^3$	5.964	86.160
$h(m) \;.\; 10^6$	0.70	35.65

أ- أحد القمرين الاصطناعيين جيو مستقر ، عينه مع التعليل .
ب- احسب تسارع الجاذبية الأرضية (g) عند نقطة من مدار القمر الاصطناعي Alsat1 . ماذا تستنتج ؟
جـ- بين اعتمادا على معطيات الجدول أن القانون الثالث لكبلر محقق .
د- استنتج قيمة تقريبية للكتلة M_T .
المعطيات : $G = 6.67 \,.\, 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ ، $R = 6380\ km$ ، $1\ jour = 23h\ \ 56min$
تسارع الجاذبية على سطح الأرض : $g_0 = 9.8\ m.s^{2-}$

الأجوبة :

1- أ- تعريف المرجع الجيومركزي :
هو مرجع منطبق على مركز الأرض و محاور معلمه متجهة نحو ثلاث نجوم جد بعيدة تكون ثابتة بالنسبة لمركز الأرض .

ب- العبارة الشعاعية لقوة الجذب العام $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{G.m.M_T}{(R+h)^2}\vec{n}$$

جـ- عبارة $\vec{a}$:
بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجملة (قمر اصطناعي) في المرجع المذكور سابقا باعتباره غاليليا :

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$$

$$\frac{G.m.M_T}{(R+h)^2}\vec{n} = m\,\vec{a} \;\rightarrow\; \vec{a} = \frac{GM_T}{(R+h)^2}\vec{n}$$

- طبيعة الحركة :
من العبارة الشعاعية السابقة نكتب :

$$a = \frac{GM_T}{(R+h)^2}$$

G ، M_T ، R ، h ثوابت و منه a ثابت و كون أن المسار مركز عطالة القمر الإصطناعي دائري ، فحركته إذن دائرية منتظمة .

3- أ- تعيين القمر الاصطناعي الجيومستقر :
- من خصائص القمر الإصطناعي جيو مستقر ، أن دور حركته مساوي لدور حركة الأرض .
- لدينا من الجدول :

- $T(alsat\ 1) = 5,964 \,.\, 10^3\ s = 1,66\ h$
- $T(Astra) = 86.160 \,.\, 10^3\ s = 23h\ ,\ 56\ s$

نلاحظ أن دور القمر الإصطناعي Astra مساوي لدور حركة الأرض ، إذن القمر الاصطناعي Astra جيو مستقر .

ب- قيمة الجاذبية g في نقطة من مدار القمر الإصطناعي :
نكتب أولا عبارة الجاذبية g بدلالة الجاذبية g_0 على سطح الأرض .
- لدينا من جهة :

$$P = m.g$$

و من جهة أخرى حسب قانون الجذب العام :

$$P = F = \frac{G.m.M_T}{(R+h)^2}$$

و منه :

$$m.g = \frac{G.m.M_T}{(R+h)^2} \quad \rightarrow \quad g = \frac{G.M_T}{(R+h)^2}$$

و على سطح الأرض أين $h = 0$ يكون :

$$g_0 = \frac{G.M_T}{R^2}$$

بقسمة g على g_0 نجد :

$$\frac{g}{g_0} = \frac{\dfrac{G.M_T}{(R+h)^2}}{\dfrac{G.M_T}{R^2}} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad \rightarrow \quad g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$g = 9.8.\frac{(6380.10^3)^2}{(6380 \ . \ 10^3 + 0.7 \ .10^6)^2} = 7.96 \ m/s^2$$

- الاستنتاج :
نلاحظ أن $g < g_0$ ، نستنتج أن قيمة الجاذبية g تتناقص بتزايد الارتفاع .
جـ- إثبات أن قانون كبلر محقق :

قانون كبلر ينص على أن النسبة $\frac{T^2}{(R+h)^3}$ ثابت في كل الأقمار الاصطناعية :

- بالنسبة للقمر الاصطناعي Alsat1 :

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{(5,964 \ . \ 10^3)^2}{(6380 \ . \ 10^3 \ + \ 0,70 \ .10^6)^3} = 10^{-13}$$

- بالنسبة للقمر الاصطناعي Astra :

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{(86.160 \ . \ 10^3)^2}{(6380 \ . \ 10^3 \ + \ 35.65 \ .10^6)^3} = 10^{-13}$$

نلاحظ أن النسبة $\frac{T^2}{(R+h)^3}$ ثابتة بالنسبة للقمرين الاصطناعيين ، إذن قانون كبلر الثالث محقق .

د- قيمة M_T :
اعتمادا على ما سبق

$$a = a_n = \frac{G.M_T}{(R+h)^2} \qquad (a_t = 0)$$

و حيث أن $a_n = \frac{v^2}{(R+h)}$ يكون :

$$\frac{v^2}{(R+h)} = \frac{G.M_T}{(R+h)^2} \rightarrow v^2 = \frac{G.M_T}{(R+h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}}$$

لدينا :

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{G.M_T}{(R+h)}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^2}{\frac{G.M_T}{(R+h)}}$$

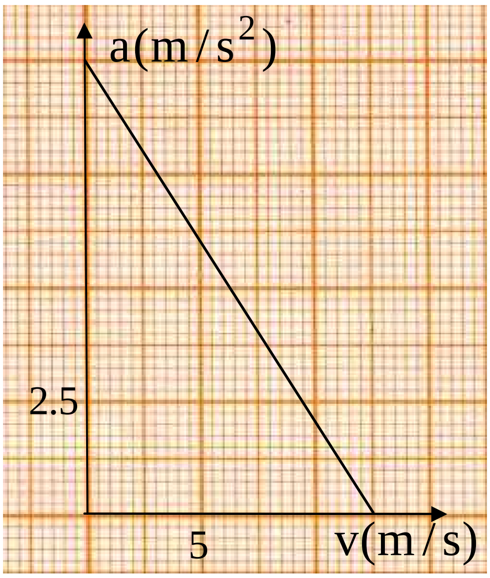
$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{G.M_T} \rightarrow \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$$

وجدنا سابقا $\frac{T^2}{(R+h)^3} = 10^{-13}$ و منه :

$$10^{-13} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} \rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{G.10^{-13}} \rightarrow M_T = \frac{4\pi^2}{6{,}67.10^{-11}.10^{-13}} = 5.91\ .\ 10^{24}\ kg$$

التمرين (20) : (التمرين : 021 في بنك التمارين على الموقع) (*)

يسقط مظلي كتلته مع تجهيزه $m = 100\ kg$ سقوطا شاقوليا بدءا من نقطة O بالنسبة لمعلم أرضي دون سرعة ابتدائية . يخضع أثناء سقوطه إلى قوة مقاومة الهواء عبارتها من الشكل $f = k\,v$ (تهمل دافعة أرخميدس) .



