تمرين جيد في الإحتمالات مع الحل

نــص التمرين :

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 1 و ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ، 2 . الكرات كلها متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق ثلاث كرات الواحدة تلوى الأخرى دون إعادة الكرية المسحوبة في كل مرة إلى الصندوق .

1) أحسب إحتمال الأحداث التالية :

A : " الكريات المسحوبة من نفس اللون " ، B : " ظهور الرقم 1 مرة واحدة فقط في السحبات الثلاث "

C : " ظهور الرقم 1 مرتين فقط في السحبات الثلاث " ، D : " الكرة المسحوبة ثانيا حمراء " .

2) بين أن : $P(B\cap D)=\dfrac{17}{84}$.

3) نعتبر المتغيرالعشوائي X الذي يرفق بالسحبات الثلاث عدد الكرات السوداء المتبقية في الصندوق .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X و أكتب قانون إحتماله .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

4) ننزع الآن من الصندوق الكرتان السوداوتان فتبقى فيه ثلاث كرات بيضاء و ثلاث كرات حمراء .

نسحب من الصندوق كرة واحدة n مرة على التوالي مع الإرجاع في كل مرة .

أ) عبر بدلالة n عن إحتمال أن تكون كل الكرات المسحوبة من نفس اللون .

ب) أحسب إحتمال أن تكون في كل السحبات على الأقل كرة واحدة حمراء .

حل مقترح للتمرين :

عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق هي : $\boxed{A_8^3=336}$.

1) حساب إحتمال الأحداث التالية :

*) إحتمال سحب كرات من نفس اللون أي : $P(A)=\dfrac{A_3^3+A_3^3}{336}=\dfrac{6+6}{336}=\dfrac{12}{336}$ و منه : $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{28}}$.

*) إحتمال سحب كرة واحدة تحمل الرقم 1 : $P(B)=\dfrac{\left(A_3^1\times A_5^2\right)\times 3}{336}=\dfrac{60\times 3}{336}=\dfrac{180}{336}$ و منه : $\boxed{P(B)=\dfrac{15}{28}}$.

*) إحتمال ظهورالرقم 1 مرتين فقط : $P(C)=\dfrac{\left(A_3^2\times A_5^1\right)\times 3}{336}=\dfrac{30\times 3}{336}=\dfrac{90}{336}$ و منه : $\boxed{P(C)=\dfrac{15}{56}}$.

*) إحتمال أن تكون الكرة الثانية في السحب حمراء : $P(D)=\dfrac{A_3^1\times A_7^2}{336}=\dfrac{3\times 42}{336}=\dfrac{126}{336}$ و منه : $\boxed{P(D)=\dfrac{3}{8}}$.

2) لنبين أن : $P(B\cap D)=\dfrac{17}{84}$.

الحدث $(B\cap D)$: " كرة واحدة تحمل الرقم 1 و الكرة المسحوبة ثانيا حمراء " .

أي : $\frac{68}{336} = \frac{20+48}{336} = \frac{\left(A_5^1\times A_1^1\times A_4^1\right)+\left(A_3^1\times A_2^1\times A_4^1\right)\times 2}{336}$ $P\left(B\cap D\right)=$ و منه : $\boxed{P\left(B\cap D\right)=\frac{17}{84}}$ هو المطلوب .

الجدول التالي يوضح الوضعية أكثر :

3^{em}	2^{em}	1^{er}
4 كرات التي لا تحمل الرقم 1	R_1	5 التي لا تحمل الرقم 1
4 كرات لا تحمل الرقم 1 و ليست R_2	R_2 (حالتان)	3 كرات تحمل الرقم 1

3) أ) قيم المتغير العشوائي X هي : **0** ، **1** و **2** .

– لنعين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

*) $X=0$ معناه أن الكراتان السوداوين موجودتان في السحب : $P\left(X=0\right)=\frac{\left(A_2^2\times A_6^1\right)\times 3}{336}=\frac{12\times 3}{336}=\frac{36}{336}$.

*) $X=1$ معناه في السحبات الثلاث توجد كرة واحدة سوداء : $P\left(X=1\right)=\frac{\left(A_2^1\times A_6^2\right)\times 3}{336}=\frac{60\times 3}{336}=\frac{180}{336}$.

*) $X=2$ معناه لا يوجد في السحب كرات سوداء : $P\left(X=3\right)=\frac{A_6^3}{336}=\frac{120}{336}$.