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أكتب المعادلة التفاضلية لحركة المظلي بدلالة السرعة $v(t)$.

2- عبر عن السرعة الحدية v_ℓ بدلالة g ، m ، k .

3- بين أن المعادلة تقبل الحل التالي : $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

4- أكتب العبارة اللحظية لتسارع المظلي .

5- أرسم في نفس المعلم و بشكل كيفي المنحنيين $v = f_1(t)$ ، $a = f_2(t)$.

6- تتميز الحركة السابقة بقيمة المقدار $\frac{k}{m}$ ، حدد وحدة هذا المقدار .

7- يمثل البيان الشكل التالي تغيرات (a) تسارع مركز عطالة المظلي بدلالة السرعة (v)

أ- استنتج من البيان قيمتي g و k .

ب- أحسب السرعة الحدية v_ℓ للمظلي .

الأجوبة :

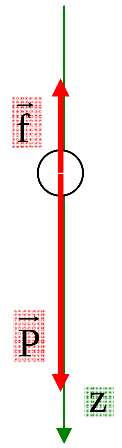
1- المعادلة التفاضلية بدلالة v(t) :

- الجملة المدروسة : (مظلي مع تجهيزه)

- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .

- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك $\vec{f}$.

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma \vec{F} = m\,\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

بتحليل العلاقة الشعاعية وفق المحور (oz) :

$$P - f = m\,a$$

$$m.g - kv = m\frac{dv}{dt} \rightarrow m\frac{dv}{dt} + k\,v = m\,g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

2- عبارة v_ℓ بدلالة g ، m ، k :

عند النظام الدائم يكون : $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 + \frac{k}{m}v_\ell = g \rightarrow v_\ell = \frac{m.g}{k}$$

3- إثبات حل المعادلة التفاضلية :

- $v = v_\ell\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}})$

- $\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{k}(0 - (-\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}})) = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$g\,e^{-\frac{k}{m}} + \frac{k}{m}.\frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g$$

$$g\,e^{-\frac{k}{m}} + g\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = g \rightarrow g\,e^{-\frac{k}{m}} + g - g\,e^{-\frac{k}{m}t} = g \rightarrow g = g$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

4- عبارة التسارع اللحظية :

لدينا :

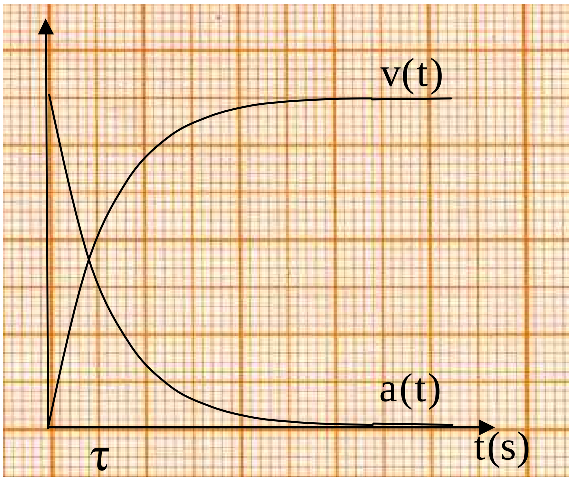
$$a = \frac{dv}{dt}$$

و مما سبق وجدنا :

$$\frac{dv}{dt} = g\,e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow a = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$$

5- المنحنيين $v(t)$ ، $a(t)$:

لدينا مما سبق :



- $v = v_\ell\,(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$
- $a = g\,e^{-\frac{k}{m}t}$

و من هاتين العلاقتين نجد :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow a = g$$
$$t = \infty \rightarrow v = v_\ell \;,\; a = 0$$

إذن المنحنيين يكونان كما يلي :

6- وحدة المقدار $\frac{k}{m}$:

- عند بلوغ السرعة الحدية يكون : $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد :

$$0 = -\frac{k}{m} v_\ell + g$$

$$\frac{k}{m} v_\ell = g \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{v_\ell} \qquad \rightarrow \left[\frac{k}{m}\right] = \frac{[g]}{[v_\ell]} = \frac{\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} = \frac{m}{s^2} \cdot \frac{s}{m} = s^{-1}$$

6-أ- من البيان قيمتي g و k :

- المنحنى $a = f(t)$ هو عن مستقيم معادلته من الشكل :

$$a = \alpha\, v + \beta \;\; .... (1)$$

حيث α ميل هذا المنحنى (المستقيم) ، β نقطة تقاطع المنحنى (المستقيم) مع محور التراتيب .

- نظريا و من المعادلة التفاضلية السابقة :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \rightarrow a + \frac{k}{m} v = g$$

$$a = -\frac{k}{m} v + g \;\; .... (2)$$

- بمطابقة العلاقة البيانية (1) و العلاقة النظرية (2) نجد :

- $-\frac{k}{m} = \alpha \rightarrow k = -m\,\alpha$
- $g = \beta$

من البيان :

- $\alpha = -\dfrac{4.2{,}5}{2{,}5.5} = -0{,}8 \rightarrow k = -(100)(-0{,}8) = -80\ kg/s$
- $\beta = 10 \rightarrow g = 10\ m/s^2$

ب- السرعة الحدية v_ℓ :

- عند بلوغ السرعة الحدية يكون : $v = v_\ell$ ، $\dfrac{dv}{dt} = 0$ بالتعويض في المعادلة (2) نجد :

$$0 = \alpha v_\ell + \gamma \rightarrow v_\ell = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

من البيان :

$$\alpha = \frac{2-10}{10-0} = -0.8 \rightarrow v_\ell = -\frac{10}{(-0.8)} = 1.25\ m/s$$

التمرين (21) : (بكالوريا 2013 - علوم تجريبية) (التمرين : 033 في بنك التمارين على الموقع) (**)

تسقط حبة برد كروية الشكل ، قطرها $D = 3\ cm$ ، كتلتها $m = 13\ g$ ، دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ من النقطة O ترتفع بـ $1500\ m$ عن سطح الأرض نعتبرها كمبدأ للمحور الشاقولي (Oz) .

أولا : نفرض حبة البرد تسقط سقوطا حرا .

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، جد المعادلتين الزمنيتين لسرعة و موضع G مركز عطالتيهما .

2- احسب قيمة السرعة لحظة وصولها إلى سطح الأرض .

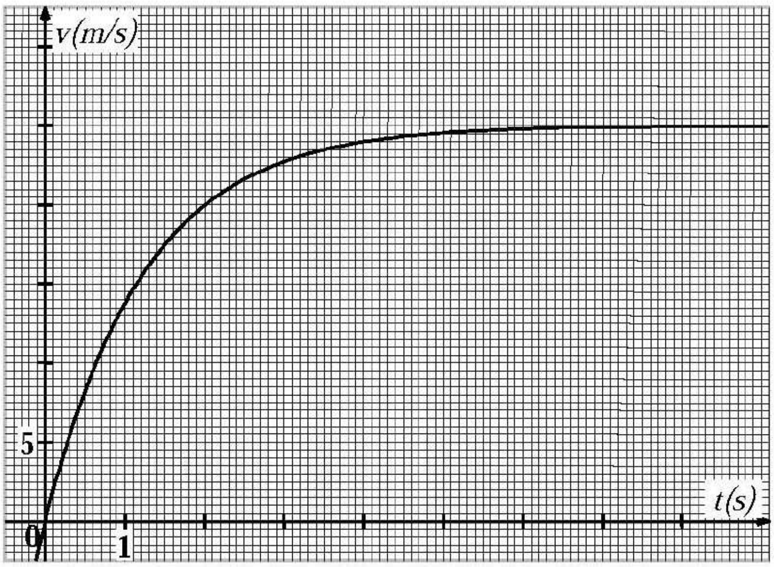
ثانيا : في الواقع تخضع حبة البرد بالإضافة لقوة ثقلها $\vec{P}$ إلى دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ و قوة احتكاك $\vec{f}$ المتناسبة طردا مع مربع السرعة حيث $f = kv^2$.

1- بالتحليل البعدي حدد وحدة المعامل k في النظام الدولي للوحدات .

2- اكتب عبارة قوة دافعة أرخميدس ، ثم احسب شدتها و قارنها مع شدة قوة الثقل . ماذا تستنتج ؟

3- بإهمال قوة دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$:

أ- جد المعادلة التفاضلية للحركة ، ثم بين أنه يمكن كتابتها على الشكل : $\dfrac{dv}{dt} = A - Bv^2$.



ب- استنتج العبارة الحرفية للسرعة الحدية v_ℓ التي تبلغها حبة البرد .
جـ- جد بيانيا قيمة v_ℓ السرعة الحدية ، ثم استنتج قيمة k .
د- قارن بين السرعتين التي تم حسابهما في السؤالين (أولا-2) و (ثانيا-3-جـ) . ماذا تستنتج ؟

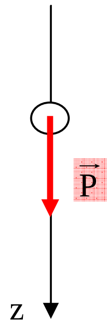
المعطيات : حجم الكرة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، الكتلة الحجمية للهواء : $\rho = 1.3\ kg.m^{-3}$ ، $g = 9.8\ m.s^{-2}$.

الأجوبة :

أولا :

1- المعادلتين الزمنيتين للسرعة و الموضع :

- الجملة المدروسة حبة برد .
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$.



- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور Oz :

$$P = ma$$
$$m.g = ma \rightarrow a = g$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$v = at + C$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow C = 0$$

و منه :

$$v = g\,t$$

نكامل الطرفين بالنسبة للزمن :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + C'$$

من الشروط الابتدائية :

$$t = 0 \rightarrow z = 0 \rightarrow C' = 0$$

و منه :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + C'$$

2- قيمة السرعة لحظة وصول حبة البرد إلى الأرض :

إذا اعتبرنا الموضع M هو موضع سقوط حبة البرد على الأرض عندها يكون : $z_M = 1500\ m$ ، بالتعويض في المعادلة $z(t)$:

$$z_M = \frac{1}{2} g.t_M{}^2 \rightarrow t_M = \sqrt{\frac{2.z_M}{g}} \rightarrow t_M = \sqrt{\frac{2\ .\ 1500}{9.8}} = 17{,}50\,s$$

بالتعويض في المعادلة $v(t)$:

$$v_M = g.t_M = 9{,}8\ .\ 17.50 = 171.5\ m/s$$

ثانيا :

1- وحدة k بالتحليل البعدي :

$$f = k\,v^2 \rightarrow k = \frac{f}{v^2} \rightarrow [k] = \frac{[F]}{[v]^2}$$

حسب قانون نيوتن الثاني :

$$F = m.a \rightarrow [F] = [m]\,[a]$$

و منه :

$$[k] = \frac{[m][a]}{[v]^2} = \frac{kg\,.\,\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} \rightarrow [k] = kg/s$$

2- عبارة قوة دافعة أرخميدس :

$$\Pi = \rho V g = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3)g = \frac{4}{3}\rho\pi(\frac{D}{2})^3.g = \frac{4}{3}\rho\pi\frac{D^3}{8}.g \rightarrow \Pi = \frac{\rho\pi D^3 g}{6}$$

$$\Pi = \frac{1{,}3\ .\ 3{,}14\ (0.03)^3\ .9{,}8}{6} = 1{,}8\ .\ 10^{-4}\ N$$

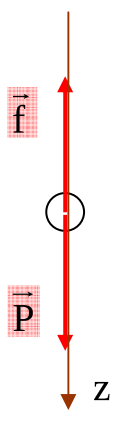
- مقارنة دافعة أرخميدس بقوة الثقل :

- $P = m.g = 13\ .\ 10^{-3}\ .\ 9.8 = 0.1274\ N$
- $\frac{P}{\Pi} = \frac{0.1274}{1.8\ .\ 10^{-4}} = 708 \rightarrow P = 708\ \Pi$

نلاحظ أن $P >> \Pi$ ، نستنتج أنه يمكن إهمال دافعة أرخميدس أمام قوة الثقل .

3- أ- المعادلة التفاضلية :

- الجملة المدروسة : كرة برد
- مرجع الدراسة : سطحي أرضي نعتبره غاليلي .
- القوى الخارجية المؤثرة : الثقل $\vec{P}$ ، قوى الاحتكاك $\vec{f}$.
- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :



$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$$
$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور (oz) :

$$P - f = m\,a$$
$$m\,g - kv^2 = ma$$

$$m\,g - k\,v^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = m.g - k\,v^2 \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

هي من الشكل : $\frac{dv}{dt} = A - B\,v^2$ حيث : $A = g$ ، $B = \frac{k}{m}$.

ب- عبارة السرعة الحدية :

في النظام الدائم أين يكون $v = v_\ell$ ، $\frac{dv}{dt} = 0$ يمكن كتابة اعتمادا على المعادلة التفاضلية :

$$0 = g - \frac{k}{m}v_\ell^2 \rightarrow g = \frac{k}{m}v_\ell^2 \rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{m.g}{k}}$$

جـ- قيمة v_ℓ بيانيا :

من البيان و عند النظام الدائم يكون :

$$v_\ell = 5\,.\,5 = 25\ m/s$$

المقارنة : $v_\ell < v_M$ نستنتج أن تأثير الهواء يخفف من سرعة بلوغ الأرض .

- قيمة k :

مما سبق :

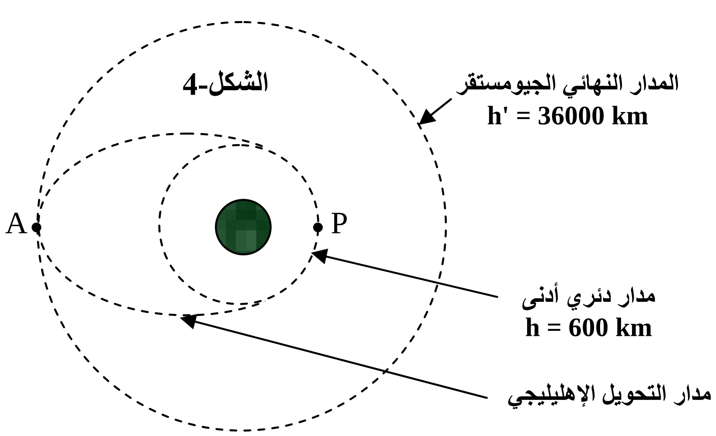
$$v_\ell^2 = \frac{m.g}{k} \rightarrow k = \frac{m.g}{v_\ell^2}$$

$$k = \frac{13.\,10^{-13}.9,8}{(25)^2} = 2,04\ .\ 10^{-4}\ kg/m$$

التمرين (22) : (التمرين : 048 في بنك التمارين على الموقع) (**)

وضع قمر اصطناعي (S) كتلته $m = 2.0\ .\ 10^3\ kg$ في مداره جيو المستقر يتم على مرحلتين (الشكل-4) :

المرحلة الأولى :



يوضع القمر الاصطناعي في مدار دائري أدنى ارتفاعه $h = 600\ km$ حيث يخضع لقوة جذب الأرض فقط و يدور حولها بسرعة V_s .

1- ما هو المرجع المناسب لدراسة حركة القمر (S) ؟

2- مثل على شكل مناسب الأرض و القمر الاصطناعي (S) و مثل عليه القوة التي تؤثر بها الأرض على القمر الاصطناعي .

3- بالاستعانة بقانون الجذب العام و القانون الثاني لنيوتن ، أوجد عبارة تسارع القمر الاصطناعي (S) بدلالة كل من كتلة الأرض M_T ، ثابت الجذب العام G ، نصف قطر الأرض R_T ، ارتفاع القمر الاصطناعي h عن سطح الأرض .

4- أوجد عبارة السرعة المدارية v_{orb} للقمر الاصطناعي ، ثم تحقق بالحساب أن قيمتها على المدار الدائري الأدنى هي $v_{orb} = 7.6\ km/s$.

5- ماذا يمثل الزمن الذي يستغرقه القمر الاصطناعي لانجاز دورة واحدة حول الأرض ؟

المرحلة الثانية :

عندما يصبح القمر الاصطناعي في مداره الدائري الأدنى يتم نقله إلى المدار النهائي الجيومستقر $h' = 36000\ km$ بالعبور بصفة نهائية على مدار اهليليجي (الشكل-1) حيث النقطة P تنتمي للمدار الدائري الأدنى و النقطة A تنتمي للمدار النهائي الجيومستقر .

1- بين أن سرعة القمر الاصطناعي على المدار الاهليليجي غير ثابتة .

2- عين الموضع الذي تكون فيه السرعة أصغرية ثم أحسب قيمتها عندئذ .

3- عبر عن البعد AP بدلالة R_T ، h و h' و بين أن $AP = 4.9 . 10^7\ m$.

4- أذكر نص القانون الثالث لكبلر ثم استعمله لحساب دور القمر على مدار التحويل .

المعطيات : - كتلة القمر الاصطناعي : $m = 2.0 . 10^3\ kg$.

- نصف قطر الأرض : $R_T = 6400\ km$.

- كتلة الأرض : $M_T = 6.0 . 10^{24}\ kg$.

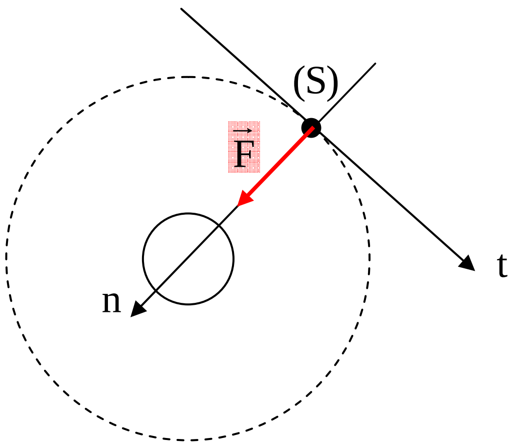
- ثابت الجذب العام : $G = 6.67 . 10^{-11}\ s^{-1}$.

الأجوبة :

المرحلة الأولى :

1- المرجع المناسب لدراسة حركة القمر الاصطناعي هو المرجع الجيومركزي .

2- الرسم :



3- عبارة التسارع بدلالة M_T ، G ، R_T ، h :

- حسب قانون الجذب العام :

$$\vec{F} = \frac{G.m_S.M_T}{(R_T + h)^2} \quad .... (1)$$

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة قمر اصطناعي (S) في مرجع غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{F} = m.\vec{a}_G$$

بالإسقاط على المحور الناظمي :

$$F_{T/S} = m.a \quad .... (2)$$

من (1) ، (2) :

$$\frac{G.m.M_T}{(R_T + h)^2} = m.a \quad \rightarrow \quad a = \frac{G.M_T}{(R_T + h)^2}$$

4- السرعة المدارية v_{orb} :

- حركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة في هذه الحالة التسارع يكون ناظمي أي : $a_n = a = \frac{G.M_T}{(R_T + h)^2}$

- من جهة أخرى لدينا $a_n = \frac{{v_{orb}}^2}{(R_T + h)}$ ، و منه :

$$\frac{v_{orb}^{\ 2}}{(R_T+h)} = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2} \rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G.M_T}{(R_T+h)}} \rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}\ .\ 6.10^{24}}{(6400+6\ .\ 10^2)10^3}} = 7.6\ m/s$$

5- يمثل الزمن الذي يستغرقه القمر الإصطناعي لانجاز دورة واحدة **الدور T** .

المرحلة الثانية :

1- إثبات أن سرعة القمر الاصطناعي على المدار الإهليليجي غير ثابتة :

حسب قانون كبلر الثاني القمر الاصطناعي يمسح مساحات متساوية خلال أزمنة متساوية ، و كون البعد المتوسط بين مركزي القمر الاصطناعي ليس ثابتا (مسار اهليليجي) تكون حتما المسافات المقطوعة على مدار القمر الاصطناعي خلال أزمنة متساوية ليست ثابتة و بالتالي سرعة القمر الاصطناعي على المسار الاهليليجي ليست ثابتة .

2- الموضع الذي تكون فيه السرعة أصغرية :

من عبارة السرعة السابقة : $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h_A}}$ ، نلاحظ أن السرعة تكون في أصغر قيمة لها عندما يكون الإرتفاع في أكبر قيمة له ، و ارتفاع النقطة A بالنسبة لسطح الأرض الأكبر في المسار الاهليليجي هو الموضع الذي تكون فيه السرعة أصغرية .

- قيمة السرعة :

بالاعتماد على عبارة السرعة السابقة :

$$v_A = \sqrt{\frac{6,67\ .\ 10^{-11}\ .\ 6.10^{24}}{(6400+36000).10^3}} \approx 3000\ m/s$$

3- البعد AP بدلالة R_T ، h ، h' :

اعتمادا على الشكل :

$$AP = R_T + h + R_T + h' \rightarrow AP = 2R_T + h + h'$$

$$AP = (\ (2\ .\ 6400) + 600 + 36000)\ .\ 10^3 = 4.9\ .\ 10^7\ m$$

4- قانون كبلر الثالث :

مربع الدور المداري للكوكب يتناسب طرديا مع مكعب البعد المتوسط بين مركزي الشمس و الكوكب .

- قيمة الدور على مدار التحويل :

وجدنا سابقا :

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$$

و حيث أن : $T = \frac{2.\pi.r}{v}$ يكون :

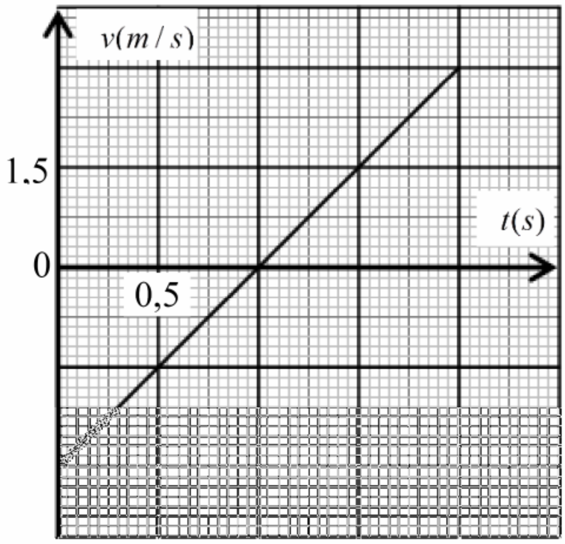
$$T = \frac{2.\pi.r}{\sqrt{\frac{G.M_T}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4.\pi^2.r^2}{\frac{G.M_T}{r}} \rightarrow T^2 = \frac{4.\pi^2.r^3}{G.M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4.\pi^2.r^3}{G.M_T}}$$

- $r = \frac{AP}{2} = \frac{4,9\ .\ 10^7}{2} = 2,45\ .\ 10^7\ m$
- $T = \sqrt{\frac{4.\ \pi^2.(2,45\ .\ 10^7)^3}{6.67\ .\ 10^{-11}\ .\ 6\ .\ 10^{24}}} = 3.81\ .\ 10^4 \approx 11\,h$

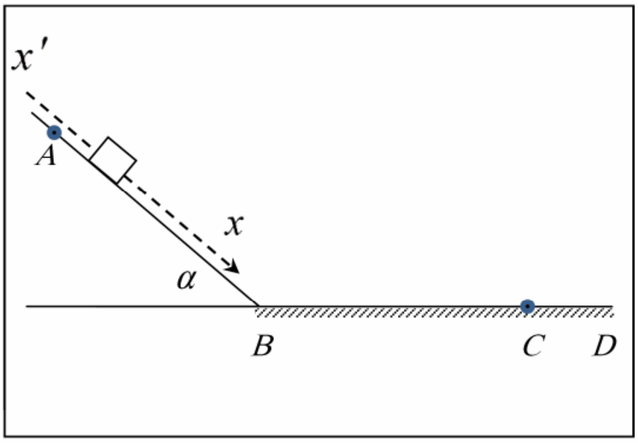
التمرين (23) : (بكالوريا 2016 – رياضيات (التمرين : 106 في بنك التمارين على الموقع) (**)

متحرك كتلته $m = 800\,g$ ، ندفعه من أسفل مستوي مائل أملس (عديم الاحتكاك)، يميل عن الأفق بزاوية α وبسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_B}$ يتحرك صعودا حتى النقطة A حيث تنعدم سرعته، ليعود تحت تأثير ثقله فيمر بالنقطة B مرة أخرى (الشكل−1).

يمثل **الشكل−2** مخطط سرعة مركز عطالة الجسم بدلالة الزمن $v = f(t)$. (تعطى $g = 10\,m/s^2$).



الشكل-2



الشكل−1

1) استنتج من البيان:
أ) السرعة الابتدائية v_B .
ب) مسافة الصعود BA.

2 .أ) اذكر نص القانون الثاني لنيوتن.
ب) باستخدام القانون الثاني لنيوتن أوجد عبارة التسارع أثناء مرحلة الصعود ثم استنتج طبيعة الحركة.
جـ) احسب زاوية الميل α.

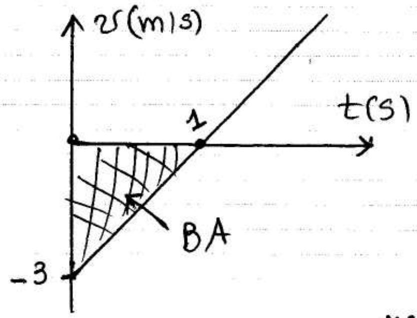
3) بيّن أن الجسم يعود إلى النقطة B بنفس السرعة التي دفع بها.

4) يلاقي الجسم أثناء رجوعه بعد مروره بالنقطة B مستوي أفقي خشن BD (وجود قوة احتكاك ثابتة) فتتباطأ حركته ليتوقف عند نقطة C تبعد عن B مسافة $1{,}8\,m$.
أ) مثّل القوى المؤثرة على الجسم خلال حركته على المقطع BD.
ب) باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم) بين الموضعين B و C ، احسب شدة قوة الاحتكاك.
جـ) احسب المدة الزمنية المستغرقة لقطع المسافة BC.

5) أعد رسم مخطط السرعة الموضح **بالشكل−2** ثم مثل عليه ما تبقى من منحنى سرعة الجسم للمقطع BC.

الأجوبة :

1- أ- السرعة الابتدائية :
من البيان : $v_B = -3\ m/s$
ب- مسافة الصعود BA :
مسافة الصعود هي المسافة المقطوعة بين لحظة القذف ($t=0$) ولحظة تغيير جهة الحركة والتي تنعدم فيها السرعة ($t=1s$) (من البيان)، وباستعمال طريقة المساحة تكون المسافة المقطوعة عند الصعود هي مساحة الحيز المحصور بين منحنى السرعة ومحور الأزمنة والمستقيمين العموديين على $t=0$، $t=1s$ ومنه :
(مساحة مثلث)

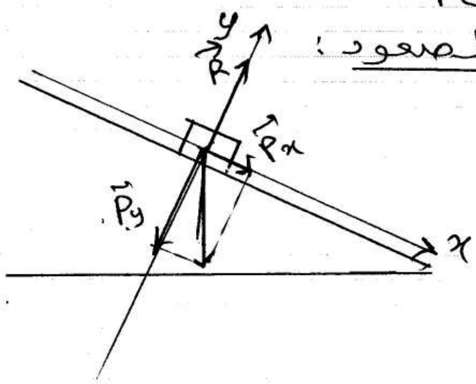


$$BA = \frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5\,m$$

2- أ- نص القانون الثاني لنيوتن :
في مرجع عطالي (غاليلي) المجموع الشعاعي للقوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة جملة ميكانيكية في لحظة t مساوي لجداء كتلة هذه الجملة في شعاع تسارع مركز عطالتها عند هذه اللحظة أي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

ب- عبارة التسارع أثناء حركة الصعود :



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ox :

$$P\sin\alpha = ma$$

$$\cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a \rightarrow a = g\sin\alpha$$

- طبيعة الحركة :
g، α ثوابت ومنه a ثابت وبما أن المسار مستقيم والجداء ($av < 0$) ($v<0$ ، $a>0$)، فإن الحركة مستقيمة متباطئة بانتظام.

جـ- زاوية الميل α:

لدينا سابقاً:

$$a = g\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{g}$$

من البيان:

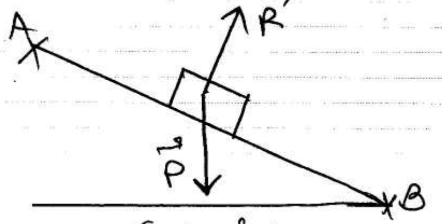
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3}{1} = 3\,m/s^2$$

إذن:

$$\sin\alpha = \frac{3}{10} = 0{,}3 \longrightarrow \alpha = 17{,}5°$$

3- إثبات أن الجسم يعود إلى النقطة B بنفس السرعة التي دفع بها:

يغير الجسم جهة حركته وتنعدم سرعته بعد قطعه المسافة $BA = 1{,}5\,m$ وعند رجوعه يبلغ النقطة B بعد قطعه نفس المسافة $AB = 1{,}5\,m$



- الجملة المدروسة: جسم

- القوى الخارجية: $\vec{P}$ ، $\vec{R}$ حيث:

$$W_{A-B}(\vec{P}) > 0 \quad , \quad W_{A-B}(\vec{R}) = 0$$

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B (نزول)

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_B$$

$$\cancel{E_{CA}}^{\,0} + W_{A-B}(\vec{P}) = E_{CB}$$

$$\cancel{m}\, g\, AB \sin\alpha = \frac{1}{2}\cancel{m}\, v_B^2$$

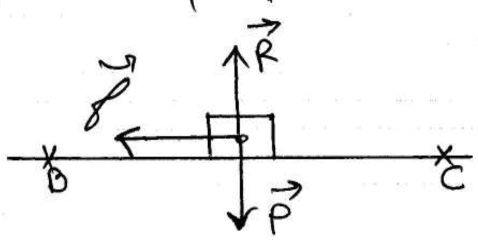
$$2g.AB.\sin\alpha = v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2.g.AB.\sin\alpha}$$

$$v_B = \sqrt{2.10 \times 1{,}5 \times 0{,}3} = 3\,m/s$$

إذن الجسم يعود بنفس السرعة إلى B (توجد طرق أخرى)

4- أ- القوى المؤثرة على الجسم خلال حركته على BD:



ب- شدة قوة الاحتكاك:

- الجملة المدروسة: جسم

- القوى الخارجية: $\vec{P}$ ، $\vec{R}$ ، $\vec{f}$ حيث:

- بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين B و D :

$$E_B + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_D$$

$$E_{cB} - |W_{B-C}(f)| = \cancel{E_{cC}}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - |-f \cdot BC| = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - f \cdot BC = 0$$

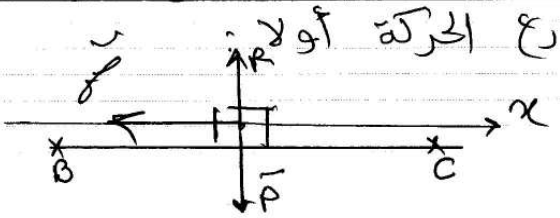
$$m v_B^2 - 2f \cdot BC = 0$$

$$m v_B^2 = 2f \cdot BC \rightarrow f = \frac{m v_B^2}{2 \cdot BC}$$

$$f = \frac{0{,}8\,(3)^2}{2 \times 1{,}8} = 2N$$

جـ- المدة الزمنية المستغرقة لقطع المسافة BC :

نحسب تسارع الحركة أولاً :



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (جسم) في مرجع سطحي أرضي نعتبره غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

بالاسقاط على المحور ox :

$$-f = ma \rightarrow a = -\frac{f}{m} = -\frac{2}{0{,}8} = -2{,}5\, m/s^2$$

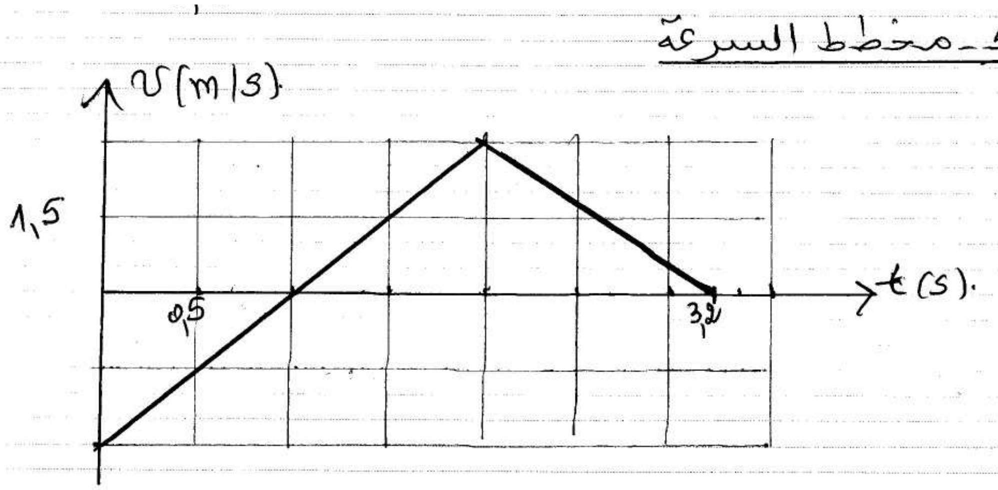
من عبارة التسارع $a = \frac{f}{m}$ حيث f ، m ثابتين تكون حركة الجسم بين B و C مستقيمة متغيرة بانتظام

وعليه نكتب :

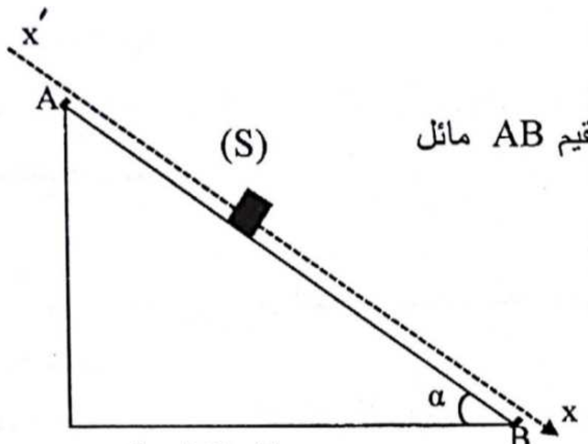
$$\cancel{v_C} - v_B = a\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{-v_B}{a}$$

$$\Delta t = \frac{-3}{-2{,}5} = 1{,}2\, s$$

5- مخطط السرعة



التمرين (24) : (بكالوريا 2016 – علوم تجريبية)(التمرين : 086 في بنك التمارين على الموقع) (**)



الشكل-6

نعتبر $g = 10\ m/s^2$.

يتحرك جسم (S) نعتبره نقطيا كتلته $m = 900g$ على مسار مستقيم AB مائل عن الأفق بزاوية $\alpha = 35°$ كما هو موضح بالشكل-6.

ينطلق الجسم من النقطة A دون سرعة ابتدائية.

باستعمال تجهيز مناسب ننجز التسجيل المتعاقب لمواضع الجسم أثناء حركته على المسار AB فنحصل على النتائج المدونة في الجدول الآتي:

الموضع	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
اللحظة t (s)	0.00	0.08	0.16	0.24	0.32	0.40	0.48	0.56	0.64
الفاصلة x(cm)	0.0	1,5	6,0	13,5	24,0	37,5	54,0	73,5	96,0

ينطبق الموضع G_0 على النقطة A و ينطبق الموضع G_8 على النقطة B ، والمدة التي تفصل بين تسجيلين متتاليين هي $\tau = 80ms$.

1 – أ – احسب السرعة اللحظية للجسم عند المواضع G_2، G_3، G_4، G_5، G_6.

ب – اوجد قيمة تسارعه عند المواضع G_3، G_4، G_5.

جـ – استنتج طبيعة حركته.

2 – باهمال قوى الاحتكاك المؤثرة على الجسم (S):

أ – مثل القوى المطبقة على الجسم (S).

ب– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم السطحي الأرضي الذي نعتبره غاليليا، أوجد عبارة التسارع (a) لمركز عطالة الجسم ثم أحسب قيمته.

جـ – قارن بين هذه القيمة النظرية للتسارع وقيمته التجريبية الموجودة سابقا، ماذا تستنتج ؟

3 – باعتبار قوى الاحتكاك تكافئ قوة وحيدة $\vec{f}$ ثابتة في الشدة ومعاكسة لجهة الحركة.

أ – احسب شدة القوة $\vec{f}$.

ب – باستخدام مبدأ إنحفاظ الطاقة أوجد قيمة سرعة الجسم عند النقطة B .

الأجوبة :

1- أ) السرعة اللحظية عند المواضع G_2 ، G_3 ، G_4 ، G_5 ، G_6 :

$$v_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i+1}}$$

وبالتالي :

$$v_2 = \frac{13,5-1,5}{0,24-0,08} = 75\ cm/s = 0,75\ m/s.$$

$$v_3 = \frac{24-6}{0,32-0,16} = 112,5\ cm/s = 1,125\ m/s.$$

$$v_4 = \frac{37,5-13,5}{0,4-0,24} = 150\ cm/s = 1,5\ m/s.$$

$$v_5 = \frac{54-24}{0,48-0,32} = 187,5\ cm/s = 1,875\ m/s.$$

$$v_6 = \frac{73,5-37,5}{0,5-0,4} = 225\ cm/s = 2,25\ m/s.$$

ب) التسارع :

$$a_i = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}.$$

وبالتالي :

$$a_3 = \frac{v_4-v_2}{t_4-t_2} = \frac{1,5-0,75}{0,32-0,16} = 4,7\ m/s^2.$$

$$a_4 = \frac{v_5-v_3}{t_5-t_3} = \frac{1,875-1,125}{37,5-16,5} = 4,7\ m/s^2.$$

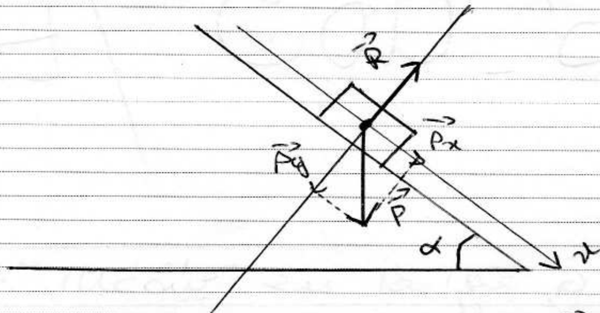
$$a_5 = \frac{v_6-v_4}{t_6-t_4} = \frac{2,25-1,5}{0,48-0,32} = 4,7\ m/s^2.$$

جـ) طبيعة الحركة :

نلاحظ : $a_3 = a_4 = a_5$

هذا يعني أن قيمة التسارع ثابتة أثناء الحركة. وكون أن المسار مستقيم، نستنتج أن حركة G على المستوي المائل : مستقيمة متغيرة بانتظام.

أ)- تمثيل القوى المطبقة :



ب)- عبارة التسارع :

• بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_0$$

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_0 .$$

بالإسقاط على ox :

$$P \sin\alpha = m a_0$$

$$m.g.\sin\alpha = m a_0$$

$$a_0 = g.\sin\alpha .$$

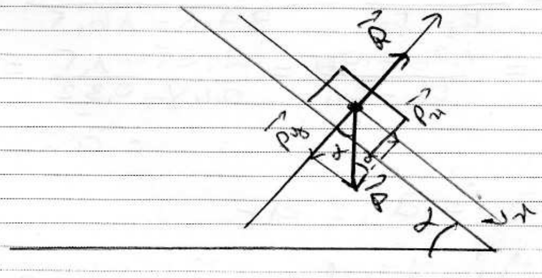
$$a_0 = 10.\sin(35) = 5,74\ m/s^2 .$$

ج)- المقارنة بين القيمة التجريبية للتسارع و القيمة النظرية :

نلاحظ أن $a_0 \neq a$.

نستنتج أنه يوجد احتكاك .

3)- أ)- شدة قوة الاحتكاك :



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} .$$

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a} .$$

بالإسقاط على ox =

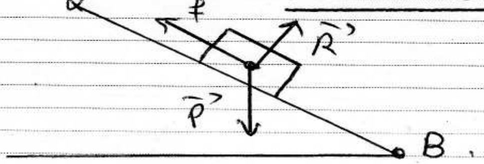
$$P\sin\alpha - f = ma.$$

$$m.g\sin\alpha - ma = f.$$

$$f = m(g\sin\alpha - a)$$

$$= 0{,}9(10\sin(35) - 4{,}7) = 93\,N.$$

ب) قيمة السرعة عند B =



• بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة بين A و B على الجملة جسم (S) في مرجع غاليلي:

$$E_A + E_{\text{مكتسبة}} - E_{\text{مفقودة}} = E_B.$$

$$E_{cA} + \underset{A-B}{W}(\vec{P}) - |W(\vec{f})| = E_{cB}.$$

$$0 + mgAB\sin\alpha - |-f.AB| = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

$$mgAB\sin\alpha - f.AB = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2(mg.AB.\sin\alpha - f.AB)}{m}}.$$

من الجدول =

$$AB = x_8 - x_0 = 96\,cm = 0{,}96\,m.$$

ومنه =

$$v_B = \sqrt{\frac{2(0{,}9.10.0{,}96\sin(35) - (0{,}93.0{,}96))}{0{,}9}}$$

$$v_B = 3\,m/s.$$

** الأستاذ : فرقاني فارس **
ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم
الخروب - قسنطينة
Fares_Fergani@yahoo.Fr