نلخص القانون في الجدول التالي :

X_i	0	1	2
$P\left(X_i\right)$	$\frac{36}{336}$	$\frac{180}{336}$	$\frac{120}{336}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي :

لدينا : $E\left(X\right)=\frac{0+180+240}{336}=\frac{420}{336}$ و منه : $\boxed{E\left(X\right)=\frac{5}{4}}$.

4) لدينا في الصندوق 3 كرات بيضاء ، 3 كرات حمراء و السحب لكرة واحدة n مرة على التوالي مع الإرجاع .

أ) P_1 هو إحتمال أن تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون أي : $P_1=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

ب) P_2 هو إحتمال أن تكون في السحب على الأقل كرة حمراء .

*) نعلم أن : " إحتمال أن تكون الكرات المسحوبة كلها بيضاء " هو : $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

و منه يكون : $P_2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

تمرين جيد في الإحتمالات مع الحل

نـــص التمرين :

I) يحتوي صندوق على ثمان كريات متجانسة منها أربع كريات سوداء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 و ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 2 و كرية واحدة صفراء تحمل الرقم : 1 .

نسحب من الصندوق ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى دون إعادة الكرية المسحوبة في كل مرة إلى الصندوق .

1) أحسب إحتمال الأحداث التالية : (تكتب النتائج على شكل كسور غير قابلة للإختزال) .

A : "الكريات المسحوبة من نفس اللون" ، B : "كرة واحدة تحمل الرقم 1" ، C : "سحب كرية بيضاء في السحبة الأولى"

2) بين أن : $P(B\cap C)=\dfrac{23}{168}$.

II) نعيد الكريات إلى الصندوق ثم نسحب منه أربع كريات في آن واحد و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المتحصل عليها .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X و قانون إحتماله .

ب) أحسب : $P\left(e^{2X}-5e^{X}\leq -4\right)$.

حل مقترح للتمرين :

I) عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق هي : $\boxed{A_8^3=336}$.

1) حساب إحتمال الأحداث التالية :

*) إحتمال سحب كرات من نفس اللون أي : $P(A)=\dfrac{A_4^3+A_3^3}{336}=\dfrac{24+6}{336}=\dfrac{30}{336}$ و منه : $\boxed{P(A)=\dfrac{5}{56}}$.

*) إحتمال سحب كرة واحدة تحمل الرقم 1 : $P(B)=\dfrac{\left(A_5^1\times A_3^2\right)\times 3}{336}=\dfrac{30\times 3}{336}=\dfrac{90}{336}$ و منه : $\boxed{P(B)=\dfrac{15}{56}}$.

*) إحتمال سحب كرة بيضاء أولا : $P(C)=\dfrac{A_3^1\times A_7^2}{336}=\dfrac{3\times 42}{336}=\dfrac{126}{336}$ و منه : $\boxed{P(C)=\dfrac{3}{8}}$.

2) لنبين أن : $P(B\cap C)=\dfrac{23}{168}$.

الحدث $(B\cap C)$: " كرة واحدة تحمل الرقم 1 و الكرة المسحوبة أولا بيضاء " .

أي : $P(B\cap C)=\dfrac{\left(A_1^1\times A_3^2\right)+\left(A_1^1\times A_5^1\times A_2^1\right)\times 2+\left(A_1^1\times A_5^1\times A_2^1\right)\times 2}{336}=\dfrac{6+20+20}{336}=\dfrac{46}{336}$

و منه : $\boxed{P(B\cap C)=\dfrac{23}{168}}$ هو المطلوب .

الجدول التالي يوضح الوضعية أكثر :

1^{er}	2^{em}	3^{em}
B_1	**3** كرات لا تحمل الرقم 1	**2** كرات لا تحمل الرقم 1
B_0	**5** الكرات التي تحمل الرقم 1	**2** الكرات التي لا تحمل الرقم 1 باستثناء B_0
B_2	**5** الكرات التي تحمل الرقم 1	**2** الكرات التي لا تحمل الرقم 1 باستثناء B_2

II) عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق في هذه التجربة هو : $\boxed{C_8^4 = 70}$.

1) أ) قيم المتغير العشوائي X هي : **1** ، **2** و **3** .

– لنعين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

*) $X=1$ معناه أن الكرات المسحوبة كلها سوداء أي : $P(X=1)=\frac{C_4^4}{70}=\frac{1}{70}$.

*) $X=3$ معناه أنه يوجد الألوان الثلاث في السحب : $P(X=3)=\frac{\left(C_4^2\times C_3^1\times C_1^1\right)+\left(C_4^1\times C_3^2\times C_1^1\right)}{70}=\frac{18+12}{70}=\frac{30}{70}$.

*) $X=2$ معناه أنه يوجد لونان في السحب أي : $P(X=2)=1-P(X=1)+P(X=3)=1-\frac{1}{70}+\frac{30}{70}=\frac{39}{70}$.

نلخص القانون في الجدول التالي :

X_i	1	2	3
$P(X_i)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{39}{70}$	$\frac{30}{70}$

ب) لنحسب : $P\left(e^{2X}-5e^X\le -4\right)$.

لدينا : $e^{2X}-5e^X\le -4$ أي : $e^{2X}-5e^X+4\le 0$ بوضع : $e^X=t$ تصبح : $t^2-5t+4\le 0$ و منه : $\begin{cases} t_1=1 \\ t_2=4 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} X=0 \\ X=\ln 4 \end{cases}$ إذن يكون $e^{2X}-5e^X+4\le 0$ إذا كان : $0\le X\le \ln 4$.

و منه : $P\left(e^{2X}-5e^X\le -4\right)=P(X=1)=\frac{1}{70}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

تمرين جيد في الإحتمالات مع الحل

نــص التمرين :

لعبة تقتضي سحب أربع كرات في آن واحد من كيس غير شفاف يحتوي على كرة واحدة سوداء و تسع كرات بيضاء ثم يتم رمي زهرة نرد متزنة و مرقمة من 1 إلى 6 .

- إذا كانت الكرة السوداء موجودة في السحب فينبغي الحصول على عدد زوجي لكي نربح .
- إذا لم تكن الكرة السوداء في السحب فينبغي الحصول على الرقم 6 لكي نربح .

نسمي N الحادثة : " الكرة السوداء موجودة في السحب " و G الحادثة : " اللاعب يربح " .

1) أ- أحسب إحتمال الحادثة N .

ب- بين أن : $P(G)=\frac{3}{10}$ (يمكن الإستعانة بشجرة الإحتمالات) .

2) لكي نلعب هذه اللعبة ندفع في البداية المبلغ m دينار .

- إذا ربح اللاعب يتحصل على $4DA$ و إذا لم يربح لكنه سحب الكرة السوداء يرد إليه المبلغ m . و إذا لم يربح و لم يسحب الكرة السوداء فإنه يخسر المبلغ m .

نسمي X المتغير العشوائي الذي يعبر عن الربح الجبري للاعب .

أ – عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب – عبر بدلالة m عن الأمل الرياضياتي $E(X)$.

ج – عين قيمة m التي من أجلها تكون اللعبة عادلة .

3) نلعب هذه اللعبة n مرة مع العلم أنه بعد كل مرة تعاد الكرات إلى الكيس .

- عين أصغر قيمة لــ n التي من أجلها يكون إحتمال أن نربح مرة على الأقل أكبر من 0,999 .

حل مقترح للتمرين :

اللعبة : سحب عشوائي و في آن واحد لــ 4 كرات ثم رمي زهرة النرد .

عدد الحالات الممكنة للسحب من الكيس هي : $\boxed{C_{10}^{4}=210}$.

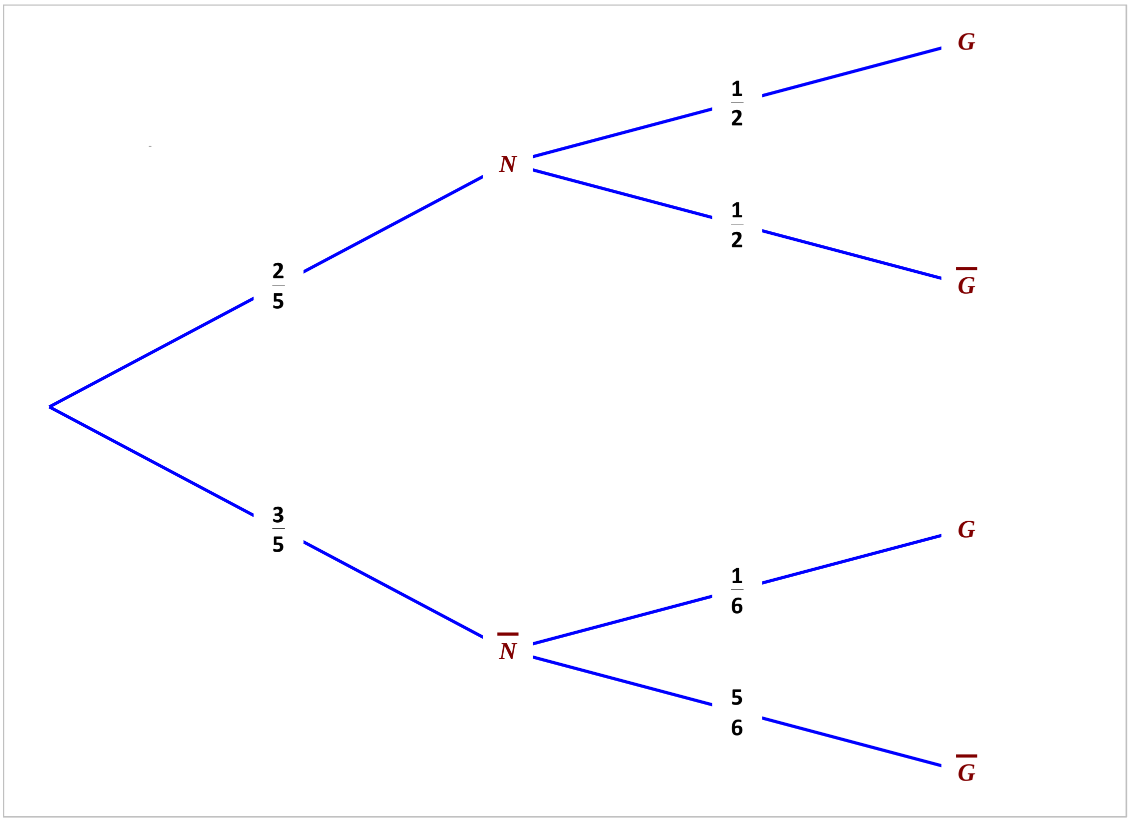
1) أ) حساب إحتمال N :

*) الكرة السوداء موجودة في السحب أي : $P(N)=\frac{C_1^1\times C_9^3}{210}=\frac{84}{210}$ و منه : $\boxed{P(N)=\frac{2}{5}}$.

ب) لنبين أن : $P(G)=\frac{3}{10}$.

ممكن للاعب أن يربح لما يسحب الكرة السوداء و يحصل على رقم زوجي أو لما لا يسحب الكرة السوداء و يحصل على الرقم 6 .

يمكن أن نستعين بشجرة الإحتمالات لكي ننمذج الوضعية :



إذن يكون : $P(G)=P(G\cap N)+P(G\cap \overline{N})$ أي : $P(G)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}$.

و منه : $\boxed{P(G)=\frac{3}{10}}$ هو المطلوب .

2) أ) أولا نعين قيم X : $X\in\{4-m;0;-m\}$.

*) $P(X=4-m)=P(G)=\frac{3}{10}$.

*) $P(X=0)=P(N\cap\overline{G})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

*) $P(X=-m)=P(\overline{N}\cap\overline{G})=\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$.

X_i	$4-m$	0	$-m$
P_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\frac{3(4-m)+0-5m}{10}=\frac{12-3m-5m}{10}$ و منه : $\boxed{E(X)=\frac{-8m+12}{10}}$.

ج) تكون اللعبة عادلة إذا كان : $E(X)=0$ أي : $\frac{-8m+12}{10}=0$ أي : $-8m+12=0$ و منه : $\boxed{m=\frac{12}{8}=1,5}$.

3) نسمي الحادثة E : " اللاعب يربح على الأقل مرة واحدة " و $\overline{E}$: " اللاعب يخسر في كل مرة " .

نعلم أن : $P\left(\overline{E}\right)=\left(\frac{7}{10}\right)^n$ و منه : $P(E)=1-\left(\frac{7}{10}\right)^n$.

لدينا : $P(E)\geq 0,999$ أي : $1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\geq 0,999$ أي : $-\left(\frac{7}{10}\right)^n\geq -0,001$ و منه : $\left(\frac{7}{10}\right)^n\leq 0,001$

أي : $\ln\left(\frac{7}{10}\right)^n\leq \ln(0,001)$ أي : $n\times\ln\left(\frac{7}{10}\right)\leq \ln(0,001)$ و منه : $n\geq\dfrac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$ أي : $\boxed{n\geq 19,36}$.

إذن أصغر قيمة لــ n حتى يكون $P(E)\geq 0,999$ هي : 20 .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق