السلسلة الفضّية

الإصدار الثالث
طبعة جديدة
ومنقحة مع إضافات

الأستاذ نور الدّين عيساوي
بالتعاون مع فريق عكاشة

كل ما تحتاجه في كتاب واحد

الاحتمالات

من الألف إلى الياء

الشّعب العلميّة والتّقنيّة والرّياضيات

60 تمرين

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

- ملخص شامل حول الاحتمالات
- تمارين مهمة
- جميع مواضيع البكالوريا -شعبة العلوم التجريبية
- جميع مواضيع البكالوريا - شعبة التقني الرياضي
- جميع مواضيع البكالوريا -شعبة الرياضيات
- مواضيع مقترحة
- مواضيع مقتبسة من مواضيع أجنبيّة

التّحضير الجيّد لبكالوريا الجزائر

عكاشة BOOKSTORE

MOKHFI CHOUAIB

السّلســـلة الفضّيـــة

مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع

أولاد فايت الجزائر العاصمة

الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

الاحتمـــالات

من الألف إلى الياء

موافقة لفيديوهات اليوتيوب

ملخص شامل حول الاحتمالات

تمارين شاملة في الاحتمالات

جميع تمارين الاحتمالات شعبة العلوم التجريبية

جميع تمارين الاحتمالات شعبة التقني رياضي

جميع تمارين الاحتمالات شعبة الرياضيات

تمارين مقترحة في الاحتمالات

تمارين مقتبسة من مواضيع أجنبية في الاحتمالات

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

code: 22-19

MOKHFI CHOUAIB

بطاقة الكتاب

العنوان: الاحتمالات من الألف إلى الياء - السلسلة الفضية-
الشعبة: جميع الشعب
السنة: الثالثة ثانوي - البكالوريا -
المؤلف: الأستاذ نور الدين عيساوي بالتعاون مع فريق عكاشة
الإصدار: الثالث

دار النشر: مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع
العنوان: 03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة - الجزائر
ردمك: 978-9931-856-18-4
الإيداع القانوني: أكتوبر 2021
الطبعة: أكتوبر 2021
السعر: 250 دج

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به،
وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا لأجله، وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له.

الأستاذ نور الدين عيساوي الذي غرس الأمل والحماس في قلوب مئات الآلاف من التلاميذ والأساتذة في ثانويات وطننا العربي عامة وفي الجزائر خاصة، فصارت الرياضيات مادة ممتعة جدا وسهلة الوصول إليها، بواسطة فيديوهات مبسطة ورائعة جدا.

السلسلة الفضية هي سلسلة جامعة في مادتها، تساعد التلميذ على توحيد مصدره وجمع كل ما يحتاجه في كتاب واحد، تحوي ملخصا شاملا مرفقا بتمارين شاملة يأتي بعدها حلول جميع مواضيع البكالوريا لشعبة العلوم التجريبية وشعبة التقني الرياضي وشعبة الرياضيات، ثم مجموعة من التمارين المقترحة وتمارين مقتبسة من مواضيع أجنبيّة. وعلاوة على كل هذا فللكتاب خاصية فريدة من نوعها وهي موافقته لفيديوهات اليوتيوب فبواسطتها يمكنك التوسع في الشرح أو الزيادة في الفهم بواسطة الفيديوهات المتوفرة مجانا على قناة الأستاذ نورالدين.

إلى كل من يقرأ هذا الكتاب، نسأل الله لك التوفيق والنجاح، ونعلمك أنه يمكنك المساهمة في تطوير النسخة القادمة بإرسال ملاحظاتك أو اقتراحاتك. ولا تنسوا الترحم على أم أستاذنا الغالي نورالدين عيساوي.

يمكنك ان تشارك في قناة الأستاذ نورالدين في اليوتيوب لكي يصلك كل جديد
مع تحيات الأستاذ نور الدين وفريق عكاشة

MOKHFI CHOUAIB

جدول محتويات السلسلة الفضية

MOKHFI CHOUAIB

V. مواضيع مقترحة 60

VI. مواضيع مقتبسة من بكالوريات أجنبية 95

MOKHFI CHOUAIB

I. ملخّص شامل

01. القانون العام

➢ القانون العام لحساب احتمال حادثة:

في حالة تساوي احتمال على مجموعة شاملة E يكون لدينا من أجل كلّ حادثة A:

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{E \text{ عدد عناصر}}$$

مثال: نرمي زهر نرد غير مزيّف ذو ستّة أوجه مرقّمة من **1** إلى **6**. احسب احتمال الأحداث

- الحادثة A: "ظهور عدد زوجي"؟
- الحادثة B: "ظهور عدد فردي"؟
- الحادثة C: "ظهور عدد أوّلي"؟

الحل

✓ "زهر نرد غير مزيّف": يقصد بهذه العبارة أنّ احتمال ظهور أيّ وجه هو مساو لاحتمال ظهور وجه غيره، فيُستفاد منها أنّ الأحداث تجري في حالة تساوي الاحتمال.

1). مجموعة الإمكانيات هي:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- الحادثة A: $A = \{2, 4, 6\}$
- الحادثة B: $B = \{1, 3, 5\}$
- الحادثة C: $C = \{2, 3, 5\}$

2). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- الحادثة A: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- الحادثة B: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- الحادثة C: $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

✓ يلاحظ أنّ حادثة ظهور عدد زوجي هي عكس حادثة ظهور عدد فردي، وبالتالي فالحادثتان A و B متعاكستان أي أنّ: $A = \overline{B}$ وعليه فإنّ:

$P(A) + P(\overline{A}) = P(A) + P(B) = 1$

02. خواص

أجزاء E	لغة الأحداث	الخاصية
A	A حادثة كيفية	$1 \geq P(A) \geq 0$
$\emptyset$	الحادثة المستحيلة	$P(\emptyset) = 0$
E	الحادثة الأكيدة	$P(E) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A و B غير متلائمتين	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
B, A	A و B كيفيتان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

✓ في مجال الاحتمالات نقرأ الرّمز $\cap$ "و"، ونقرأ الرّمز $\cup$ "أو".

مثال: إذا علمت أنّ

$P(A) = 0.45, P(B) = 0.6$
$P(A \cup B) = 0.8$

احسب: $P(\overline{A})$ و $P(A \cap B)$

الحل

1). حساب $P(\overline{A})$: نعلم أنّ:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(\overline{A}) = 1 - 0.45 = 0.55$

2). حساب $P(A \cap B)$: نعلم أنّ:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$P(A \cap B) = 0.45 + 0.6 - 0.8 = 0.25$

MOKHFI CHOUAIB

✓ يمكن أن يُطلب إيجاد احتمال الحادثة العكسية للحادثة $P(A\cap B)$ وفي هذه الحالة يصبح لدينا:

$$P(A \cap B) + P(\overline{A \cap B}) = 1$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.25 = 0.75$$

03. الأحداث المستقلة

A و B حادثتان، حيث $P(A) \neq 0$، $P(B) \neq 0$،

نقول عن الحادثتين A و B أنهما مستقلّتان إذا كان:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

مثال 1:

إذا كانت A و B حادثتان مستقلتين حيث:

$P(A) = 0.4$، $P(B) = 0.3$،

احسب $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.3$$
$$P(A \cap B) = 0.12$$

مثال 2:

A و B حادثتان مستقلّتان من مجموعة إمكانيّات، حيث:

$P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.4$،

احسب $P(A \cup B)$

نعلم أنّ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وبما أنّ الحادثتين مستقلّتان فإنّ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.3 \times 0.4$$
$$P(A \cup B) = 0.7 - 0.12$$
$$P(A \cup B) = \mathbf{0.58}$$

04. شجرة الاحتمال

مثال 1:

الجدول التالي يعطي توزيع 500 تلميذ في إحدى الثانويات:

التلميذ	ذكور	إناث
يملك هاتفا نقالا	60	240
لا يملك هاتفا نقالا	120	80

نختار عشوائيًا تلميذا من الثّانوية ونسمّي H الحادثة: "التّلميذ المختار ذكرا"، F الحادثة: "التلميذ المختار أنثى"، S الحادثة "التّلميذ يملك هاتفا نقّالا"، $\overline{S}$ الحادثة "التّلميذ لا يملك هاتفا نقّالا".

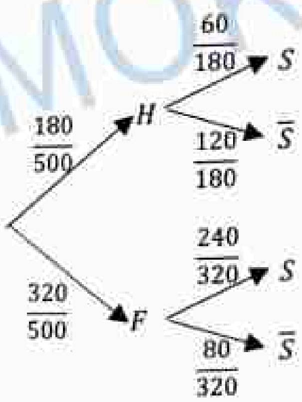
1). شكّل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة؟

2). احسب احتمال الأحداث التّالية:

- التّلميذ المختار أنثى وتملك هاتفا نقّالا؟
- التّلميذ المختار لا يملك هاتفا نقّالا؟

الحل ✍

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات: انطلاقا من الشجرة:

- التّلميذ المختار أنثى تملك نقّالا: $P(F \cap S)$

$$P(F \cap S) = P(F) \times P(S) = \frac{320}{500} \times \frac{240}{320}$$
$$P(F \cap S) = \frac{76\,800}{160\,000} = \frac{12}{25}$$

MOKHFI CHOUAIB

✓ لكتابة أي كسر على شكل غير قابل للاختزال باستعمال الآلة الحاسبة، فما علينا سوى إجراء عملية القسمة بشكل معتاد لنحصل على نتيجة عشرية، ثم نضغط على زر $\boxed{abc}$ على الآلة الحاسبة لنحصل على رقمين في الشاشة، يمثل الأول البسط والثاني المقام، تفصل بينهما علامة على شكل زاوية قائمة.

■ التلميذ المختار لا يملك هاتفا نقالا: $P(\bar{S})$

$$P(\bar{S}) = P(H \cap \bar{S}) + P(F \cap \bar{S})$$
$$P(\bar{S}) = \frac{180}{500} \times \frac{120}{180} + \frac{320}{500} \times \frac{80}{320}$$
$$P(\bar{S}) = \frac{12}{50} + \frac{8}{50} = \frac{2}{5}$$

مثال 2:

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجالا، 25% من النساء يتحدّثن لغة أجنبيّة و35% من الرجال يتحدّثون أيضا لغة أجنبيّة.

نختار عشوائيّا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الأحداث:

H: رجل.

F: امرأة.

A: رجل يتحدّث لغة أجنبيّة.

B: امرأة تتحدّث لغة أجنبيّة.

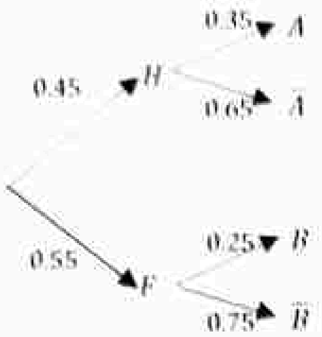
1). انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها؟

2). احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة؟
- امرأة لا تتحدّث لغة أجنبيّة؟
- شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة؟

الحل

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات: انطلاقا من شجرة الاحتمال فإنّ احتمال أن يكون المختار:

■ رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة $P(H \cap A)$:

$$P(H \cap A) = P(H) \times P(A) = 0.45 \times 0.35$$
$$P(H \cap A) = 0.1575$$

■ امرأةً لا تتحدّث لغة أجنبيّة $P(F \cap \bar{B})$:

$$P(F \cap \bar{B}) = P(F) \times P(\bar{B}) = 0.55 \times 0.75$$
$$P(F \cap \bar{B}) = 0.4125$$

■ شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة:

$$P(C) = P(H \cap A) + P(F \cap B)$$
$$P(C) = 0.1575 + (0.55 \times 0.25)$$
$$P(C) = 0.295$$

05. الاحتمالات الشرطيّة

➢ تعريف:

لتكن A حادثة من مجموع المخارج E حيث $P(A) \neq 0$، نعرّف على E احتمالا جديدا يرمز له بالرمز P_A حيث من أجل كلّ حادثة B نكتب:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

✓ P_A يسمّى الاحتمال الشرطي علما أنّ A محقّقة.

✓ $P_A(B)$ تُقرأ "احتمال B علما أنّ A محقّقة.

MOKHFI CHOUAIB

مثال 1:

يتكوّن مجتمع من 55% نساء و45% رجالا، 25% من النّساء يتحدّثن لغة أجنبيّة و35% من الرجال يتحدّثون أيضا لغة أجنبيّة.

نختار عشوائيّا شخصا من هذا المجتمع ونعتبر الأحداث:

H: رجل.

F: امرأة.

A: رجل يتحدّث لغة أجنبيّة.

B: امرأة تتحدّث لغة أجنبيّة.

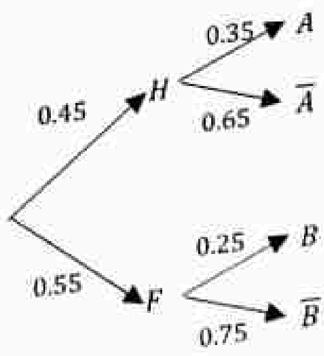
1). انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها؟

2). احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

- رجلا يتحدّث لغة أجنبيّة؟
- امرأة لا تتحدّث لغة أجنبيّة؟
- شخصا يتحدّث لغة أجنبيّة؟
- الشخص المختار امرأة، علماً أنّه يتحدّث لغة أجنبيّة؟

الحل

1). شجرة الاحتمالات:



2). حساب الاحتمالات:

- $:P(A)$

$$P(A) = P(H \cap A) = 0.45 \times 0.35$$
$$P(A) = 0.1575$$

- $:P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = P(F \cap \overline{B}) = 0.55 \times 0.75$$
$$P(\overline{B}) = 0.4125$$

- $:P(C)$

$$P(C) = P(A) + P(F \cap B)$$
$$P(C) = 0.1575 + (0.55 \times 0.25)$$
$$P(C) = 0.295$$

- $P_C(F)$: الشخص المختار امرأة علماً أنّه يتحدّث لغة أجنبيّة:

$$P_C(F) = \frac{P(F\cap C)}{P(C)} = \frac{0.55 \times 0.25}{0.295} = \frac{55}{118}$$

مثال 2:

مصنع سيّارات يشتغل بوحدتين A وB وينتج نوعين: سيّارات تسير بالبنزين يُرمز لها بالرمز E وأخرى تسير بغير البنزين ويرمز لها بالرمز $\overline{E}$، ربع إنتاج هذا المصنع تصنّعه الوحدة A.

اشترى شخص سيّارة من هذا المصنع، احتمال أن تكون هذه السيّارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$.

✓ (تعطى كلّ النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال).

1). بيّن أنّ احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$؟احسب احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين علماً أنّها من صنع الوحدة B؟

2). احسب:

- احتمال أن تكون السيّارة تسير بالبنزين؟
- احتمال أن تكون من صنع الوحدة A علماً أن السيّارة تسير بالبنزين؟

3). أنجز شجرة الاحتمالات الّتي تُنمذج هذه الوضعيّة؟

MOKHFI CHOUAIB

الحـل

لدينا: $P(A) = \frac{1}{4}$ $\qquad P(B) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$

ولدينا: $P(A \cap E) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(B \cap E) = \frac{3}{8}$

1). برهان أنّ: $P_A(E) = \frac{2}{3}$:

$$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

2). حساب $P_B(E)$:

$$P_B(E) = \frac{P(B \cap E)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

3). حساب:

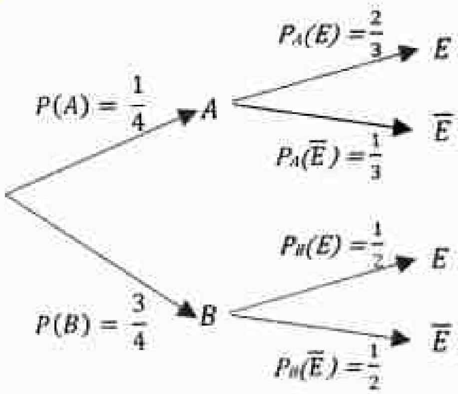
- حساب $P(E)$:

$$P(E) = P(A \cap B) + P(B \cap E) = \frac{1}{6} + \frac{3}{8}$$
$$P(E) = \frac{13}{24}$$

- حساب $P_E(A)$:

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{4}{13}$$

4). شجرة الاحتمالات:



06. المتغيّر العشوائي

➢ المتغيّر العشوائي:

E المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية، نسمّي متغيّرا عشوائيا كل دالّة عددية معرّفة على E.

➢ قانون الاحتمال لمتغيّر عشوائي:

قانون الاحتمال لمتغيّر عشوائي x هو الدالّة المعرّفة على I (مجموعة قيم x) والّتي ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $P(x = x_i)$.

✓ حيث: $0 \leq P(x) \leq 1$

➢ الأمل الرياضي:

الأمل الرياضي للمتغيّر x هو العدد $E(x)$، حيث:

$$\boldsymbol{E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i}$$

➢ التباين:

التباين للمتغيّر x هو العدد:

$$\boldsymbol{V(x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x)]^2\, p_i}$$

✓ يمكن كتابة:

$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(x)]^2$

p_i هو احتمال x عندما يأخذ x القيمة x_i، أي:

$p_i = P(x = x_i)$.

➢ الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري للمتغيّر x هو العدد:

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{v(x)}}$$

تمرين

نرمي قطعة نقديّة غير مزيّفة 3 مرّات متتابعة.

ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة.

1). عيّن القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي x؟

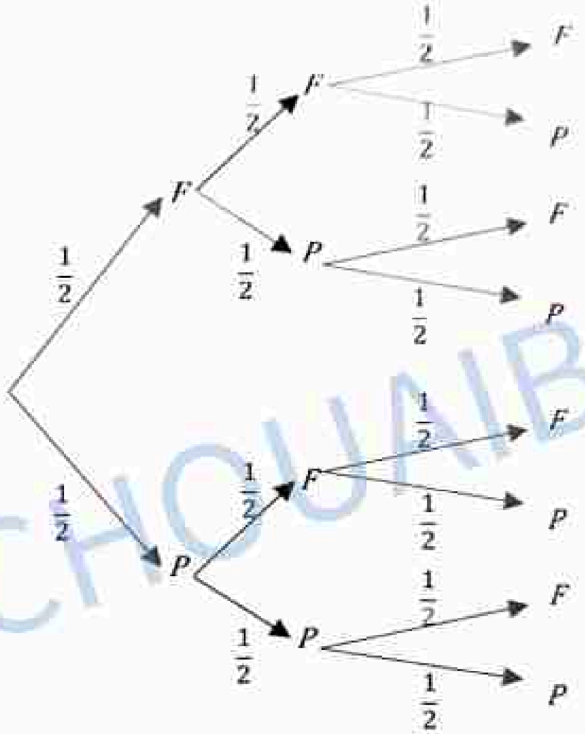
2). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x؟

3). احسب الأمل الرياضي $E(x)$؟

4). احسب التباين $V(x)$ والانحراف المعياري $\sigma(x)$؟

الحل

بغرض التوضيح نقوم برسم شجرة الاحتمالات:



1). تعيين القيم الممكنة للمتغيّر x:

نحسب من خلال شجرة الاحتمال عدد الأوجه الظاهرة في كلّ طريق (التفريعات المتتابعة الّتي تعبّر عن الرميات الثلاث المتتابعة)، لنجد أنّ عدد ظهور الأوجه في كلّ طريق لا يمكن إلّا أن يأخذ واحدا من القيم الأربع التّالية:

$x \in \{0,1,2,3\}$

حيث أنّ:

- القيمة 0: تعني عدم ظهور أيّ وجه في أيّ من الرميات الثلاث المتتابعة.
- القيمة 1: تعني ظهور الوجه مرّة واحدة أثناء الرميات الثلاث المتتابعة. وهكذا دواليك.

2). تعيين $P(x_i)$: يمكن تلخيص قانون الاحتمال انطلاقا من شجرة الاحتمال بالجدول التّالي:

$P(x = x_i)$	x_i
$P(x=0)=\frac{1}{8}$	0
$P(x=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	1
$P(x=2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$	2
$P(x=3)=\frac{1}{8}$	3

3). حساب $E(x)$:

$x_i p_i$	$P(x = x_i)$	x_i
0	$P(x=0)=\frac{1}{8}$	0
$\frac{3}{8}$	$P(x=1)=\frac{3}{8}$	1
$\frac{6}{8}$	$P(x=2)=\frac{3}{8}$	2
$\frac{3}{8}$	$P(x=3)=\frac{1}{8}$	3

$E(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i\,p_i$

$E(x)=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{3}{2}$

4). حساب التباين والانحراف:

- حساب $V(x)$:

$V(x)=\sum_{i=1}^{4}(x_i-E(x))^2\,p_i$

$\mathbb{X}=[x_i-E(x)]^2$

$\mathbb{P}=\mathbb{X}p_i=[x_i-E(x)]^2 p_i$

$\mathbb{P}$	p_i	$\mathbb{X}$	x_i
$\frac{9}{32}$	$P(x=0)=\frac{1}{8}$	$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$	0
$\frac{3}{32}$	$P(x=1)=\frac{3}{8}$	$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	1
$\frac{3}{32}$	$P(x=2)=\frac{3}{8}$	$\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	2
$\frac{9}{32}$	$P(x=3)=\frac{1}{8}$	$\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$	3

$V(x)=\frac{9+3+3+9}{32}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$

- حساب $\delta(x)$:

$\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0.75$

MOKHFI CHOUAIB

07. طرق العدّ

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n (n عدد طبيعي غير معدوم)، وليكن k عدد طبيعي.

1. معامل الترتيب:

نقوم بسحب k عنصرا على التوالي من المجموعة E لنحصل على التبديلات: $(C_1, C_2, \dots, C_n)$، نرمز لتكرار كلّ عنصر C_n بالرّمز X_n، نسمّي عدد التبديلات الممكنة بمعامل الترتيب α، حيث:

$$\alpha = \frac{k!}{X_1! \times X_2! \times \dots \times X_n!}$$

مثال:

يحتوي كيس على 5 كرات زرقاء و6 كرات حمراء، نسحب على التوالي بإرجاع كرتين، ما هو عدد التبديلات الممكنة عند سحب كرتين من لونين مختلفين؟

عند سحب كرتين من لونين مختلفين فإنّنا نحصل على الثنائية (B, R)، وبمراعاة الترتيب فإنّنا نحصل على تبديلات عددها مساو لمعامل الترتيب α.

لدينا $k = 2$ لأنّنا نقوم بسحب كرتين على التوالي، و X_n عدد المرّات التي تكرّر فيها كلّ مكوّن من الثنائيّة (B, R)، أي أنّ: $X_B = 1$ لأنّ B تكرّر مرّة واحدة في الثنائية (B, R)، وكذلك $X_R = 1$، ومنه:

$$\alpha = \frac{k!}{X_1! \times X_2! \times \dots \times X_n!} = \frac{2!}{1! \times 1!} = 2$$

$\alpha = 2$ وهذا يعني أنّه يمكننا الحصول على تبديلتين: $(B, R), (R, B)$.

✓ نستعمل معامل الترتيب عند السحب على التوالي.

2. القائمة:

✍ تعريف:

نسمّي قائمة في المجموعة E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $k \geq 1$، كل متتالية مرتّبة من k عنصرا من عناصر المجموعة E.

عدد القوائم الممكنة في E ذات k عنصرا من عناصر المجموعة E هو n^k.

✓ يمكن ملاحظة عدم اشتراط أن يكون k (عدد عناصر القائمة) أصغر من n (عدد عناصر المجموعة الشاملة)، وهذا إن دلّ على شيء فإنّما يدلّ على جواز التكرار في القائمة.

مثال:

لتكن المجموعة $E = \{a, b, c, d\}$، عدد القوائم ذات عنصرين الممكنة في E هو 4^2 أي 16، حيث أنّ 4 يمثّل n عدد عناصر المجموعة الشاملة E، و2 تمثّل k عدد عناصر القائمة في E لأنّه تمّ تحديد القوائم على أنّها ذات عنصرين.

من هذه القوائم الستّة عشر مثلا لدينا:

$(a, a), (a, b), (b, a), (c, d) \dots$

✍ تمرين 1

الرقم السرّي لبطاقة بنكيّة عبارة عن عدد مكوّن من أربع أرقام مأخوذة من المجموعة:

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

1). كم رقما سريّا يمكن تشكيله؟

الرقم السرّي للبطاقة مختار بطريقة عشوائيّة.

2). أحسب احتمال كلّ الأحداث التّالية:

2-أ). "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي"؟

2-ب). "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط"؟

MOKHFI CHOUAIB

الحل

1). عدد الأرقام الممكن تشكيلها: $9^4 = 6561$

2). احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي": ليكون الرقم السرّي زوجيًا فلا بدّ أن تقتصر خانة احاده على 4 أرقام فقط من بين الأرقام التسعة المتاحة، وهي: $\{2,4,6,8\}$، أي: 4^1، بينما يمكن لباقي الخانات أن تحمل أيّ رقم من 1 إلى 9، أي 9^3، وعليه فإنّ:

$$P(A) = \frac{9^3 \times 4^1}{9^4} = \frac{2916}{6561} = \frac{4}{9} \approx \mathbf{0.444}$$

2-ب). B: "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط": ليكون الرقم السرّي مكوّناً فقط من الأرقام الزوجيّة فلا بدّ من إعادة تعيين المجموعة الشاملة ليصبح عدد عناصرها 4 فقط بدلا من تسعة، ويبقى عدد عناصر القائمة 4، وبذلك يصبح عدد القوائم الممكنة هو:

$$n^k = 4^4 = 256.$$

$$P(B) = \frac{256}{6561} \approx 0.039$$

تمرين 2

كيس يحتوي على 12 كرة، 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و5 سوداء (N)، نسحب عشوائيًا 3 كريّات **على التوالي بإرجاع.**

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب؟

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"؟

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان"؟

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون"؟

الحل

1). حساب عدد الحالات الممكنة:

بما أن السحب على التوالي وليس دفعة واحدة، وبما أن السحب بإرجاع، فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد القوائم الممكنة n^k ذات 3 عناصر من مجموعة شاملة E عدد عناصرها 12، أي أنّ العدد الكلّي للكرات $n = 12$، وعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة $k = 3$، وعليه فعدد الحالات الممكنة مساوٍ إلى 12^3، إذن عدد الحالات الممكنة هو: **1728**.

2). احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R فنعتبر $n = 3$ لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر $k = 3$ لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات حمراء" هو 3^3، نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، لنجد أنّ عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات خضراء" هو 4^3، و"3 كرات سوداء" هو 5^3. وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون كالآتي:

$$P(A) = \frac{3^3 + 4^3 + 5^3}{12^3} = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$$

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان":

بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه يمكن الحصول على التبديلات التّالية: $(R,V,N), (R,N,V), (N,R,V), (N,V,R), (V,N,R), (V,R,N)$ ، وعليه:

✓ يمكن حساب معامل الترتيب مباشرة:

$$\alpha = \frac{k!}{x_R! \times x_V! \times x_N!} = \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6$$

ولحساب احتمال حصولنا على "3 كرات مختلفة اللون":

$$P(B) = 6 \times \frac{(3 \times 4 \times 5)}{12^3} = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون":

يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

- الطريقة الأولى: الحالة C تمثّل الحالة المتبقية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{5}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

- الطريقة الثانية: بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه فإنّه يمكن الحصول بالنسبة للون الأحمر على التبديلات الآتية: $(R,R,Z),(R,Z,R),(Z,R,R)$ حيث Z يمثّل لونا آخر (إمّا أخضرا أو أسودا)، وبالتالي عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو: $3 \times (3^2 \times 91)$، وكذلك نفعل مع اللونين الآخرين.

> ✓ يمكننا حساب عدد التبديلات مباشرة:
> $$\alpha = \frac{k!}{X_R! \times X_Z!} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

$$P(C) = 3 \times \frac{(3^2 \times 9^1) + (4^2 \times 8^1) + (5^2 \times 7^1)}{12^3}$$
$$P(C) = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3}$$

3. الترتيبة:

○ نسمّي ترتيبة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $1 \leq k \leq n$، كلّ متتالية مرتّبة من k عنصرا (من عناصر المجموعة E) متمايزة مثنى مثنى.

○ عدد الترتيبات الممكنة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) مساوٍ للعدد A_n^k المعرّف بالعلاقة التّالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

> ✓ حيث: $n! = n(n-1)(n-2) \ldots \times 2 \times 1$
>
> ✓ كذلك: $A_1^0 = 1$ $\quad A_1^1 = 1$
>
> ✓ يمكن ملاحظة اشتراط أن يكون k عدد عناصر الترتيبة أقلّ من n عدد عناصر المجموعة الشاملة E، وهو ما يفهم منه عدم جواز التكرار في الترتيبة، وهو ما يفهم أيضا من عبارة "متمايزة مثنى مثنى" التي وردت في التعريف.
>
> ✓ تستعمل الترتيبة في الوضعيّات الّتي يؤخذ بها ترتيب العناصر بعين الاعتبار كتشكيل الأعداد، وتكوين اللجان مع تحديد المهام...

مثال 1:

لتكن المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$، ما هو عدد الترتيبات الممكنة ذات عنصرين في E؟

$$A_n^k = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

مثال 2:

لدينا المجموعة E مكوّنة من الأرقام التّالية: $\{1,2,3,4,5,6\}$، كم من عدد يمكن تشكيله مكوّن من 3 أرقام مختلفة؟

MOKHFI CHOUAIB

نلاحظ أنّ الترتيب مأخوذ بعين الاعتبار في تشكيل الأعداد، كما أنّ التكرار غير ممكن لأنه اشترط أن تكون الأرقام المشكّلة للعدد مختلفة، وعليه فالأعداد الّتي يمكن تشكيلها هي بعدد الترتيبات الّتي يمكن تشكيلها A_n^k، ومنه فإنّ: $n = 6$، $k = 3$، لنحصل على:

$$A_n^k = A_6^3 = 120$$

مثال 3:

وحدة إنتاجيّة مكوّنة من 35 شخصا، نريد تشكيل لجنة مكوّنة من رئيس، نائب رئيس وأمين عام، ما هو عدد اللجان المختلفة الّتي يمكن تشكيلها؟

بما أنه تمّ تحديد المهام، فإنّ الترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وبما أنّ الأمر متعلّق بأشخاص بعينهم فالتكرار مستحيل، وعليه فلإيجاد عدد اللجان المختلفة في هذه الحالة نحتاج إيجاد عدد الترتيبات A_n^k الممكنة، حيث: $n = 35$ و $k = 3$، ومنه:

$$A_n^k = A_{35}^3 = \mathbf{39270}$$

تمرين

كيس يحتوي على 12 كرة، 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و5 سوداء (N)، نسحب عشوائيًا 3 كرات **على التوالي بدون إرجاع.**

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب؟

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"؟

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان"؟

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون"؟

الحل

1). حساب عدد الحالات الممكنة:

بما أنّ السحب على التوالي وليس دفعة واحدة وبما أنّ السحب بدون إرجاع فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد الترتيبات الممكنة A_n^k ذات 3 عناصر من مجموعة شاملة E عدد عناصرها 12، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو:

$$A_n^k = A_{12}^3 = \mathbf{1320}$$

2). احتمال الأحداث:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R فنعتبر $n = 3$ لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر $k = 3$ لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الملائمة للحصول على "3 كرات حمراء" هو A_3^3، نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون كالآتي:

$$P(A) = \frac{A_3^3 + A_4^3 + A_5^3}{A_{12}^3} = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}$$

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان":

نأخذ بعين الاعتبار ترتيب سحب الكرات لأنّ السحب على التوالي، وعليه يمكن الحصول على التبديلات:

$$(R,V,N),(R,N,V)$$
$$(N,R,V),(N,V,R)$$
$$(V,N,R),(V,R,N)$$

✓ يمكننا حساب عدد التبديلات بحساب المعامل α.

وعليه فاحتمال حصولنا على "3 كرات مختلفة اللون":

$$P(B) = 6 \times \frac{(A_3^1 \times A_4^1 \times A_5^1)}{A_{12}^3} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون": يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

■ الطريقة الأولى:

الحالة C تمثّل الحالة المتبقّية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه يصبح لدينا:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{44-3-12}{44} = \frac{29}{44}$$

MOKHFI CHOUAIB

■ الطريقة الثانية:

بما أنّ السحب على التوالي، فالترتيب مأخوذ بعين الاعتبار، وعليه يمكن الحصول بالنسبة للكرات الحمراء على التبديلات الآتية:

$$(R,R,X),(R,X,R),(X,R,R)$$

حيث X يمثّل لونا آخر (إمّا أخضر أو أسود)، وبالتالي عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو: $3\times(A_3^2\times A_9^1)$، بينما عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين خضراوين فقط" هو: $3\times(A_4^2\times A_8^1)$، ذلك أنّنا نسحب كرتين خضراوين A_3^2 مع واحدة من الكرات المتبقّية (عدا الكرات الخضراء) A_8^1، كذلك نفعل مع اللون الأسود ليكون عدد الحالات الملائمة: $3\times(A_5^2\times A_7^1)$، فنحصل:

$$P(C)=\frac{3\times(A_3^2\times A_9^1)+3\times(A_4^2\times A_8^1)+3\times(A_5^2\times A_7^1)}{A_{12}^3}$$

$$P(C)=\frac{870}{1320}=\frac{29}{44}$$

4. التبديلة:

○ نسمّي تبديلة لعناصر المجموعة E كلّ ترتيبة n عنصرا من المجموعة E.

○ عدد التبديلات الممكنة لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي: $A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$

وعليه يكون عدد التبديلات الممكنة لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي $n!$ والمعرّف بالعلاقة التّالية:

$$\boldsymbol{n!=n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1}$$

✓ $0!=1!=1$

مثال:

ما هو عدد الوضعيّات الّتي يمكن أن يجلس بها 8 أشخاص حول طاولة مستديرة (من بجانب من)؟

نحسب عدد التبديلات الممكنة لمجموعة مكوّنة من 8 عناصر، وعليه فإنّ عدد الوضعيّات الممكنة:

$8!=\mathbf{40320}$

5. التوفيقة

○ نسمّي توفيقة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) حيث $0\le k\le n$، كلّ جزء من E يشمل k عنصرا.

○ عدد التّوفيقات الممكنة في E ذات k عنصرا (من عناصر المجموعة E) هو العدد الطبيعي C_n^k أو $\binom{k}{n}$ المعرّف بالعلاقة التّالية:

$$\boldsymbol{C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

✓ يمكن ملاحظة أنّ التوفيقة هي مجموعة جزئيّة من المجموعة الشاملة حيث تشتمل على k عنصرا.

✓ نلاحظ أنّ عدد عناصر التوفيقة دائما أصغر من أو يساوي عدد عناصر المجموعة الشاملة، وذلك لتعذّر أن تكون التوفيقة مجموعة جزئيّة بالنسبة للمجموعة الشاملة وفي نفس الوقت عدد عناصرها أكبر من عدد عناصر المجموعة الشاملة.

✓ عدد التوفيقات الممكنة في E ذات n عنصرا من عناصر E هو 1، وهذه التوفيقة هي نفسها المجموعة E حيث يمكن التعبير عن ذلك بالعدد:

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1$$

✓ لدينا أيضا:

$C_n^0=1$ $\qquad C_n^1=n$ $\qquad C_n^{n-1}=n$

MOKHFI CHOUAIB

مثال 1:

قسم مكوّن من 30 تلميذا، يراد تشكيل لجنة لتمثيل هذا القسم مكوّنة من 3 أعضاء في ان واحد (المهام غير محدّدة)، احسب عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

عدد اللجان الممكن تشكيلها مساو لعدد التوفيقات الممكنة C_n^k وهو ما يساوي:

$$C_n^k = C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$$

تمرين 1

نشكّل مجلسا استشاريّا مكوّنا من 4 أعضاء مختارين من بين 7 رجال و 5 نساء.

1). ما هو عدد المجالس الّتي يمكن تشكيلها؟

2). ما هو عدد المجالس المكوّنة من:

- A: الرجال فقط؟
- B: امرأة فقط؟
- C: امرأة على الأقل؟
- D: أربعة أعضاء من نفس الجنس؟

الحل

1). حساب عدد المجالس:

المجلس الاستشاري يشكّل مجموعة جزئيّة من المجموعة الكليّة، وعليه فإنّ عدد المجالس بعدد التوفيقات C_n^k ذات 4 عناصر من المجموعة الشاملة ذات 12 عنصرا، أي أنّ: $n = 12$، $k = 4$، وعليه فعدد المجالس:

$$C_n^k = C_{12}^4 = \mathbf{495}$$

2). حساب عدد المجالس المكوّنة من:

- الرجال فقط $P(A)$: حيث تصبح المجموعة الكليّة هي عدد الرجال: $n = 7$، $k = 4$ بعدد أعضاء المجلس، ومنه:

$$P(A) = C_7^4 = 35$$

- امرأة فقط $P(B)$:

$$P(B) = C_5^1 \times C_7^3 = 175$$

- امرأة على الأقل $P(C)$:

$$P(C) = C_5^1 \times C_7^3 + C_5^2 \times C_7^2 + C_5^3 \times C_7^1 + C_5^4 \times C_7^0$$
$$P(C) = 460$$

- أربعة أعضاء من نفس الجنس $P(D)$:

$$P(D) = C_7^4 + C_5^4 = 40$$

تمرين 2

كيس يحتوي على 12 كرة: 3 حمراء (R)، 4 خضراء (V) و 5 سوداء (N)، نسحب عشوائيّا 3 كريات في آن واحد.

1). احسب عدد الحالات لهذا السحب؟

2). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الحصول على 3 كرات من نفس اللون"؟

2-ب). B: "الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان"؟

2-ج). C: "الحصول على كرتين من نفس اللون"؟

2-د). D: "الحصول على الأقل على كرتين حمراوين"؟

2-هـ). E: "الحصول على الأكثر على كرة خضراء"؟

الحل

1). حساب عدد الحالات الممكنة: بما أنّ السحب دفعة واحدة فإنّ عدد الحالات الممكنة هو عدد التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث أنّ العدد الكلّي للكرات $n = 12$، وعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة $k = 3$، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو:

$$C_n^k = C_{12}^3 = \mathbf{220}$$

2). احتمال الأحداث: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "3 كرات من نفس اللون":

بالنسبة للكرات الحمراء R نعتبر $n = 3$ لوجود ثلاث كرات حمراء فقط، ونعتبر $k = 3$ لأنّ الكرات المسحوبة هي 3 كرات، وبذلك يصبح عدد الحالات الممكنة كي نحصل على "3 كرات حمراء" هو C_3^3،

نقوم بنفس الشيء بالنسبة لباقي الألوان، وبالتالي يمكن حساب احتمال حصولنا على 3 كرات من نفس اللون:

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

2-ب). B: "3 كرات مختلفة الألوان":

بما أنّ السحب دفعة واحدة فلا اعتبار للترتيب بل يكفي لتحقّق الحادثة B أن يتمّ سحب كرة حمراء C_3^1، وكرة خضراء C_4^1، وأخرى سوداء C_5^1، وعليه:

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

2-ج). C: "كرتين من نفس اللون": يمكن حساب احتمال حصول C بطريقتين مختلفتين:

■ الطريقة الأولى:

الحالة C تمثّل الحالة المتبقّية ممكنة الحصول بعد حالتي أن تكون الكرات الثلاث كلّها من نفس اللون أو كلّها من ألوان مختلفة، وعليه يصبح لدينا:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$
$$P(C) = 1 - \frac{3}{44} - \frac{3}{11} = \frac{44-3-12}{44} = \frac{29}{44}$$

■ الطريقة الثانية:

عدد الحالات الملائمة للحصول على "كرتين حمراوين فقط" هو $C_3^2 \times C_9^1$، وكذلك نفعل باللونين المتبقّيين لنحصل على:

$$P(C) = \frac{(C_3^2 \times C_9^1) + (C_4^2 \times C_8^1) + (C_5^2 \times C_7^1)}{C_{12}^3}$$

$$P(C) = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

2-د). D: "الحصول على الأقل على كرتين حمراوين": هنا لدينا حالتين: إمّا كرتين حمراوين فقط وإمّا ثلاث كرات حمراء، وعليه فإنّ:

$$P(D) = \frac{(C_3^2 \times C_9^1) + (C_3^3 \times C_9^0)}{C_{12}^3} = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}$$

2-هـ). E: "الحصول على الأكثر على كرة خضراء": هنا لدينا حالتين: إمّا كرة خضراء واحدة فقط وإمّا لا كرة خضراء، وعليه فإن:

$$P(E) = \frac{(C_4^1 \times C_8^2) + (C_4^0 \times C_8^3)}{C_{12}^3} = \frac{168}{220} = \frac{42}{55}$$

تمرين 3

يحتوي كيس على 10 كرات، 6 منها بيضاء تحمل الأرقام: 7,6,5,4,3,2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام: 8,7,6,5، نسحب كرتين في آن واحد.

احسب احتمال:

1). A: "سحب كرتين من لونين مختلفين"؟

2). B: "سحب كرتين تحملان عددين زوجيين"؟

3). C: "سحب كرتين بيضاوين علماً أنّهما تحملان عددين زوجيين"؟

الحل

بما أنّ السحب يتمّ في آن واحد فإنّ عدد الحالات الممكنة مساوٍ لعدد التوفيقات C_n^k ذات عنصرين من مجموعة شاملة من 10 عناصر، أي أنّ: $n = 10$ بعدد الكرات الإجمالي، $k = 2$ بعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة، وعليه فعدد الحالات الممكنة هو:

$$C_n^k = C_{10}^2 = 45$$

1). حساب $P(A)$: $P(A) = \frac{C_6^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

2). حساب $P(B)$: $P(B) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

3). حساب $P(C)$:

■ نضع D: "سحب كرتين بيضاوين"، وعليه:

$$P(C) = P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)}$$

■ حساب $P(B \cap D)$:

معناه حساب احتمال سحب كرتين بيضاوين وتحملان عددا زوجيّا، بالرجوع إلى الكرات البيضاء فإنّ 3 منها فقط يحمل عددا زوجيّا،

MOKHFI CHOUAIB

وعليه يصبح $n = 3$، $k = 2$، وعليه فعدد الحالات لسحب كرتين بيضاوين تحملان عددا زوجيا هو $C_3^2 = 3$، ومنه:

$$P(B \cap D) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لنتمكن بعدها من حساب $P(C)$

- حساب $P(C)$:

$$P(C) = P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)}$$

$$P(C) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{9}} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

08. دستور ثنائي الحدّ

مبرهنة:

من أجل كلّ عددين حقيقيّين غير معدومين a وb، ومن أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، لدينا:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$$

مثال 1: باستعمال دستور ثنائي الحدّ انشر المتطابقة الشهيرة $(a+b)^2$؟

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k \, a^{2-k} \, b^k$$

$$(a+b)^2 = (C_2^0 \, a^{2-0} \, b^0) + (C_2^1 \, a^{2-1} \, b^1) + (C_2^2 \, a^{2-2} \, b^2)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 2: $(a-2)^4$؟

$$(a-2)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \, a^{4-k} \, (-2)^k$$

$$(a-2)^4 = (C_4^0 \, a^{4-0} \, (-2)^0) + (C_4^1 \, a^{4-1} \, (-2)^1) + (C_4^2 \, a^{4-2} \, (-2)^2) + (C_4^3 \, a^{4-3} \, (-2)^3) + (C_4^4 \, a^{4-4} \, (-2)^4)$$

$$(a-2)^4 = a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$$

ملخص

طريقة العد / المطلوب	قائمة	ترتيبية	توفيقة
تشكيل أعداد	يمكن تكرار الأرقام	الأرقام لا تكرر	-
تشكيل لجان	-	المهام محددة	المهام غير محددة
سحب من كيس	على التوالي بإرجاع	على التوالي دون إرجاع	في آن واحد
مجموعات	-	-	أجزاء المجموعة

MOKHFI CHOUAIB

II. تمارين مهمّة جدا

01. تمرين مهم 01

بونيوب- مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 (قائمة) رقم 4

✓ سحب من كيس على التوالي وبإرجاع

✍ نصّ التمرين

يحتوي كيس على 12 كريّة منها: 3 كريّات زرقاء تحمل الأرقام 1، 1، 2، و4 كريّات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2، و5 كريّات خضراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 2، 3.

نسحب عشوائيًا 3 كريّات **على التوالي وبإرجاع.**

1). نعتبر الأحداث التّالية:

- A: "سحب ثلاث كريّات من نفس اللون".
- B: "سحب ثلاث كريّات من ألوان مختلفة".
- C: "سحب كريّتين من نفس اللون".
- D: "سحب ثلاث كريّات تحمل نفس الرقم".
- E: "سحب ثلاث كريّات تحمل أرقام مختلفة".
- F: "سحب كريّتين تحملان نفس الرقم".
- G: "سحب كريّة على الأقل خضراء".
- H: "سحب كريّة على الأكثر خضراء".
- I: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 6".
- J: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 7".

1-أ). احسب الاحتمالات التّالية:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F), P(G)$
$P(H), P(I), P(J), P(A\cap D), P_D(A),$
$P(A\cup D), P(B\cap D), P(B\cup D),$
$P(A\cap D\cap I), P(A\cap H), P(A\cap G)$?

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال.

1-ب). هل الحادثتان A و G مستقلّتان؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الأرقام الزوجيّة المحصّل عليها.

عيّن قيم x ثمّ هات قانون احتمال المتغيّر العشوائي x وعيّن أمله الرياضي؟

✍ الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: السحب على التوالي وبإرجاع، ومنه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ القوائم n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$n^k = 12^3 = 1728$$

1-أ). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ-1). A: "3 كريّات من نفس اللون": وهذا يعني إمّا أن تكون الكريّات الثلاثة المسحوبة زرقاء 3^3 أو حمراء 4^3 أو خضراء 5^3، ومنه:

$$P(A) = \frac{3^3+4^3+5^3}{12^3} = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8}$$

1-أ-2). B: "3 كريّات من ألوان مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب كرة زرقاء 3^1 وأخرى حمراء 4^1 وأخرى خضراء 5^1، ولكن بما أنّ السحب على التوالي فالترتيب مهمّ، لذا فإنّنا نحصل على:

(B,V,R) أو (B,R,V) أو
(R,V,B) أو (R,B,V) أو
(V,R,B) أو (V,B,R)، ومنه:

✓ يمكننا حساب عدد التبديلات لكلّ لون دون تفصيل:
$$\alpha = \frac{k!}{x_B!\times x_V \times x_R!} = \frac{3!}{1!\times 1!\times 1!} = 6$$

$$P(B) = \frac{6(3^1\times 4^1\times 5^1)}{12^3} = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-أ-3). C: "كريتين من نفس اللون": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

- الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكّل إحدى الثلاثيات التالية:

(R,B,B) أو (B,R,B) أو (B,B,R) أو

(V,B,B) أو (B,V,B) أو (B,B,V) أو

(B,R,R) أو (R,B,R) أو (R,R,B) أو

(V,R,R) أو (R,V,R) أو (R,R,V) أو

(B,V,V) أو (V,B,V) أو (V,V,B) أو

(R,V,V) أو (V,R,V) أو (V,V,R) ، ومنه:

> ✓ يمكننا حساب عدد التبديلات لكلّ لون مباشرة:
>
> $$\alpha = \frac{k!}{X_B! \times X_Z!} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

$$P(C) = \frac{3(3^2\times4^1+3^2\times5^1+4^2\times3^1+4^2\times5^1+5^2\times3^1+5^2\times4^1)}{12^3}$$

$$P(C) = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3}$$

- الطريقة الثانية: حساب احتمال الحادثة C اعتماداً على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث A، B، C، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة لهذا السحب، وعليه فإنّ:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$P(C) = 1 - (\frac{3+5}{24}) = \frac{24-8}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

1-أ-4). D: "3 كريّات تحمل نفس الرقم": وهذا يعني إمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 1 من أصل خمس كريّات تحمل هذا الرقم 5^3، وإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 2 من أصل ستّ كريّات تحمل هذا الرقم 6^3، وإمّا أن نسحب الكرة الّتي تحمل الرقم 3 ثلاث مرّات 1^3 ومنه:

$$P(D) = \frac{5^3+6^3+1^3}{12^3} = \frac{342}{1728} = \frac{19}{96}$$

1-أ-5). E: "3 كريّات تحمل أرقام مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب إحدى الكريّات الخمسة الّتي تحمل الرقم 1: 5^1 مع إحدى الكريّات الستّة الّتي تحمل الرقم 2: 6^1 مع الكرية الّتي تحمل الرقم 3: 1^1، وبمراعاة الترتيب ينتج 6 تبديلات مختلفة:

$(1,3,2)$ أو $(1,2,3)$ أو

$(2,3,1)$ أو $(2,1,3)$ أو

$(3,2,1)$ أو $(3,1,2)$، ومنه:

$$P(E) = \frac{6(5^1\times6^1\times1^1)}{12^3} = \frac{180}{1728} = \frac{5}{48}$$

1-أ-6). F: "كريّتين تحملان نفس الرقم": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

- الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكّل 4 ثلاثيات مختلفة، وبمراعات الترتيب نحصل على 3 تبديلات لكل ثلاثيّة، ومنه:

$$P(F) = \frac{3(5^2\times6^1+5^2\times1^1+6^2\times5^1+6^2\times1^1+1^2\times6^1+1^2\times5^1)}{12^3}$$

$$P(F) = \frac{1206}{1728} = \frac{67}{96}$$

- الطريقة الثانية: لحساب احتمال الحادثة F بالاعتماد على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث D، E، F، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة لهذا السحب، وعليه فإنّ:

$$P(D) + P(E) + P(F) = 1$$
$$P(F) = 1 - [P(D) + P(E)]$$
$$P(F) = 1 - (\frac{19}{96} - \frac{5}{48}) = \frac{96-19-10}{96} = \frac{67}{96}$$

1-أ-7). G: "كريّة على الأقل خضراء": هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات من ألوان مختلفة $5^1 \times 3^1 \times 4^1$ تتبادل بينها 6 مرّات مراعاة للترتيب نظرا لأنّ السحب على التوالي، أو أن يتم سحبها لتشكّل:

(V,X,X) $5^1 \times 3^2 + 5^1 \times 4^2 + 5^1$، أو

(V,V,X) $5^2 \times 3 + 5^2 \times 4$،

ومع مراعات الترتيب فإنّ كلّا من هذه الثنائيّات تتبادل ثلاث مرّات، أو أن تكون كلّ الكرات خضراء 5^3:

$P(G) = \frac{6(5^1\times3^1\times4^1)+3(5^1\times3^2+5^1\times4^2+5^2\times3^1+5^2\times4^1)+5^3}{12^3}$

$P(G) = \frac{1385}{1728}$

1-أ-8). H: "كريّة على الأكثر خضراء": وهذا يعني إمّا أن يتمّ سحب كريّة خضراء والباقي غير خضراء، وإمّا أن تكون كلّ الكرات المسحوبة غير خضراء.

- الطريقة الأولى: إمّا أن يتمّ سحب الكرات من ألوان مختلفة $5^1 \times 3^1 \times 4^1$ تتبادل فيما بينها 6 مرّات مراعاة للترتيب نظرا لأنّ السحب على التوالي، أو أن يتمّ سحبها لتشكّل إحدى الثّنائيات التّالية:

$5^1 \times 3^2 + 5^1 \times 4^2 \ (V, X, X)$

$3^2 \times 4^1 \ (B, B, R)$

$4^2 \times 3^1 \ (R, R, B)$،

وبمراعات الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات، أو أن يتمّ سحب كلّ الكرات بيضاء 3^3 أو كلّها حمراء 4^3

$P(H) = \frac{6(5^1\times3^1\times4^1)+3(5^1\times3^2+5^1\times4^2+3^2\times4^1+4^2\times3^1)+3^3+4^3}{12^3}$

$P(H) = \frac{1078}{1728} = \frac{539}{864}$

- الطريقة الثانية: ليكن y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكريّات الخضراء المحصّلة: $y \in \{0, 1, 2, 3\}$، وحسب قانون الاحتمال فإنّ:

$P(y = 0) + P(y = 1) + P(y = 2) + P(y = 3) = 1$

$P(y = 0) + P(y = 1) = 1 - [P(y = 2) + P(y = 3)]$

ومنه فإن:

$P(H) = P(y = 0) + P(y = 1)$

$P(H) = 1 - [P(y = 2) + P(y = 3)]$

$P(H) = 1 - [\frac{3(5^2\times3^1+5^2\times4^1)}{12^3} + \frac{5^3}{12^3}]$

$P(H) = \frac{1728-650}{1728} = \frac{1078}{1728} = \frac{539}{864}$

1-أ-9). I: "3 كريّات مجموع أرقامها يساوي 6": للحصول على مجموع مساو للعدد 6 انطلاقا من جمع الأرقام الّتي تحملها الكريّات فإمّا أن يتمّ سحب 3 كريّات تحمل كلّها العدد 2: 6^3، وإمّا سحب 3 كريّات تحمل الأعداد 1 و2 و3: $5^1 \times 6^1 \times 1^1$ وبمراعات الترتيب فسينجم عن ذلك 6 تبديلات:

$P(I) = \frac{6^3+6(5^1\times6^1\times1^1)}{12^3} = \frac{396}{1728} = \frac{11}{48}$

1-أ-10). J: "3 كريّات مجموع أرقامها يساوي 7": للحصول على هذا المجموع انطلاقا من الأرقام الّتي تحملها الكريّات المسحوبة فلا بدّ من سحب إحدى الثّلاثيتين: $(2, 2, 3)$: $6^2 \times 1^1$ أو $(3, 3, 1)$: $1^2 \times 5^1$، وبمراعات الترتيب نحصل على 3 تبديلات لكل ثلاثيّة، وعليه فإنّ:

$P(J) = \frac{3(6^2\times1^1+1^2\times5^1)}{12^3} = \frac{123}{1728} = \frac{41}{576}$

1-أ-11). $P(A \cap D)$: "سحب 3 كريّات من نفس اللون وتحمل نفس الرقم": أي 3 كريّات كلّها تحمل الرقم 1 وكلّها زرقاء أو كلّها حمراء أو كلّها خضراء $1^3+2^3+2^3$، أو تحمل كلّها الرقم 2 وكلّها زرقاء أو كلّها حمراء أو كلّها خضراء $1^3+2^3+3^3$، أو تحمل كلّها الرقم 3 وتكون كلّها خضراء 1^3:

$P(A \cap D) = \frac{2^3+2^3+1^3+1^3+2^3+3^3+1^3}{12^3}$

$P(A \cap D) = \frac{54}{1728} = \frac{1}{32}$

1-أ-12). $P_D(A)$:

$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{19}{96}} = \frac{3}{19}$

1-أ-13). $P(A \cup D)$: لدينا:

$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$P(A \cup D) = \frac{1}{8} + \frac{19}{96} - \frac{1}{32} = \frac{28}{96} = \frac{7}{24}$

MOKHFI CHOUAIB

1-أ-14). $P(B\cap D)$: "سحب 3 كريات من ألوان مختلفة وتحمل نفس الرقم": لا بد من سحب 3 كريات تحمل الرقم 1 إحداها زرقاء 2^1 وأخرى حمراء 2^1 وأخرى خضراء 1^1: $1^1\times 2^1\times 2^1$، كذلك بالنسبة لثلاث كريات تحمل الرقم 2: $3^1\times 2^1\times 1^1$، وبمراعات الترتيب نحصل على 6 تبديلات:

$$P(B\cap D)=\frac{6(2^1\times 2^1\times 1^1+1^1\times 2^1\times 3^1)}{12^3}$$

$$P(B\cap D)=\frac{6(4+6)}{1728}=\frac{60}{1728}=\frac{5}{144}$$

1-أ-15). $P(B\cup D)$: لدينا:

$$P(B\cup D)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)$$

$$P(B\cup D)=\frac{5}{24}+\frac{19}{96}-\frac{1}{44}$$

$$P(B\cup D)=\frac{132480}{331776}=\frac{115}{288}$$

1-أ-16). $P(A\cap D\cap I)$: "سحب 3 كريات من نفس اللون وتحمل نفس الرقم ومجموع أرقامها مساو إلى 6": وهذا يتحقق بسحب 3 كريات كلّها تحمل رقم 2 ألوانها كلّها زرقاء أو حمراء أو خضراء $1^3+2^3+3^3$، ومنه:

$$P(A\cap D\cap I)=\frac{1^3+2^3+3^3}{12^3}=\frac{36}{1728}=\frac{1}{48}$$

1-أ-17). $P(A\cap H)$: "سحب 3 كريات من نفس اللون مع سحب كرة خضراء على الأكثر": لا بدّ من سحب 3 كريات كلّها زرقاء 3^3 أو كلّها حمراء 4^3:

$$P(A\cap H)=\frac{3^3+4^3}{12^3}=\frac{91}{1728}$$

1-أ-18). $P(A\cap G)$: "سحب 3 كريات من نفس اللون وسحب كرية على الأقل خضراء": لا يتحقّق هذا إلّا إذا تمّ سحب 3 كريات خضراء 5^3، ومنه:

$$P(A\cap G)=\frac{5^3}{12^3}=\mathbf{\frac{125}{1728}}$$

1-ب). معرفة إذا كانت A و G مستقلّتان: تكون A و G مستقلّتان إذا كان:

$$P(A\cap G)=P(A)\times P(G)$$

لدينا:

$$P(A\cap G)=\frac{125}{1728}$$

$$P(A)\times P(G)=\frac{1}{8}\times\frac{1385}{1728}$$

$$P(A\cap G)\neq P(A)\times P(G)$$

فالحادثتان A و G **غير مستقلّتان.**

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). تعيين قيم x الممكنة: $x\in\{0,1,2,3\}$

- $x=0$: معناه سحب 3 كريات كلّها تحمل أرقاما فردية 6^3.
- $x=1$: معناه سحب 3 كريات واحدة منها فقط تحمل رقما زوجيّا، وبمراعات الترتيب نحصل على ستّ تبديلات من الثلاثيّة $(2,1,3)$: $6\times(6^1\times 5^1\times 1^1)$ أو ثلاث تبديلات من الثلاثيّتين $(2,1,1)$، $(2,3,3)$:
$$3\times(6^1\times 5^2+6^1\times 1^2)$$
- $x=2$: معناه سحب 3 كريات كرتين منها فقط تحملان رقما زوجيّا، ومع مراعات الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات لكل من: $(2,2,3)$، $(2,2,1)$، ومنه: $3\times(6^2\times 5^1+6^2\times 1^1)$
- $x=3$: سحب 3 كريات ذات أرقام زوجيّة 6^3.

2-ب). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=0)=\frac{6^3}{12^3}=\frac{216}{1728}=\frac{1}{8}$$

$$P(x=1)=\frac{6(6^1\times 5^1\times 1^1)+3(6^1\times 5^2+6^1\times 1^2)}{12^3}$$

$$P(x=1)=\frac{648}{1728}=\frac{3}{8}$$

$$P(x=2)=\frac{3(6^2\times 5^1+6^2\times 1^1)}{12^3}=\frac{648}{1728}=\frac{3}{8}$$

$$P(x=3)=\frac{6^3}{12^3}=\frac{216}{1728}=\frac{1}{8}$$

MOKHFI CHOUAIB

○ نلخّصه في الجدول التّالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2-ج). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=4} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=0\left(\frac{1}{8}\right)+1\left(\frac{3}{8}\right)+2\left(\frac{3}{8}\right)+3\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$E(x)=\frac{0+3+6+3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

02. تمرين مهمّ 02

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 (ترتيبة) رقم 02

✓ سحب من كيس على التوالي وبدون إرجاع

نصّ التمرين

يحتوي كيس على 12 كريّة منها: 3 كريّات زرقاء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و4 كريّات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2 و5 كريّات خضراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 2، 3.

نسحب عشوائيًا 3 كريّات **على التوالي وبدون إرجاع.**

1). نعتبر الأحداث التّالية:

○ A : "سحب ثلاث كريّات من نفس اللون".

○ B : "سحب ثلاث كريّات من ألوان مختلفة".

○ C: "سحب كريّتين من نفس اللون".

○ D: "سحب ثلاث كريّات تحمل نفس الرقم".

○ E: "سحب ثلاث كريّات تحمل أرقام مختلفة".

○ F: "سحب كريّتين تحملان نفس الرقم".

○ G: "سحب كريّة على الأقل خضراء".

○ H: "سحب كريّة على الأكثر خضراء".

○ I: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 6".

○ J: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 7".

1-أ). احسب الاحتمالات التّالية:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F), P(G),$
$P(H), P(I), P(J), P(A\cap D), P_D(A),$
$P(A\cup D), P(B\cap D), P(B\cup D),$
$P(A\cap D\cap I), P(A\cap H), P(A\cap G)?$

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال

1-ب). هل الحادثتان A و G مستقلّتان؟

2). ليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجيّة المحصّل عليها.

عيّن قيم x ثمّ هات قانون احتمال المتغيّر العشوائي x وعيّن أمله الرياضي؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

■ تعيين طريقة العدّ: السحب على التوالي وبدون إرجاع، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ الترتيبات الممكنة A_n^k.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$A_n^k = A_{12}^3 = 1320$$

1-أ). حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ-1). A: "3 كريّات من نفس اللون": وهذا يعني إمّا أن تكون الكريّات الثلاثة المسحوبة زرقاء A_3^3 أو حمراء A_4^3 أو خضراء A_5^3، ومنه:

$$P(A)=\frac{A_3^3+A_4^3+A_5^3}{A_{12}^3}=\frac{90}{1320}=\frac{3}{44}$$

1-أ-2). B: "3 كريّات من ألوان مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب كرة زرقاء A_3^1 وأخرى حمراء A_4^1 وأخرى خضراء A_5^1، ولكن بما أنّ السحب على التوالي فالترتيب مهم، لذا فإنّنا نحصل على:

(B,R,V) أو (B,V,R) أو

(R,B,V) أو (R,V,B) أو

(V,B,R) أو (V,R,B)، ومنه:

MOKHFI CHOUAIB

$$P(B) = \frac{6(A_3^1 \times A_4^1 \times A_5^1)}{A_{12}^3} = \frac{6(3 \times 4 \times 5)}{1320}$$

$$P(B) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$$

1-أ-3). C: "كرتين من نفس اللون": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

■ الطريقة الأولى: حيث يتمّ سحب الكرات لتشكل:

(R,B,B) أو (B,R,B) أو (B,B,R) أو

(V,B,B) أو (B,V,B) أو (B,B,V) أو

(B,R,R) أو (R,B,R) أو (R,R,B) أو

(V,R,R) أو (R,V,R) أو (R,R,V) أو

(B,V,V) أو (V,B,V) أو (V,V,B) أو

(R,V,V) أو (V,R,V) أو (V,V,R)، ومنه:

$$P(C) = \frac{3(A_5^2 \times A_4^1 + A_5^2 \times A_3^1 + A_4^2 \times A_3^1 + A_4^2 \times A_5^1 + A_3^2 \times A_5^1 + A_3^2 \times A_4^1)}{A_{12}^3}$$

$$P(C) = \frac{870}{1320} = \frac{29}{44}$$

■ الطريقة الثانية: حساب احتمال الحادثة C اعتماداً على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث A، B، C، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$P(C) = 1 - (\frac{3+12}{44}) = \frac{44-15}{44} = \frac{29}{44}$$

1-أ-4). D: "3 كريّات تحمل نفس الرقم": وهذا يعني إمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة كلّها الرقم 1 أو تحمل كلّها الرقم 2، إمّا الرقم 3 فلا يمكن لكل الكريّات المسحوبة أن تحمله لأنّه لا يوجد إلّا كرة واحدة تحمل هذا الرقم، وعليه فإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 1 من أصل خمس كريّات تحمل هذا الرقم A_5^3، وإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 2 من أصل ستّ كريّات تحمل هذا الرقم A_6^3، ومنه:

$$P(D) = \frac{A_5^3 + A_6^3}{A_{12}^3} = \frac{180}{1320} = \frac{3}{22}$$

1-أ-5). E: "3 كريّات تحمل أرقام مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب إحدى الكرات الخمسة الّتي تحمل الرقم 1 A_5^1 مع إحدى الكرات الستّة الّتي تحمل الرقم 2 A_6^1 مع الكرة الّتي تحمل الرقم 3 A_1^1، وبمراعاة الترتيب ينتج 6 تبديلات مختلفة:

$(1,3,2)$ أو $(1,2,3)$ أو

$(2,3,1)$ أو $(2,1,3)$ أو

$(3,2,1)$ أو $(3,1,2)$، ومنه:

$$P(E) = \frac{6(A_5^1 \times A_6^1 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{180}{1320} = \frac{3}{22}$$

1-أ-6). F: "كرتين تحملان نفس الرقم": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

■ الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكل 4 ثلاثيات مختلفة، وبمراعاة الترتيب نحصل على 3 تبديلات لكل ثلاثية، ومنه:

$$P(F) = \frac{3(A_5^2 \times A_6^1 + A_5^2 \times A_1^1 + A_6^2 \times A_5^1 + A_6^2 \times A_1^1)}{A_{12}^3}$$

$$P(F) = \frac{960}{1320} = \frac{8}{11}$$

■ الطريقة الثانية: بحساب احتمال الحادثة F اعتمادا على قانون الاحتمال العام حيث أنّ D، E، F، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة:

$$P(D) + P(E) + P(F) = 1$$
$$P(F) = 1 - [P(D) + P(E)]$$
$$P(F) = 1 - \frac{3+3}{22} = \frac{22-6}{22} = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

1-أ-7). G: "كريّة على الأقل خضراء": هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات من ألوان مختلفة $A_5^1 \times A_3^1 \times A_4^1$ تتبادل بينها 6 مرّات مراعاة للترتيب نظرا لأنّ السحب على التوالي، أو أن يتم سحبها لتشكّل:

(V,X,X) $A_5^1 \times A_3^2 + A_5^1 \times A_4^2$، أو

(V,V,X) $A_5^2 \times A_3^1 + A_5^2 \times A_4^1$،

وبمراعاة الترتيب فإنّ كلّ من هذه الثنائيّات تتبادل ثلاث مرّات، أو أن تكون كلّ الكرات خضراء A_5^3:

$$P(G) = \frac{6(A_5^1 \times A_3^1 \times A_4^1) + 3(A_5^1 \times A_3^2 + A_5^1 \times A_4^2 + A_5^2 \times A_3^1 + A_5^2 \times A_4^1) + A_5^3}{A_{12}^3}$$

$$P(G) = \frac{1110}{1320} = \frac{37}{44}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-أ-8). H: كريّة على الأكثر خضراء": وهذا يعني إمّا أن يتمّ سحب كريّة خضراء والباقي غير خضراء، وإمّا أن تكون كلّ الكرات المسحوبة غير خضراء.
ليكن y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكريّات الخضراء المحصّل عليها، ومنه:
$y \in \{0,1,2,3\}$، وحسب قانون الاحتمال فإنّ:

$$P(y=0)+P(y=1)+P(y=2)+P(y=3)=1$$
$$P(y=0)+P(y=1)=1-[P(y=2)+P(y=3)]$$

ومنه فإنّ:

$$P(H)=P(y=0)+P(y=1)$$
$$P(H)=1-\left[\frac{3(A_5^2\times A_3^1+A_5^2\times A_4^1)}{A_{12}^3}+\frac{A_5^3}{A_{12}^3}\right]$$
$$P(H)=\frac{420-60}{1320}=\frac{840}{1320}=\frac{7}{11}$$

1-أ-9). I: "3 كريّات مجموع أرقامها يساوي 6":
للحصول على مجموع مساو للعدد 6 انطلاقا من جمع الأرقام الّتي تحملها الكريّات فإمّا أن يتمّ سحب 3 كريّات تحمل كلّها العدد 2 A_6^3، وإمّا سحب 3 كريّات تحمل الأعداد 1 و2 و3 $A_5^1\times A_6^1\times A_1^1$ وبمراعات الترتيب فسينجم عن ذلك 6 تبديلات:

$$P(I)=\frac{A_6^3+6(A_5^1\times A_6^1\times A_1^1)}{A_{12}^3}=\frac{300}{1320}=\frac{5}{22}$$

1-أ-10). J: "3 كريّات مجموع أرقامها يساوي 7":
للحصول على هذا المجموع انطلاقا من الأرقام الّتي تحملها الكريّات المسحوبة فلا بدّ من سحب كريّتين تحملان الرقم 2 A_6^2 مع الكريّة الّتي تحمل الرقم 3 A_1^1، بمراعات الترتيب نحصل على 3 تبديلات، ومنه:

$$P(J)=\frac{3(A_6^2\times A_1^1)}{A_{12}^3}=\frac{90}{1320}=\frac{3}{44}$$

1-أ-11). $P(A\cap D)$: "سحب 3 كريّات من نفس اللون وتحمل نفس الرقم": أي 3 كريّات خضراء وتحمل كلّها الرقم 2 ومنه:

$$P(A\cap D)=\frac{A_3^3}{A_{12}^3}=\frac{6}{1320}=\frac{1}{220}$$

1-أ-12). $P_D(A)$: لدينا:

$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{220}}{\frac{1}{22}}=\frac{1}{30}$$

1-أ-13). $P(A\cup D)$: لدينا:

$$P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)$$
$$P(A\cup D)=\frac{3}{44}+\frac{3}{22}-\frac{1}{220}=\frac{44}{220}=\frac{1}{5}$$

1-أ-14). $P(B\cap D)$: "سحب 3 كريّات من ألوان مختلفة تحمل نفس الرقم": لا بدّ من سحب 3 كريّات تحمل الرقم 1 إحداها زرقاء A_2^1 وأخرى حمراء A_2^1 وأخرى خضراء A_1^1، كذلك بالنسبة لثلاث كريّات تحمل الرقم 2 $A_1^1\times A_2^1\times A_3^1$، وبمراعات الترتيب نحصل على 6 تبديلات:

$$P(B\cap D)=\frac{6(A_2^1\times A_2^1\times A_1^1+A_1^1\times A_2^1\times A_3^1)}{A_{12}^3}$$
$$P(B\cap D)=\frac{6(4+6)}{1320}=\frac{60}{1320}=\frac{1}{22}$$

1-أ-15). $P(B\cup D)$: لدينا:

$$P(B\cup D)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)$$
$$P(B\cup D)=\frac{3}{11}+\frac{3}{22}-\frac{1}{22}=\frac{4}{11}$$

1-أ-16). $P(A\cap D\cap I)$: "سحب 3 كريّات خضراء تحمل كلّها رقم 2 ومجموعها 6": يتحقّق بمجرّد سحب 3 كريّات خضراء كلّها تحمل رقم 2:

$$P(A\cap D\cap I)=P(A\cap D)=\frac{A_3^3}{A_{12}^3}=\frac{6}{1320}=\frac{1}{220}$$

1-أ-17). $P(A\cap H)$: "سحب 3 كريّات من نفس اللون مع سحب كرة خضراء على الأكثر": لا بدّ من سحب 3 كريّات كلّها زرقاء A_3^3 أو كلّها حمراء A_4^3:

$$P(A\cap H)=\frac{A_3^3+A_4^3}{A_{12}^3}=\frac{6+24}{1320}=\frac{30}{1320}=\frac{1}{44}$$

1-أ-18). $P(A\cap G)$: "سحب 3 كريّات من نفس اللون وسحب كريّة على الأقل خضراء": لا يتحقّق هذا إلّا إذا تمّ سحب 3 كريّات خضراء A_5^3، ومنه:

$$P(A\cap G)=\frac{A_5^3}{A_{12}^3}=\frac{60}{1320}=\frac{1}{22}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-ب). معرفة إذا كانت A و G مستقلتان:

تكون A و G مستقلتان إذا تحققت العلاقة:

$P(A \cap G) = P(A) \times P(G)$، لدينا:

$$P(A \cap G) = \frac{1}{22}$$
$$P(A) \times P(G) = \frac{3}{44} \times \frac{37}{44} = \frac{111}{1936}$$
$$P(A \cap G) \neq P(A) \times P(G)$$

ومنه فالحادثتان A و G **غير مستقلتان**.

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). تعيين قيم x الممكنة: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

- $x = 0$: سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما فردية، وبمراعاة الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات للثلاثيّة $(1,1,3)$، أو الثلاثيّة $(1,1,1)$، ومنه:
$A_5^3 + 3(A_5^2 \times A_1^1)$
- $x = 1$: أي سحب 3 كريّات واحدة منها فقط تحمل رقما زوجيّا، وبمراعاة الترتيب نحصل على ستّ تبديلات من الثلاثيّة $(2,1,3)$ أو ثلاث تبديلات من الثلاثيّة $(2,1,1)$:
$3(A_6^1 \times A_5^2) + 6(A_6^1 \times A_5^1 \times A_1^1)$
- $x = 2$: أي سحب 3 كريّات كرتين منها فقط تحملان رقما زوجيّا، ومع مراعاة الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات من: $(2,2,3)$، $(2,2,1)$:
$3(A_6^2 \times A_5^1) + 3(A_6^2 \times A_1^1)$
- $x = 3$: أي سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما زوجيّة A_6^3.

2-ب). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=0) = \frac{A_5^3 + 3(A_5^2 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$$
$$P(x=1) = \frac{3(A_6^1 \times A_5^2) + 6(A_6^1 \times A_5^1 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{540}{1320} = \frac{9}{22}$$
$$P(x=2) = \frac{3(A_6^2 \times A_5^1 + A_6^2 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{540}{1320} = \frac{9}{22}$$
$$P(x=3) = \frac{A_6^3}{A_{12}^3} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$$

نلخصه في الجدول التّالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$

2-ج). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(x = x_i)$$
$$E(x) = 0\left(\frac{1}{11}\right) + 1\left(\frac{9}{22}\right) + 2\left(\frac{9}{22}\right) + 3\left(\frac{1}{11}\right)$$
$$E(x) = \frac{9+18+6}{22} = \frac{33}{22} = \frac{3}{2}$$

03. تمرين مهم 03

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 (رابع) رقم 01

✓ سحب من كيس في آن واحد

نصّ التمرين

يحتوي كيس على 12 كريّة منها: 3 كريّات زرقاء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و4 كريّات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2 و5 كريّات خضراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 2، 3.

نسحب عشوائيّا **وفي آن واحد** 3 كريّات من الكيس.

1). نعتبر الأحداث التّالية:

- A: "سحب ثلاث كريّات من نفس اللون".
- B: "سحب ثلاث كريّات من ألوان مختلفة".
- C: "سحب كريّتين من نفس اللون".
- D: "سحب ثلاث كريّات تحمل نفس الرقم".
- E: "سحب ثلاث كريّات تحمل أرقام مختلفة".
- F: "سحب كريّتين تحملان نفس الرقم".
- G: "سحب كريّة على الأقل خضراء".
- H: "سحب كريّة على الأكثر خضراء".
- I: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 6".
- J: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 7".

MOKHFI CHOUAIB

1-أ). احسب الاحتمالات التّالية:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F), P(G)$
$P(H), P(I), P(J), P(A\cap D), P_D(A),$
$P(A\cup D), P(B\cap D), P(B\cup D),$
$P(A\cap D\cap I), P(A\cap G)$?

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال

1-ب). هل الحادثتان A و G مستقلّتان؟

2). ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الأرقام الزوجيّة المحصّل عليها.

عيّن قيم X ثمّ هات قانون احتمال المتغيّر العشوائي X وعيّن أمله الرياضي؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

■ تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث n يمثّل العدد الإجمالي للكريّات، و k عدد الكريّات المسحوبة في كلّ مرّة.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_{12}^3 = 220$$

1-أ). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ-1). A: "3 كريّات من نفس اللون": وهذا يعني إمّا أن تكون الكريّات الثلاثة المسحوبة زرقاء C_3^3 أو حمراء C_4^3 أو خضراء C_5^3، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1+4+10}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

1-أ-2). B: "3 كريّات من ألوان مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب كرة زرقاء C_3^1 وأخرى حمراء C_4^1 وأخرى خضراء C_5^1، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{3\times4\times5}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

1-أ-3). C: "كريتين من نفس اللون": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

■ الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكل إحدى الثنائيات التالية: (زرقاوين، لون اخر) أو (حمراوين، لون اخر من الباقي) أو (خضراوين، لون اخر من الباقي)، ومنه:

$$P(C) = \frac{C_3^2 \times C_9^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

■ الطريقة الثانية: حساب احتمال الحادثة C اعتمادا على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث A، B، C، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة لهذا السحب، وعليه فإنّ:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$
$$P(C) = 1 - \left(\frac{3+12}{44}\right) = \frac{44-15}{44} = \frac{29}{44}$$

1-أ-4). D: "3 كريّات تحمل نفس الرقم": وهذا يعني إمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة كلّها الرقم 1 أو تحمل كلّها الرقم 2، إمّا الرقم 3 فلا يمكن لكل الكريّات المسحوبة أن تحمله لأنّه لا يوجد إلّا كرة واحدة تحمل هذا الرقم، وعليه فإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 1 من أصل خمس كريّات تحمل هذا الرقم C_5^3، وإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 2 من أصل ستّ كريّات تحمل هذا الرقم C_6^3، ومنه:

$$P(D) = \frac{C_5^3 + C_6^3}{C_{12}^3} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

1-أ-5). E: "3 كريّات تحمل أرقام مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب إحدى الكرات الخمسة الّتي تحمل الرقم 1 C_5^1 مع إحدى الكرات الستّة الّتي تحمل الرقم 2 C_6^1 مع الكرة الّتي تحمل الرقم 3 C_1^1، ومنه:

$$P(E) = \frac{C_5^1 \times C_6^1 \times C_1^1}{C_{12}^3} = \frac{5\times6\times1}{220} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-ب). معرفة إذا كانت A و G مستقلّتان:

تكون A و G مستقلّتان إذا تحقّقت العلاقة: $P(A \cap G) = P(A) \times P(G)$، لدينا:

$P(A \cap G) = \frac{1}{22}$

$P(A) \times P(G) = \frac{3}{44} \times \frac{37}{44} = \frac{111}{1936}$

$P(A \cap G) \neq P(A) \times P(G)$

ومنه فالحادثتان A و G **غير مستقلّتان**.

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). تعيين قيم x الممكنة: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

- $x = 0$: سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما فردية، وبمراعات الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات للثلاثيّة $(1,1,3)$، أو الثلاثيّة $(1,1,1)$، ومنه:

$A_5^3 + 3(A_5^2 \times A_1^1)$

- $x = 1$: أي سحب 3 كريّات واحدة منها فقط تحمل رقما زوجيّا، وبمراعات الترتيب نحصل على ستّ تبديلات من الثلاثيّة $(2,1,3)$ أو ثلاث تبديلات من الثلاثيّة $(2,1,1)$:

$3(A_6^1 \times A_5^2) + 6(A_6^1 \times A_5^1 \times A_1^1)$

- $x = 2$: أي سحب 3 كريّات كرتين منها فقط تحملان رقما زوجيّا، ومع مراعات الترتيب نحصل على ثلاث تبديلات من: $(2,2,3)$، $(2,2,1)$:

$3(A_6^2 \times A_5^1) + 3(A_6^2 \times A_1^1)$

- $x = 3$: أي سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما زوجيّة A_6^3.

2-ب). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

$P(x = 0) = \frac{A_5^3 + 3(A_5^2 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$

$P(x = 1) = \frac{3(A_6^1 \times A_5^2) + 6(A_6^1 \times A_5^1 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{540}{1320} = \frac{9}{22}$

$P(x = 2) = \frac{3(A_6^2 \times A_5^1 + A_6^2 \times A_1^1)}{A_{12}^3} = \frac{540}{1320} = \frac{9}{22}$

$P(x = 3) = \frac{A_6^3}{A_{12}^3} = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$

○ نلخصه في الجدول التّالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$

2-ج). حساب الأمل الرياضي:

$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \, P(x = x_i)$

$E(x) = 0(\frac{1}{11}) + 1\left(\frac{9}{22}\right) + 2\left(\frac{9}{22}\right) + 3\left(\frac{1}{11}\right)$

$E(x) = \frac{9+18+6}{22} = \frac{33}{22} = \frac{3}{2}$

03. تمرين مهم 03

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 (رابع) ر.ه 11

✓ سحب من كيس في آن واحد

نصّ التمرين

يحتوي كيس على 12 كريّة منها: 3 كريّات زرقاء تحمل الأرقام 1، 1، 2 و4 كريّات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2 و5 كريّات خضراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 2، 3.

نسحب عشوائيّا **وفي آن واحد** 3 كريّات من الكيس.

1). نعتبر الأحداث التّالية:

○ A: "سحب ثلاث كريّات من نفس اللون".

○ B: "سحب ثلاث كريّات من ألوان مختلفة".

○ C: "سحب كريّتين من نفس اللون".

○ D: "سحب ثلاث كريّات تحمل نفس الرقم".

○ E: "سحب ثلاث كريّات تحمل أرقام مختلفة".

○ F: "سحب كريّتين تحملان نفس الرقم".

○ G: "سحب كريّة على الأقل خضراء".

○ H: "سحب كريّة على الأكثر خضراء".

○ I: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 6".

○ J: "سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها يساوي 7".

1-أ). احسب الاحتمالات التّالية:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(E), P(F), P(G),$
$P(H), P(I), P(J), P(A\cap D), P_D(A),$
$P(A\cup D), P(B\cap D), P(B\cup D),$
$P(A\cap D\cap I), P(A\cap G)?$

تعطى النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال

1-ب). هل الحادثتان A و G مستقلّتان؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الأرقام الزوجيّة المحصّل عليها.

عيّن قيم x ثمّ هات قانون احتمال المتغيّر العشوائي x وعيّن أمله الرياضي؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث n يمثّل العدد الإجمالي للكريّات، و k عدد الكريّات المسحوبة في كلّ مرّة.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_{12}^3 = 220$$

1-أ). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ-1). A: "3 كريّات من نفس اللون": وهذا يعني إمّا أن تكون الكريّات الثلاثة المسحوبة زرقاء C_3^3 أو حمراء C_4^3 أو خضراء C_5^3، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_3^3+C_4^3+C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1+4+10}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

1-أ-2). B: "3 كريّات من ألوان مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب كرة زرقاء C_3^1 وأخرى حمراء C_4^1 وأخرى خضراء C_5^1، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{3\times4\times5}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

1-أ-3). C: "كريّتين من نفس اللون": يمكن حساب هذه الحادثة بطريقتين:

- الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكّل إحدى الثنائيّات التّالية: (زرقاوين، لون آخر) أو (حمراوين، لون آخر من الباقي) أو (خضراوين، لون آخر من الباقي)، ومنه:

$$P(C) = \frac{C_3^2\times C_9^1+C_4^2\times C_8^1+C_5^2\times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$$

- الطريقة الثانية: حساب احتمال الحادثة C اعتماداً على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث A، B، C، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة لهذا السحب، وعليه فإنّ:

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1$$
$$P(C) = 1 - [P(A)+P(B)]$$
$$P(C) = 1 - \left(\frac{3+12}{44}\right) = \frac{44-15}{44} = \frac{29}{44}$$

1-أ-4). D: "3 كريّات تحمل نفس الرقم": وهذا يعني إمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة كلّها الرقم 1 أو تحمل كلّها الرقم 2، إمّا الرقم 3 فلا يمكن لكل الكريّات المسحوبة أن تحمله لأنّه لا يوجد إلّا كرة واحدة تحمل هذا الرقم، وعليه فإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 1 من أصل خمس كريّات تحمل هذا الرقم C_5^3، وإمّا أن تحمل الكريّات المسحوبة الثلاثة الرقم 2 من أصل ستّ كريّات تحمل هذا الرقم C_6^3، ومنه:

$$P(D) = \frac{C_5^3+C_6^3}{C_{12}^3} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

1-أ-5). E: "3 كريّات تحمل أرقام مختلفة": وهذا يعني أن يتمّ سحب إحدى الكرات الخمسة الّتي تحمل الرقم 1 C_5^1 مع إحدى الكرات الستّة الّتي تحمل الرقم 2 C_6^1 مع الكرة الّتي تحمل الرقم 3 C_1^1، ومنه:

$$P(E) = \frac{C_5^1\times C_6^1\times C_1^1}{C_{12}^3} = \frac{5\times6\times1}{220} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-أ-6). F: "كريتين تحملان نفس الرقم":

■ الطريقة الأولى: هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكّل إحدى الثنائيات التالية: (كريتان تحملان الرقم 1، رقم أخر من الباقي) أو (كريتان تحملان الرقم 2، رقم أخر من الباقي)، ومنه:

$$P(F)=\frac{C_5^2\times C_7^1+C_6^2\times C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{160}{220}=\frac{8}{11}$$

■ الطريقة الثانية: حساب احتمال الحادثة F بالاعتماد على قانون الاحتمال العام حيث أنّ الأحداث D، E، F، تمثّل مجموع الأحداث الممكنة لهذا السحب:

$$P(D)+P(E)+P(F)=1\ \dots\dots\Lambda$$
$$\Lambda \Leftrightarrow P(F)=1-[P(D)+P(E)]$$
$$\Lambda \Leftrightarrow P(F)=1-\left(\frac{3+3}{22}\right)=\frac{22-6}{22}$$
$$P(F)=\frac{16}{22}=\frac{8}{11}$$

1-أ-7). G: "كرية على الأقل خضراء": هذا يعني أن يتمّ سحب الكرات لتشكّل إحدى الثنائيات التالية:

$C_3^1\times C_4^1\times C_5^1\ (V,R,B)$، أو

$C_5^1\times C_7^2\ (V,X,X)$، أو

$C_5^2\times C_7^1\ (V,V,X)$، أو

الكرات المسحوبة كلّها خضراء C_5^3:

$$P(G)=\frac{C_5^1\times C_7^2+C_5^2\times C_7^1+C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{185}{220}=\frac{37}{44}$$

1-أ-8). H: "كرية على الأكثر خضراء": وهذا يعني إمّا سحب 3 كريات غير خضراء C_7^3 وإمّا سحب كرية خضراء والباقي غير خضراء $C_5^1\times C_7^2$، ومنه:

$$P(H)=\frac{C_5^1\times C_7^2+C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{140}{220}=\frac{7}{11}$$

1-أ-9). I: "3 كريات مجموع أرقامها يساوي 6": إمّا أن يتمّ سحب 3 كريات تحمل كلّها العدد 2: C_6^3، وإمّا سحب 3 كريات تحمل الأعداد 1 و2 و3: $C_5^1\times C_6^1\times C_1^1$، ومنه:

$$P(I)=\frac{C_6^3+C_5^1\times C_6^1\times C_1^1}{C_{12}^3}=\frac{50}{220}=\frac{5}{22}$$

1-أ-10). J: "3 كريات مجموع أرقامها يساوي 7": لا بدّ من سحب كريتين تحملان الرقم 2 C_6^2 مع الكرية التي تحمل الرقم 3 C_1^1، ومنه:

$$P(J)=\frac{C_6^2\times C_1^1}{C_{12}^3}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$$

1-أ-11). $P(A\cap D)$: "سحب 3 كريات من نفس اللون وتحمل نفس الرقم": أي 3 كريات خضراء وتحمل كلّها الرقم 2 ومنه:

$$P(A\cap D)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$$

1-أ-12). $P_D(A)$: لدينا:

$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{220}}{\frac{3}{22}}=\frac{1}{30}$$

1-أ-13). $P(A\cup D)$: لدينا:

$$P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)$$
$$P(A\cup D)=\frac{3}{44}+\frac{3}{22}-\frac{1}{220}=\frac{44}{220}=\frac{1}{5}$$

1-أ-14). $P(B\cap D)$: "سحب 3 كريات من ألوان مختلفة وتحمل نفس الرقم": لا بدّ من سحب 3 كريات تحمل الرقم 1 إحداها زرقاء C_2^1 وأخرى حمراء C_2^1 وأخرى خضراء C_1^1، كذلك بالنسبة لثلاث كريات تحمل الرقم 2 : $C_1^1\times C_2^1\times C_3^1$، ومنه:

$$P(B\cap D)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_2^1\times C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{4+6}{220}$$
$$P(B\cap D)=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

1-أ-15). $P(B\cup D)$: لدينا:

$$P(B\cup D)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)$$
$$P(B\cup D)=\frac{3}{11}+\frac{3}{22}-\frac{1}{22}$$
$$P(B\cup D)=\frac{6+3-1}{22}=\frac{4}{11}$$

1-أ-16). $P(A\cap G)$: "سحب 3 كريات من نفس اللون وسحب كرية على الأقل خضراء": لا تتحقّق هذه الحادثة إلّا إذا تمّ سحب 3 كريات خضراء C_5^3، ومنه:

$$P(A\cap G)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-أ-17). $P(A\cap D\cap I)$: سحب 3 كريات خضراء وتحمل كلّها رقم 2 ومجموعها يساوي 6: وهذا يتحقّق بمجرّد سحب 3 كريات خضراء كلّها تحمل رقم 2، ومنه:

$$P(A\cap D\cap I)=P(A\cap D)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$$

1-ب). معرفة إذا كانت A و G مستقلّتان: تكون A و G مستقلّتان إذا كان:

$P(A\cap G)=P(A)\times P(G)$،

لدينا: $P(A\cap G)=\frac{1}{22}$،

ولدينا: $P(A)\times P(G)=\frac{3}{44}\times\frac{37}{44}=\frac{111}{1936}$،

إذن: $P(A\cap G)\neq P(A)\times P(G)$

ومنه فالحادثتان A و G **غير مستقلّتان.**

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). تعيين قيم x الممكنة: $x\in\{0,1,2,3\}$

$x=0$: أي سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما فردية C_6^3.

$x=1$: أي سحب 3 كريّات واحدة منها فقط تحمل رقما زوجيّا $C_6^1\times C_6^2$.

$x=2$: أي سحب 3 كريّات، كرتين منها فقط تحملان رقما زوجيّا $C_6^2\times C_6^1$.

$x=3$: أي سحب 3 كريّات كلّها تحمل أرقاما زوجيّة C_6^3.

2-ب). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=0)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}=\frac{1}{11}$$

$$P(x=1)=\frac{C_6^1\times C_6^2}{C_{12}^3}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$$

$$P(x=2)=\frac{C_6^1\times C_6^2}{C_{12}^3}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$$

$$P(x=3)=\frac{C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{20}{220}=\frac{1}{11}$$

نلخصه في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$

2-ج). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i\,P(x=x_i)$$

$$E(x)=0\left(\frac{1}{11}\right)+1\left(\frac{9}{22}\right)+2\left(\frac{9}{22}\right)+3\left(\frac{1}{11}\right)$$

$$E(x)=\frac{9+18+6}{22}=\frac{33}{22}=\frac{3}{2}$$

MOKHFI CHOUAIB

III. تمارين تدريبية للإنطلاقة الممتازة

01. تمرين 01

يوتيوب: المراجعة النهائية في الاحتمالات لشعبة علوم و ت.ر. و رياضيات

نصّ التمرين

جمعيّة خيريّة تتكوّن من 7 رجال و 5 نساء، من بينهم رجل واحد اسمه محمد، تريد تشكيل لجنة للتسيير بها 3 أعضاء.

كل شخص له الحق أن يكون في اللجنة.

1). ما هو عدد اللجان الّتي يكون فيها أعضاء اللجنة الثلاثة كالآتي: رئيس، نائب له وكاتب.

2). الآن، في حالة أعضاء اللجنة الثلاثة لهم نفس المهام:

2-أ). عيّن عدد اللجان الّتي يمكن تشكيلها.

2-ب). احسب احتمال الحوادث التالية:

- A: "اللجنة تضمّ محمّد".
- B: "اللجنة تتكوّن من رجلين وامرأة".
- C: "اللجنة بها رجل واحد على الأقل".
- D: "اللجنة مكوّنة من امرأة على الأكثر".

3). ليكن X المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ اختيار عدد الرجال الّذين يحملون اسم محمّد في اللجنة المكوّنة.

3-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي X.

3-ب). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

الحل

1). أولا: المهام محدّدة:

- طريقة العدّ: بما أن التكرار متعذّر والمهام محدّدة وبالتالي فطريقة العدّ هي عدّ الترتيبات A_n^k.
- عدد اللجان الممكنة: $A_{12}^3 = 1320$

2). ثانيا: المهام غير محدّدة:

2-أ). تحديد عدد اللجان:

- طريقة العدّ: بما أنّ المهام غير محدّدة فطريقة العدّ هي عدّ التوفيقات C_n^k.
- عدد اللجان الممكنة:

$$C_{12}^3 = 220$$

2-ب). حساب احتمال الحوادث:

- A: "اللجنة تضمّ محمّد": لدينا شخص واحد بهذا الاسم، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_1^1 C_{11}^2}{C_{12}^3} = \frac{1}{4}$$

- B: "اللجنة تتكوّن من رجلين وامرأة":

$$P(B) = \frac{C_7^2 C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21}{44}$$

- C: "اللجنة بها رجل واحد على الأقل": إمّا رجل واحد وامرأتين أو رجلين وامرأة واحدة أو ثلاثة رجال.

$$P(C) = \frac{C_7^1 C_5^2 + C_7^2 C_5^1 + C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{21}{22}$$

- D: "اللجنة مكوّنة من امرأة على الأكثر": إمّا امرأة ورجلان، وإمّا ثلاثة رجال.

$$P(D) = \frac{C_7^2 C_5^1 + C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{11}$$

MOKHFI CHOUAIB

3). المتغير العشوائي x:

3-أ). تعيين قيم x: إمّا أن يكون باللجنة شخص اسمه محمّد وإما ألّا يكون، ومنه: $x \in \{0,1\}$

3-ب). قانون الاحتمال:

■ حساب احتمال الحوادث:

○ $P(x=0)$: محمّد غير موجود في اللجنة:

$$P(x=0)=\frac{C_1^0 C_6^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{7}$$

○ $P(x=1)$: محمّد موجود في اللجنة:

$$P(x=1)=\frac{C_1^1 C_6^2}{C_{12}^3}=\frac{3}{7}$$

■ نلخّصه بالجدول:

x_i	0	1
$P(x=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

02. تمرين 02

يوتيوب: المراجعة النهائية في الاحتمالات لشعبة علوم و ت. ر. ورياضيات

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على سبع كريّات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، منها أربع كريّات حمراء مرقّمة: 1، 1، 2، 2 وثلاث كريّات بيضاء مرقّمة: 1، 3، 3، نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كريّتين من الصندوق.

1). أحسب احتمال الحدثين التاليين:

○ A:"الكريّتين المسحوبتين مجموع رقميهما 4".

○ B:"الكريّتين المسحوبتين من نفس اللون".

2). ثانيا:

2-أ). احسب $P(A\cap B)$، هل الحادثتان A و B مستقلّتان؟ برّر.

2-ب). احسب الاحتمالين: $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

3). ليكن المتغير العشوائي x الذي يرفق بكل سحبة جداء رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق.

3-أ). عيّن قيم المتغير العشوائي x ، ثمّ عرّف قانون احتماله.

3-ب). احسب الأمل الرياضي $E(x)$ للمتغير العشوائي x.

3-ج). احسب:

$$P(x^2-4x+3\le 0), P(e^x-100>0)$$

الحل

■ طريقة العدّ: بما أن السحب دفعة واحدة فطريقة العدّ هي عدّ التوفيقات C_n^k.

■ عدد الحالات الممكنة: $C_n^k=C_7^2=21$

1). حساب الاحتمالات:

○ A:"الكرتين المسحوبتين مجموع رقميهما 4": يمكن تشكيل هذا المجموع إمّا بسحب كريّتين تحملان رقم 2 C_2^2، وإمّا بسحب كريّة تحمل رقم 1 C_3^1، وأخرى تحمل رقم 3 C_2^1. ومنه:

$$P(A)=\frac{C_3^1C_2^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{3}$$

○ B:"الكرتين المسحوبتين من نفس اللون": إمّا سحب كريّتين حمراوين C_4^2، وإما كريّتين بيضاوين C_3^2:

$$P(B)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{7}$$

2). ثانيا:

2-أ). حساب $P(A\cap B)$: أي "احتمال سحب كريّتين مجموع رقميهما يساوي 4 ومن نفس اللون"، ومنه: إمّا سحب كريّتين حمراوين تحملان رقم 2 ، أو سحب كريّتين بيضاوين أحدها تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 3، ومنه:

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^2+C_1^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

■ معرفة إن كانت الحادثتان A و B مستقلّتان:

نقول عن حادثتين أنّهما مستقلّتان إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$
نلاحظ أنّ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{7}$

ومنه فالحادثتان A و B مستقلتان.

2-ب). حساب الاحتمالات:

■ حساب $P_A(B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{7}$$

■ حساب $P(A\cup B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{13}{21}$$

3). المتغيّر العشوائي x:

3-أ). قانون الاحتمال:

■ تعيين قيم x: القيم الممكنة هي حاصل جداء الكرتين المسحوبتين ومنه فإنّ:

$$x\in\{1,2,3,4,6,9\}$$

■ حساب الاحتمالات:

○ $x=1$: بسحب كرتين تحملان رقم 1، ومنه:

$$P(x=1)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

○ $x=2$: بسحب كرتة تحمل رقم 1 C_3^1، وأخرى تحمل رقم 2 C_2^1،ومنه:

$$P(x=2)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{2}{7}$$

○ $x=3$: بسحب كرتة تحمل رقم 1 C_3^1، وأخرى تحمل رقم 3 C_2^1،ومنه:

$$P(x=3)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{2}{7}$$

○ $x=4$: بسحب كرتين تحملان رقم 2 C_2^2، ومنه:

$$P(x=4)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

○ $x=6$: بسحب كرتة تحمل رقم 2 C_2^1، وأخرى تحمل رقم 3 C_2^1،ومنه:

$$P(x=6)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

○ $x=9$: بسحب كرتين تحملان رقم 3 C_2^2، ومنه:

$$P(x=9)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

■ نلخصه بالجدول الآتي:

x_i	1	2	3	4	6	9
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

3-ب). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=6}x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=1\left(\frac{1}{7}\right)+2\left(\frac{2}{7}\right)+3\left(\frac{2}{7}\right)+..$$
$$..4\left(\frac{1}{21}\right)+6\left(\frac{4}{21}\right)+9\left(\frac{1}{21}\right)$$
$$E(x)=\frac{70}{21}=\frac{10}{3}$$

3-ج). حساب:

■ حساب $P(x^2-4x+3\le 0)$: نقوم بدراسة إشارة كثير الحدود x^2-4x+3، ومنه:

○ دراسة إشارة x^2-4x+3:

$$\Delta=b^2-4ac=16-4\times1\times3=4$$
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{2}=1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{2}=3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		+	0	−	0	+	

○ حلول المتراجحة: من الجدول نجد:

$x^2-4x+3\le 0$ يكافئ: $x\in\{1,2,3\}$

○ حساب $P(x^2-4x+3\le 0)$

$$P(x^2-4x+3\le 0)=P(x=1)+..$$
$$..P(x=2)+P(x=3)$$
$$P(x^2-4x+3\le 0)=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

■ حساب $P(e^x-100>0)$:

○ حل المتراجحة $e^x-100>0$:

$e^x-100>0$ معناه:

$$e^x>100$$
$$\ln e^x>\ln 100$$

MOKHFI CHOUAIB

$x > \ln 100$

ومنه فإنّ $x > 4.6$ أي: $x \in \{6,9\}$

○ حساب $P(e^x - 100 > 0)$:

$$P(e^x - 100 > 0) = P(x = 6) + P(x = 9)$$

$$P(e^x - 100 > 0) = \frac{4}{21} + \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

03. تمرين 03

يوتيوب: المراجعة النهائية في الاحتمالات لشعبة علوم و ت. ر. و رياضيات

نصّ التمرين

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات تحمل الأرقام 2، 2، 3، ويحتوي كيس U_2 على تسع كرات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 وخمس كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 3، 4.

كل الكرات متماثلة لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيًا كرة واحدة من الكيس U_1 ونسجّل رقمها وليكن n.

○ إذا كان $n = 2$ نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كرتين من الكيس U_2.

○ إذا كان $n = 3$ نسحب عشوائيًا وفي آن واحد ثلاث كرات من U_2

نعتبر الحادثتين التاليتين:

○ A: "الكرات المسحوبة من U_2 لها نفس اللون".

○ B: "الكرات المسحوبة من U_2 تحمل نفس الرقم".

1). أوّلا:

1-أ). بيّن أنّ $P(A) = \frac{19}{54}$ ثمّ احسب $P(B)$.

1-ب). بيّن أنّ $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$.

1-ج). إذا كانت الكرات المسحوبة من U_2 من نفس اللون، ما احتمال أن تحمل نفس الرقم؟

1-د). هل الحادثتان A و B مستقلّتان؟ علّل إجابتك.

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبة عدد الكرات الحمراء المسحوبة من U_2.

عيّن قيم x ثم عيّن قانون احتماله وبرهن أنّ الأمل الرياضي $E(x) = \frac{245}{189}$

الحل

1). أوّلا:

1-أ). برهان أنّ $P(A) = \frac{19}{54}$:

$$P(A) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3}\right) = \frac{19}{54}$$

■ حساب $P(B)$:

$$P(B) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_2^2 + C_5^2}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_5^3}{C_9^3}\right) = \frac{46}{189}$$

1-ب). برهان أنّ: $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_2^2 + C_4^2}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_4^3}{C_9^3}\right) = \frac{55}{378}$$

1-ج). حساب $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{55}{378}}{\frac{19}{54}} = \frac{55}{133}$$

1-د). معرفة إن كانت A و B مستقلّتان:

A و B مستقلّتان معناه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

لدينا: $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$

$$P(A) \times P(B) = \frac{19}{54} \times \frac{46}{189} = \frac{437}{5103}$$

ومنه: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فالحادثتان A و B ليستا مستقلّتان.

2). المتغيّر العشوائي x:

■ تعيين قيم x: يعبّر x عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة من U_2 ومنه: $x \in \{0,1,2,3\}$

■ تعيين قانون الاحتمال:

○ $x = 0$: إمّا سحب كرتين خضراوين C_4^2 وإمّا سحب 3 كرات خضراء C_4^3، ومنه:

$$P(x = 0) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_4^2}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_4^3}{C_9^3}\right) = \frac{48}{378}$$

○ $x = 1$: إمّا سحب كرة حمراء C_5^1 وأخرى خضراء C_4^1، وإمّا سحب كرة حمراء C_5^1 وكرتين خضراوين C_4^2 ، ومنه:

$$P(x = 1) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3}\right) = \frac{185}{378}$$

- $x = 2$: إمّا سحب كرتين حمراوين C_5^2، وإمّا سحب كرتين حمراوين C_5^2 وكرة خضراء C_4^1 ، ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{2}{3}\left(\frac{C_5^2}{C_9^2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^1}\right) = \frac{130}{378}$$

- $x = 3$: وذلك بسحب 3 كرات حمراء C_5^3، ومنه:

$$P(x = 3) = 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{C_5^1}{C_9^1}\right) = \frac{15}{378}$$

■ نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{48}{378}$	$\frac{185}{378}$	$\frac{130}{378}$	$\frac{15}{378}$

■ برهان أنّ $E(x) = \frac{245}{189}$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{48}{378}\right) + 1\left(\frac{185}{378}\right) + 2\left(\frac{130}{378}\right) + 3\left(\frac{15}{378}\right)$$

$$E(x) = \frac{490}{378} = \frac{245}{189}$$

04. تمرين 04

يوتيوب: المراجعة النهائية في الاحتمالات لشعبة علوم و ت. ر. ورياضيات

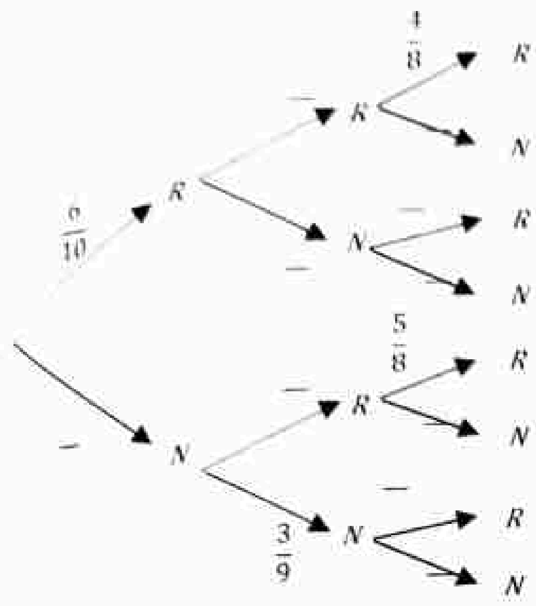
نصّ التمرين

صندوقان U_1 و U_2 بهما كريّات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس. الصندوق U_1 به 6 كريّات حمراء و 4 كريّات سوداء، والصندوق U_2 به 3 كريّات حمراء، كريّة سوداء وكريّة بيضاء.

نرمز للكريّات: R للحمراء، N للسوداء و B للبيضاء.

1). نسحب عشوائيا على التوالي وبدون إرجاع ثلاث كريّات من الصندوق U_1.

1-أ). أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة والّتي تنمذج الوضعية.



1-ب). أحسب احتمال الحادثتين:

- A_1: "الكريّات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون".
- A_2: "سحب كريّة سوداء على الأقل".

2). نسحب الآن من الصندوق U_2 كرتين في آن واحد ونعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يُرفق بكلّ نتيجة عمليّة سحب عدد الكريّات الحمراء المتبقيّة.

2-أ). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x.

2-ب). أحسب الأمل الرياضي $E(x)$ للمتغيّر العشوائي x.

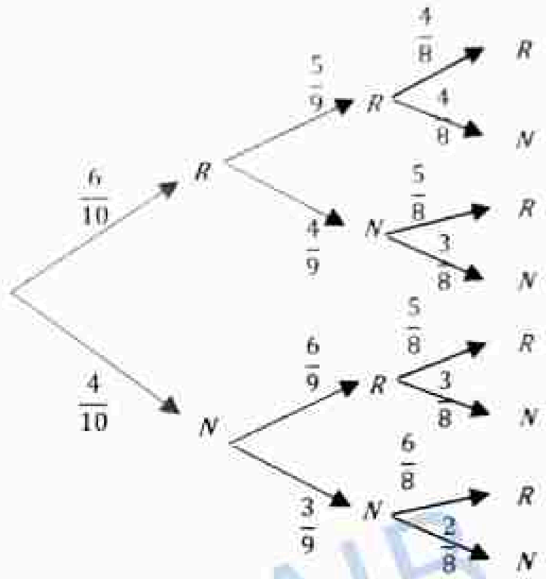
3). نسحب الآن في آن واحد كريتين من الصندوق وكريّة واحدة من الصندوق U_2.

احسب احتمال الحادثة A_3: "الكريّات الثلاثة المسحوبة حمراء".

الحل

1). السحب على التوالي بدون إرجاع من U_1:

1-أ). إكمال شجرة الاحتمال:



1-ب). حساب احتمال A_1 و A_2: بناء على شجرة الاحتمال فإنّ:

○ A_1: "سحب 3 كريّات من نفس اللون"، أي $3R$ أو $3N$. ومنه:

$$P(A_1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{5}$$

○ A_2: "سحب كريّة سوداء على الأقل"، أي $1N$ أو $2N$ أو $3N$. أو هي الحادثة العكسية لسحب $3R$ ومنه: $\bar{A_2}$

$$P(A_2) = 1 - P(\bar{A_2}) = 1 - \left(\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}\right) = \frac{5}{6}$$

2). السحب في آن واحد من U_2:

■ طريقة العدّ: بما أنّ السحب في آن واحد فنعتمد طريقة عدّ التوفيقات C_n^k.

■ الحالات الممكنة: $C_n^k = C_5^2 = 10$

2-أ). قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x:

■ قيم x : يعبّر x عن عدد الكريات الحمراء المتبقّية بعد السحب ومنه: $x \in \{1,2,3\}$

■ حساب الاحتمالات:

○ $x = 1$: يعني سحب $2R$ C_3^2 ومنه:

$$P(x = 1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

○ $x = 2$: يعني سحب $1R$ C_3^1 و $1N$ C_2^1 ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$$

○ $x = 3$: يعني سحب $2N$ C_2^2، ومنه:

$$P(x = 3) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

■ نلخّصه بالجدول الآتي:

x_i	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

2-ب). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x = x_i)$$
$$E(x) = 1\left(\frac{3}{10}\right) + 2\left(\frac{6}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{18}{10}$$

3). السحب في آن واحد من U_1 و U_2:

■ طريقة العدّ: بما أنّ السحب في آن واحد فنعتمد طريقة عدّ التوفيقات C_n^k.

■ الحالات الممكنة: $C_n^k = C_{10}^2 \times C_5^1$

■ حساب $P(A_3)$: لدينا A_3: "سحب $2R$ من U_1 و $1R$ من U_2"، ومنه:

$$P(A_3) = \frac{C_6^2 \times C_3^1}{C_{10}^2 \times C_5^1} = \frac{1}{5}$$

MOKHFI CHOUAIB

05. تمرين 05

✍ نص التمرين

علبة تحوي 3 كرات حمراء و n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي و $1 < n$.

نسحب من العلبة وبطريقة عشوائية كرتين في آن واحد، ونعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يرفق بكل سحبة:

- (-2) إذا تمّ سحب كرتين من نفس اللون.
- $(+2)$ إذا تمّ سحب كرتين من لونين مختلفين.

1). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x.

2). عيّن عدد الكرات البيضاء حتّى يكون الأمل الرياضي $E(x)$ معدوما.

✍ الحل

1). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

- طريقة العدّ: السحب في آن واحد، ومنه نعتمد طريقة عدّ التوفيقات C_n^k.
- الحالات الممكنة:

$$C_n^k = C_{n+3}^2 = \frac{(n+3)!}{2(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

- قيم x: $x \in \{-2,2\}$
- حساب الاحتمالات:

○ $x = -2$: يعني سحب كرتين حمراوين C_3^2 أو كرتين بيضاوين C_n^2. ومنه:

$$P(x=-2) = \frac{C_3^2 + C_n^2}{C_{n+3}^2} = \frac{3+\frac{n(n-1)}{2}}{C_{n+3}^2}$$

$$P(x=-2) = \frac{\frac{n^2-n+6}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}} = \frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$$

○ $x = 2$: يعني سحب كرة حمراء C_3^1 وأخرى بيضاء C_n^1. ومنه:

$$P(x=2) = \frac{C_3^1 \times C_n^1}{C_{n+3}^2} = \frac{3n}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}$$

$$P(x=2) = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$$

- نلخّصه في الجدول التالي:

x_i	-2	2
$P(x=x_i)$	$\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$

2). تعيين n من أجل $E(x) = 0$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=2} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = -2\left[\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}\right] + 2\left[\frac{6n}{(n+3)(n+2)}\right]$$

$$E(x) = \frac{-2n^2+14n-12}{(n+3)(n+2)}$$

$E(x) = 0$ معناه:

$$-2n^2 + 14n - 12 = 0$$

$$-n^2 + 7n - 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(-1)(-6) = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$n_1 = \frac{-7-5}{2(-1)} = 6$$

$$n_2 = \frac{-7+5}{2(-1)} = 1$$

من المعطيات فإن $n > 1$، ومنه n_2 مرفوض، إذ $n = 6$، ومنه فإنّ عدد الكريّات البيضاء حتّى يكون الأمل الرياضي معدوما هو 6 كرات.

MOKHFI CHOUAIB

IV. مواضيع بكالوريا في الاحتمالات

01. بكالوريا ع. تجريبية-1- 2021

نصّ التمرين:

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1، H_2، H_3 وامرأتين F_1، F_2.

1). نعتبر الحوادث A و B و C حيث:

- A: "عضوا اللجنة من نفس الجنس".
- B: "عضوا اللجنة من جنسين مختلفين".
- C: "H_1 عضو في اللجنة".

1-أ). أحسب $P(A)$، $P(B)$ احتمال A و B على الترتيب.

1-ب). بيّن أنّ $P(C)$ احتمال الحادث C يساوي $\frac{2}{5}$.

2). المتغيّر العشوائي x يرفق بكلّ إمكانية اختيار لعضوين، عدد الرجال في اللجنة.

2-أ). برّر أنّ مجموعة قيم x هي $\{0;1;2\}$.

2-ب). عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي x واحسب أمله الرياضي $E(x)$.

الحل

1). أولا:

عدد اللجان الممكنة هي: $C_5^2 = 10$

1-أ). حساب $P(A)$، $P(B)$:

- A: عضوا اللجنة من نفس الجنس:

$$P(A) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

- B: عضوا اللجنة من جنسين مختلفين:

$$P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

1-ب). بيان أنّ $P(C) = \frac{2}{5}$:

لدينا الحادثة C: H_1 عضو في اللجنة، ومنه:

$$P(C) = \frac{C_1^1 \times C_4^1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2). ثانيا: المتغير العشوائي x:

2 أ). تبرير أن قيم x هي $\{0;1;2\}$:

- $x = 0$: بأن تتكون اللجنة من امرأتين ومنه فعدد الرجال x هو 0.
- $x = 1$: بأن تتكوّن اللجنة من امرأة ورجل ومنه فعدد الرجال x هو 1.
- $x = 2$: أي أنّ تضمّ اللجنة رجلين.

ومنه قيم x: $\{0;1;2\}$.

2-ب). تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي x وحساب الأمل الرياضي $E(x)$:

- تعيين قانون احتمال x:

$$P(x = 0) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}$$

نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2
$p(x = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

- حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, p(x = x_i)$$

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10}$$

$$E(x) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

MOKHFI CHOUAIB

02. بكالوريا ع. تجريبية-2- 2021

نص التمرين:

صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، مكتوب على كلّ منها سؤال واحد، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ: 1 ،2 ، 3. وأربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ: 1، 2، 3 و4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ: 1 و2.

نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية:

- A: "سحب سؤال في الهندسة".
- B: "سحب سؤال في التحليل".
- C: "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا".

1). أحسب $P(A)$، $P(B)$ و$P(C)$ احتمال الحوادث A، B، Cو على الترتيب.

2). أحسب احتمال سحب سؤال رقمه مختلف عن 1.

3). المتغيّر العشوائي x يرفق بكل بطاقة مسحوبة رقم السؤال المسجل عليها.

3-أ). برّر أنّ مجموعة قيم x هي $\{1;2;3;4\}$.

3-ب). عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x ثمّ أحسب $E(x)$ أمله الرياضي.

3-ج). استنتج قيمة $E(2021x+1442)$.

الحل

1). حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و$P(C)$:

- عدد حالات السحب الممكنة: $C_9^1=9$

- A: "سحب سؤال في الهندسة":

$$P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

- B: "سحب سؤال في التحليل":

$$P(B)=\frac{2}{9}$$

- C: "سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا":

$$P(C)=\frac{2}{9}$$

2). حساب احتمال سحب سؤال يختلف عن 1:

نسمي D سحب سؤال رقمه يختلف عن 1:

$$P(D)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

3). المتغير العشوائي x:

3-أ). تبرير أن مجموعة قيم x هي $\{1;2;3;4\}$:

نهتم للرقم دون مادة السؤال المطروح، فيكون الرقم 1 أو 2 أو 3 أو 4، ومنه قيم x هي: $\{1,2,3,4\}$.

3-ب). تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x وحساب الأمل الرياضي $E(x)$:

- قانون الاحتمال x:

$$P(x=1)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$
$$P(x=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$
$$P(x=3)=\frac{2}{9}$$
$$P(x=4)=\frac{1}{9}$$

نلخصه بالجدول الآتي:

x_i	1	2	3	4
$p(x=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

- حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\,p(x=x_i)$$
$$E(x)=\frac{1}{3}\times 1+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{9}$$
$$E(x)=\frac{19}{9}$$

- استنتاج قيمة $E(2021x+1442)$:

$$E(2021x+1442)=2021E(x)+1442$$
$$E(2021x+1442)=2021\left(\frac{19}{9}\right)+1442$$
$$E(2021x+1442)=\frac{51377}{9}$$

MOKHFI CHOUAIB

03. بكالوريا رياضيات-1- 2021

نص التمرين

كيس به 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

كلّ من الكريات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1، 2، 3، 4.

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس.

نرمز بـ: P_i إلى احتمال سحب كرية رقمها i، حيث: $P_1 = \frac{1}{3}$، $P_2 = \frac{1}{6}$، $P_3 = \frac{1}{4}$، $P_4 = \frac{1}{4}$.

1). وزّع الكريات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1، 2، 3، 4.

2). أحسب احتمال كلّ من الحوادث A، B، C الآتية:

■ A: "سحب كرية تحمل رقما فرديا".

■ B: "سحب كرية تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4".

■ C: "سحب كرية رقمها حل للمعادلة: $x^2 = 2^x$".

3). المتغيّر العشوائي x يرفق بكلّ سحب لكريّة الرقم الذي تحمله.

عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي x ثمّ أحسب $E(x)$ أمله الرياضي.

الحل

1). توزيع الكريات الاثني عشر حسب الأرقام 1، 2، 3، 4: لدينا:

$$P_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$
$$P_2 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$$
$$P_3 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$
$$P_4 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

ومنه: يتم سحب الكريات كالآتي:

○ 4 كريات تحمل الرقم 1.

○ كريتان تحملان الرقم 2.

○ 3 كريات تحمل الرقم 3.

○ 3 كريات تحمل الرقم 4.

2). حساب $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$:

■ حساب $P(A)$: الأعداد الفردية هي 1 و 3، أي $A = \{1;3\}$، ومنه:

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

■ حساب $P(B)$: أرقام النظام 4 من بين أرقام الكريات 1، 3 و 2، أي $B = \{1;2;3\}$، ومنه:

$$P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

■ حساب $P(C)$: لدينا $2^4 = 4^2$ و $2^2 = 2^2$، أي $= \{2;4\}$، ومنه:

$$P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

3). تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x:

■ قيم x: $x = \{1;2;3;4\}$ (x يرفق بكل سحب الرقم على الكرية)، نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	1	2	3	4
$p(x = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

■ حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, p(x = x_i)$$
$$E(x) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4}$$
$$E(x) = \frac{29}{12}$$

MOKHTICHOUAIB

04. بكالوريا رياضيات-2- 2021

نصّ التمرين:

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1، H_2، H_3 وأربع نساء F_1، F_2، F_3، F_4.

1). بيّن أنّ عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42.

2). نعتبر الحوادث الآتية:

- A: اللجنة من نفس الجنس.
- B: اللجنة من جنسين مختلفين.
- C: H_1 هو الرئيس.
- E: اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1.

2-أ). أحسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثمّ استنتج $P(B)$.

2-ب). أحسب $P(C)$ و $P(E)$.

3) المتغيّر العشوائي x يرفق لكل لجنة عدد الرجال فيها.
عيّن قانون احتمال x ثمّ أحسب $E(x)$ أمله الرياضي.

الحل

1). بيان أنّ عدد اللجان الممكنة هو 42:

- طريقة العد: هي الترتيبة لأنّ الترتيب مهم والتكرار غير مسموح.
- عدد الحالات الممكنة: بما أنّه يتم اختيار شخصين من بين 7 أشخاص، فإنّ عدد اللجان الممكنة هو:

$A_7^2 = 42$

2). حساب الاحتمالات:

2-أ). حساب $P(A)$ واستنتاج $P(B)$:

- حساب $P(A)$:

$$P(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

- استنتاج $P(B)$:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

2-ب). حساب $P(C)$ و $P(E)$:

- حساب $P(C)$: احتمال أن يكون H_1 هو الرئيس:

$$P(C) = \frac{A_6^1}{42} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

- حساب $P(E)$: احتمال ألّا تضمّ اللجنة كلًّا من H_1 و F_1: يعني أن يتم اختيار أعضاء اللجنة من بين الاشخاص الخمسة المتبقيين، ومنه:

$$P(E) = \frac{A_5^2}{42} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

3). تعيين قانون احتمال x وحساب الأمل الرياضي $E(x)$:

3-أ). تعيين قانون احتمال x:

- قيم المتغيّر العشوائي x هي $\{0; 1; 2\}$.
- حساب الاحتمالات:

$$P(x=0) = \frac{A_4^2}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$P(x=1) = p(B) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

$$P(x=2) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$$

نلخصه بالجدول الآتي:

x_i	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

3-ب). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0 \times \left(\frac{2}{7}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{7}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{7}\right)$$

$$E(x) = \frac{6}{7}$$

MOKHFI CHOUAIB

05. بكالوريا ع. تجريبية-1- 2020

نصّ التمرين:

يحتوي وعاء U على 4 كريات حمراء و6 سوداء،
ويحتوي وعاء V على 5 كريات حمراء و3 سوداء.

كل الكريات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس.

نسحب عشوائيًا كريّتين في آنٍ واحد من أحد الوعاءين بالكيفيّة التالية:

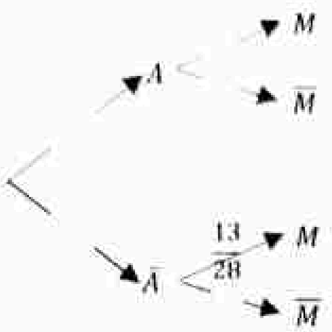
نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيًا من كيس يحتوي على 6 بطاقات متماثلة ومرقّمة من 1 إلى 6، إذا تحصّلنا على أحد الرّقمين 3 أو 5 نسحب الكريّتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريّتين من V.

نسمّي A الحدث: "الحصول على أحد الرّقمين 3 أو 5".
نسمّي M الحدث: "الحصول على كريّتين من نفس اللون".

1). تحقّق أنّ $P(\bar{A})$ احتمال السّحب من الوعاء V هو $\frac{2}{3}$.

2). علماً أنّ الكريّتين المسحوبتين من U، بيّن أنّ احتمال أن تكونا من نفس اللون هو $\frac{7}{15}$.

3). انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها واستنتج $P(M)$.



4). احسب $P_{\overline{M}}(A)$ احتمال السّحب من الوعاء U علما أنّ الكريّتين المسحوبتين مختلفتا اللون؟

الحل

1). التحقّق أنّ $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

▪ الطريقة الأولى:

نعلم أنّ: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$، ومنه:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

لدينا: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$، إذن:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

▪ الطريقة الثانية: $\bar{A}$ هو الحادثة العكسيّة للحادثة A، وبما أنّ A تأخذ الرقمين 3 و5 فإنّ $\bar{A}$ تأخذ الأرقام 1، 2، 4، 6، وبالتالي فإنّ:

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

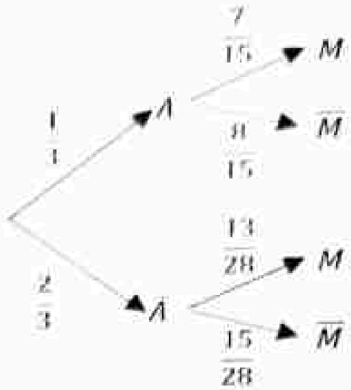
2). البرهان أنّ: $P_A(M) = \frac{7}{15}$

$$P_A(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6} \times \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$$

MOKHFI CHOUAIB

3). شجرة الاحتمال:

- إكمال شجرة الاحتمال:



- استنتاج $P(M)$:

$$P(M) = P(A) \cap P_A(M) + P(\bar{A}) \cap P_{\bar{A}}(M)$$
$$P(M) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{13}{28} = \frac{293}{630}$$

4). حساب $P_{\bar{M}}(A)$:

$$P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{8}{15}}{1 - \frac{293}{630}} = \frac{112}{337}$$

✓ هناك طريقتان لحساب $P(\bar{M})$:

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = \frac{337}{630}$$
$$P(\bar{M}) = P(A \cap \bar{M}) + P(\bar{A} \cap \bar{M})$$
$$P(\bar{M}) = \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{15}{28} = \frac{337}{630}$$

06. بكالوريا ع. تجريبيّة-2- 2020

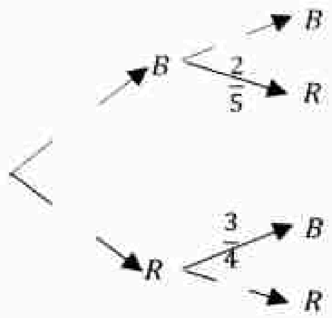
نصّ التمرين

كيس به ثلاث كريات بيضاء وكريتين حمراوين لا نميّز بينها عند اللمس، نسحب عشوائيا كريتين على التوالي من الكيس بالكيفيّة التالية:

إذا كانت الكريّة المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس، وإذا كانت حمراء لا نعيدها إلى الكيس.

1). أوّلا:

1-أ). أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثمّ أكملها.



B يرمز إلى الحصول على كريّة بيضاء وR إلى الحصول على كريّة حمراء.

1-ب). احسب احتمال أن تكون الكريّة المسحوبة الثانية حمراء.

2). ثانيا:

ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب لكريّتين عدد الكريّات الحمراء المسحوبة.

2-أ). عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي x.

2-ب). بيّن أنّ: $P(x = 1) = \frac{27}{50}$، ثمّ عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي x.

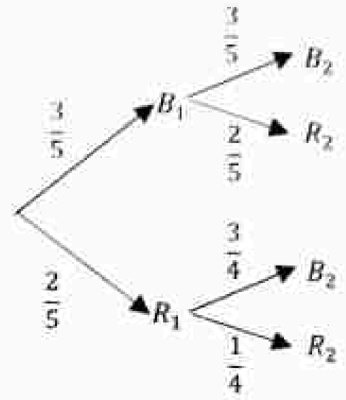
2-ج). احسب $E(x)$ الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي x.

MOKHFI CHOUAIB

الحل

1). شجرة الاحتمال:

1-أ). إكمال شجرة الاحتمال:



1-ب). حساب A: احتمال أن تكون الكريّة المسحوبة الثانية حمراء:

$$P(A) = P(B_1) \cap P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \cap P_{R_1}(R_2)$$

$$P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{50}$$

2). تعيين:

2-أ). مجموعة قيم المتغيّر العشوائي x:

قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0,1,2\}$

2-ب). البرهان أنّ: $P(x=1) = \frac{27}{50}$

$$P(x=1) = P(B_1) \cap P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \cap P_{R_1}(B_2)$$

$$P(x=1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{50}$$

2-ج). حساب $E(x)$

■ تعريف قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=0) = P(B_1) \cap P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(x=2) = P(R_1) \cap P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

نلخّصه بالجدول التالي:

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{1}{10}$

■ حساب $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{9}{25}\right) + 1\left(\frac{27}{50}\right) + 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{37}{50}$$

07. بكالوريا تقني رياضي-1- 2020

نص التمرين

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة: 2، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة: 3، 3، 2.

كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من هذا الكيس.

1). نعتبر الحدثين:

A: "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم".

B: "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون".

1-أ). احسب احتمال كل من الحدثين A و B

1-ب). بيّن أنّ احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

1-ج). استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم أو مختلفتين في اللون.

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحب جُداء الرقمين الظاهرين على الكريّتين المسحوبتين.

عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x.

3). في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريّتين:

إذا كان جُداء رقميهما 4 يربح x^2 دينارا، إمّا إذا كان جُداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينارا، إمّا إذا كان جُداء رقميهما 9 يخسر 130 دينارا.

عيّن قيمة كلّ من x و y حتّى تكون هذه اللعبة عادلة.

x و y عددان طبيعيّان غير معدومين.

الحل

1). أولا:

1-أ). حساب الاحتمالات:

○ A: "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم":

وذلك بسحب كرتين تحملان الرقم 2 C_5^2، أو كرتين تحملان الرقم 3 C_2^2، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{11}{21}$$

MOKHFI CHOUAIB

○ B: الحصول على كرية حمراء C_4^1 وأخرى خضراء C_3^1، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}$$

1-ب). برهان أنّ $P(A \cap B) = \frac{4}{21}$:

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

1-ج). استنتاج $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{11}{21} + \frac{12}{21} - \frac{4}{21} = \frac{19}{21}$$

2). قانون الاحتمال:

- قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{4,6,9\}$
- حساب الاحتمالات:

○ $x = 4$: وذلك بسحب كريّتين تحملان الرقم 2، C_5^2، ومنه:

$$P(x = 4) = \frac{C_5^2}{C_7^2} = \frac{10}{21}$$

○ $x = 6$: وذلك بسحب كريّة تحمل الرقم 2 C_5^1، وأخرى تحمل الرقم 3 C_2^1، ومنه:

$$P(x = 6) = \frac{C_5^1 \times C_2^1}{C_7^2} = \frac{10}{21}$$

○ $x = 9$: وذلك بسحب كريّتين تحملان الرقم 3، C_2^2، ومنه:

$$P(x = 9) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

نلخّصه بالجدول الآتي:

x_i	4	6	9
$P(x = x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

3). تعيين قيمة x و y:

تكون اللعبة عادلة إذا كان: $E(x) = 0$

لدينا:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x = x_i)$$

x_i	x^2	$-y^2$	-130
$P(x = x_i)$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{21}$

$$E(x) = x^2\left(\frac{10}{21}\right) - y^2\left(\frac{10}{21}\right) - 130\left(\frac{1}{21}\right)$$

ومنه، $E(x) = 0$ معناه:

$$\frac{10x^2 - 10y^2 - 130}{21} = 0$$
$$x^2 - y^2 - 13 = 0$$
$$(x - y)(x + y) = 13$$

معناه:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 13 \end{cases} \quad x = 7 \qquad y = 6$$

أو

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 13 \end{cases} \quad x = 7 \qquad y = -6$$

$y = -6$، مرفوض لأنه ليس عددا طبيعيا.

إذن $(x, y) = (7,6)$

08. بكالوريا تقني رياضي-2- 2020

نصّ التمرين

يحتوي كيس على كريّتين خضراوين تحملان الرقمين: 1، 2، وثلاث كريّات حمراء تحمل الأرقام: 1، 2، 2 وأربع كريّات بيضاء تحمل الأرقام: 2، 3، 3، 4.

كلّ الكريّات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس.

1). نسحب من هذا الكيس 3 كريّات في آنٍ واحد.

1-أ). احسب احتمال كلّ من الحدثين A و B التاليين:

1-أ-1). A: "سحب 3 كريّات من نفس اللون"

1-أ-2). B: "سحب كريّة بيضاء على الأقل".

1-ب). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحب أكبر الأرقام المتحصّل عليها.

1-ب-1). بيّن أنّ: $P(x = 3) = \frac{3}{7}$، ثمّ عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x.

1-ب-2). احسب الأمل الرياضي $E(x)$.

2). نسحب الآن 3 كريّات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: "الحصول على 3 أرقام جداؤها عدد زوجي". أحسب احتمال $\bar{C}$.

الحل

1). أولا: السحب على التوالي:

- الحالات الممكنة: بما أن السحب في آن واحد فنعتمد طريقة عد التوفيقات C_n^k، ومنه:

$$C_n^k = C_9^3 = 84$$

1-أ). حساب احتمال الحوادث:

1-أ-1). A: "سحب 3 كريّات من نفس اللون"":

$$P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$$

1-أ-2). B: "سحب كريّة بيضاء على الأقل".

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

1-ب). المتغيّر العشوائي:

- قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{2,3,4\}$

1-ب-1). برهان أنّ $P(x=3) = \frac{3}{7}$:

$$P(x=3) = \frac{C_2^1 \times C_6^2 + C_2^2 \times C_6^1}{C_9^3} = \frac{36}{84} = \frac{3}{7}$$

- قانون الاحتمال:

$$P(x=2) = \frac{C_2^1 \times C_4^3 + C_2^2 \times C_4^1 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

$$P(x=4) = \frac{C_1^1 \times C_8^2}{C_9^3} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$$

- نلخصه بالجدول التالي:

x_i	2	3	4
$P(x = x_i)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

1-ب-2). حساب $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 2\left(\frac{5}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{7}\right) + 4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{65}{21} \approx 3.1$$

2). ثانيا: السحب على التوالي دون إرجاع:

- الحالات الممكنة: بما أن السحب على التوالي دون إرجاع فطريقة العد الملائمة هي عد الترتيبات A_9^3:

$$A_9^3 = 504$$

- حساب $P(C)$:

$$P(C) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$$

- حساب $P(\bar{C})$:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

09. بكالوريا رياضيات-1- 2020

نصّ التمرين

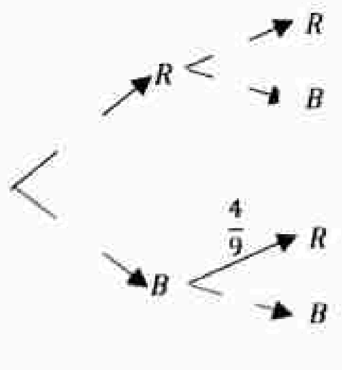
صندوق به 5 كريّات بيضاء و 3 كريّات حمراء

كلّ الكريّات متماثلة ولا نفرّق بينها عند اللّمس.

نسحب من الصندوق كريّة واحدة حيث:

إذا ظهرت كريّة حمراء نُعيدها إلى الصندوق ونضيف له كريّة بيضاء، إمّا إذا ظهرت كريّة بيضاء نعيدها إلى الصندوق ونضيف له كريّة حمراء، ثمّ نكرّر العمليّة مرّة ثانية.

1). انقل شجرة الاحتمالات المقابلة الّتي تنمذج هذه التجربة ثمّ أكملها.



2). بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3). احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

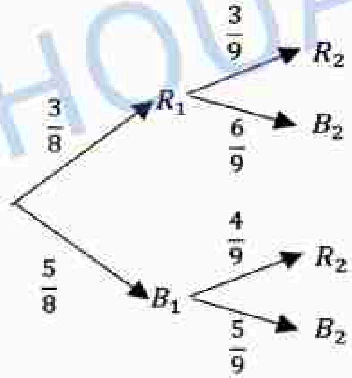
4). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يأخذ كقيمة عدد الكريّات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العمليّة الثانية.

4-أ). برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي x هي: 5، 6، 7

4-ب). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x، ثمّ احسب $E(x)$ أمله الرياضي.

الحل

1). شجرة الاحتمال:



2). برهان A: "احتمال وجود 7 كريّات بيضاء" هو $\frac{1}{8}$:
يعني سحب كرة حمراء في كلّ عمليّة سحب للحصول على 7 كرات بيضاء أي:

$$P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{8\times 9} = \frac{1}{8}$$

3). حساب $P(B)$: "احتمال وجود 4 كريّات حمراء على الأقل": وذلك كما يلي:

- الحصول على 4 كريّات حمراء: يعني إمّا سحب كريّة بيضاء ثمّ أخرى حمراء أو العكس.
- الحصول على 5 كريّات حمراء: وذلك بسحب كريّة بيضاء في السحب الأول والثاني.

ومنه:

- الطريقة الأولى:

$$P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{8} \times \frac{6}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{9}$$
$$P(B) = \frac{20}{72} + \frac{18}{72} + \frac{25}{72} = \frac{63}{72} = \frac{7}{8}$$

- الطريقة الثانية: الحصول على 4 كريّات حمراء على الأقل هو عدم سحب أيّ كرة حمراء في كلا السحبتين معاً، وهو الاحتمال العكسي للحادثة A:

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

4). المتغيّر العشوائي x:

4-أ). تبرير قيم المتغيّر العشوائي x:

- عند سحب كرة حمراء في المرّة الأولى: فإنّنا نضيف كرة بيضاء فيصبح لدينا 6 كرات بيضاء و3 حمراء، وبسحب كرة في المرّة الثانية يمكن أن نحصل على:
  - كرة بيضاء: فنضيف كرة حمراء وبالتالي عدد الكرات البيضاء هو $x = 6$.
  - كرة حمراء: فنضيف كرة بيضاء وبالتالي عدد الكرات البيضاء هو $x = 7$.
- عند سحب كرة بيضاء في المرّة الأولى: فإنّنا نضيف كرة حمراء فيصبح لدينا 5 كرات بيضاء و4 حمراء وبسحب كرة في المرّة الثانية نحصل على:
  - كرة بيضاء: فنضيف كرة حمراء وبالتالي عدد الكرات البيضاء هو $x = 5$.
  - كرة حمراء: فنضيف كرة بيضاء وبالتالي عدد الكرات البيضاء هو $x = 6$.

وهكذا قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{5,6,7\}$

4-ب). قانون الاحتمال:

- حساب الاحتمالات:

$$P(x=5) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{72}$$
$$P(x=6) = \frac{3}{8} \times \frac{6}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{18+20}{72} = \frac{38}{72}$$
$$P(x=7) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{72}$$

MOKHFI CHOUAIB

نلخصه بالجدول التالي:

x_i	5	6	7
$P(x = x_i)$	$\frac{25}{72}$	$\frac{38}{72}$	$\frac{9}{72}$

■ حساب $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 5\left(\frac{25}{72}\right) + 6\left(\frac{38}{72}\right) + 7\left(\frac{9}{72}\right) = \frac{416}{72}$$

$$E(x) = \frac{52}{9} \approx 5.77$$

10. بكالوريا رياضيات-2- 2020

نص التمرين

يحتوي صندوق على كريّات متماثلة منها: n كريّة بيضاء تحمل العدد π.

n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

و4 كريّات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$ و π.

وكريّتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيًا كريّتين في آنٍ واحد من هذا الصندوق.

1). أوّلا:

1-أ). احسب احتمال كلّ من A و B حيث:

○ A: "سحب كريّتين من نفس اللون".

○ B: "سحب كريّتين تحملان نفس العدد علما أنّهما من نفس اللون".

1-ب). عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون: $P(A) = \frac{17}{55}$.

2). نفرض فيما يلي أنّ: $n = 5$ ونسمّي α و β العددين الظاهرين على الكريّتين المسحوبتين.

نعتبر x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ نتيجة سحب العدد: $cos(\alpha)\, cos(\beta)$

2-أ). برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي x هي: $-\frac{1}{2}$ ،0 ،$\frac{1}{4}$ ،1.

2 ب). بيّن أنّ: $P(X = 0) = \frac{27}{55}$

2 ج). عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

الحل

1). أوّلا:

■ طريقة العدّ: السحب في آن واحد ومنه فنعتمد طريقة عدّ التوفيقات C_n^k.

■ الحالات الممكنة: $C_n^k = C_{n+6}^2$

1-أ). حساب الاحتمالات:

○ A: "سحب كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{C_n^2 + C_2^2 + C_4^2}{C_{n+6}^2} = \frac{n^2 - n + 14}{n^2 + 11n + 30}$$

○ B: "سحب كرتين تحملان نفس العدد علما أنّهما من نفس اللون".

نضع C: "سحب كرتين تحملان نفس العدد

$$P(B) = P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{C_n^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2}}{\frac{C_n^2 + C_2^2 + C_4^2}{C_{n+6}^2}}$$

$$P(B) = \frac{(n^2 - n + 2)(n^2 + 11n + 30)}{2(n^2 - n + 14)}$$

1-ب). تعيين n حتّى يكون $P(A) = \frac{17}{55}$:

$$P(A) = \frac{n^2 - n + 14}{n^2 + 11n + 30} = \frac{17}{55}$$

$$55(n^2 - n + 14) = 17(n^2 + 11n + 30)$$

بعد التبسيط نجد أنّ:

$$38n^2 - 242n + 260 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 19044, \sqrt{\Delta} = 138$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{242 - 138}{76} = \frac{26}{19}$$

حل مرفوض لأنه ليس عددا طبيعيا.

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{242 + 138}{76} = \frac{380}{76} = 5$$

حلّ مقبول لأنّه عدد طبيعي ومنه: $n = 5$

2). ثانيا:

2-أ). التبرير : لدينا كلّ الأرقام التي تحملها الكرات هي: π، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$، وبالتالي:

MOKHFI CHOUAIB

$\cos\pi \times \cos\pi = -1 \times -1 = 1$

$\cos\pi \times \cos\frac{\pi}{2} = -1 \times 0 = 0$

$\cos\pi \times \cos\frac{\pi}{3} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{2} = 0 \times 0 = 0$

$\cos\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{3} = 0 \times \frac{1}{2} = 0$

$\cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ومنه قيم المتغير العشوائي x: $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 1\right\}$

2-ب). برهان أنّ $P(x=0) = \frac{27}{55}$:

الحصول على القيمة 0 معناه سحب كرة واحدة على الأقلّ تحمل الرقم $\frac{\pi}{2}$، ومنه:

$$P(x=0) = \frac{C_3^1 \times C_8^1 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{27}{55}$$

2-ج). قانون الاحتمال:

- $x = -\frac{1}{2}$: وذلك بسحب كرة تحمل π وأخرى تحمل $\frac{\pi}{3}$، ومنه:

$$P\left(x = -\frac{1}{2}\right) = \frac{C_6^1 \times C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55}$$

- $x = \frac{1}{4}$: وذلك بسحب كرتين تحملان $\frac{\pi}{3}$، ومنه:

$$P\left(x = \frac{1}{4}\right) = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

- $x = 1$: وذلك بسحب كرتين تحملان π، ومنه:

$$P(x=1) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{15}{55}$$

نلخّصه بالجدول التالي:

x_i	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1
$P(x=x_i)$	$\frac{12}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

- حساب $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{12}{55}\right) + 0\left(\frac{27}{55}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{55}\right) + 1\left(\frac{15}{55}\right) = \frac{37}{220}$$

11. بكالوريا ع. تجريبيّة-1- 2019

نصّ التمرين

يحتوي كيس على خمس كريّات حمراء: منها أربع كريّات تحمل الرقم 1، وكريّة واحدة تحمل الرقم 2، وسبع كريّات خضراء: منها أربع كريّات تحمل الرقم 1، وثلاث كريّات تحمل الرقم 2.

كلّ الكريّات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس.

1). نسحب عشوائيّا كريّتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث:

- A: سحب كريّتين من نفس اللون.
- B: سحب كريّتين تحملان نفس الرقم.

1-أ). بيّن أنّ احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$

1-ب). احسب احتمال الحادثة B؟

2). علما أنّ الكريّتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

3). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ عمليّة سحب عدد الكريّات الحمراء المتبقّية في الكيس.

3-أ). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x؟

3-ب). احسب أمله الرياضي $E(x)$؟

الحلّ

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k حيث n يمثّل العدد الإجمالي للكريّات، و k عدد الكريّات المسحوبة.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثّلاثة من الكيس في آن واحد فإنّ:

$$C_n^k = C_{12}^2 = 66$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

MOKHTI CHOUAIB

1-أ). بيان أنّ: $P(A)=\frac{31}{66}$:

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{10+21}{66}=\frac{31}{66}$$

1-ب). حساب $P(B)$:

$$P(B)=\frac{C_8^2+C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{28+6}{66}=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}$$

2). حساب $P_A(B)$:

■ $P(A\cap B)$: كريّتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم، وهذا يعني إمّا أن يتمّ سحب كريّتين حمراوين تحملان رقم 1: C_4^2، أو سحب كريّتين خضراوين تحملان رقم 1: C_4^2، أو سحب كريّتين خضراوين تحملان رقم 2: C_3^2.

■ $P_A(B)$: لدينا:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_4^2+C_4^2+C_3^2}{C_{12}^2}}{\frac{31}{66}}=\frac{\frac{6+6+3}{66}}{\frac{31}{66}}=\frac{15}{31}$$

3). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

3-أ). قانون الاحتمال للمتغيّر x:

■ قيم المتغير x : $x\in\{3,4,5\}$

○ $x=3$: الحصول على كريّتين حمراوين.

○ $x=4$: سحب كريّة حمراء وأخرى خضراء.

○ $x=5$: الحصول على كريّتين خضراوين.

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x=3)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$$
$$P(x=4)=\frac{C_5^1\times C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{5\times7}{66}=\frac{35}{66}$$
$$P(x=5)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$$

■ نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	3	4	5
$P(x=x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{35}{66}$	$\frac{21}{66}$

3-ب). الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=3\left(\frac{10}{66}\right)+4\left(\frac{35}{66}\right)+5\left(\frac{21}{66}\right)$$
$$E(x)=\frac{30+140+105}{66}=\frac{275}{66}$$

12. بكالوريا ع. تجريبية-2- 2019

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على 10 كريّات لا نفرّق بينها عند اللمس منها كريّتان تحملان الرقم 0، وثلاث تحمل الرقم 1، والكريّات الأخرى تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيّا وفي آن واحد 3 كريّات من الصندوق.

ليكن x المتغيّر العشوائيّ الّذي يرفق بكلّ سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريّات المسحوبة.

1). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x ثمّ احسب أمله الرياضي $E(x)$؟

2). بيّن أنّ احتمال الحصول على 3 كريّات كلّ منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$؟

3). نسحب الآن من الصّندوق كريّتين على التوالي دون إرجاع. ما احتمال الحصول على كريّتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما أنّ جداءهما زوجي؟

الحل

1). السحب في آن واحد:

■ تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k،

MOKHFI CHOUAIB

- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنه يتمّ سحب الكرات الثلاثة من الصندوق في آن واحد فإنّ: $C_n^k = C_{10}^3 = 120$
- حساب الاحتمالات:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). قانون الاحتمال للمتغيّر x:

- قيم x: $x \in \{0,1,2,4,8\}$
  - $x = 0$: بسحب كريّة على الأقلّ تحمل الرقم 0.
  - $x = 1$: بأن تحمل كلّ الكريّات المسحوبة الرقم 1.
  - $x = 2$: بسحب كريّتين تحملان الرقم 1 وثالثة تحمل الرقم 2.
  - $x = 4$: بسحب كريّتين تحملان الرقم 2 وثالثة تحمل الرقم 1.
  - $x = 8$: وذلك بسحب ثلاث كرات تحمل الرقم 2.
- حساب الاحتمالات:

$$P(x = 0) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2\times 28 + 1\times 8}{120} = \frac{8}{15}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{3\times 5}{120} = \frac{15}{120} = \frac{3}{24}$$

$$P(x = 4) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{3\times 10}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$$P(x = 8) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

- نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	4	8
$P(x = x_i)$	$\frac{64}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

1-ب). الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=5} x_i \, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{64}{120}\right) + 1\left(\frac{1}{120}\right) + 2\left(\frac{15}{120}\right) + 4\left(\frac{30}{120}\right) + 8\left(\frac{10}{120}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+1+30+120+80}{120} = \frac{231}{120} = \frac{77}{40}$$

2). بيان أنّ: $P(H) = \frac{7}{24}$: حيث H هي حادثة "الحصول على 3 كريّات كلّ منها يحمل رقما زوجيًا"، وذلك بسحب 3 كريّات من الكريّات السبع التي تحمل رقما زوجيا (كريّتان تحملان 0 وخمس تحمل الرقم 2): C_7^3، ومنه:

$$P(H) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

✓ يمكن حساب $P(H)$ عن طريق استخراج التشكيلات الثلاث: $(0,0,2), (0,2,2), (2,2,2)$، ومنه:

$$P(H) = \frac{C_2^2 \times C_5^1 + C_2^1 \times C_5^2 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

3). السحب على التوالي دون إرجاع:

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب على التوالي دون إرجاع، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ الترتيبات الممكنة A_n^k، حيث n العدد الإجمالي للكريّات، و k عدد الكريّات المسحوبة.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنه يتمّ سحب من الصندوق كريّتين على التوالي دون ارجاع : $A_n^k = A_{10}^2 = 90$
- A: حادثة الحصول على كريّتين تحملان رقمين مجموعهما فردي: لحصول هذه الحادثة فلا بدّ من سحب كريّة تحمل رقما فرديًا وأخرى تحمل رقما زوجيًا، ومع مراعاة الترتيب فلدينا تبديلتين.

$$P(A) = \frac{2(A_3^1 \times A_7^1)}{A_{10}^2} = \frac{2\times(3\times 7)}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

- B: حادثة الحصول على كريّتين تحملان رقمين جداءهما زوجي: لحصول هذه الحادثة فيكفي سحب كريّة واحدة على الأقل تحمل رقما زوجيًا، أي إمّا الحادثة A أو أن تحمل الكريتين رقما زوجيا A_7^2.

$$P(B) = P(A) + \frac{A_7^2}{A_{10}^2} = \frac{42+42}{90} = \frac{84}{90} = \frac{14}{15}$$

- حساب $P(A \cap B)$: نلاحظ أنّ: $A \subset B$، ومنه:

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

MOKHFI CHOUAIB

■ حساب $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

13. بكالوريا تقني رياضي-1- 2019

نصّ التمرين

توجد إجابة صحيحة واحدة من بين الأجوبة المقترحة في كلّ حالة من الحالات التالية. اختر الإجابة الصحيحة مبرّرا اختيارك.

يحتوي كيس على 3 كريّات بيضاء تحمل الأرقام 1، 2، 3 وكريّتين سوداوين تحملان الرقمين 1، 2، نسحب من الكيس 3 كريّات عشوائيّا وفي آن واحد.

كلّ الكريّات متشابهة لا نفرّق بينها عند اللمس.

نعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكريّات السوداء المسحوبة.

1). قيم المتغيّر العشوائي x هي:

1-أ). $\{1,2,3\}$

1-ب). $\{0,2,3\}$

1-ج). $\{0,1,2\}$

2). الأمل الرياضي $E(x)$ للمتغيّر x هو:

2-أ). $E(x) = \frac{4}{5}$

2-ب). $E(x) = \frac{6}{5}$

2-ج). $E(x) = \frac{11}{10}$

3). احتمال الحصول على كريّة واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريّات المسحوبة يساوي:

3-أ). $\frac{7}{10}$

3-ب). $\frac{9}{10}$

3-ج). $\frac{3}{5}$

4). احتمال باقي قسمة مجموع مربّعات الأرقام الّتي تحملها الكريّات المسحوبة على 13 هو 1:

4-أ). $\frac{2}{5}$

4-ب). $\frac{3}{10}$

4-ج). $\frac{1}{5}$

الحل

1). قيم المتغيّر العشوائي x هي: $x \in \{0,1,2\}$

بما أنّ الكيس لا يحوي سوى كريّتين سوداوين فلا يمكن سحب أكثر من ذلك، مما يعني أنّه يمكن ألّا يتمّ سحب أيّ كريّة سوداء: $x = 0$، أو

أنّ يتمّ سحب كريّة سوداء واحدة فقط: $x = 1$، أو

أنّ يتمّ سحب كريّتين سوداوين: $x = 2$.

2). الأمل الرياضي $E(x)$ للمتغيّر x هو:

$E(x) = \frac{6}{5}$، وذلك كما يلي:

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

○ تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث n يمثّل العدد الإجمالي للكريّات، و k عدد الكريّات المسحوبة.

○ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثّلاثة من الكيس في آن واحد فإنّ:

$$C_n^k = C_5^3 = 10$$

○ حساب الاحتمالات:

$$P(x = 0) = \frac{C_2^0 \times C_3^3}{C_5^3} = \frac{1\times1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^3} = \frac{2\times3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^3} = \frac{1\times3}{10} = \frac{3}{10}$$

■ حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{10}\right) + 1\left(\frac{6}{10}\right) + 2\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+6+6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

3). حساب احتمال الحادثة A: حيث A هي حادثة "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1"، ومن أجل حدوث A فلا بدّ من سحب كرية سوداء تحمل الرقم 1، مع كريتين من الباقي:

$$P(A) = \frac{C_1^1 \times C_4^2}{C_5^3} = \frac{1\times 6}{10} = \frac{3}{5}$$

4). حساب احتمال الحادثة B: حيث B هي حادثة أن يكون باقي قسمة مجموع مربعات الأرقام الّتي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1، ومن أجل حدوث B فلا بدّ من سحب 3 كريات تحمل الرقم 3، وهذا غير ممكن، إذ لا يحتوي الكيس سوى على كرية واحدة فقط تحمل الرقم 3، فلم يبق سوى سحب كرية تحمل الرقم 3: C_1^1، وكرية تحمل الرقم 2: C_2^1، وأخرى تحمل الرقم 1: C_2^1، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_2^1}{C_5^3} = \frac{1\times 2\times 2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

14. بكالوريا تقني رياضي-2- 2019

نصّ التمرين

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام: 1، 2، 3، 4، وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام: 1، 2، 3، وكريتين سوداوين تحملان الرقمين: 1، 2.

كلّ الكريات متشابهة لا نفرّق بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس.

1). احسب احتمال الأحداث التالية:

1-أ). A: سحب كرية بيضاء واحدة؟

1-ب). B: سحب كريتين بيضاوين على الأكثر؟

1-ج). C: سحب 3 كريات تحمل أرقاما غير أولية؟

2). نعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يرفق بكلّ عملية سحب عدد الكريات الّتي تحمل أرقاما أوليّة.

2-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x؟

2-ب). عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي x؟

2-ج). احسب: $P(x^2 - x \leq 0)$

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثّلاثة من الكيس في آن واحد فإنّ: $C_n^k = C_9^3 = 84$
- حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: للحصول على كرية بيضاء واحدة فلا بدّ من سحب كرية بيضاء C_4^1، وكريتين من الباقي C_5^2:

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{4\times 10}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

1-ب). B: للحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر فلا بدّ من أن نحصل على أحد التّشكيلات:

(B,B,X): $C_4^2 \times C_5^1$، أو

(B,X,X): $C_4^1 \times C_5^2$، أو

(X,X,X): $C_4^0 \times C_5^3$، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_4^0 \times C_5^3 + C_4^1 \times C_5^2 + C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{10+40+30}{84}$$

$$P(B) = \frac{80}{84} = \frac{20}{21}$$

✓ يمكن حساب $P(B)$ عن طريق حساب $P(\bar{B})$:
احتمال سحب 3 كريات بيضاء: C_4^3، وذلك كما يلي:

$$P(B)+P(\bar{B})=1 \Leftrightarrow P(B)=1-P(\bar{B})$$

$$P(B)=1-\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{84-4}{84}=\frac{80}{84}=\frac{20}{21}$$

1-ج). C: الحصول على 3 كريات تحمل أرقاما غير أولية نسحبها من بين 4 كريات تحمل أرقاما غير أولية وهي: كرية بيضاء وأخرى حمراء وأخرى سوداء كلها تحمل الرقم 1:

$$P(C)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$

2). المتغير العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قيم المتغير x: بما أننا نقوم بسحب ثلاث كريات مع وجود على الأقل ثلاث أرقام أولية فإنه يمكن سحبها لتصبح $x=3$، كما يمكن ألا نحصل على أي رقم أولي وذلك بسحب الكريات التي تحمل الرقم 1 أو الرقم 4 و منه فإن $x=0$، وبين ذلك يمكن سحب الكريات حيث واحدة فقط تحمل رقما أولياً $x=1$، أو حيث كرتين تحملان رقمين أولين $x=2$، ومنه:

$$x \in \{0,1,2,3\}$$

2-ب). قانون احتمال المتغير x:

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x=0)=P(C)=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$$

$$P(x=1)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{C_9^3}=\frac{5\times 6}{84}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$$

$$P(x=2)=\frac{C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{1\times 40}{84}=\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$$

$$P(x=3)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

■ نلخصه بالجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

2-ج). حساب $P(x^2-x\le 0)$: تنعدم x^2-x من أجل: $x=0$ أو $x=1$، وتكون x^2-x موجبة تماما من أجل: $0<x<1$، ومنه فإن: $x^2-x\le 0$ محققة فقط من أجل: $x=0$ أي الحالة C، أو $x=1$ أي في حالة سحب كرية واحدة فقط تحمل رقما أوليا، ومنه: $x\in\{0,1\}$

$$P(x^2-x\le 0)=P(x=0)+P(x=1)$$

$$P(x^2-x\le 0)=\frac{4}{84}+\frac{30}{84}=\frac{34}{84}=\frac{17}{42}$$

15. بكالوريا رياضيات 2019

✍ نص التمرين

U_1 وU_2 صندوقان غير شفافين، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين، الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس، نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.
إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2.

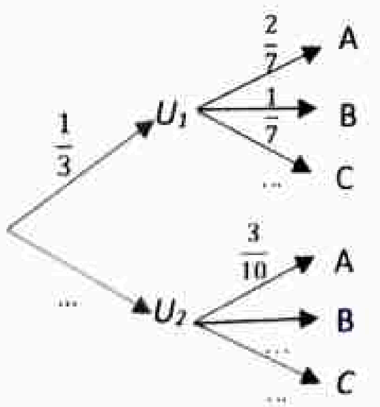
1). نعتبر الأحداث:

○ A: سحب كريتين حمراوين.

○ B: سحب كريتين سوداوين.

○ C: سحب كريتين من لونين مختلفين.

1-أ). انقل، وأكمل شجرة الاحتمالات.



MOKHFI CHOUAIB

1-ب). احسب احتمالات الأحداث A، B و C.

2). نعتبر x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

2-أ). عيّن قيم المتغير العشوائي x؟

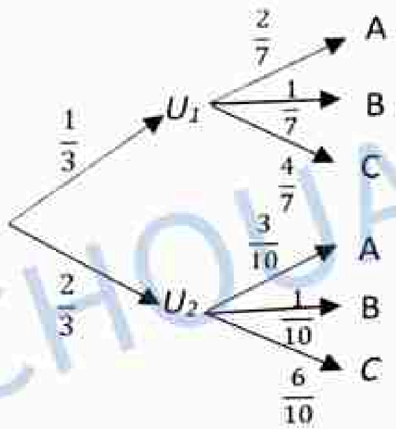
2-ب). عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x؟

2-ج). احسب الأمل الرياضي $E(x)$؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

1-أ). شجرة الاحتمال:



حساب احتمال الأحداث:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:
  - U_1: بالنسبة للصندوق U_1 فإنّ: $C_n^k = C_7^2 = 21$
  - U_2: بالنسبة للصندوق U_2 فإنّ: $C_n^k = C_5^2 = 10$
- الأحداث D و E:
  - حساب D: D هي حادثة ظهور الرقمين 2 أو 4:

$$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

  - حساب E: E هي حادثة ظهور باقي الأرقام:

$$P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

1-أ-1). A: سحب كريتين حمراوين: إمّا أن يتمّ سحب الكريتين من الصندوق U_1 أو U_2 ومنه:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{C_4^2}{C_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{1}{3} \times \frac{6}{21} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10}$$

$$P(A) = \frac{2}{21} + \frac{1}{5} = \frac{10+21}{105} = \frac{31}{105}$$

✓ يمكن تعويض معطيات الشجرة مباشرة دون حساب.

1-أ-2). B: سحب كريتين سوداوين: إمّا أن يتمّ سحب الكريتين من الصندوق U_1 أو U_2 ومنه:

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{21} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10}$$

$$P(B) = \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{5+7}{105} = \frac{12}{105}$$

1-أ-3). C: سحب كريتين من لونين مختلفين:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - [P(A) + P(B)]$$

$$P(C) = 1 - \frac{31+12}{105} = \frac{105-43}{105} = \frac{62}{105}$$

✓ يمكن حساب الحادثة C بنفس الطريقة التي تم بها حساب الحادثتين الأخريين لنحصل على نفس النتيجة.

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قيم المتغير العشوائي x: إمّا ألّا يتمّ سحب أيّ كريّة حمراء $x = 0$، وهذا يعني سحب كريتين سوداوين أي حصول الحادثة B، وإمّا أن يتمّ سحب كرة حمراء واحدة فقط $x = 1$، وهذا يعني سحب كريتين مختلفتي اللون أي حصول الحادثة C، وإمّا أن يتمّ سحب كريتين حمراوين $x = 2$، وهذا ما يعني حصول الحادثة A، ومنه فإنّ: $x \in \{0,1,2\}$

2-ب). قانون الاحتمال للمتغيّر x:

- حساب الاحتمالات:

$$P(x = 0) = P(B) = \frac{12}{105}$$

$$P(x = 1) = P(C) = \frac{62}{105}$$

$$P(x = 2) = P(A) = \frac{31}{105}$$

MOKHFI CHOUAIB

■ نلخّصه بالجدول الآتي:

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

2-ج). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x=x_i)$$

$$E(x)=0\left(\frac{12}{105}\right)+1\left(\frac{62}{105}\right)+2\left(\frac{31}{105}\right)$$

$$E(x)=\frac{0+62+62}{105}=\frac{124}{105}$$

16. بكالوريا رياضيّات 2018

يوتيوب: الاحتمالات باك 2018 شعبة رياضيات

نصّ التمرين

كيس يحوي 9 كريّات لا نفرّق بينها باللمس موزّعة كما يلي: 5 كريّات حمراء: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريّات خضراء: 3−، 2، 3 وكريّة بيضاء: 1−.
نسحب عشوائيًا 4 كريّات في آن واحد.

1). احسب احتمال الأحداث التّالية:

1-أ). A: الحصول على أربع كريّات من نفس اللون؟

1-ب). B: الحصول على كريّة بيضاء على الأكثر؟

1-ج). C: سحب أربع كريّات مجموع أرقامها معدوم؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ نتيجة سحب عدد الكريّات الخضراء المتبقّية في الكيس.

2-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x ثمّ عرّف قانون احتماله؟

2-ب). احسب الأمل الرياضي $E(x)$ للمتغيّر العشوائي x؟

2-ج). احسب احتمال الحادثة D: $x^2-x>0$

الحل

1). احتمال الأحداث:

■ تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكريّات الأربعة من الكيس في آن واحد:

$$C_n^k=C_9^4=126$$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: للحصول على أربع كريّات من نفس اللون فلا بدّ من سحب 4 كريّات حمراء C_5^4، وعليه:

$$P(A)=\frac{C_5^4}{C_9^4}=\frac{5}{126}$$

1-ب). B: للحصول على كريّة بيضاء على الأكثر فلا بدّ من سحب كريّة بيضاء و 3 كريّات من الباقي $C_1^1\times C_8^3$، أو عدم سحب أي كريّة بيضاء مع سحب أربع كريّات من الباقي $C_1^0\times C_8^4$، وعليه:

$$P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_1^0\times C_8^4}{C_9^4}=\frac{126}{126}=1$$

1-ج). C: للحصول على أربع كريّات مجموع أرقامها معدوم فلا بدّ من سحب إحدى التشكيلتين:

$(2,2,-3,-1)$ أي $C_4^2\times C_1^1\times C_1^1$،

$(1,-1,3,-3)$ أي $C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1$:

$$P(C)=\frac{C_4^2\times C_1^1\times C_1^1+C_2^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1}{C_9^4}$$

$$P(C)=\frac{8}{126}=\frac{4}{63}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

■ قيم المتغيّر العشوائي x: $x\in\{0,1,2,3\}$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{C_9^4}=\frac{6}{126}=\frac{1}{21}$$
$$P(x=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{C_9^4}=\frac{45}{126}$$
$$P(x=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{C_9^4}=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$$
$$P(x=3)=\frac{C_3^0\times C_6^4}{C_9^4}=\frac{15}{126}=\frac{5}{42}$$

■ نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

2-ب). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=4}x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=0\left(\frac{6}{126}\right)+1\left(\frac{45}{126}\right)+2\left(\frac{60}{126}\right)+3\left(\frac{15}{126}\right)$$
$$E(x)=\frac{0+45+120+45}{126}=\frac{210}{126}=\frac{5}{3}$$

2-ج). حساب احتمال الحادثة D: $x^2-x>0$:

قيم المتغيّر العشوائي x الّتي تحقّق الحادثة D:

$x\in\{2,3\}$، وعليه، فإن:

$$P(D)=P(x=2)+P(x=3)$$
$$P(D)=\frac{60+15}{126}=\frac{75}{126}=\frac{25}{42}$$

17. بكالوريا تقني رياضي 2018

يوتيوب: الاحتمالات باك 2018 شعبة تقني رياضي

نصّ التمرين

كيس به 7 كريّات متماثلة، لا نفرّق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.

نسحب عشوائيّا وفي آن واحد كريّتين من الكيس.

1). أحسب احتمال الحادثة:

1-أ). A: سحب كريّتين مختلفتين في اللون؟

1-ب). B: سحب كريّتين من نفس اللون؟

2). نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$، حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينارا جزائريّا، فإذا سحب كريّتين بيضاوين يتحصّل على $100DA$، وإذ سحب كريّتين مختلفتي اللون يتحصّل على $50DA$، وإذا سحب كريّتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يمثّل ربح اللاعب أو خسارته بدلالة α.

2-أ). برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي هي: $(100-\alpha,\ 50-\alpha,\ -\alpha)$، ثمّ عرّف قانون احتماله؟

2-ب). بيّن أنّ الأمل الرّياضي للمتغيّر العشوائي x بدلالة α هو: $E(x)=-\alpha+\frac{300}{7}$، ثمّ أوجد أكبر قيمة ممكنة للعدد α حتّى تكون اللعبة في صالح اللاعب؟

الحـل

1). احتمال الأحداث:

■ تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب كريّتين من الكيس في آن واحد:

$$C_n^k=C_7^2=21$$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: لسحب كريّتين مختلفتين في اللون فلا بدّ من سحب كريّة بيضاء C_3^1 وأخرى خضراء C_4^1:

$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\frac{3\times4}{21}=\frac{4}{7}$$

1-ب). B: لسحب كريّتين من نفس اللون فلا بدّ من سحب كريّتين بيضاوين C_3^2 أو كريّتين خضراوين C_4^2:

$$P(B)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3+6}{21}=\frac{3}{7}$$

✓ نلاحظ أنّ B ماهي إلّا الحادثة العكسيّة للحادثة A:

$$P(A)+P(B)=1$$
$$P(B)=1-P(A)$$
$$P(B)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

MOKHFI CHOUAIB

2). المتغيّر العشوائي x:

2-أ). تبرير قيم x:

- إذا قام اللاعب بسحب كريّتين بيضاوين فإنّه يدفع مبلغا قدره α ويربح مبلغا قدره $100DA$ لتكون قيمة x في هذه الحالة هي $x = 100 - \alpha$، وإذا قام بسحب كريّتين مختلفتي اللون فإنّ قيمة x في هذه الحالة تصبح $x = 50 - \alpha$، إمّا إذا قام بسحب كريّتين خضراوين فإنّه يكون قد دفع مبلغ α دون أن يربح شيئا لتكون بذلك قيمة x: $x = -\alpha$.

- قانون احتمال x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

○ قيم المتغيّر العشوائي x:

$$x \in \{-\alpha,\ 50 - \alpha,\ 100 - \alpha\}$$

○ حساب احتمال الأحداث:

$$P(x = -\alpha) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$P(x = 50 - \alpha) = P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(x = 100 - \alpha) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

○ نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	$-\alpha$	$50-\alpha$	$100-\alpha$
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

2-ب). الأمل الرّياضي $E(x)$:

- برهان أنّ: $E(x) = -\alpha + \frac{300}{7}$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = -\alpha\left(\frac{2}{7}\right) + 50 - \alpha\left(\frac{4}{7}\right) + 100 - \alpha\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$E(x) = \frac{300 - 3\alpha + 600 - 12\alpha - 6\alpha}{21}$$

$$E(x) = \frac{900 - 21\alpha}{21} = -\alpha + \frac{300}{7}$$

- إيجاد أكبر قيمة ممكنة للعدد الطبيعي α: حتّى تكون اللعبة في صالح اللاعب فلا بدّ من أن يكون: $E(x) > 0$، أي:

$$-\alpha + \frac{300}{7} > 0 \Leftrightarrow -\alpha > -\frac{300}{7} \Leftrightarrow \alpha < \frac{300}{7}$$

وعليه: فإنّ اللعبة لا تزال في صالح اللاعب ما دام: $\alpha < \frac{300}{7}$، وبما أنّ α عدد طبيعي فإنّ قيم α: $(0, 1, \ldots, 42)$، ومنه فإنّ أكبر قيمة للعدد α حتّى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي 42 أي: $\alpha = 42$.

18. بكالوريا ع. تجريبيّة 2018

يوتيوب: الاحتمالات باك 2018 شعبة علوم تجريبية

نصّ التمرين

يحوي صندوق 10 كريّات متماثلة لا نفرّق بينها باللمس، منها أربع كريّات بيضاء مرقّمة بالأرقام التالية: 1، 2، 2، 3، وثلاث كريّات حمراء مرقّمة بالأرقام: 2، 2، 3، وثلاث كريّات خضراء مرقّمة بالأرقام: 2، 3، 3.

نسحب عشوائيّا وفي آن واحد 3 كريّات من هذا الصندوق.

1). نعتبر الحادثتين:

○ A: الكريّات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني.

○ B: الكريّات الثلاث المسحوبة لها نفس الرّقم.

1-أ). أحسب: احتمال الحادثتين A و B؟

1-ب). بيّن أنّ: $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$، ثمّ استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ نتيجة عمليّة سحب عدد الكريّات الّتي تحمل رقما فرديّا.

2-أ). عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي x؟

2-ب). احسب أمله الرّياضي $E(x)$؟

MOKHFI CHOUAIB

✍ الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في ان واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثلاثة من الصندوق في ان واحد:

$$C_n^k = C_{10}^3 = 120$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). حساب احتمال الحادثتين:

- A: لتحمل الكريّات المسحوبة ألوان العلم الوطني فلا بدّ من سحب كريّة خضراء C_3^1، وكريّة حمراء C_3^1، وأخرى بيضاء C_4^1، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{3\times3\times4}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

- B: لتحمل الكريّات المسحوبة نفس الرقم فلا بدّ من سحب 3 كريّات تحمل الرّقم 2: C_5^3، أو 3 كريّات تحمل الرّقم 3: C_4^3، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{10+4}{120} = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

1-ب). تبيان واستنتاج:

- تبيين أنّ: $P(A\cap B) = \frac{1}{20}$: أي الحصول على 3 كريّات من ألوان مختلفة وتحمل نفس الرّقم:

$$P(A\cap B) = \frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1 + C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{C_{10}^3}$$

$$P(A\cap B) = \frac{4+2}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

- استنتاج:

○ $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1\times10}{20\times3} = \frac{1}{6}$$

○ $P(A\cup B)$:

$$P(A\cup B) = P(A) + (B) - P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B) = \frac{3}{10} + \frac{7}{60} - \frac{1}{20}$$

$$P(A\cup B) = \frac{18+7-3}{60} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$p(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

- قيم المتغيّر x: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$
- حساب الاحتمالات:

$$p(x=0) = \frac{C_5^3\times C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$p(x=1) = \frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$p(x=2) = \frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$p(x=3) = \frac{C_5^3\times C_5^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

- نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

2-ب). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{12}\right) + 1\left(\frac{5}{12}\right) + 2\left(\frac{5}{12}\right) + 3\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+5+10+3}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

19. بكالوريا رياضيّات 2009

يوتيوب: الاحتمالات باك 2009 شعبة رياضيات

✍ نصّ التمرين

كيس به 10 كريّات متماثلة لا نميّز بينها عند اللمس، منها: 4 بيضاء و6 حمراء.

1). نسحب عشوائيًا من الكيس 3 كريّات في آن واحد. احسب احتمال

1-أ). A: الحصول على 3 كريّات بيضاء؟

1-ب). B: الحصول على الأقلّ على كريّة حمراء؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ عمليّة سحب عدد الكريّات البيضاء المسحوبة.

2-أ). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x؟

2-ب). احسب أمله الرّياضي $E(x)$؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: يتمّ السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكريّات الثّلاثة من الكيس في آن واحد:

$$C_n^k = C_{10}^3 = 120$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: لنحصل على 3 كريّات بيضاء:

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

1-ب). B: لنحصل على الأقلّ على كريّة حمراء إمّا يتمّ سحب:

كريّة حمراء واحدة فقط وكريّتين من لون آخر: $C_6^1 \times C_4^2$، أو كريّتين حمراوين وكرة ثالثة من لون آخر: $C_6^2 \times C_4^1$، وإمّا أن تكون كلّ الكرات المسحوبة حمراء: C_6^3:

$$P(B) = \frac{C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3}{C_{10}^3}$$

$$P(B) = \frac{6\times6+15\times4+20}{120} = \frac{29}{30}$$

✓ نلاحظ أنّ الحادثة B هي الحادثة العكسيّة للحادثة A:

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

- قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$
- حساب الاحتمالات:

$$P(x=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(x=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4\times15}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$P(x=2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6\times6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4\times1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

- نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2-ب). حساب الأمل الرّياضي $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i\, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+60+72+12}{120}$$

$$E(x) = \frac{144}{120} = \frac{6}{5}$$

MOKHFI CHOUAIB

V. مواضيع مقترحة

01. موضوع مقترح 01

يوتيوب: الاحتمالات للسنة الثالثة ثانوي للشعب العلمية (تمرين مهم جدا) رقم 1

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

يضمّ كيس 5 كرات متماثلة، 3 منها بيضاء (B)، والباقي سوداء (N). نسحب كرتين عشوائيًا.

نعتبر x: عدد الكرات البيضاء المحصّل عليها.

عيّن قانون احتمال x في كلّ حالة من الحالات التّالية:

1). السحب على التوالي دون إرجاع؟

2). السحب على التوالي مع الإرجاع؟

3). السحب دفعة واحدة؟

الحل

1). السحب على التوالي دون إرجاع:

1–أ). تعيين القيم الممكنة للمتغيّر x: $x \in \{0,1,2\}$

- 0 يعبّر عن عدم سحب أيّ من الكرات البيضاء وهو أقلّ عدد ممكن للكرات البيضاء.
- 1 يعبّر عن سحب كرة بيضاء واحدة.
- 2 يعبّر عن سحب كلا الكرتين بيضاء، وهذا أقصى عدد للكرات الّتي يمكن سحبها.

1–ب). تعيين طريقة العدّ: تبعا لطريقة السحب فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ الترتيبات الممكنة A_n^k، حيث n هو عدد عناصر المجموعة الشاملة (العدد الكلّي للكرات)، و k هو عدد عناصر كلّ ترتيبة (عدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة).

1–ج). حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$A_n^k = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

1–د). قانون الاحتمال:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

إذ أنّ الكرات متماثلة فعملية السحب تتمّ في حالة تساوي الاحتمال وبناء عليه يتمّ حساب الاحتمالات تبعا لقيم المتغيّر x كالآتي:

- $P(x = 0)$: "حالة عدم سحب أيّ من الكرات البيضاء": هذه الحالة ممكنة فقط إذا تمّ سحب الكرتين السوداوين معا، أي أنّ عدد الحالات الملائمة هو A_2^2، وعليه فإنّ:

$$P(x = 0) = \frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

- $P(x = 1)$: "حالة سحب كرة واحدة بيضاء": وهذا يعني إمّا أن تظهر السوداء هي الأولى أو البيضاء هي الأولى، وعليه فهنالك تبديلتين، ويتمّ حساب احتمال هذه الحالة كالآتي:

$$P(x = 1) = \frac{2(A_2^1 \times A_3^1)}{A_5^2} = \frac{2(2\times3)}{20} = \frac{3}{5}$$

- $P(x = 2)$: "حالة سحب كرتين بيضاوين": وعدد الحالات الملائمة هو: A_3^2، ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{A_3^2}{A_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

✓ يمكننا التحقّق من النتائج بحصولنا على 1 كنتيجة منطقيّة لمجموع هذه الاحتمالات:

$$\sum P(x = x_i) = \frac{1+6+3}{10} = \mathbf{1}$$

2). السحب على التوالي مع الإرجاع:

2–أ). تعيين القيم الممكنة للمتغيّر x: $x \in \{0,1,2\}$

2–ب). تعيين طريقة العدّ: تبعا لطريقة السحب فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ القوائم الممكنة n^k.

2–ج). حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$n^k = 5^2 = 25$$

MOKHFI CHOUAIB

2-د). قانون الاحتمال:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ذلك لأنّ الكرات متماثلة حيث يتمّ حساب الاحتمالات تبعا لقيم المتغيّر x كالآتي:

- $P(x = 0)$: "حالة عدم سحب أيّ من الكرات البيضاء": هذه الحالة ممكنة فقط إذا تمّ سحب الكرتين السوداوين معا، أي أنّ عدد الحالات الملائمة هو 2^2، لأنّ عدد الكرات السوداء يساوي 2، وعدد الكرات المسحوبة أيضا 2، وعليه فإنّ:

$$P(x = 0) = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

- $P(x = 1)$: "حالة سحب كرة واحدة بيضاء": وهذا يعني إمّا أن تظهر السوداء هي الأولى أو البيضاء هي الأولى، أي أنّ هناك تبديلتين، وعليه يكون حساب احتمال هذه الحالة كالآتي:

$$P(x = 1) = \frac{2(2^1 \times 3^1)}{5^2} = \frac{12}{25}$$

- $P(x = 2)$: "حالة سحب كرتين بيضاوين": وعدد الحالات الملائمة هو: 3^2، ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

> ✓ يمكننا التحقّق من النتائج بحصولنا على 1 كنتيجة منطقيّة لمجموع هذه الاحتمالات:
>
> $\sum P(x = x_i) = \frac{4+12+9}{25} = \mathbf{1}$

3). السحب دفعة واحدة:

3-أ). تعيين القيم الممكنة للمتغيّر x: $x \in \{0,1,2\}$

3-ب). تعيين طريقة العدّ: تبعا لطريقة السحب فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.

3-ج). حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

3-د). قانون الاحتمال:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ذلك لأنّ الكرات متماثلة حيث يتمّ حساب الاحتمالات تبعا لقيم المتغيّر x كالآتي:

- $P(x = 0)$: "حالة عدم سحب أيّ من الكرات البيضاء": هذه الحالة ممكنة فقط إذا تمّ سحب الكرتين السوداوين معا، أي أنّ عدد الحالات الملائمة هو C_2^2، لأنّ عدد الكرات السوداء 2، وعدد الكرات المسحوبة هو 2. وعليه فإنّ:

$$P(x = 0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

- $P(x = 1)$: "حالة سحب كرة واحدة بيضاء": وهذا يعني إمّا أن تظهر السوداء هي الأولى أو البيضاء هي الأولى، أي أنّ هناك تبديلتين، وعليه يكون حساب احتمال هذه الحالة كالآتي:

$$P(x = 1) = \frac{C_2^1 + C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

- $P(x = 2)$: "حالة سحب كرتين بيضاوين": وعدد الحالات الملائمة هو: C_3^2، ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

> ✓ يمكننا التحقّق من النتائج بحصولنا على 1 كنتيجة منطقيّة لمجموع هذه الاحتمالات:
>
> $\sum P(x = x_i) = \frac{1+6+3}{10} = \mathbf{1}$
>
> ✓ يمكننا تمييز طرق العدّ حسب طريقة سحب الكرات:
>
> السحب بإرجاع: قائمة n^k
>
> السحب دون إرجاع: ترتيبة A_n^k
>
> السحب في آن واحد: توفيقة C_n^k

MOKHFI CHOUAIB

02. موضوع مقترح 02

يوتيوب: الاحتمالات بك رقم 4 (بدون إرجاع)

نصّ التمرين

يحتوي كيس على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الأرقام: 1، 2، 2، 4، 6، 8 والبقيّة بيضاء اللون تحمل الأرقام: 1، 3، 5، 5.

نسحب 3 قريصات واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

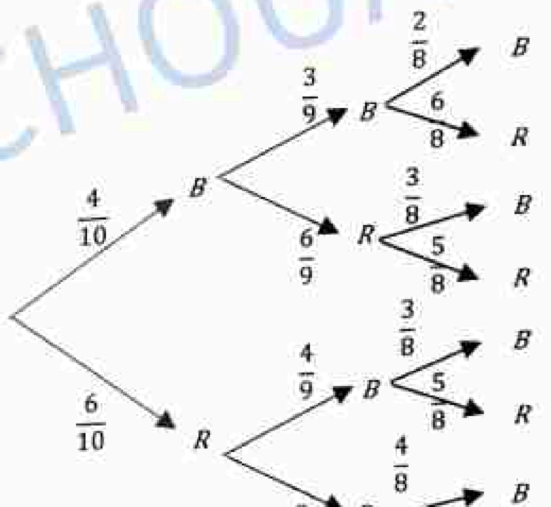
1). شكّل شجرة الاحتمالات المناسبة لذلك؟

2). أحسب احتمال:

- A: الحصول على 3 قريصات من نفس اللون؟
- B: الحصول على 3 قريصات مختلفة اللون؟

الحل

1). شجرة الاحتمالات:



2). احتمال الأحداث:

- A: لنحصل على ثلاثة قريصات من نفس اللون: فلا بد من سحب ثلاث قريصات بيضاء (B,B,B) أو ثلاث حمراء (R,R,R) أي:

$$P(A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

$$P(A)=\frac{24}{720}+\frac{120}{720}=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$$

- B: الحصول على ثلاث قريصات من لونين مختلفين: عبارة عن الحادثة العكسيّة للحادثة A:

$$P(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

03. موضوع مقترح 03

يوتيوب: الاحتمالات بك رقم

نصّ التمرين

يحتوي كيس على 10 كريات منها: 5 بيضاء، 3 حمراء و2 خضراوان.

1). نسحب منه كريتين على التوالي وبالإرجاع ونعتبر كلّ السحبات لها نفس الاحتمال.

ما هو احتمال:

1-أ). A: الحصول على كريتين من نفس اللون؟

1-ب). B: الحصول على كريتين من لونين مختلفين علماً إلّا واحدة منهما حمراء؟

2). نسحب من الكيس كريتين على التوالي بدون إرجاع ونعتبر كلّ السحبات لها نفس الاحتمال.

ما احتمال:

2-أ). C: الحصول على كريتين من نفس اللون؟

2-ب). D: الحصول على كريتين من لونين مختلفين علماً إلّا واحدة منها حمراء؟

الحل يمكن حلّ هذا التمرين بطريقتين

➢ طريقة الحساب:

1). السحب على التوالي بإرجاع:

- تعيين طريقة العدّ: عدّ القوائم الممكنة n^k، وذلك لأنّ السحب على التوالي بإرجاع.
- عدد الحالات الممكنة: لدينا: $n=10$ عدد الكرات الإجمالي، $k=2$ عدد الكرات المسحوبة في كل مرّة، ومنه فعدد الحالات الممكنة في هذا السحب:

$$n^k=10^2=100$$

MOKHFI CHOUAIB

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: لنحصل على كرتين من نفس اللون فلا بدّ من سحب كرتين بيضاوين 5^2 أو حمراوين 3^2 أو خضراوين 2^2، وعليه:

$$P(A)=\frac{5^2+3^2+2^2}{10^2}=\frac{38}{100}=\frac{19}{50}=0.38$$

1-ب). B: لنحصل على كرتين مختلفتين لونا مع استثناء اللون الأحمر فلا بدّ من سحب كرة بيضاء أولا 5^1، ثم كرة خضراء 2^1 بهذا الترتيب أو العكس:

$$P(B)=\frac{2(5^1\times 2^1)}{10^2}=\frac{20}{100}=\frac{10}{50}=0.2$$

2). السحب على التوالي بدون إرجاع:

■ تعيين طريقة العدّ: طريقة عدّ الحالات الممكنة من طريقة عدّ الترتيبات الممكنة A_n^k، وذلك لأنّ السحب على التوالي بإرجاع.

■ عدد الحالات الممكنة: لدينا: $n=10$ عدد الكرات الإجمالي، $k=2$ عدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة، وعليه:

$$A_n^k=A_{10}^2=\frac{10!}{(10-2)!}=90$$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). C: لنحصل على كرتين من نفس اللون فلا بدّ من سحب كرتين بيضاوين A_5^2 أو حمراوين A_3^2 أو خضراوين A_2^2، وعليه:

$$P(C)=\frac{A_5^2+A_3^2+A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{20+6+2}{90}$$

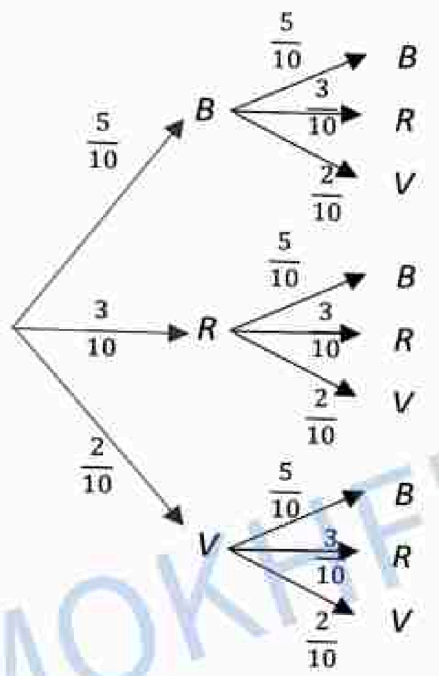
$$P(C)=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}\approx 0.31$$

2-ب). D: لنحصل على كرتين مختلفتين لونا مع استثناء اللون الأحمر فلا بدّ من سحب كرة بيضاء أولا A_5^2 ثم كرة خضراء A_2^2 بهذا الترتيب، أو العكس مما يستلزم تكرار الحالات مرتين:

$$P(D)=\frac{2(A_5^1\times A_2^1)}{A_{10}^2}=\frac{2(5\times 2)}{90}$$

$$P(D)=\frac{20}{90}=\frac{10}{45}\approx 0.22$$

➢ طريقة شجرة الاحتمال:



3). السحب على التوالي بإرجاع: من شجرة الاحتمال نلاحظ أنّ:

3-أ). A: الحصول على كرتين من نفس اللون:

$$P(A)=P(B\cap B)+P(R\cap R)+P(V\cap V)$$

$$P(A)=\frac{(5\times5)+(3\times3)+(2\times2)}{10\times10}=\frac{38}{100}=\frac{19}{50}=0.38$$

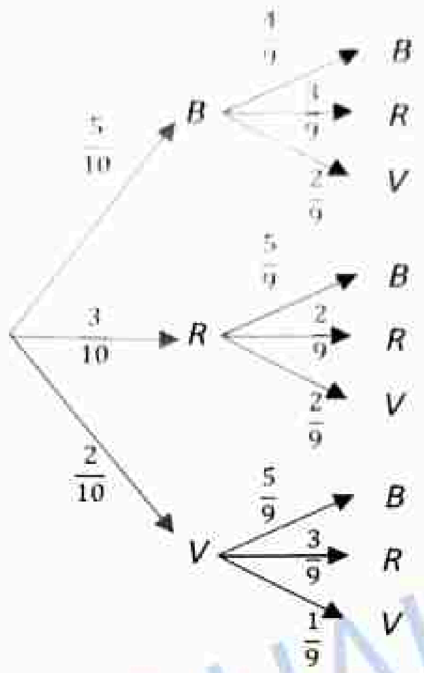
3-ب). B: من شجرة الاحتمال نلاحظ أنّ الحصول على كرتين مختلفتي اللون مع استثناء الكرات الحمراء:

$$P(B)=P(B\cap V)+P(V\cap B)$$

$$P(B)=\frac{(5\times2)+(2\times5)}{10\times10}=\frac{20}{100}=\frac{10}{50}=0.2$$

MOKHFI CHOUAIB

4). السحب على التوالي بدون إرجاع: من شجرة الاحتمال:



نلاحظ أنّ:

4-أ). C: الحصول على كرتين من نفس اللون:

$P(C) = P(B \cap B) + P(R \cap R) + P(V \cap V)$

$P(C) = \frac{(5\times4)+(3\times2)+(2\times1)}{10\times9} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45} \approx 0.31$

4-ب). D: الحصول على كرتين مختلفتي اللون مع استثناء الكرات الحمراء:

$P(D) = P(B \cap V) + P(V \cap B)$

$P(D) = \frac{(5\times2)+(2\times5)}{10\times9} = \frac{20}{90} = \frac{10}{45} \approx 0.22$

04. موضوع مقترح 04

بوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 ...

✓ سحب من صندوق

نصّ التمرين

ليكن n عدد طبيعي بحيث: $n \geq 4$

1). يحتوي صندوق U على n كرة لا يمكن التمييز بينها عند اللمس، منها 3 حمراء والبقية سوداء. نسحب عشوائيًا في آن واحد كرتين.

احسب احتمال كلّ من الحادثتين:

1-أ). A: سحب كرتين من نفس اللون؟

1-ب). B: سحب كرة حمراء على الأكثر؟

2). نعيد التجربة ونضيف صندوقين بحيث نرمز بالرمز U_k للصندوق الّذي يحتوي على k كرة حمراء و $n-k$ كرة سوداء حيث $(1 \leq k \leq 3)$. نختار عشوائيًا صندوق من الصناديق الثلاثة ونسحب في آن واحد كرتين. ليكن x المتغيّر العشوائيّ الّذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

2-أ). عيّن مجموعة قيم x؟

2-ب). أثبت أنّ: $P(x=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

وأنّ: $P(x=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$

2-ج). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر x؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$C_n^k = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}$

$C_n^k = \frac{n(n-1)}{2}$

MOKHFI CHOUAIB

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: لسحب كرتين من نفس اللون فلا بدّ من سحب كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين:

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_{n-3}^2}{C_n^2}=\frac{3+\frac{(n-3)!}{2!(n-3-2)!}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P(A)=\frac{\frac{6}{2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{2(n-5)!}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{6+(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

$$P(A)=\frac{6+n^2-4n-3n+12}{n(n-1)}=\frac{n^2-7n+18}{n(n-1)}$$

1-ب). B: لسحب كرة حمراء على الأكثر فلا بدّ من سحب كرة حمراء وأخرى سوداء أو سحب كرتين سوداوين، ومنه:

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_{n-3}^1+C_3^0\times C_{n-3}^2}{C_n^2}=\frac{3\times\frac{(n-3)!}{1!(n-4)!}+1\times\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P(B)=\frac{\frac{3(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{2(n-5)!}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P(B)=\frac{\frac{2}{2}\times\frac{3(n-3)}{1}+\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{\frac{6n-18+n^2-4n-3n+12}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

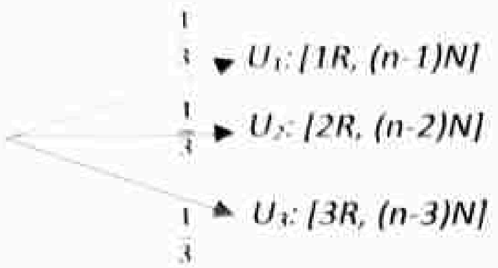
$$P(B)=\frac{n^2-n-6}{n(n-1)}$$

2). أصبح لدينا ثلاث صناديق مرقّمة بما تسمح به قيم k حيث $k\in\{1,2,3\}$، يحوي كلّ صندوق منها على k كرة حمراء و $n-k$ كرة سوداء، أي:

○ U_1: كرة حمراء: $1R$ و $n-1$ سوداء: $(n-1)N$.

○ U_2: كرتين حمراوين: $2R$ و $n-2$ سوداء: $(n-2)N$.

○ U_3: ثلاث حمراء: $3R$ و $n-3$ سوداء: $(n-3)N$.



2-أ). تعيين مجموعة قيم x: بعد سحب الكرتين في آن واحد، فإمّا أن نحصل على كرة حمراء واحدة $x=1$، وإمّا حمراوين $x=2$، وإمّا ألّا نسحب أيّ كرة حمراء $x=0$، ومنه: $x\in\{0,1,2\}$

2-ب). إثبات أنّ:

■ إثبات أنّ: $P(x=1)=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$:

معناه سحب كرة حمراء وأخرى سوداء، ومنه:

$$P(x=1)=\frac{1}{3}\times\frac{C_1^1\times C_{n-1}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1\times C_{n-2}^1}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1\times C_{n-3}^1}{C_n^2}$$

$$P(x=1)=\frac{1}{3C_n^2}\times[C_1^1\times C_{n-1}^1+C_2^1\times C_{n-2}^1+C_3^1\times C_{n-3}^1]$$

$$P(x=1)=\frac{1}{3\times\frac{n(n-1)}{2}}\times[\frac{(n-1)(n-2)!}{1!(n-2)!}+2\times\frac{(n-2)(n-3)!}{2!(n-3)!}+3\times\frac{(n-3)(n-4)!}{1!(n-4)!}]$$

$$P(x=1)=\frac{2}{3n(n-1)}\times(n-1+2n-4+3n-9)$$

$$P(x=1)=\frac{12n-28}{3n(n-1)}=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

■ إثبات أنّ: $P(x=2)=\frac{8}{3n(n-1)}$:

أي سحب كرتين حمراوين، ومنه:

$$P(x=2)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}$$

$$P(x=2)=\frac{1}{3\times\frac{n(n-1)}{2}}\times[1+3]$$

$$P(x=2)=\frac{2\times4}{3n(n-1)}=\frac{8}{3n(n-1)}$$

2-ج). قانون الاحتمال للمتغيّر x: لدينا:

$$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)=1$$
$$P(x=0)=1-[P(x=1)+P(x=2)]$$
$$P(x=0)=1-\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}-\frac{8}{3n(n-1)}$$
$$P(x=0)=\frac{3n(n-1)-4(3n-7)-8}{3n(n-1)}=\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$$

MOKHFI CHOUAIB

○ نلخصه بالجدول التالي:

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	$\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

05. موضوع مقترح 05

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 رقم 9

✓ سحب من صندوق

نصّ التمرين

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين، نسحب عشوائيًا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق

الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس.

1). احسب احتمالات الأحداث الآتية:

1-أ). A: سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء؟

1-ب). B: سحب ثلاث كرات من نفس اللون؟

1-ج). C: سحب كرة بيضاء واحدة على الأقلّ؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحبة عدد الألوان المحصّل عليها.

2-أ). أحسب كلًا من $P(x=1)$ و $P(x=3)$ ثمّ استنتج $P(x=2)$

2-ب). اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، ويكسب $25DA$ لكلّ لون مسحوب، هل اللعبة مربحة؟

3). نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء واحدة، نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في U_2 ثمّ نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كرتين من U_2.

أحسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أنّ الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^p
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثلاثة من الصندوق في آن واحد

$$C_n^p = C_9^3 = \frac{6}{84}$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A) = \frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3} = \frac{6}{84}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$$

$$P(C) = \frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3} = \frac{74}{84}$$

✓ يمكن حساب $P(C)$ بطريقة أخرى عن طريق حساب $P(\bar{C})$: احتمال عدم الحصول على أيّ كرة بيضاء:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

$$P(C) = 1 - \frac{C_4^0\times C_5^3}{C_9^3} = \frac{74}{84}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- قيم المتغيّر x : $x\in\{1,2,3\}$

○ 1: الكرات المسحوبة من نفس اللون

○ 2: الكرات المسحوبة من لونين مختلفين

○ 3: الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى.

2-أ). حساب الاحتمالات:

- حساب $P(x=1)$ و $P(x=3)$:

$$P(x=1) = P(B) = \frac{5}{84}$$

$$P(x=3) = \frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3} = \frac{24}{84}$$

MOKHFI CHOUAIB

■ استنتاج $P(x=2)$:

انطلاقا من قيم x وقانون الاحتمال:

$$P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)=1$$
$$P(x=2)=1-[P(x=1)+P(x=3)]$$
$$P(x=2)=\frac{84-5-24}{84}=\frac{55}{84}$$

■ نلخصه بالجدول الآتي:

x_i	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

2-ب). معرفة إذا ما كانت اللعبة مربحة:

ليكن y متغيّرا عشوائيّا يرفق بكلّ عمليّة سحب العائد على اللاعب الّذي يساوي الربح مطروحا منه المبلغ المدفوع لكلّ سحبة.

■ قيم y: $y\in\{-25,0,25\}$

○ $y=-25$: بالحصول على لون واحد:

$$y=25-50$$

○ $y=0$: بالحصول على لونين مختلفين:

$$y=50-50$$

○ $y=25$: باقتناء 3 ألوان مختلفة:

$$y=75-50$$

■ نلخصها في الجدول الآتي:

y_i	-25	0	25
$P(y=y_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

■ الأمل الرياضي $E(y)$:

$$E(y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)$$
$$E(y)=\frac{475}{84}\approx \mathbf{5.65}$$

نلاحظ أنّ $E(y)>0$، أي أنّ اللعبة مربحة وفي صالح اللاعب.

3). حساب $P_B(F)$:

○ F: سحب كرتين بيضاوين من U_2.

○ B: سحب 3 كرات من نفس اللون من U_1.

$$P_B(F)=\frac{P(B\cap F)}{P(B)}$$

$B\cap F$: سحب 3 كرات بيضاء من U_1 وكرتين بيضاوين من U_2 أو سحب 3 كرات سوداء من U_1 وكرتين بيضاوين من U_2.

$$P(F\cap B)=\frac{C_4^3\times C_5^2+C_4^3\times C_2^2}{C_9^3\times C_6^2}=\frac{41}{1260}$$

$$P_B(F)=\frac{P(B\cap F)}{P(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}$$

06. موضوع مقترح 06

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 رقم 8

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

يحتوي كيس U_1 على قريصتين تحملان الرقم 1 وعلى أربع قريصات تحمل الرقم 2، ويحتوي كيس U_2 على سبع كريّات ثلاث منها حمراء والأخرى خضراء.

لا يمكن التمييز بين القريصات وكذا الكريّات باللمس.

نسحب عشوائيّا قريصة واحدة من U_1 ونسجّل رقمها، فإن كان هذا الرقم 1 نسحب كريّة واحدة من U_1 وإن كان هذا الرقم 2 فنسحب كريّتين في آن واحد من U_2.

1). مثّل هذه الوضعيّة بشجرة الاحتمالات؟

2). احسب احتمال كلّ من الحدثين الآتيين:

■ A: القريصة المسحوبة تحمل الرقم 1؟

■ B: القريصة المسحوبة تحمل الرقم 2؟

3). نعتبر الحدثين التاليين:

○ E_1: الحصول بالضبط على كريّة حمراء.

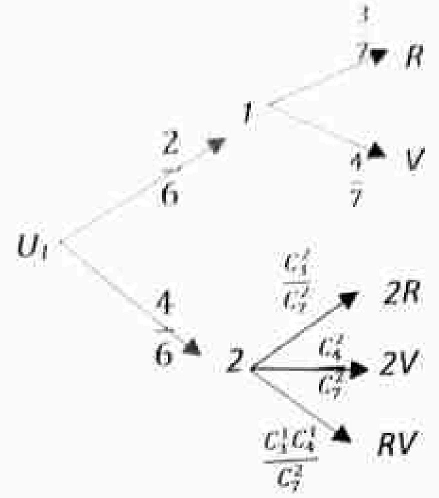
○ E_2: الحصول على كريّتين حمراوين.

3-أ). بيّن أنّ: $P(E_1)=\frac{11}{21}$ وأنّ $P(E_2)=\frac{2}{21}$

3-ب). احسب احتمال الحدث A علما أنّ الحدث E_1 محقّق؟

الحل

1). شجرة الاحتمالات:



- R: الحصول على كريّة حمراء.
- V: الحصول على كريّة خضراء.
- $2R$: الحصول على كريّتين حمراوين في آن واحد.
- $2V$: الحصول على كريّتين خضراوين في آن واحد.
- RV: سحب كريّتين مختلفتي اللون في آن واحد.

2). حساب احتمال الحدثين: من خلال الشجرة:

- A: القريصة المسحوبة تحمل الرقم 1:

$$P(A) = P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- B: القريصة المسحوبة تحمل الرقم 2:

$$P(B) = P(2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

3). الحدثين E_1 و E_2:

3-أ). تبيان أنّ:

$P(E_1) = \frac{11}{21}$ وأنّ $P(E_2) = \frac{2}{21}$:

- E_1: أي سحب كريّة حمراء أو كريّة حمراء وأخرى خضراء.

$$P(E_1) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \times \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2}$$
$$P(E_1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{3\times4}{21}$$
$$P(E_1) = \frac{1}{7} + \frac{4\times2}{21} = \frac{3+8}{21} = \frac{11}{21}$$

- E_2: بالاعتماد على شجرة الاحتمالات:

$$P(E_2) = \frac{4}{6} \times \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{21} = \frac{2}{21}$$

3-ب). حساب $P_{E_1}(A)$: من خلال شجرة الاحتمال فإن: $P(A \cap E_1)$ معناه سحب كرة تحمل رقم 1 ثم سحب كرة واحدة حمراء $P(A \cap E_1) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7}$:

$$P_{E_1}(A) = \frac{P(A\cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}}{\frac{11}{21}}$$

$$P_{E_1}(A) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{11}{21}} = \frac{21}{77} = \frac{3}{11}$$

07. موضوع مقترح 07

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 رقم 7

✓ سحب من صندوق

نصّ التمرين

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث:

- U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 1، 2، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام: 1، 1، 0.
- U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين: 1، 0.

كلّ الكريّات متشابهة لا نفرّق بينها عند اللمس.

1). نختار عشوائيًا أحد الصندوقين، فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي مع إرجاع.

1-أ). احسب احتمال الأحداث الآتية:

1-أ-1). A: سحب كرتين من نفس اللون؟

1-أ-2). B: سحب كرتين تحملان نفس الرقم؟

1-أ-3). C: سحب كرة حمراء على الأقل؟

1-ب). هل الحادثتان A و B مستقلّتان؟ علّل؟

1-ج). إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين، فما احتمال أن تكون من الصندوق U_1؟

MOKHFI CHOUAIB

2). نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3، نسحب عشوائيًا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد، وليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحبة مجموع الأرقام الّتي تحملها الكرتين المسحوبتين.

2-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x؟

2-ب). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر x؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

○ حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). حساب احتمال الأحداث:

1-أ-1). A: لسحب كرتين من نفس اللون، فإنّه إمّا أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_1 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ الترتيبات A_n^k لنحصل إمّا على كرتين حمراوين A_5^2 أو كرتين خضراوين A_3^2، أو أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_2 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ القوائم n^k لنحصل أيضا على كرتين حمراوين 3^2 أو كرتين خضراوين 2^2، ومنه فإن:

$$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 2^2}{5^2} = \frac{689}{1400}$$

1-أ-2). B: لسحب كرتين من نفس الرقم، فإنّه إمّا أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_1 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ الترتيبات A_n^k لنحصل إمّا على كرتين تحملان رقم 0: A_2^2 أو كرتين تحملان رقم 1: A_5^2، أو أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_2 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ القوائم n^k لنحصل أيضا على كرتين تحملان رقم 0 لأنّ الإرجاع مسموح به: 1^2 أو كرتين تحملان رقم 1: 3^2، أو كرتين تحملان رقم 2 لأنّ الإرجاع مسموح به: 1^2:

$$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_1 \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} = \frac{583}{1400}$$

1-أ-3). C: لسحب كرة حمراء على الأقل، فإنّه إمّا أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_1 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ الترتيبات A_n^k لنحصل على إحدى الثنائيات: $(R,V), (V,R), (R,R)$، أو أن يتمّ سحبهما من الصندوق U_2 وبالتالي نعتمد طريقة عدّ القوائم n^k لنحصل أيضا على نفس الثنائيات السابقة:

$$P(C) = P(U_1 \cap C) + P(U_2 \cap C)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1 + A_5^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^1 \times 2^1 + 2^1 \times 3^1 + 3^2}{5^2}$$

$$P(C) = \frac{1213}{1400}$$

1-ب). معرفة إن كانت الحادثتان A و B مستقلّتان:

تكون A و B مستقلّتان إذا كان:

$:P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

○ $A \cap B$: تعني سحب كرتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم، فإمّا أن يتمّ السحب من U_1 ولنعتمد على عدّ الترتيبات A_n^k حيث يتمّ سحب كرتين حمراوين تحملان رقم 1، أو كرتين خضراوين تحملان رقم 1، وإما أن يتمّ السحب من U_2 لنعتمد على عدّ القوائم n^k حيث يتمّ سحب كرتين حمراوين تحملان رقم 1، أو حمراوين تحملان رقم 2، أو خضراوين تحملان رقم 0، أو خضراوين تحملان رقم 1، وعليه:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{37}{175} \approx 0.2114$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{689}{1400} \times \frac{583}{1400} \approx 0.2049$$

○ نلاحظ أنّ $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$، ومنه فالحادثتان A و B **غير مستقلّتان**.

MOKHFI CHOUAIB

1-ج). حساب $P_{\bar{A}}(U_1)$: حيث $\bar{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A: سحب كرتين من نفس اللون، أي: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$، وعليه:

$$P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1}{A_8^2}}{1 - P(A)}$$

$$P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{30}{56}}{1 - \frac{689}{1400}} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{125}{237}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب كرتين من الكيس في آن واحد فإنّ:

$$C_n^k = C_{13}^2 = 78$$

2-أ). تعيين قيم x: $x \in \{0,1,2,3,4\}$

- $x = 0$: وذلك بسحب كرتين تحملان رقم 0.
- $x = 1$: عند سحب كرتين تحمل إحداهما رقم 1 والأخرى 0.
- $x = 2$: وذلك بسحب كرتين تحملان رقم 1.
- $x = 3$: عند سحب كرتين تحمل إحداهما رقم 1 والأخرى 2.
- $x = 4$: وذلك بحمل كرتين تحملان رقم 2.

2-ب). قانون الاحتمال للمتغيّر x:

- حساب الاحتمالات:

$$P(x = 0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_8^1 \times C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_8^2 + C_3^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{34}{78}$$

$$P(x = 3) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{16}{78}$$

$$P(x = 4) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

- نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3	4
$p(x = x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

08. موضوع مقترح 08

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 رقم 8

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

يحتوي كيس على عشر كريّات حيث: خمس كريّات حمراء تحمل الأرقام: 2−، 1−، 0، 1، 2.

وثلاث كريّات خضراء تحمل الأرقام: 1−، 0، 1.

وكريّتان سوداوان تحملان الرقمين: 1−، 0.

1). نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كريّتين من هذا الكيس ونفترض أنّ كلّ الكريّات لها نفس احتمال السحب، وليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x - y|$ حيث x وy هما الرقمان اللّذان تحملاهما الكريّتان المسحوبتان.

1-أ). عيّن القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي x؟

1-ب). اكتب قانون احتمال x ثمّ احسب أمله الرياضي؟

2). نعيد كلّ الكريّات إلى الكيس ونسحب منه كريّتين على التوالي وبدون إرجاع الكريّة المسحوبة الأولى.

2-أ). احسب عدد الحالات الممكنة للسّحب؟

2-ب). A وB حادثتان معرّفتان كما يلي:

- A: الكريّتان المسحوبتان لوناهما مختلفان.
- B: الكريّتان المسحوبتان تحمل كلّ منهما عددا موجبا تماما.

أحسب احتمال هاتين الحادثتين؟

MOKHFI CHOUAIB

الحل

1). السحب في آن واحد:

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه طريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب الكرات الثّلاثة من الكيس في آن واحد:

$$C_n^k = C_{10}^2 = 45$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). المتغيّر العشوائي x:

- تعيين قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0,1,2,3,4\}$

- $x = 0$: في حالة سحب كريّتان تشكّلان معا إحدى الثنائيات: $(1-,-1)$, $(1,1)$, $(0,0)$
- $x = 1$: في حالة سحب كريّتان تشكّلان معا احدى الثنائيات: $(1-,-2)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$
- $x = 2$: في حالة سحب كريّتان تشكّلان معا احدى الثنائيات: $(2-,0)$, $(-1,1)$, $(2,0)$
- $x = 3$: في حالة سحب كريّتان تشكّلان معا احدى الثنائيتين: $(2-,-1)$, $(2,-1)$
- $x = 4$: عند سحب كريّتان تشكّلان معا: $(2,-2)$

- حساب احتمال الأحداث:

$$P(x=0) = \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1+3+3}{45} = \frac{7}{45}$$

$$P(x=1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$$

$$P(x=2) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

$$P(x=3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

$$P(x=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

- نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3	4
$P(x = x_i)$	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

1-ب). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=5} x_i P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{7}{45}\right) + 1\left(\frac{20}{45}\right) + 2\left(\frac{12}{45}\right) + 3\left(\frac{5}{45}\right) + 4\left(\frac{1}{45}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+20+24+15+4}{45} = \frac{63}{45} = \frac{7}{5}$$

2). السحب على التوالي دون إرجاع:

2-أ). حساب الحالات الممكنة: بما أنّ السحب على التوالي ودون إرجاع، فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ الترتيبات الممكنة A_n^k: $A_n^k = A_{10}^2 = 90$

2-ب). حساب احتمال الأحداث:

- A: لسحب كريّتين مختلفتي اللون فلا بدّ من أن تشكّل الكريّتان إحدى الثنائيات التالية:

$$(V,R), (R,V), (N,R), (R,N), (N,V), (V,N)$$

$$P(A) = \frac{[A_5^1 \times A_3^1 + A_5^1 \times A_2^1 + A_3^1 \times A_2^1]}{A_{10}^2} = \frac{62}{90} = \frac{31}{45}$$

- B: لسحب كريّتين تحمل كلاهما رقما موجبا تماما فلا بدّ من أن تشكّل الكريّتان إحدى الثنائيات التالية:

$$P(B) = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

09. موضوع مقترح 09

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 رقم 5

✓ سحب من صندوق

نصّ التمرين

يحتوي صندوق U_1 على 3 كرات خضراء وكرتين حمراوين، ويحتوي صندوق U_2 على 3 كرات حمراء وكرتين خضراوين، نعتبر أنّ جميع الكرات متماثلة ولا يمكن تمييزها باللمس.

نسحب كرة واحدة من الصندوق U_1 ونسحب في آن واحد كرتين من الصندوق U_2.

MOKHFI CHOUAIB

1). نعتبر الأحداث التالية:

- A: "سحب كرتين من لونين مختلفين".
- B: "سحب ثلاث كرات من نفس اللون".
- C: "سحب كرة حمراء من الصندوق U_1".
- D: "سحب كرة خضراء على الأقل".
- E: "سحب كرة على الأقل خضراء من U_2"

1-أ). احسب ما يلي:

$P(A), P(B), P(C), P(D), P(E),$
$P(C \cap E), P_C(E)$?

1-ب). هل الحادثتان C و E مستقلّتان؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكرات الحمراء المحصّل عليها.

2-أ). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x وأمله الرّياضي؟

2-ب). احسب التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي x؟

الحل

1). احتمال الأحداث:

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّه يتمّ سحب كرة واحدة من الصندوق الأوّل U_1 C_5^1 وكرتين من الصندوق الثاني U_2 C_5^2 فإنّ:

$$C_n^k = C_5^1 \times C_5^2 = 50$$

1-أ). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ-1). $P(A)$: "سحب كرتين من لونين مختلفين": وهذا يعني إمّا أن يتمّ سحب كرتين خضراوين وأخرى حمراء أو كرتين حمراوين وأخرى خضراء، وبما أنّ السحب يتمّ من صندوقين مختلفين فستشكّل:

- كرتين خضراوين وأخرى حمراء:

(R_1, V_2, V_2)، أو (V_1, V_2, R_2).

- كرتين حمراوين وأخرى خضراء:

(V_1, R_2, R_2)، أو (R_1, R_2, V_2).

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_2^2 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_3^2 + C_2^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_5^1 \times C_5^2}$$

$$P(A) = \frac{2+18+9+12}{50} = \frac{41}{50}$$

1-أ-2). $P(B)$: "سحب 3 كرات من نفس اللون":

- الطريقة الأولى: الحالات الملائمة لهذا السحب هي إمّا أن يتمّ سحب ثلاث كرات خضراء (V_1, V_2, V_2) أو ثلاث كرات حمراء (R_1, R_2, R_2).

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^2 + C_2^1 \times C_3^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{3+6}{50} = \frac{9}{50}$$

- الطريقة الثانية: الحادثة B هي الحادثة العكسيّة للحادثة A:

$$P(A) + P(B) = 1$$
$$P(B) = 1 - P(A)$$
$$P(B) = 1 - \frac{41}{50} = \frac{50-41}{50} = \frac{9}{50}$$

1-أ-3). $P(C)$: " سحب كرة حمراء من U_1":

$$P(C) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5}$$

1-أ-4). $P(D)$: "سحب كرة خضراء على الأقل": يمكن حساب ذلك بطريقتين:

- الطريقة الأولى: الحالات الملائمة لهذا السحب هي: إمّا أن يتمّ سحب:
  - كرة خضراء واحدة: (R_1, R_2, V_2)، أو (V_1, R_2, R_2)
  - كرتين خضراوين: (R_1, V_2, V_2)، أو (V_1, V_2, R_2)

MOKHFI CHOUAIB

○ ثلاث كرات خضراء: (V_1, V_2, V_2).

$$P(D) = \frac{C_3^1 \times C_3^2 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_2^2 + C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2}$$

$$P(D) = \frac{9+12+2+18+3}{50} = \frac{44}{50}$$

■ الطريقة الثانية: الحادثة D هي الحادثة العكسية للحادثة H:"سحب ثلاث كرات حمراء" ومنه:

$$P(D) + P(H) = 1$$

$$P(D) = 1 - P(H) = 1 - \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^1 \times C_5^2}$$

$$P(D) = 1 - \frac{6}{50} = \frac{50-6}{50} = \frac{44}{50}$$

1-أ-5). $P(E)$: "سحب كرة على الأقل خضراء من الصندوق U_2": الحالات الملائمة لهذا السحب هي:

○ كرة خضراء واحدة: (R_1, R_2, V_2) أي $C_2^1 \times C_3^1$

أو

○ كرتين خضراوين: (R_1, V_2, V_2) أي C_2^2.

$$P(E) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{6+1}{10} = \frac{7}{10}$$

1-أ-6). $P(C \cap E)$: "سحب كرة حمراء من U_1 مع سحب كرة على الأقل خضراء من U_2" أي:

○ كرة حمراء من U_1: (R_1, R_2, V_2) أي:

$$C_2^1 \times C_3^1 \times C_2^1$$

○ كرة على الأقل خضراء من U_2: (R_1, V_2, V_2) أي: $C_2^1 \times C_2^2$

$$P(C \cap E) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2}$$

$$P(C \cap E) = \frac{12+2}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

1-أ-7). $P_C(E)$: "سحب كرة على الأقل خضراء من الصندوق U_2 علماً أنّ سحب كرة حمراء من الصندوق U_1 محققة" وهذا يعني أن تشكّل الكرات المسحوبة إحدى الثلاثيتين:

(R_1, V_2, V_2) أو (R_1, R_2, V_2)

لدينا:

$$P_C(E) = \frac{P(C \cap E)}{P(C)}$$

$$P_C(E) = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$$

1-ب). معرفة إن كانت C و E مستقلّتان: لدينا:

$P(C \cap E) = P(C) \times P(E)$ معناه C و E مستقلتان

$$P(C \cap E) = \frac{7}{25}$$

$$P(C) \times P(E) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

نلاحظ أنّ: $P(C \cap E) = P(C) \times P(E)$

ومنه فإنّ C و E مستقلّتان.

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قانون احتمال م.ع. x وحساب أمله الرياضي:

2-أ-1). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

■ قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0,1,2,3\}$

○ $x = 0$: (V_1, V_2, V_2) أي $C_3^1 \times C_2^2$

○ $x = 1$: (R_1, V_2, V_2) أو (V_1, V_2, R_2) أي:
$C_2^1 \times C_2^2 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1$

○ $x = 2$: (R_1, R_2, V_2) أو (V_1, R_2, R_2) أي:
$C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_3^2$

○ $x = 3$: (R_1, R_2, R_2) أي $C_2^1 \times C_3^2$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x = 0) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{3 \times 1}{50} = \frac{3}{50}$$

$$P(x = 1) = \frac{C_2^1 \times C_2^2 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{2+18}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$P(x = 2) = \frac{C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_3^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{12+9}{50} = \frac{21}{50}$$

$$P(x = 3) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^1 \times C_5^2} = \frac{3 \times 2}{50} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

■ نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{3}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{6}{50}$

2-أ-2). حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \, P(x = x_i)$$

$$E(x) = 0\left(\frac{3}{50}\right) + 1\left(\frac{20}{50}\right) + 2\left(\frac{21}{50}\right) + 3\left(\frac{6}{50}\right)$$

$$E(x) = \frac{0+20+42+18}{50} = \frac{80}{50} = \mathbf{1.6}$$

2-ب). حساب التباين والانحراف المعياري:

- التباين:

$V(x) = \sum_{i=1}^{i=4}(x_i - E(x))^2 P(X = x_i)$

$V(x) = (0 - 1.6)^2 \times \frac{4}{50} + (1 - 1.6)^2 \times \frac{20}{50} +$
$(2 - 1.6)^2 \times \frac{21}{50} + (3 - 1.6)^2 \times \frac{6}{50} = 0.6$

- الانحراف المعياري: $\delta(x) = \sqrt{V(x)}$

$\delta(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.6} \approx 0.77$

10. موضوع مقترح 10

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2019 (شامل) رقم 3

✓ سحب من وعاء

نصّ التمرين

1). يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، حيث: $n \geq 2$، و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الوعاء:

1-أ). ما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

نسمّي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون.

1-ب). بيّن أنّ: $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$

1-ج). احسب: $\lim_{n\to+\infty} P(n)$، ثمّ فسّر النتيجة؟

2). فيما يلي نعتبر $n = 4$، يأتي لاعب ويقوم بنفس التجربة الأولى: في البداية يدفع $30DA$ إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$، وإذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$.

نسمّي الرّبح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أوّلا والمبلغ الذي يكسبه، وليكن المتغيّر العشوائي x هو الرّبح الجبري للّاعب:

2-أ). ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي x؟

2-ب). اكتب قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x، ثمّ احسب أمله الرياضي؟

3). فيما يلي نعتبر $n = 2$، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي وبدون إرجاع:

3-أ). شكّل شجرة الاحتمالات الّتي تنمذج التجربة؟

3-ب). احسب احتمال الأحداث التّالية:

- A: "سحب كرتين من نفس اللون"؟
- B: "سحب كرة خضراء واحدة على الأقل"؟

3-ج). نفرض أنّ الكرة في السّحبة الأولى كانت خضراء، ما احتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية؟

الحـل

1). السحب في آن واحد:

- طريقة العدّ: بما أنّ السحب في آن واحد فطريقة عـ الحالات الممكنة من طريقة عدّ التوفيقات الممكنة $C_{\mathcal{N}}^{k}$ حيث $\mathcal{N}=n+8$ العدد الكلّي للكرات، $k = 2$ عدد الكرات في كلّ سحبة.

- عدد الحالات الممكنة: لهذا السحب هو:

$$C_{\mathcal{N}}^{k} = C_{n+8}^{2} = \frac{(n+8)!}{2!(n+8-2)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

1-أ). حساب الاحتمال:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

- نسمّي الحادثة H: "سحب كرتين بيضاوين".
- عدد الحالات الملائمة: لكي تتحقّق H فلا بدّ من سحب كرتين بيضاوين من بين n كرة البيضاء الموجودة في الكيس C_n^2، وبما أنّ $n \geq 2$، فالحادثة ممكنة على الدوام، ومنه:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2}$$

- حساب $P(H)$:

$$P(H) = \frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{n^2-n}{(n+8)(n+7)}$$

1-ب). بيان أنّ: $P(n)=\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$

- عدد الحالات الملائمة: لكي تتحقّق الحادثة n فلا بدّ من سحب كرتين بيضاوين C_n^2، أو كرتين حمراوين C_5^2، أو كرتين خضراوين C_3^2، ومنه:

$C_n^2+C_5^2+C_3^2$

- حساب $P(n)$:

$$P(n)=\frac{C_n^2+C_5^2+C_3^2}{C_{n+8}^2}=\frac{\frac{n^2-n}{2}+10+3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$$

$$P(n)=\frac{\frac{n^2-n+26}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$$

1-ج). حساب وتفسير :

- حساب $\lim_{n\to+\infty} P(n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+26}{n^2+15n+56}=1$$

- تفسير النتيجة: $\lim_{n\to+\infty} P(n)=1$ ، معناه أنّ الحادثة "سحب كرتين من نفس اللون" تصبح أكيدة عندما يكون n عدد الكريّات البيضاء كبيرا بالقدر الكافي، أي أنّه كلّما كبُر n، كلّما زاد احتمال وقوع الحادثة، حتّى إذا تخطّى n عددا معيّنا أصبحت الحادثة أكيدة أكثر .

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). قيم المتغيّر العشوائي x: $x\in\{-25,10\}$، حيث يأخذ x قيمة الرّبح الجبري:

- (-25): عندما يسحب كرتين من لونين مختلفين، إذ أنّ ربحه الجبري: $-30+5=-25$
- 10: عندما يسحب كرتين من نفس اللون، إذ أنّ ربحه الجبري: $-30+40=10$

2 ب). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X:

- $P(x=10)$: احتمال سحب كرتين من نفس اللون هو $P(n)$، وبما أنّ $n=4$ فإنّ:

$$P(x=10)=P(n=4)=\frac{4^2-4+26}{(4+8)(4+7)}$$
$$P(x=10)=\frac{19}{66}$$

- $P(x=-25)$: الحادثتان: "سحب كرتين من نفس اللون" و"سحب كرتين مختلفتي اللون" حادثتان متعاكستان ومنه فإنّ:

$$P(x=-25)=1-P(x=10)$$
$$P(x=-25)=1-\frac{19}{66}=\frac{47}{66}$$

✓ يمكن حساب $P(x=-25)$ بطريقة ثانية لكنها طويلة ومرهقة، وذلك بإيجاد عدد الحالات الملائمة لكي نتحصّل على كرتين من لونين مختلفين إذ لا بدّ من أن تشكّل الكرات المسحوبة أحد الثنائيّات التّالية: (بيضاء، حمراء) أو (بيضاء، خضراء) أو (خضراء، حمراء)، أي: $(C_5^2\times C_3^2)+(C_3^2\times C_4^2)+(C_5^2\times C_4^2)$، بعد ذلك نحسب الاحتمال لنحصل على نفس النتيجة.

- نلخّص قانون الاحتمال في الجدول الآتي:

x_i	-25	10
$P(x=x_i)$	$\frac{47}{66}$	$\frac{19}{66}$

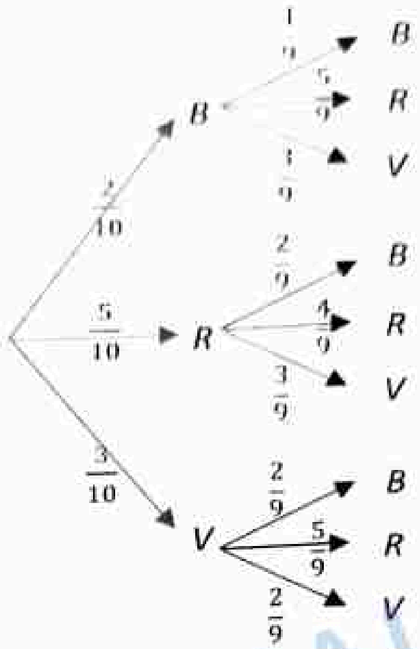
- حساب الأمل الرياضي:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{i=2} x_i\,P(x=x_i)$$
$$E(x)=-25\left(\frac{47}{66}\right)+10\left(\frac{19}{66}\right)=\frac{-985}{66}$$

MOKHTI CHOUAIB

3). السحب على التوالي وبدون ارجاع:

3-أ). شجرة الاحتمال:



3-ب). حساب الاحتمالات: انطلاقا من الشجرة:

■ $P(A)$:

$$P(A)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$$
$$P(A)=\frac{2+20+6}{90}=\frac{28}{90}$$

■ $P(B)$:

$$P(B)=\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$$
$$P(B)=\frac{6+15+6}{90}=\frac{27}{90}$$

3-ج). حساب $P_V(R)$: لدينا $P_V(R)=\frac{P(V\cap R)}{P(V)}$:

$$P_V(R)=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}}{\frac{3}{10}}=\frac{5}{9}$$

MOKHFI CHOUAIB

11. موضوع مقترح 11

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 (أشبال الأمة) رقم 14

✔ تشكيل لجنة

نص التمرين

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه علي وامرأة واحدة اسمها فاطمة، نريد تكوين لجنة مكوّنة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

1). احسب احتمال كلّ من الأحداث التّالية:

1-أ). A: "تكوين لجنة تضم 3 رجال"؟

1-ب). B: "تكوين لجنة تضم رجلا وامرأتين"؟

1-ج). C: "تكوين لجنة تضم علي"؟

1-د). D: "تكوين لجنة تضم إمّا عليّ وإمّا فاطمة"؟

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكوّنة.

2-أ). عيّن القيم الممكنة الّتي يأخذها المتغير العشوائي x ثمّ عرّف قانون احتماله؟

2-ب). احسب الانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي x؟

الحل

1). حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

■ عدد الحالات الممكنة: بما أنّه لأعضاء اللجنة المشكّلة نفس المهام،فنعتمد عدّ التوفيقات C_n^k. حيث $n=12$ عدد المترشحين الكلّي، $k=3$ عدد أعضاء اللجنة المشكلة، ومنه عدد الحالات الممكنة:

$$C_n^k=C_{12}^3=220$$

■ حساب:

1-أ). $P(A)$: $P(A)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$

1-ب). $P(B)$: $P(B)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$

1-ج). $P(C)$: $P(C)=\frac{C_1^1\times C_{11}^2}{C_{12}^3}=\frac{55}{220}$

1-د). $P(D)$: $P(D)=P(C\cup F)$

$$P(D)=P(C)+P(F)-P(C\cap F)$$

حيث $P(F)$ احتمال لجنة تضمّ فاطمة، لدينا:

$$P(F)=P(C)=\frac{C_1^1\times C_{11}^2}{C_{12}^3}=\frac{55}{220}$$

ولدينا: $P(C\cap F)=\frac{C_2^2\times C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{1\times 10}{220}=\frac{10}{220}$

$$P(D)=2\left(\frac{55}{220}\right)-\frac{10}{220}=\frac{100}{220}=\frac{5}{11}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). القيم الممكنة وقانون الاحتمال:

■ القيم الممكنة للمتغيّر x: $x\in\{0,1,2,3\}$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x=0)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}$$
$$P(x=1)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$$
$$P(x=2)=\frac{C_8^2\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}$$
$$P(x=3)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$$

■ قانون الاحتمال:

x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$

2-ب). حساب الانحراف المعياري:

$$\delta(x)=\sqrt{V(x)}$$
$$V(x)=\sum_{i=1}^{4}(x_i-E(x))^2P(x=x_i)$$
$$E(x)=\sum_{i=1}^{4}x_iP(x=x_i)$$
$$E(x)=0\left(\frac{4}{220}\right)+1\left(\frac{48}{220}\right)+2\left(\frac{112}{220}\right)+3\left(\frac{56}{220}\right)=2$$
$$V(x)=(0-2)^2\left(\frac{4}{220}\right)+(1-2)^2\left(\frac{48}{220}\right)+$$
$$(2-2)^2\left(\frac{112}{220}\right)+(3-2)^2\left(\frac{56}{220}\right)=0.54$$
$$\delta(x)=\sqrt{0.54}=0.73$$

12. موضوع مقترح 12

موضوع: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018، رقم 13

✓ رمي زهر نرد

نصّ التمرين

زهرة نرد مكعّبة الشكل وجوهها مرقّمة من 1 إلى 6، P_k هو احتمال الحصول على الرقم k،

حيث: $1\le k\le 6$، هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

○ الأعداد: P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6، تشكّل بهذا الترتيب متتالية حسابيّة أساسها r.

○ الأعداد: P_1,P_2,P_4، تشكّل بهذا الترتيب متتالية هندسيّة أساسها q.

1). برهن أنّ: $P_k=\frac{k}{21}$، من أجل: $1\le k\le 6$؟

2). نرمي هذه الزهرة مرّة واحدة، ونعتبر الأحداث التّالية:

■ A: "العدد المحصّل عليه زوجي".

■ B: "العدد المحصّل عليه أكبر أو يساوي 3".

■ C: "العدد المحصّل عليه 3 أو 4".

2-أ). احسب احتمال كلّ حادثة؟

2-ب). احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علماً أنّه زوجي؟

2-ج). الحادثتان: A و B هل هما مستقلّتان؟ ماذا عن الحادثتين A و C؟

3). نستعمل الآن هذه الزّهرة لإجراء اللعبة التّالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة واحدة بيضاء و 3 كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

○ إذا حصل على رقم زوجي سحب عشوائيًا كرة واحدة من الصّندوق U_1.

○ إذا حصل على رقم فردي سحب عشوائيًا كرة واحدة من الصّندوق U_2.

MOKHFI CHOUAIB

يُعتبر اللاعب رابحا إذا سحب كرة بيضاء، ونسمي G الحادثة "اللاعب رابح".

3-أ). عيّن احتمال $(G \cap A)$، ثم احتمال الحادثة G؟

3-ب). علما أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي؟

الحل

1). برهان أنّ $P_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \leq k \leq 6$:

- حسب قانون الاحتمال: فإنّ مجموع جميع الاحتمالات الممكنة يساوي الواحد أي:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 \dots\dots I$$

- حسب قانون المتتاليات الحسابيّة:

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ متتالية حسابيّة معناه:

$$\sum_{i=1}^{i=6} P_i = \frac{\text{مجموع الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}\right)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{6}{2}(P_1 + P_6)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 3(P_1 + P_6) \dots\dots II$$

من العلاقتين I وII نجد أنّ:

$$3(P_1 + P_6) = 1 \Leftrightarrow P_1 + P_6 = \frac{1}{3} \dots\dots III$$

- حسب قانون الحد العام للمتتالية الحسابية:

$$P_k = P_1 + (k-1)r \Leftrightarrow P_6 = P_1 + 5r \dots\dots \Lambda$$

بتعويض العلاقة Λ في العلاقة III نجد:

$$P_1 + (P_1 + 5r) = 2P_1 + 5r = \frac{1}{3} \dots\dots \Gamma$$

- حسب قانون الوسط الهندسي:

$$P_{n+2} \times P_n = P_{n+1}^2 \Leftrightarrow P_4 \times P_1 = P_2^2 \dots\dots \Omega$$

ولدينا: $P_2 = P_1 + r$، لأنّ P_1، P_2 حدود متتابعة في متتالية حسابيّة، ولدينا:

$$P_k = P_1 + (k-1)r \Leftrightarrow P_4 = P_1 + 3r$$

○ بتعويض قيمة P_4 و P_2 في العلاقة Ω نحصل:

$$(P_1 + 3r)P_1 = (P_1 + r)^2 \dots\dots \Psi$$

$$\Psi \Leftrightarrow P_1^2 + 3P_1 r = P_1^2 + r^2 + 2P_1 r$$

$$\Psi \Leftrightarrow 3P_1 - 2P_1 = r$$

$$\Psi \Leftrightarrow P_1 = r$$

○ بتعويض قيمة r في العلاقة Γ نجد:

$$\Psi \Leftrightarrow 2P_1 + 5P_1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 7P_1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P_1 = \frac{1}{21}$$

○ بتعويض قيمة P_1 و r في قانون الحد العام للمتتاليات الحسابية نجد:

$$P_k = P_1 + (k-1)r \Leftrightarrow P_k = \frac{1}{21} + (k-1)\frac{1}{21}$$

$$P_k = \frac{1+k-1}{21} = \frac{k}{21}$$

2). الأحداث A، B، C:

2-أ). حساب احتمال الأحداث:

2-أ-1). قانون الاحتمال للمتغير k: انطلاقا من العلاقة $P_k = \frac{k}{21}$ حيث $1 \leq k \leq 6$، نحصل على:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2-أ-2). حساب احتمال الأحداث:

- $P(A)$: لكي نحصل على عدد زوجي أي k زوجي فلا بدّ من أن يكون $k \in \{2,4,6\}$، إذن:

$$P(A) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

- $P(B)$: من أجل $k \geq 3$ فلا بدّ من:

$k \in \{3,4,5,6\}$

$$P(B) = \frac{3+4+5+6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

- $P(C)$: لكي نحصل على 3 أو 4 أي:

$k \in \{3,4\}$

$$P(C) = \frac{3+4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

2-ب). حساب $P_A(B)$: لدينا $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$،

ولدينا $A \cap B$ معناه $k \in \{4,6\}$، ومنه:

$$P(A \cap B) = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21} \Rightarrow P_A(B) = \frac{\frac{4+6}{21}}{\frac{4}{7}}$$

$$P_A(B) = \frac{10 \times 7}{21 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

2-ج). معرفة ما إذا كانت A و B ثمّ A و C حادثتان مستقلّتان:

- لدينا: A و B مستقلّتان:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4 \times 6}{7} = \frac{24}{49}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

فالحادثتان A و B غير مستقلّتان.

■ لدينا A و C مستقلّتان:

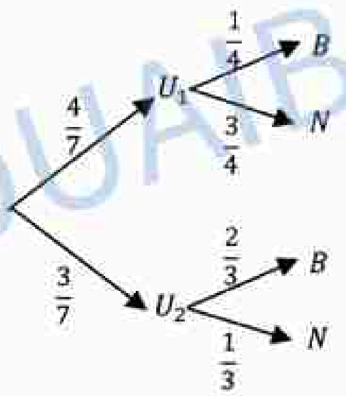
$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$
$$P(A) \times P(C) = \frac{4\times1}{7\times3} = \frac{4}{21}$$
$$P(A \cap C) = \frac{4}{21}$$
$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

فالحادثتان A و C مستقلّتان.

3). حساب الاحتمالات:

3-أ). تعيين الاحتمالات:

■ شجرة الاحتمال:



■ $P(G \cap A)$: انطلاقا من شجرة الاحتمال، لدينا:

$$P(G \cap A) = P(U_1 \cap B)$$
$$P(G \cap A) = \frac{4\times1}{7\times4} = \frac{1}{7}$$

■ $P(G)$: انطلاقا من شجرة الاحتمال، لدينا:

$$P(G) = P(B)$$
$$P(G) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B)$$
$$P(G) = \frac{4\times1}{7\times4} + \frac{3\times2}{7\times3} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$$

3-ب). $P_G(A)$: لدينا:

$$P_G(A) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{P(U_1\cap B)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

13. موضوع مقترح 13

يوتيوب: تمرين شامل في الاحتمالات للثالثة ثانوي الشعب العلمية

✓ سحب من كيس في آن واحد

نصّ التمرين

في صندوق؛ توجد كرتان لونهما أحمر ؛ وثلاث كرات لونها أخضر ؛ وأربع كرات لونها أبيض؛ وكرتان لونهما أصفر ، نقوم بسحب كرتين في آن واحد وبطريقة عشوائية من هذا الصّندوق.

1). ما هو احتمال سحب كرتين لونهما:

1-أ). A: أحمر؟

1-ب). B: أبيض؟

1-ج). C: أصفر؟

1-د). D: أخضر؟

2). ما هو احتمال سحب كرتين:

2-أ). M: من نفس اللون؟

2-ب). F: مختلفتي اللون؟

2-ج). G: لونهما ليس أبيضا ولا أصفرا؟

3). ما احتمال H: أن تكون إحداهما على الأقل خضراء؟

الحل

■ عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين في آن واحد: يوافق هذه الطريقة من السحب طريقة عدّ التوفيقات C_n^k حيث $n = 11$ العدد الكلّي للكرات، $k = 2$ عدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة، ومنه: فعدد الحالات الممكنة: $C_n^k = C_{11}^2 = 55$

1). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). $P(A)$: عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين لونهما أحمر هو: C_2^2، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_2^2}{C_{11}^2} = \frac{1}{55}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-ب). $P(B)$: عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين لونهما أبيض هو: C_4^2، ومنه:

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{6}{55}$$

1-ج). $P(C)$: عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين لونهما أصفر هو: C_2^2، ومنه:

$$P(C)=\frac{C_2^2}{C_{11}^2}=\frac{1}{55}$$

1-د). $P(D)$: عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين لونهما أخضر هو: C_3^2، ومنه:

$$P(D)=\frac{C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{55}$$

2). حساب الاحتمالات:

2-أ). $P(M)$: لسحب كرتين من نفس اللون فلا بدّ من سحب إمّا كرتين حمراوين، أو بيضاوين، أو خضراوين أو صفراوين: $C_2^2+C_4^2+C_2^2+C_3^2$:

$$P(M)=\frac{C_2^2+C_4^2+C_2^2+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{11}{55}=\frac{1}{5}$$

✓ يمكن حساب $P(M)$ باعتباره:
$P(M)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$،
لأنّ الأحداث A,B,C,D مستقلة عن بعضها البعض

2-ب). $P(F)$: يمكن اعتبار F الحادثة العكسيّة للحادثة M، أي أنّ: $P(F)=1-P(M)$، وعليه:

$$P(F)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

✓ يمكن حساب $P(F)$ بحساب الحالات الملائمة للحادثة F والحصول على نفس النتيجة.

2-ج). $P(G)$: يمكن اعتبار العدد الإجمالي للكرات 5 بدلا من 11 وذلك بعد استثناء الكرات البيضاء والصفراء، ليتوافق ذلك مع الحادثة G، وعليه يكون المطلوب هو سحب كرتين من خمس كرات C_5^2:

$$P(G)=\frac{C_5^2}{C_{11}^2}=\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$$

3). حساب $P(H)$: الحالات الملائمة للحادثة H هي إمّا أن تكون إحدى الكرتين خضراء C_3^1 مع كرة أخرى C_8^1، أو تكون كلا الكرتين المسحوبتين خضراء C_3^2:

$$P(H)=\frac{C_8^1\times C_3^1+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{24+3}{55}=\frac{27}{55}$$

✓ يرجى الانتباه إلى عبارة "إحداهما على الأقل" والتي على أساسها تم اعتبار أنّ المطلوب هو سحب كرة واحدة خضراء أو كلا الكرتين خضراء، ولو كانت العبارة "إحداهما على الأكثر"، لأصبح المطلوب هو الحادثة J: سحب كرة واحدة خضراء C_3^1 مع كرة أخرى C_8^1، أو عدم سحب أي كرة خضراء C_8^2.

$$P(J)=\frac{C_8^2+C_3^1\times C_8^1}{C_{11}^2}=\frac{28+3\times8}{55}=\frac{52}{55}$$

14. موضوع مقترح 14

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 11

✓ تشكيل لجنة

✍ نصّ التمرين

تتكوّن مؤسّسة تربوية من أساتذة وتلاميذ وإداريّين، حيث أنّ 9% منهم أساتذة، و85% تلاميذ، و40% من الأساتذة ذكور، و65% من التلاميذ إناث، و75% من الإداريّين ذكور.

نختار عشوائيّا شخصا من المؤسسة.

نرمز بالرّمز T للحادثة "اختيار أستاذ"، E للحادثة "اختيار تلميذ"، A للحادثة "اختيار إداري".

ونرمز بالرّمز H للحادثة "اختيار ذكر" وF للحادثة "اختيار أنثى".

1). شكّل شجرة الاحتمالات الّتي تُنمذج هذه التجربة؟

2). ما احتمال أن يكون:

2-أ). الشخص المختار أستاذة؟

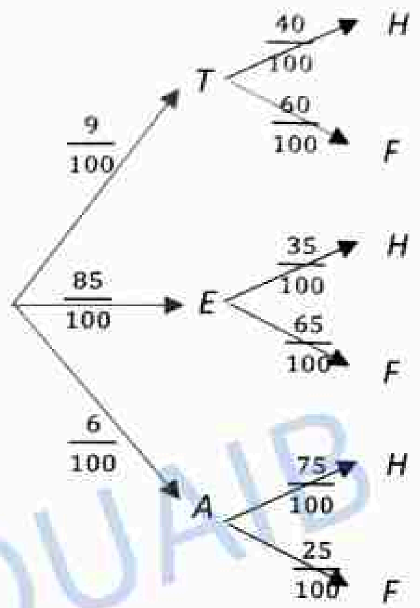
2-ب). الشخص المختار أنثى؟

MOKHFI CHOUAIB

3). علماً أنّ الشخص المختار ذكر فما هو احتمال أن يكون تلميذاً. (تعطى النتائج على شكل كسر)؟

الحل

1). تشكيل شجرة الاحتمال:



2). حساب الاحتمالات: من خلال شجرة الاحتمال:

2-أ). $P(T \cap F)$:

$$P(T \cap F) = \frac{9 \times 60}{100 \times 100} = \frac{540}{10000} = \frac{27}{500}$$

2-ب). $P(F)$: لدينا:

$$P(F) = P(T \cap F) + P(E \cap F) + P(A \cap F)$$

$$P(F) = \frac{(9 \times 60) + (85 \times 65) + (6 \times 25)}{100 \times 100}$$

$$P(F) = \frac{540 + 5525 + 150}{10000} = \frac{6215}{10000} = \frac{1243}{2000}$$

3). $P_H(E)$: لدينا: $P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$

- حساب $P(H)$:

$$P(H) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1243}{2000} = \frac{757}{2000}$$

- حساب $P(E \cap H)$:

$$P(E \cap H) = \frac{85 \times 35}{100 \times 100} = \frac{2975}{10000} = \frac{595}{2000}$$

- حساب $P_H(E)$:

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{595}{2000}}{\frac{757}{2000}} = \frac{595}{757}$$

15. موضوع مقترح 15

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018، رقم 10

✓ سحب من صندوق

نص التمرين

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء مرقّمة كالآتي: $-1, 0, 1, 1, 1$ وخمس كرات سوداء مرقّمة كالتالي: $-1, 0, 0, 1, 1$ لا نميّز بينها باللمس، نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 كرات من الصّندوق.

1). نعتبر الأحداث التّالية:

- A: "الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط".
- B: "الحصول على كرة بيضاء على الأقل".
- C: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون".
- D: "الحصول اللونين الأبيض والأسود".
- F: "مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0".

1-أ). احسب احتمال الأحداث: A، B و C؟

1-ب). بين أنّ: $P(D) = \frac{5}{6}$، $P(F) = \frac{31}{120}$، $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$؟

1-ج). إذا كان مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 0، ما هو احتمال أن تكون كلّ الكرات من نفس اللون؟

2). نعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يرفق بكلّ مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

2-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x؟

2-ب). عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x، ثمّ أحسب أمله الرياضي؟

MOKHFI CHOUAIB

الحل

1). أولا:

1-أ). حساب الاحتمالات:

$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

■ عدد الحالات الممكنة: بما أن السحب في آن واحد فعدد الحالات الممكنة هو عدد التوفيقات الممكنة C_n^k، حيث $n = 10$ العدد الكلي للكرات، و $k = 3$ عدد الكرات المسحوبة في كل مرة، ومنه عدد الحالات الممكنة: $C_n^k = C_{10}^3 = 120$

■ $P(A)$: للحصول على كرة بيضاء وحيدة فلا بدّ من سحب واحدة من الكرات البيضاء الخمس C_5^1، وكرتين من الكرات السوداء الخمس C_5^2، ومنه:

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

■ $P(B)$: للحصول على كرة بيضاء على الأقل فلا بدّ من سحب إمّا كرة بيضاء C_5^1 مع كرتين سوداوين C_5^2،أو كرتين بيضاوين C_5^2 مع كرة سوداء C_5^1،أو سحب ثلاث كرات بيضاء C_5^3، ومنه:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_5^2 + C_5^2 \times C_5^1 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{110}{120} = \frac{11}{12}$$

■ $P(C)$: لسحب 3 كرات من نفس اللون فلا بدّ من سحب 3 كرات بيضاء C_5^3، أو 3 كرات سوداء C_5^3:

$$P(C) = \frac{C_5^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{2}{12}$$

1-ب). تبيان:

1-ب-1). $P(D) = \frac{5}{6}$: للحصول على اللونين الأبيض والأسود معا فلا بدّ من سحب كرة من لون C_5^1، وكرتين من اللون الآخر C_5^2، مع ملاحظة أنّ هناك تبديلتين فإمّا كرة بيضاء وكرتين سوداوين أو العكس أي: $2(C_5^1 \times C_5^2)$، ومنه:

$$P(D) = \frac{2(C_5^1 \times C_5^2)}{C_{10}^3} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

1-ب-2). $P(F) = \frac{31}{120}$: للحصول على كرات مجموع أرقامها معدوم فلا بدّ من سحب: إمّا الكرات الثلاثة الّتي تحمل الرقم 0 C_3^3، أو سحب كرة تحمل -1 : C_2^1، مع كرة تحمل 0 C_3^1، مع كرة تحمل 1: C_5^1، ومنه:

$$P(F) = \frac{C_3^3 + C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{1 + (2 \times 3 \times 5)}{120} = \frac{31}{120}$$

1-ب-3). $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$: معناه أن نحصل على ثلاث كرات من نفس اللون وفي نفس الوقت مجموع الأرقام الّتي تحملها هذه الكرات معدوم، ومنه يجب على الكرات المسحوبة أن تشكّل الثلاثية التّالية$(-1, 0, 1)$ على أن تكون هذه الكرات إمّا كلّها بيضاء وإمّا كلّها سوداء : ومنه

■ حالة الكرات كلّها بيضاء : في هذه الحالة يجب سحب كرة من الكرات البيضاء الثلاثة الّتي تحمل الرقم 1: C_3^1، مع الكرة البيضاء الّتي تحمل 0: C_1^1، مع الكرة البيضاء الّتي تحمل -1 C_1^1، ومنه: عدد الحالات الملائمة في هذه الحالة: $C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1$.

■ حالة الكرات كلّها سوداء : في هذه الحالة يجب سحب أحد الكرتين السوداوين اللتيْن تحملان الرقم 1: C_2^1، مع أحد الكرتين السوداوين اللتيْن تحملان الرقم 0: C_2^1، مع الكرة السوداء الّتي تحمل الرقم -1: C_1^1، ومنه عدد الحالات الملائمة في هذه الحالة: $C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1$.

■ الحالات الملائمة لحادثة أن تكون الكرات المسحوبة من نفس اللون ومجموع أرقامها معدوم هو: $C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1$، ومنه:

$$P(C \cap F) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^3}$$

$$P(C \cap F) = \frac{3+4}{120} = \frac{7}{120}$$

MOKHFI CHOUAIB

1-ج). حساب $P_F(C)$: لدينا

$$P_F(C)=\frac{P(C\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{7}{120}}{\frac{31}{120}}=\frac{7}{31}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

▪ تعيين قيم المتغير العشوائي x:

$$x\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$$

◦ $x=-2$: الكرات المسحوبة تشكّل:

$(-1,-1,0)$، وهي أقل قيمة ممكنة للمتغير x.

◦ $x=-1$: الكرات المسحوبة تشكّل:

$(-1,0,0)$ أو $(-1,-1,1)$.

◦ $x=0$: الكرات المسحوبة تشكّل:

$(0,0,0)$ أو $(-1,0,1)$.

◦ $x=1$: الكرات المسحوبة تشكّل:

$(0,0,1)$ أو $(-1,1,1)$.

◦ $x=2$: الكرات المسحوبة تشكّل: $(1,1,0)$.

◦ $x=3$: الكرات المسحوبة تشكّل: $(1,1,1)$، وهي أكبر قيمة ممكنة للمتغيّر x.

▪ قانون الاحتمال للمتغيّر x:

◦ $P(x=-2)$:

$$P(x=-2)=\frac{C_2^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{120}$$

◦ $P(x=-1)$:

$$P(x=-1)=\frac{C_2^1\times C_3^2+C_2^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$$

◦ $P(x=0)$:

$$P(x=0)=\frac{C_3^3+C_2^1\times C_5^1\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{31}{120}$$

◦ $P(x=1)$:

$$P(x=1)=\frac{C_5^1\times C_3^2+C_2^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}$$

◦ $P(x=2)$:

$$P(x=2)=\frac{C_5^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{30}{120}$$

◦ $P(x=3)$:

$$P(x=3)=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$$

▪ نلخصه في الجدول الآتي:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$

▪ حساب الأمل الرياضي:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{6}x_i\,P(x=x_i)$$

$$E(x)=-2\left(\frac{3}{120}\right)+(-1)\left(\frac{11}{120}\right)+$$
$$0\left(\frac{31}{120}\right)+1\left(\frac{35}{120}\right)+2\left(\frac{30}{120}\right)+3\left(\frac{10}{120}\right)$$

$$E(x)=\frac{108}{120}=\frac{9}{10}$$

16. موضوع مقترح 16

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 09

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

كيس يحتوي على 100 قُرَيصة، لا نفرّق بينها عند اللمس، مرقّمة من 1 إلى 100، نسحب عشوائيًا ثلاث قُرَيصات في آن واحد.

1). احسب:

1-أ). P_0 احتمال ألّا نحصل على أيّ مربّع تامّ من الأعداد الثلاثة المسحوبة؟

1-ب). $\dot{P}$ احتمال الحصول على الأقل على مربّع تامّ؟

2). احسب P_1، P_2، P_3 احتمال الحصول على مربّع تامّ واحد، مربّعين تامّين، وثلاث مربّعات تامّة على الترتيب؟

3). قارن بين العددين $\dot{P}$ و $P_1+P_2+P_3$، ثمّ احسب المجموع $P_0+P_1+P_2+P_3$؟

MOKHEFCHOUAIB

الحل

■ تعيين طريقة العدّ: بما أنّ السحب في آن واحد فإنّ طريقة عدّ الحالات الممكنة من طريقة عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_{100}^3 = \frac{100!}{3!\,(100-3)!} = 161700$$

1). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). P_0: لدينا 10 مربّعات تامّة من بين الأعداد الّتي تحملها القريصات:

$(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2)$،

ومنه فحالة عدم حصولنا على أيّ مربّع تامّ، يعني أن يتمّ السحب من القريصات التسعين المتبقّية والّتي لا تحمل مربّعا تامّا، وبالتالي فعدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي: C_{90}^3، وعليه:

$$P_0 = \frac{C_{90}^3}{C_{100}^3} = \frac{117\,480}{161\,700} = \frac{178}{245} \approx 0.72$$

1-ب). $\dot{P}$: نلاحظ أنّ الحادثتان P_0 و $\dot{P}$ متعاكستان:

$$\dot{P} = 1 - P_0 = 1 - \frac{178}{245} = \frac{67}{245} = 0.27$$

2). حساب الاحتمالات:

■ P_1: لنحصل على مربّع تامّ واحد فقط، يجب سحب قريصة تحمل مربّعا تامّا C_{10}^1، مع قريصتين تحملان رقمين كلّ منهما ليس مربّعا تامّا C_{90}^2، وعليه:

$$P_1 = \frac{C_{10}^1 \times C_{90}^2}{C_{100}^3} = \frac{40\,050}{161\,700} = \frac{267}{1078} \approx 0.24$$

■ P_2: لنحصل على مربّعين تامّين فقط، يجب سحب قريصتين كلّ منهما يحمل مربّعا تامّا C_{10}^2، مع قريصة واحدة تحمل رقما ليس مربّعا تامّا C_{90}^1:

$$P_2 = \frac{C_{10}^2 \times C_{90}^1}{C_{100}^3} = \frac{4\,050}{161\,700}$$

$$P_2 = \frac{27}{1078} \approx 0.025$$

■ P_3: لنحصل على 3 مربّعات تامّة، يجب سحب ثلاث قريصات كلّها تحمل مربّعا تامّا C_{10}^3:

$$P_3 = \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} = \frac{120}{161\,700} = \frac{2}{2695} \approx 0.0007$$

3). مقارنة وحساب:

3-أ). مقارنة:

■ حساب $P_1 + P_2 + P_3$:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{267+27+2(1078)}{1078\times 2695}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{67}{245} \approx 0.27$$

■ المقارنة: نلاحظ أنّ: $\dot{P} = P_1 + P_2 + P_3$.

3-ب). حساب $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$:

هذا المجموع مكافئ $P_0 + \dot{P}$، ومنه

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = P_0 + \dot{P} = \frac{67+178}{245} = 1$$

✓ نلاحظ أنّ في هذا برهانا بأنّ الحادثتين P_0 و $\dot{P}$ هما فعلا متعاكستان إذ أعطى مجموع احتماليهما القيمة 1.

17. موضوع مقترح 17

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 08

✓ تشكيل لجنة

نصّ التمرين

جمعيّة تتكوّن من 15 رجلا و12 امرأة، تريد تشكيل لجنة تضم: رئيسا ونائبا له وأمينا.

1). ما هو عدد اللجان الّتي يمكن تكوينها؟

2). ما هو عدد اللجان الّتي يمكن تكوينها حيث يكون:

2-أ). الأمين امرأة؟

2-ب). الرئيس رجلا والأمين امرأة؟

2-ج). الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين؟

2-د). السيّد Z لا يترأس اللجنة؟

3). ما هو عدد اللجان المختلطة (مكوّنة من رجال ونساء)؟

MOKHFI CHOUAIB

الحل

1). عدد اللجان الّتي يمكن تكوينها: بما أنّ الأمر متعلّق بتشكيل لجان مع تحديد المهام فعدد اللجان الممكنة من عدد الترتيبات الممكنة A_n^k، ومنه:

$$A_n^k = A_{27}^3 = 17550$$

2). عدد اللجان حيث:

2-أ). الأمين امرأة: هذا يعني أنّه يجب إعطاء هذا المنصب لأحد النّساء الإثني عشر A_{12}^1، وإعطاء شخصين آخرين (من بين 26 مترشحا باقيا) المنصبين المتبقّيين A_{26}^2، وعليه:

عدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو:

$$A_{12}^1 \times A_{26}^2 = \mathbf{7800}$$

2-ب). الرئيس رجلا والأمين امرأة: هذا يعني: الأمين امرأة A_{12}^1 والرئيس رجل A_{15}^1 والنائب أحد المترشحين الباقين A_{25}^1، وعليه:

عدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو:

$$A_{12}^1 \times A_{15}^1 \times A_{25}^1 = \mathbf{4500}$$

2-ج). الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين: هذا يعني إمّا أن يكون الرئيس هو الرجل والنائب هي المرأة: $A_{12}^1 \times A_{15}^1 \times A_{25}^1$، أو العكس:

$A_{12}^1 \times A_{15}^1 \times A_{25}^1$، وعليه:

فعدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو:

$$2(A_{12}^1 \times A_{15}^1 \times A_{25}^1) = \mathbf{9000}$$

✓ يرجى ملاحظة أهمّية الترتيب في هذه الحالة وكيف أنّه قد أُخذ بعين الاعتبار.

2-د). السيد Z لا يترأّس اللجنة: عدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو: عدد اللجان الممكن تشكيلها مطلقا A_{27}^3، مستثنى منه عدد اللجان الممكن تشكيلها في حالة السيد Z رئيسا $A_1^1 \times A_{26}^2$، وعليه: عدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو:

$$A_{27}^3 - (A_1^1 \times A_{26}^2) = 17\,550 - 650 = 16900$$

3). عدد اللجان المختلطة: عدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو: عدد اللجان الممكن تشكيلها مطلقا A_{27}^3، مستثنى منه عدد اللجان الممكن تشكيلها في حالة اللجنة مكوّنة من النساء فقط A_{12}^3، أو اللجنة مكوّنة من الرجال فقط A_{15}^3، وعليه: فعدد اللجان الممكنة في هذه الحالة هو:

$$A_{27}^3 - (A_{15}^3 + A_{12}^3) = 17\,550 - (1320 + 2730)$$
$$A_{27}^3 - (A_{15}^3 + A_{12}^3) = 13500$$

18. موضوع مقترح 18

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 07

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

صندوق يحتوي 6 كرات زرقاء، ثلاث كرات حمراء وكرتين خضراوين، لا نفرّق بينها عند اللمس.

1). نسحب بطريقة عشوائيّة ثلاث كرات في آن واحد.

1-أ). احسب احتمال كلّ من:

- A: كلّ الكرات ألوانها مختلفة"؟
- B: كلّ الكرات من نفس اللون"؟

نسمّي x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب ثلاث كرات عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

1-ب). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x ثمّ عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x؟

2). نسحب على التّوالي n كرة من الصّندوق (n عدد طبيعي غير معدوم) بحيث نعيد الكرة المسحوبة إلى الصّندوق قبل السحب الموالي.

2-أ). احسب احتمال كلّ من:

- C: "كلّ الكرات زرقاء"؟
- D: "كلّ الكرات حمراء"؟

2-ب). عيّن أصغر قيمة للعدد n بحيث:

$$P(C) \geq 1000\, P(D)$$

✓ الحل

1). سحب ثلاث كرات في آن واحد:

■ حساب الحالات الممكنة: بما أن السحب يتم في آن واحد فطريقة العد تعتمد على إيجاد التوفيقات الممكنة C_N^k، وعليه:

$$C_N^k = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165$$

1-أ). حساب احتمال الأحداث:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

■ $P(A)$: لنحصل على كرات ذات ألوان مختلفة فلا بدّ من سحب كرة زرقاء C_6^1، وكرة حمراء C_3^1، وكرة خضراء C_2^1:

$$P(A) = \frac{C_6^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{11}^3} = \frac{36}{165} = \frac{12}{55}$$

■ $P(B)$: لكي نحصل على كرات من نفس اللون فلا بدّ من سحب 3 كرات زرقاء C_6^3 أو الكرات الحمراء الثلاث C_3^3:

$$P(B) = \frac{C_6^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{21}{165} = \frac{7}{55}$$

1-ب). تعيين:

1-ب-1). المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$:

○ $x = 0$: أي أن تكون كلّ من الكرات المسحوبة ليست زرقاء، وهو أقل عدد ممكن للكرات الزرقاء.

○ $x = 1$: أي سحب كرة زرقاء واحدة فقط مع كرتين أخريين.

○ $x = 2$: أي سحب كرتين زرقاوين وواحدة من لون آخر.

○ $x = 3$: أي أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة كلّها زرقاء، وهذا هو أكبر عدد ممكن للكرات الزرقاء.

1-ب-2). قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x: نقوم بحساب احتمال الأحداث التالية:

■ $P(x = 0)$: لينعدم x فلا بدّ من سحب 3 كرات من بين 5 كرات C_5^3 (5 كرات هي مجموع الكرات الحمراء والخضراء)، وبهذه الطريقة نكون قد حققنا ألّا نسحب أيّ من الكرات الزرقاء C_6^0:

$$P(x = 0) = \frac{C_5^3 \times C_6^0}{C_{11}^3} = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}$$

■ $P(x = 1)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرة زرقاء C_6^1، وكرتين من بين 5 كرات C_5^2:

$$P(x = 1) = \frac{C_5^2 \times C_6^1}{C_{11}^3} = \frac{60}{165} = \frac{12}{33}$$

■ $P(x = 2)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرتين زرقاوين C_6^2، وكرة واحدة من بين 5 كرات C_5^1، ومنه:

$$P(x = 2) = \frac{C_5^1 \times C_6^2}{C_{11}^3} = \frac{75}{165} = \frac{15}{33}$$

■ $P(x = 3)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب 3 كرات كلّها زرقاء C_6^3، ويترتّب على ذلك ألّا نسحب أيّ كرة من لون آخر C_5^0، ومنه:

$$P(x = 3) = \frac{C_5^0 \times C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$

■ قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي ملخّصا في الجدول الآتي:

x_i	0	1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{12}{33}$	$\frac{15}{33}$	$\frac{4}{33}$

✓ للتحقّق نجمع قيم هذه الاحتمالات لنحصل على 1:
$\sum_{i=1}^{4} P(x = x_i) = \frac{2+12+15+4}{33} = \frac{33}{33} = 1$

2). سحب n كرة على التوالي بإرجاع:

2-أ). حساب الاحتمالات:

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: يعتمد على عدّ القوائم الممكنة $\mathcal{N}^n$، حيث $\mathcal{N}$ عدد الكرات

MOKHFI CHOUAIB

الكلي، و n عدد الكرات في السحبة، وعليه فإنّ عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو 11^n.

- حساب $P(C)$: عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي 6^n، لأنّ عدد الكرات الزرقاء الإجمالي هو 6، ولكي تكون كلّ الكرات المسحوبة زرقاء فلا بدّ لعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة أن يساوي n، وعليه:

$$P(C) = \frac{6^n}{11^n} = \left(\frac{6}{11}\right)^n$$

- حساب $P(D)$: عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي 3^n، لأنّ عدد الكرات الحمراء الإجمالي هو 3، ولكي تكون كلّ الكرات المسحوبة حمراء فلا بدّ لعدد الكرات المسحوبة في كلّ مرّة أن يساوي n، وعليه:

$$P(D) = \frac{3^n}{11^n} = \left(\frac{3}{11}\right)^n$$

2-ب). تعيين أصغر عدد n يحقّق:

$$P(C) = 1000\,P(D)$$

- حساب العدد n: لدينا:

$$\left(\frac{6}{11}\right)^n \geq 10^3 \times \left(\frac{3}{11}\right)^n \ldots\ldots I$$

$$I \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{6}{11}\right)^n}{\left(\frac{3}{11}\right)^n} \geq 10^3$$

$$I \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{6}{11}}{\frac{3}{11}}\right)^n \geq 10^3$$

$$I \Leftrightarrow \left(\frac{6\times 11}{3\times 11}\right)^n \geq 10^3$$

$$I \Leftrightarrow 2^n \geq 10^3$$

$$I \Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln 10^3$$

$$I \Leftrightarrow n.\ln 2 \geq 3\ln 10$$

$$I \Leftrightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$$

- مناقشة قيمة العدد n: بما أنّ العدد n يمثّل عدد كرات فلا يمكن إلّا أن يكون عددا طبيعيا، وعليه فقيمة الكسر $\frac{3\ln 10}{\ln 2}$ التقريبية هي في حدود: 9.965، وبالتالي فإنّ أقرب عدد طبيعي لهذه القيمة هو العدد 10، لذا فإنّ أصغر قيمة للعدد n تحقق الشرط $P(C) = 1000\,P(D)$ هي: $n = 10$

19. موضوع مقترح 19

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018، رقم 06

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و n كرة سوداء ($n \geq 2$)، لا نفرّق بينها عند اللمس، نسحب عشوائيًا من الصّندوق كرتين في آن واحد.

1). احسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب؟

2). احسب احتمال الحادثة A: "سحب كرتين من نفس اللون"؟

3). نعتبر أنّ سحب كرتين من نفس اللون يعطي لاعبا ربح $10DA$، وإذا كانت الكرتان مختلفتين لونا فإنه يخسر αDA (α عدد حقيقي موجب تماما).

ليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب كرتين، ربح (أو خسارة) اللاعب.

3-أ). أثبت أنّ احتمال الحادثة ($x = 10$) هو:

$$P(x = 10) = \frac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

3-ب). استنتج احتمال الحادثة ($x = -\alpha$)

3-ج). عيّن بدلالة α و n الأمل الرياضي $E(x)$

3-د). إذا كان $n = 3$: أوجد العدد α حتّى تكون اللعبة عادلة؟

الحل

1). حساب عدد الحالات الممكنة: بما أنّ السحب في آن واحد، فطريقة العدّ هي عدّ التوفيقات الممكنة C_N^k: $N = n + 6$، و $k = 2$ لأنّنا نسحب كرتين في كلّ مرّة، ومنه:

$$C_N^k = C_{n+6}^2 = \frac{(n+6)!}{2!(n+6-2)!}$$

MOKHFI CHOUAIB

$$C_N^k = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{2(n+4)!} = \frac{(n+6)(n+5)}{2}$$

2). حساب $P(A)$:
$$P(x=A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

الحادثة A تشمل أن يكون لون الكرتين أبيض أو أسود:

- الكرتان بيضاوان:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times4!} = 15$$

- الكرتان سوداوان:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2}$$

- الكرتان من نفس اللون:

$$P(A) = \frac{C_6^2 + C_n^2}{C_{n+6}^2} = \frac{15 + \frac{n^2-n}{2}}{\frac{(n+6)(n+5)}{2}} = \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$$

3). المتغيّر العشوائي x:

- القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي x:

$x \in \{-\alpha, 10\}$

حيث جاءت صريحة في نصّ التمرين.

✓ ننتبه إلى أنّ α عدد حقيقي موجب تماما، وهذا يعني أنّ $-\alpha$ عدد حقيقي سالب تماما.

3-أ). إثبات أنّ "$P(x=10) = \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$":

لكي يحمل x القيمة 10 فلا بدّ من سحب كرتين من نفس اللون وهي نفس الحادثة A الّتي تم حسابها أثناء الإجابة عن السؤال السابق:

$$P(x=10) = P(A) = \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$$

3-ب). استنتاج $P(-\alpha)$: لكي يحمل x القيمة $-\alpha$ فلا بدّ من سحب كرتين مختلفتي اللون وهي الحادثة العكسيّة للحادثة A: أي

$$P(-\alpha) = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(-\alpha) = 1 - \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$$
$$P(-\alpha) = \frac{(n+6)(n+5)-(n^2-n+30)}{(n+6)(n+5)}$$
$$P(-\alpha) = \frac{n^2+5n+6n+30-n^2+n-30}{(n+6)(n+5)}$$
$$P(-\alpha) = \frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

3-ج). تعيين $E(x)$:

- قانون الاحتمال للمتغيّر x ملخصا في الجدول:

x_i	$-\alpha$	10
$P(x=x_i)$	$\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$	$\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$

- حساب $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(x=x_i)$$
$$E(x) = -\alpha\left(\frac{12n}{(n+6)(n+5)}\right) + 10\left(\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}\right)$$
$$E(x) = \frac{10n^2-(12\alpha+10)n+300}{(n+6)(n+5)}$$

3-د). إيجاد α من أجل لعبة عادلة: لكي تكون اللعبة عادلة فلا بدّ أن يكون الأمل الرياضي معدوما:

$E(x)=0 \Leftrightarrow 10(3)^2-(12\alpha+10)(3)+300=0$

إذ عوضنا $n=3$ (نصّ التمرين) نجد:

$$E(x)=0 \Leftrightarrow -36\alpha+360=0$$
$$\alpha = \frac{-360}{-36} = 10$$

هذا الحلّ: مقبول، وعليه لكي تصبح اللعبة عادلة فلا بدّ من أن يكون $\alpha = 10$ أي لا بدّ أن يتحمّل اللاعب في حالة خسارته خصما قدره $10DA$.

20. موضوع مقترح 20

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 05

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

علبة تحتوي 3 كرات حمراء و n كرة بيضاء حيث n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1، نسحب من العلبة وبطريقة عشوائيّة كرتين في آن واحد، ونعتبر المتغيّر العشوائي x الذي يرفق بكلّ سحبة من هذه السحبات:

- $(+2)$ السحبة تحتوي كرتين من لونين مختلفين
- (-2) السحبة تحتوي كرتين من نفس اللون.

1). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x؟

2). عيّن عدد الكرات البيضاء حتّى يكون الأمل الرياضي للمتغيّر العشوائي x معدوما؟

الحل

▪ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: السحب في آن واحد لذا نعتمد عدّ التوفيقات $C_{\mathcal{N}}^{k}$، وبما أنّ المجموعة الشاملة تحتوي $n+3$ كرة، فإنّ $\mathcal{N}=n+3$، وبما أنّنا نسحب كرتين فإنّ $k=2$:

$$C_{\mathcal{N}}^{k}=C_{n+3}^{2}=\frac{(n+3)!}{2!(n+3-2)!}$$

$$C_{\mathcal{N}}^{k}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{2(n+1)!}=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

▪ مجموعة قيم x من المعطيات فإنّ: $x\in\{-2,2\}$

1). تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

▪ $P(x=-2)$: سحب كرتين من نفس اللون أي إمّا كرتين حمراوين C_3^2، أو كرتين بيضاء C_n^2:

$$P(x=-2)=\frac{C_3^2+C_n^2}{C_{n+3}^2}$$

$$P(x=-2)=\frac{3+\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$$

▪ $P(x=2)$: سحب كرتين مختلفتي اللون أيّ كرة حمراء C_3^1، أو كرة بيضاء C_n^1:

$$P(x=2)=\frac{C_3^1\times C_n^1}{C_{n+3}^2}$$

$$P(x=2)=\frac{3\times n}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$$

▪ نلخّص قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x:

x_i	-2	2
$P(x=x_i)$	$\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$

2). تعيين n من أجل $E(x)=0$:

✓ حيث n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1.

$$E(x)=\sum_{i=1}^{2}x_i\,P(x=x_i)$$

$$E(x)=-2\left(\frac{n^2-n+6}{(n+3)(n+2)}\right)+2\left(\frac{6n}{(n+3)(n+2)}\right)$$

$$E(x)=\frac{-2n^2+14n-12}{(n+3)(n+2)}$$

$$E(x)=0\iff -2n^2+14n-12=0$$

نقوم بقسمة طرفي المعادلة على -2 للتبسيط فنجد:

$$E(x)=0\iff n^2-7n+6=0$$

سواء بالتحليل إلى متطابقات أو بحل المعادلة حسابيًا:

$E(x)=0\Rightarrow n=6$ أو $n=1$

بما أنّ n عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن الواحد فإنّ $n=1$ حل مرفوض، ليتبقّى $n=6$،

إذن: عدد الكرات البيضاء حتّى يصبح الأمل الرياضي معدوما هو **6 كرات**.

21. موضوع مقترح 21

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 04

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

يحتوي صندوق 7 قريصات تحمل الأرقام:

0، 1، 1، 1، 2، 2، 3.

نسحب في آن واحد قريصتين من الصّندوق، ونعتبر المتغيّر العشوائي y الذي يرفق بكلّ سحبة من هذه السحبات مجموع رقمي القرصتين المسحوبتين.

1). عيّن قيم المتغيّر العشوائي y، ثمّ هات قانون احتماله؟

2). احسب الاحتمالات التّالية:

$P(y\le 3), P(y<2), P(y\ge 4).$

3). احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي y؟

MOKHFI CHOUAIB

✓ الحل

1). أولا:

1-أ). تعيين قيم المتغير العشوائي y:

$y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

○ $y = 1$: عندما نسحب كرتين تحملان $(1, 0)$،
وبما أنه لا يوجد قريصتين تحملان 0، فهذه هي أصغر قيمة يمكن أن يحملها y

○ $y = 2$: عندما نسحب كرتين تحملان $(1, 1)$، $(2, 0)$

○ $y = 3$: عندما نسحب كرتين تحملان $(2, 1)$، $(3, 0)$

○ $y = 4$: عندما نسحب كرتين تحملان $(2, 2)$، $(3, 1)$

○ $y = 5$: عندما نسحب كرتين تحملان $(3, 2)$،
وبما أنه لا يوجد قريصتين تحملان 3، فهذه أكبر قيمة يمكن أن يحملها y.

1-ب). قانون الاحتمال:

$$P(y = y_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

■ عدد الحالات الممكنة لهذا السحب: بما أنّ السحب في آن واحد، فنعتمد طريقة عدّ التوفيقات C_n^k. ومنه:

$$C_n^k = C_7^2 = 21$$

■ حساب الاحتمالات:

○ $P(y = 1)$: سحب القريصة الّتي تحمل 0: C_1^1، مع أحد القريصات الّتي تحمل 1: C_3^1، وعليه:

$$P(y = 1) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

○ $P(y = 2)$: سحب قريصتان تحملان الرقم 1: C_3^2، أو سحب أحد القريصات الّتي تحمل الرقم 2: C_2^1، مع القريصة الّتي تحمل الرقم 0: C_1^1:

$$P(y = 2) = \frac{C_2^1 \times C_1^1 + C_3^2}{C_7^2} = \frac{5}{21}$$

○ $P(y = 3)$: سحب قريصة تحمل 1: C_3^1، مع قريصة تحمل 2: C_2^1، أو سحب القريصة الّتي تحمل 3: C_1^1، مع القريصة الّتي تحمل 0: C_1^1، وعليه:

$$P(y = 3) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \frac{7}{21}$$

○ $P(y = 4)$: سحب القريصة الّتي تحمل الرقم 3: C_1^1، مع أحد القريصات الّتي تحمل الرقم 1: C_3^1، أو سحب القريصتان اللتان تحملان الرقم 2: C_2^2، وعليه:

$$P(y = 4) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_2^2}{C_7^2} = \frac{4}{21}$$

○ $P(y = 5)$: سحب القريصة الّتي تحمل الرقم 3: C_1^1، مع أحد القريصات الّتي تحمل الرقم 2: C_2^1، وعليه:

$$P(y = 5) = \frac{C_2^1 \times C_1^1}{C_7^2} = \frac{2}{21}$$

■ نلخصه في الجدول الآتي:

y_i	1	2	3	4	5
$P(y = y_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{21}$

✓ يمكننا التحقّق من النتائج بحصولنا على 1 كنتيجة منطقيّة لمجموع هذه الاحتمالات:

$$\sum P(y = y_i) = \frac{3+5+7+4+2}{21} = 1$$

2). حساب الاحتمالات:

■ $P(y \le 3)$: انطلاقا من الجدول أعلاه، فإنّ:

$$P(y \le 3) = P(y = 1) + P(y = 2) + P(y = 3)$$
$$P(y \le 3) = \frac{3+5+7}{21} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

■ $P(y < 2)$: انطلاقا من الجدول أعلاه، فإنّ:

$$P(y < 2) = P(y = 1) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

■ $P(y \ge 4)$: انطلاقا من الجدول أعلاه، فإنّ:

$$P(y \ge 4) = P(y = 4) + P(y = 5)$$
$$P(y \ge 4) = \frac{4+2}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

3). حساب:

■ الأمل الرياضي:

$$E(y) = \sum_{i=1}^{5} y_i \, P(y = y_i)$$

MOKHFI CHOUAIB

$$E(y) = 1\left(\frac{3}{21}\right) + 2\left(\frac{5}{21}\right) + 3\left(\frac{7}{21}\right) + 4\left(\frac{4}{21}\right) + 5\left(\frac{2}{21}\right)$$

$$E(y) = \frac{3+10+21+16+10}{21} = \frac{60}{21} = \frac{20}{7}$$

- التباين:

$$V(y) = \sum_{i=1}^{5}(y_i - E(y))^2\, P(y = y_i)$$

$$\mathbb{Y} = (y_i - E(y))^2$$

$$\mathbb{P} = (y_i - E(y))^2 \times P(y = y_i)$$

y_i	$\mathbb{Y}$	$P(y = y_i)$	$\mathbb{P}$
1	$\left(1-\frac{20}{7}\right)^2 = \left(-\frac{13}{7}\right)^2 = \frac{169}{49}$	$P(y=1) = \frac{3}{21}$	$\frac{507}{1029}$
2	$\left(2-\frac{20}{7}\right)^2 = \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$	$P(y=2) = \frac{5}{21}$	$\frac{180}{1029}$
3	$\left(3-\frac{20}{7}\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$	$P(y=3) = \frac{7}{21}$	$\frac{7}{1029}$
4	$\left(4-\frac{20}{7}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49}$	$P(y=4) = \frac{4}{21}$	$\frac{256}{1029}$
5	$\left(5-\frac{20}{7}\right)^2 = \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49}$	$P(y=5) = \frac{2}{21}$	$\frac{450}{1029}$

$$V(y) = \frac{507+180+7+256+450}{1029} = \frac{1400}{1029}$$

- الانحراف المعياري: $\delta(y) = \sqrt{V(y)}$

$$\delta(y) = \sqrt{\frac{1400}{1029}} \approx 37.48$$

22. موضوع مقترح 22

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 03

✓ تشكيل أرقام

✍ نصّ التمرين

الرقم السرّي لبطاقة بنكيّة عبارة عن عدد مكوّن من أربع أرقام مأخوذة من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

1). كم رقما سريّا يمكن تشكيله؟

2). الرقم السرّي للبطاقة مختار بطريقة عشوائيّة عن طريق الكمبيوتر، احسب احتمال كلّ الأحداث التّالية:

2-أ). A: "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي"؟

2-ب). B: "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط"؟

2-ج). C: "الرقم السرّي يشمل مرّة واحدة الرقم 1"؟

2-د). D: "الرقم السرّي مكوّن من أرقام مختلفة"؟

✍ الحل

1). عدد الأرقام السرّية الممكن تشكيلها: بما أنّ الأرقام يمكنها أن تتكرّر فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ القوائم الممكنة n^k، حيث: $n = 9$ العدد الإجمالي للأرقام، و $k = 4$ عدد الأرقام المستعملة في كلّ مرّة، وعليه:

$$n^k = 9^4 = \mathbf{6561}$$

2). حساب احتمال: $P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

2-أ). A: "الرقم السرّي عبارة عن عدد زوجي":

ليكون الرقم السرّي زوجي لا بدّ أن تقتصر خانة آحاده على 4 أرقام فقط من بين الأرقام التسعة المتاحة وهي: $\{2,4,6,8\}$ فيصبح $n = 4$ و $k = 1$ لأنّ الآحاد فقط هو المعني بأن يكون من مجموعة الأعداد الزوجيّة، أي 4^1، بينما يمكن لباقي الخانات أن تحمل أيّ رقم من 1 إلى 9، ومنه $n = 9$ و $k = 3$ عدد الأرقام المستعملة في الخانات الثلاث المتبقّية لتشكيل الرقم السرّي:

$$P(A) = \frac{9^3 \times 4}{9^4} = \frac{2916}{6561} = \frac{4}{9} \approx 0.444$$

2-ب). B: "الرقم السرّي مكوّن من الأرقام الزوجيّة فقط": ليكون الرقم السرّي مكوّن فقط من الأرقام الزوجيّة فلا بدّ من إعادة تعيين المجموعة الشاملة ليصبح عدد عناصرها 4 فقط بدلا من تسعة أي $n = 4$، ويبقى عدد عناصر القائمة $k = 4$ بعدد الأرقام المستعملة في تشكيل الرقم السرّي، ومنه فعدد القوائم الممكنة:

$$n^k = 4^4 = 256$$

$$P(B) = \frac{4^4}{9^4} = \frac{256}{6561} \approx 0.039$$

MOKHFI CHOUAIB

2-ج). C: "الرقم السرّي يشمل مرة واحدة الرقم 1":

بالنسبة للخانة التي يظهر بها الواحد فإنّ $n = 1$ أي 1^1 إمّا بالنسبة للخانات الثلاث المتبقية فإنّ $n = 8$ بدلاً من تسعة وذلك كي نستثني الواحد فلا يظهر في هذه الخانات لأنّه اشترط أنّ الواحد لا يظهر إلّا مرّة واحدة أي: 8^3، وبما أنّ الخانة التي يظهر بها الواحد تتغير من خانة الأحاد إلى خانة العشرات ....، فإنّ نفس الحالات ستكرّر 4 مرّات، وعليه فالحالات الملائمة هي: $(1^1 \times 8^3) \times 4$، ومنه:

$$P(C)=\frac{8^3\times 4}{9^4}=\frac{2048}{6561}\approx \mathbf{0.312}$$

2-د). D: "الرقم السرّي مكوّن من أرقام مختلفة":

هذا يعني أنّه يمنع التكرار مما يغيّر من طريقة العدّ لتصبح ترتيبة A_n^k وعليه فعدد الحالات الملائمة هو من عدد الترتيبات الممكنة ذات أربع عناصر من عناصر المجموعة الشاملة أي أنّ: $n = 9$، $k = 4$، أي A_9^4:

$$P(D)=\frac{A_9^4}{9^4}=\frac{3024}{6561}\approx \mathbf{0.460}$$

23. موضوع مقترح 23

يوتيوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 رقم 02

✓ احتمال شرطي

نصّ التمرين

في دراسة خاصّة بحالة سيّارات مدينة ما، تبيّن أنّ: 12% من السيارات ذات مكابح ضعيفة.

○ من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة، هناك 20% لها إضاءة ضعيفة.

○ من بين السيارات ذات المكابح القويّة، هناك 8% لها إضاءة ضعيفة.

○ بقصد سلامة الطرقات، طُلب من شرطة المرور تكثيف المراقبة.

نعتبر الحادثتين:

○ L: "السيّارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها إضاءة قويّة"، $\overline{L}$ الحادثة العكسيّة لها.

○ F: "السيّارة الموقوفة من قبل شرطة المرور لها مكابح قويّة"، $\overline{F}$ الحادثة العكسيّة لها.

1). احسب احتمال F، احتمال $\overline{L}$ علماً أنّ $\overline{F}$ محققة ثمّ احتمال $\overline{L}$ علماً أنّ F محقّقة؟

2). احسب احتمال:

2-أ). أن تكون السيّارة الموقوفة من قبل الشرطة لها مكابح ضعيفة وإضاءة ضعيفة أيضا؟

2-ب). أن تكون السيّارة الموقوفة من قبل الشرطة لها مكابح قويّة وإضاءة ضعيفة؟

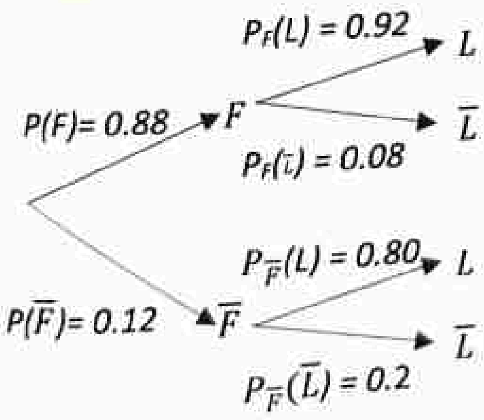
2-ج). استنتج احتمال أن تكون السيّارة الموقوفة من قبل الشرطة لها إضاءة ضعيفة؟

3). علماً أنّ سيّارة مّا روقبت وكانت لها إضاءة ضعيفة. ما احتمال أن تكون لها مكابح ضعيفة أيضا؟

4). برهن أنّ احتمال توقيف سيّارة في حالة جيّدة (مكابح قويّة وإضاءة قويّة) هو 0.8096؟

الحل

بغرض التوضيح نرسم شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية:



MOKHFI CHOUAIB

1). حساب احتمال:

■ F: $P(F) = 1 - 012 = 0.88$

■ $\overline{L}$ علما أنّ $\overline{F}$ محقّقة: $P_{\overline{F}}(\overline{L}) = 0.20$

■ $\overline{L}$ علما أنّ F محقّقة: $P_F(\overline{L}) = 0.08$

2). حساب الاحتمالات:

2-أ). $P(\overline{F} \cap \overline{L})$:

$$P(\overline{F} \cap \overline{L}) = P(\overline{F}) \times P(\overline{L})$$
$$P(\overline{F} \cap \overline{L}) = 0.12 \times 0.20 = \mathbf{0.024}$$

2-ب). $P(F \cap \overline{L})$:

$$P(F \cap \overline{L}) = P(F) \times P(\overline{L}) = 0.88 \times 0.08$$
$$P(F \cap \overline{L}) = \mathbf{0.0704}$$

2-ج). $P(\overline{L})$:

$$P(\overline{L}) = P(\overline{F} \cap \overline{L}) + P(F \cap \overline{L})$$
$$P(\overline{L}) = 0.0240 + 0.0704 = \mathbf{0.0944}$$

3). حساب $P_{\overline{L}}(\overline{F})$:

$$P_{\overline{L}}(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{0.024}{0.0944} \approx \mathbf{0.25}$$

4). برهان أنّ $P(F \cap L) = 0.8096$:

$$P(F \cap L) = P(F) \times P(L)$$
$$P(F \cap L) = 0.88 \times 0.9 = 0.8096$$

24. موضوع مقترح 24

يوتوب: مواضيع مقترحة في الاحتمالات لبكالوريا 2018 (ع. ت+ت.ر+ر) 01

✓ سحب من كيس

نصّ التمرين

كيس به خمس كرات حمراء تحمل الأعداد: 2، 2، 2، -2، 3، أربع كرات خضراء تحمل الأعداد: 3، 3، 3، -2 وكرة زرقاء تحمل العدد -1.

نسحب من الكيس بطريقة عشوائيّة كُرتين في آن واحد.

1). احسب احتمال الحصول على:

1-أ). كرتين من نفس اللون؟

1-ب). كرتين من لونين مختلفين؟

1-ج). كرتين تحملان عددين جداءهما سالب؟

2). نعرّف من أجل كلّ سحبة المتغيّر العشوائي x ي:

■ نرفق العدد الذي تحمله كلا الكريتان المسحوبتان.

■ نرفق أكبر عددي الكرتين المسحوبتين.

2-أ). عيّن قيم المتغيّر العشوائي x؟

2-ب). عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي x، ثمّ احسب أمله الرياضي؟

الحل

■ تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_{10}^2 = 45$$

1). حساب الاحتمالات:

$$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1-أ). A: "كرتين من نفس اللون": وهذا يعني إمّا كلا الكرتين حمراء C_5^2، أو كلاهما خضراء C_4^2، وعليه:

$$P(A) = \frac{C_5^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{10+6}{45} = \frac{16}{45}$$

1-ب). B: "كرتين من لونين مختلفين": وهذا معناه الحصول على التبديلات الثنائيّة الآتية: (حمراء، خضراء) أو (حمراء، زرقاء) أو (زرقاء، خضراء):

$$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 + C_5^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{29}{45}$$

1-ج). C: "كرتين تحملان رقمين جداءهما سالب: وهذا يعني أنّ إحدى الكرات تحمل رقما موجبا والأخرى تحمل رقما سالبا، عدد الكرات الّتي تحمل رقما موجبا

MOKHFI CHOUAIB

هو 7 وعدد الكرات التي تحمل رقما سالبا هو 3.

وعليه:

$$P(C) = \frac{C_7^1 \times C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

2). المتغير العشوائي x:

$$P(x = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). تعيين قيم المتغير العشوائي x:

$x \in \{-2, -1, 2, 3\}$

- $x = -2$: عندما نسحب كرتين تحملان -2.
- $x = -1$: إذا سحبنا كرتين تحملان $(-2, -1)$
- $x = 2$: عندما نسحب كرتين تحملان 2 أو كرتين تحملان $(2, -1)$، $(2, -2)$
- $x = 3$: عندما نسحب كرتين تحملان 3 أو كرتين تحملان $(3, -1)$، $(3, -2)$، $(3, 2)$

2-ب). تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x:

- $P(x = -2)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرتين كلاهما تحملان -2، وبما أنّ هناك كرتين فقط تحملان -2 فإنّ $n = 2$، وبما أننا نسحب كرتين فإنّ $k = 2$ أي C_2^2، وبما أنّ -2 هو الرقم الأصغر فلا يمكن سحبه في حالة سحب كرتين تحملان رقمين مختلفين، وعليه:

$$P(x = -2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

- $P(x = -1)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرتين $(-2, -1)$، وبما أنّ هناك كرة واحدة فقط تحمل -1 فإنّ $n = 1$، $k = 1$ أي C_1^1، إمّا بالنسبة للكرة الأخرى فهناك كرتين تحملان الرقم -2 أي أنّ $n = 2$، $k = 1$ أي C_2^1، وعليه:

$$P(x = -1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{2}{45}$$

- $P(x = 2)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرتين كليهما يحمل 2، أو كرتين تشكّلان إحدى الثنائيات $(2, -1)$، $(2, -2)$، وعليه:

$$P(x = 2) = \frac{C_3^2 + C_1^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

- $P(x = 3)$: لكي يأخذ x هذه القيمة فلا بدّ من سحب كرتين كليهما يحمل 3، أو كرتين تشكّلان إحدى الثنائيات $(3, -1)$، $(3, -2)$، $(3, 2)$:

$$P(x = 3) = \frac{C_4^2 + C_4^1 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_1^1}{C_{10}^2}$$

$$P(x = 3) = \frac{30}{45}$$

- وعليه فقانون الاحتمال للمتغير العشوائي x موضّح في الجدول كالآتي:

x_i	-2	-1	2	3
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{30}{45}$

✓ يمكننا التحقّق من النتائج بحصولنا على 1 كنتيجة منطقية لمجموع هذه الاحتمالات:
$\sum P(x = x_i) = \frac{1+2+12+30}{45} = \mathbf{1}.$

- *حساب الأمل الرياضي:*

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, P(x = x_i)$$

$$E(x) = -2\left(\frac{1}{45}\right) + (-1)\left(\frac{2}{45}\right) + 2\left(\frac{12}{45}\right) + 3\left(\frac{30}{45}\right)$$

$$E(x) = \frac{110}{45} = \frac{22}{9}$$

MOKHFI CHOUAIB

VI. مواضيع مقتبسة من بكالوريات أجنبية

01. موضوع أجنبي 01

بكالوريا تونس علوم تجريبية 2018

نصّ التمرين

يقوم لاعب برمي زهر نرد غير مزيّف حيث أنّ أحد أوجهه يحمل الحرف G، ووجهين يحملان الحرف R، وثلاث أوجه تحمل الحرف D.

- إذا حمل الوجه العلويّ للزهر حرف G فإنّ اللاعب يربح $100DA$ وتنتهي اللعبة.
- إذا حمل الوجه العلويّ للزهر حرف R فإنّ اللاعب لا يربح شيئا وتنتهي اللعبة.
- إذا حمل الوجه العلويّ للزهر حرف D فإنّ اللاعب يرمي للمرّة الثانية فإن حمل بعدها الوجه العلويّ للزهر حرف G فإنّ اللاعب يربح $50DA$ وتنتهي اللعبة، وإن حمل الوجه العلويّ للزهر حرف R أو D فإنّ اللاعب لا يربح شيئا وتنتهي اللعبة.

نعتبر الأحداث التالية:

- G_1: اللاعب يربح $100DA$.
- G_2: اللاعب يربح $50DA$.

1). أوّلا:

1-أ). احسب احتمال الحادثة G_1؟

1-ب). بيّن أنّ: $P(G_2)=\frac{1}{12}$

1-ج). استنتج أنّ احتمال حصول لاعب على ربح غير معدوم يساوي $\frac{1}{4}$؟

2). ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل جولة لعب المبلغ المتحصل عليه خلالها.

2-أ). حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X؟

2-ب). احسب $E(X)$ متوسط أرباح اللاعب؟

3). نفترض أن 200 شخصا قد شاركوا في هذه اللعبة، وليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق عدد اللاعبين الرابحين ربحا غير معدوم و $E(Y)$ متوسط اللاعبين الرابحين.

حدّد معلّلا قيمة $E(Y)$؟

4). خصّص المدير مبلغ $1200DA$ كمبلغ إجمالي ليتمّ توزيعه على الرابحين، فهل أصاب المدير في تقديره هذا أم أخطأ؟

الحل

1). أوّلا:

1-أ). حساب $P(G_1)$: كي يربح اللاعب $100DA$ فلا بدّ أن يحمل الوجه العلويّ حرف G، وبما أنّ عدد الأوجه الممكنة 6:

$$P(G_1)=\frac{1}{6}$$

1-ب). بيان أنّ $P(G_2)=\frac{1}{12}$: كي يربح اللاعب $50DA$ فلا بدّ أن يحمل الوجه العلويّ حرف D: $\frac{3}{6}$، ليواصل اللاعب الرمي مرّة أخرى فيحمل الوجه العلويّ حرف G: $\frac{1}{6}$.

$$P(G_2)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

1-ج). استنتاج $P(A)$: حيث A تعبّر عن حادثة حصول اللاعب على ربح غير معدوم، وهو عبارة عن اتحاد الحادثة $P(G_1)$ مع الحادثة $P(G_2)$، ومنه:

$$P(A)=P(G_1\cup G_2)$$
$$P(A)=P(G_1)+P(G_2)-P(G_1\cap G_2)$$

MOKHFI CHOUAIB

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - 0 = \frac{2+1-0}{12} = \frac{1}{4}$

2). المتغيّر العشوائي x:

2–أ). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

■ قيم المتغيّر العشوائي x: $x \in \{0, 50, 100\}$

■ حساب الاحتمالات:

○ $x = 0$: ألّا يربح اللاعب شيئا، نلاحظ أن هذه الحادثة هي الحادثة العكسية للحادثة $P(A)$، ومنه:

$P(x = 0) = P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

✓ يمكن استعمال الطريقة الحسابية لحساب $P(x = 0)$، فاللاعب لا يربح شيئا بحمله الوجه العلويّ للحرف R: $\frac{2}{6}$، أو حمل الوجه العلويّ للحرف D: $\frac{3}{6}$، ثم يواصل الرّمي فلا يحمل الوجه العلويّ الحرف G: $\frac{6-1}{6}$.

$P(x = 0) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{12+15}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

○ $x = 50$: $P(x = 50) = P(G_2) = \frac{1}{12}$

○ $x = 100$: $P(x = 100) = P(G_1) = \frac{1}{6}$

■ نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	50	100
$P(x = x_i)$	$\frac{9}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

2–ب). متوسط الأرباح $E(x)$:

$E(x) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \, P(x = x_i)$

$E(x) = 0\left(\frac{9}{12}\right) + 50\left(\frac{1}{12}\right) + 100\left(\frac{2}{12}\right)$

$E(x) = \frac{0+50+200}{12} = \frac{125}{6} \approx \mathbf{20.833DA}$

3). حساب $E(y)$: بما أنّ احتمال ربح اللاعب ربحا غير معدوم هو $\frac{1}{4}$، فإنّ متوسط عدد اللاعبين الرابحين ربحا غير معدوم $E(y)$ مساو لعدد اللاعبين المشاركين مضروبا في $\frac{1}{4}$، ومنه:

$E(y) = 200 \times \frac{1}{4} = \mathbf{50}$

4). حساب Tt: حيث Tt هو المبلغ الإجمالي الواجب تخصيصه لهذه اللعبة، بما أنّ متوسط عدد اللاعبين الرابحين: $E(y)$ هو 50 لاعبا، ومتوسط ربح كلّ لاعب: $E(x)$ هو 20.833، فإن:

$Tt = 50 \times 20.833 = \mathbf{4166.7}$

المبلغ اللازم هو $4166.7DA$ وعليه، فالمدير لم يحسن في تقديره.

02. موضوع أجنبي 02

بكالوريا تونس علوم تجريبية 2017

نصّ التمرين

أجريت دراسة على مجموعة من النساء الحوامل في مدينة معيّنة، نسمّي حملا وحيدا، إذا حملت الأمّ بجنين واحد، ونسمّي حملا متعدّدا إن تعدّدت الأجنّة.

أسفرت الدراسة عن النّتائج التالية:

○ نسبة النساء اللواتي حملن حملا متعدّدا هي: 5%.

○ من بين الحوامل حملا متعدّدا، 55% يضعن حملهن في أجلهنّ المحدّد.

○ من بين الحوامل حملا وحيدا، 92% يضعن حملهن في أجلهنّ المحدّد.

نختار عشوائيًا حاملا منهنّ ونعتبر الأحداث التالية:

○ U: حامل ذات حمل وحيد.

○ D: حامل تضع حملها في أجلها.

1). أوّلا:

1–أ). حدّد $P(U)$

1–ب). عبّر عن النسب $55\%, 92\%$ بالأحداث U, D؟

2). ثانيا:

2–أ). احسب $P(D)$

2–ب). برهن أنّ احتمال الحادثة "حمل الأمّ وحيد علما أنها وضعت حملها في أجلها" يساوي 0.9694؟

الحل

1). أولا:

1-أ). تحديد $P(U)$:

من المعطيات لدينا:

$$P(\overline{U}) = \frac{5}{100}$$

$$P(U) = 1 - P(\overline{U}) = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100} = 0.95$$

1-ب). التعبير عن النسب:

$$P_U(D) = \frac{92}{100} = 0.92$$

$$P_{\overline{U}}(D) = \frac{55}{100} = 0.55$$

2). ثانيا:

2-أ). حساب $P(D)$:

$$P(D) = P(D \cap U) + P(D \cap \overline{U})$$

$$P(D) = P_U(D) \times P(U) + P_{\overline{U}}(D) \times P(\overline{U})$$

$$P(D) = 0.92 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05 = 0.9015$$

2-ب). برهان أنّ: $P_D(U) = 0.9694$:

$$P_D(U) = \frac{P(U \cap D)}{P(D)} = \frac{0.92 \times 0.95}{0.9015}$$

$$P_D(U) = \frac{1748}{1803} = \mathbf{0.9694}$$

03. موضوع أجنبي 03

بكالوريا تونس علوم تقنيّة 2017

نصّ التمرين

تقوم شركة بتصنيع نوعين من الوحدات الإلكترونيّة، 40% منها من النوع A والباقي من النوع B.

أثبتت الإحصائيّات بالشركة أنّ:

- 2% من الوحدات من النوع A معطوبة.
- 1% من الوحدات من النوع B معطوبة.

1). نختار إحدى الوحدات عشوائيًا ونعتبر الأحداث:

- A: حادثة الحصول على وحدة من النوع A.
- B: حادثة الحصول على وحدة من النوع B.
- D: حادثة الحصول على وحدة معطوبة.

1-أ). شكّل شجرة الاحتمال الّتي تنمذج الإحصائيات؟

1-ب). بيّن أنّ: $P(D) = 0.014$

1-ج). إحدى الوحدات الإلكترونيّة اختيرت عشوائيًا فتبيّن أنّها معطوبة، ما احتمال أن تكون من النوع A؟

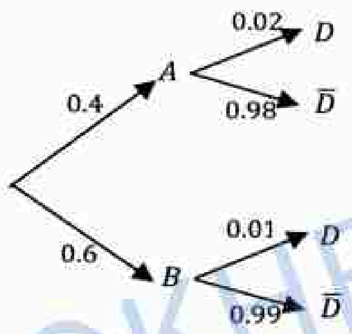
2). تُصنّع الشركة 10 آلاف وحدة إلكترونيّة أسبوعيًا، تدرّ الوحدات الإلكترونيّة للشركة ربحا قدره $0.3DA$ عن كلّ وحدة سليمة، وتكبّد خسارة قدرها $0.5DA$ عن كلّ وحدة معطوبة.

أوجد G متوسّط الربح الذي تحقّقه الشركة أسبوعيًا؟

الحل

1). أوّلا:

1-أ). شجرة الاحتمال:



1-ب). بيان أنّ: $P(D) = 0.014$:

انطلاقا من شجرة الاحتمال لدينا:

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$$

$$P(D) = 0.02 \times 0.4 + 0.01 \times 0.6 = 0.014$$

1-ج). حساب $P_D(A)$:

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.02 \times 0.4}{0.014}$$

$$P_D(A) = \frac{0.008}{0.014} = 0.571$$

2). إيجاد متوسّط ربح الشركة أسبوعيّا:

2-أ). الطريقة الأولى: الطريقة الحسابيّة:

- إيجاد M: حيث M يرمز لعدد الوحدات المعطوبة المنتجة أسبوعيّا، والذي يساوي العدد الإجمالي

MOKHFI CHOUAIB

للوحدات المنتجة أسبوعيا: 10000 مضروبا في نسبة الوحدات المعطوبة: $P(D) = 0.014$، ومنه:

$M = 10000 \times 0.014 = 140$

- إيجاد S: حيث S يرمز لعدد الوحدات السليمة المنتجة أسبوعيًا، والذي يساوي العدد الإجمالي للوحدات المنتجة أسبوعيا: 10000 مطروحا منه عدد الوحدات المعطوبة: M.

$S = 10000 - 140 = 9860$

- إيجاد متوسّط ربح الشركة G: يمكننا حسابه من حاصل ضرب عدد الوحدات السليمة في الربح الذي تدرّه كلّ وحدة سليمة، مطروحا منه حاصل ضرب عدد الوحدات المعطوبة في الخسارة التي تكبّدها كلّ وحدة معطوبة للشركة، ومنه فإنّ:

$G = 9860 \times 0.3 - 140 \times 0.5$
$G = 2888DA$

2-ب). الطريقة الثّانية: طريقة قانون الاحتمال.

ليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ وحدة إلكترونيّة العائد الجبري لها على الشركة.

2-ب-1). قانون احتمال x:

- قيم x: $x \in \{-0.5, 0.3\}$
- حساب الاحتمالات:
  - $x = -0.5$: أي أنّ الوحدة معطوبة، ومنه:

$P(x = -0.5) = P(D) = 0.014$

  - $x = 0.3$: أي أنّ الوحدة سليمة، ومنه:

$P(x = 0.3) = P(\overline{D}) = 1 - 0.014$
$P(x = 0.3) = 0.986$

- نلخّصه بالجدول الآتي:

x_i	-0.5	0.3
$P(x = x_i)$	0.014	0.986

2-ب-2). حساب متوسّط العوائد $E(x)$:

$E(x) = \sum_{i=1}^{i=2} x_i P(x = x_i)$
$E(x) = -0.5 \times 0.014 + 0.3 \times 0.986$
$E(x) = 0.2888$

2 ب 3). متوسط أرباح الشركة G: بما أن $E(x) > 0$، فهذا يعني أن الشركة تربح من وراء تصنيع هذه الوحدات مبلغا قدره $E(x)$ عن كل دارة مصنعة، أي: $0.2888DA$، ومنه فإن:

$G = 10000 \times 0.2888 = 2888DA$

04. موضوع أجنبي 04

موضوع بكالوريا المغرب دورة عادية 2019

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على 10 كرات: 3 منها خضراء و6 حمراء وواحدة سوداء، لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 كرات ونعتبر الأحداث:

- A: الحصول على ثلاث كرات خضراء.
- B: الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون.
- C: الحصول على كرتين على الأقلّ من نفس اللون.

1). بيّن أنّ: $P(A) = \frac{1}{120}$ و $P(B) = \frac{7}{40}$

2). احسب $P(C)$

الحل

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه طريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$C_n^k = C_{10}^3 = 120$

- حساب الاحتمالات:

$P(x) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

1). تبيين أنّ: $P(A) = \frac{1}{120}$ و $P(B) = \frac{7}{40}$:

- تبيين أنّ: $P(A) = \frac{1}{120}$:

$P(A) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$

■ تبيين أنّ: $P(B)=\frac{7}{40}$: لنحصل على ثلاث كرات من نفس اللون، فلا بدّ من سحب 3 كرات خضراء C_3^3، أو 3 كرات حمراء C_6^3، ومنه فإنّ:

$$P(B)=\frac{C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1+20}{120}=\frac{7}{40}$$

2). حساب $P(C)$:

2-أ). طريقة 1:

■ حساب $P(\bar{C})$: حيث $\bar{C}$ هي الحادثة العكسيّة للحادثة C، أي الحصول على ثلاث كرات مختلفة ألوانها مثنى مثنى، ومنه:

$$P(\bar{C})=\frac{C_3^1\times C_6^1\times C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$$

■ استنتاج $P(C)$: لدينا:

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$$

2-ب). طريقة 2:

لنحصل على كرتين على الأقلّ من نفس اللون، فلا بدّ من سحب كرتين خضراوين C_3^2، أو كرتين حمراوين C_6^2، أو 3 كرات خضراء C_3^3، أو 3 كرات حمراء C_6^3:

$$P(C)=\frac{C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1+C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{102}{120}=\frac{17}{20}$$

05. موضوع أجنبي 05

موضوع بكالوريا المغرب دورة عادية 2018

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على 9 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس: خمس منها حمراء تحمل الأرقام: 2، 2، 2، 1، 1، وأربع بيضاء تحمل الأرقام: 2، 2، 2، 1. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق، ونعتبر الأحداث التالية:

○ A: الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون

○ B: الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس الرقم

○ C: الكرات الثلاث لها نفس اللون وتحمل نفس الرقم.

بيّن أنّ: $P(A)=\frac{1}{6}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(C)=\frac{1}{42}$

الحل

■ تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k

■ حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k=C_9^3=84$$

■ حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

■ بيان أنّ:

○ $P(A)=\frac{1}{6}$: لنحصل على ثلاث كرات من نفس اللون فلا بدّ من سحب 3 كرات حمراء C_5^3، أو ثلاث بيضاء C_4^3:

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

○ $P(B)=\frac{1}{4}$: لنحصل على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم فلا بدّ من سحب ثلاث كرات تحمل الرقم 1: C_3^3، أو ثلاث تحمل الرقم 2: C_6^3، ومنه:

$$P(B)=\frac{C_6^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$$

○ $P(C)=\frac{1}{42}$: لنحصل على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم ونفس اللون، فلا بدّ من سحب ثلاث كرات حمراء تحمل الرقم 2: C_3^3، أو ثلاث كرات بيضاء تحمل الرقم 2: C_3^3:

$$P(C)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$$

MOKHFI CHOUAIB

06. موضوع أجنبي 06

موضوع بكالوريا المغرب دورة عادية 2017

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس وتحمل الأرقام الآتية:

4، 2، 2، 2، 2، 1، 0، 0.

نسحب عشوائيًا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1). نعتبر الأحداث:

- A: من بين الكرات المسحوبة لا توجد أيّة كرة تحمل الرقم 0.
- B: جداء الأعداد الّتي تحملها الكرات المسحوبة يساوي 8.

بيّن أنّ: $P(A)=\frac{5}{14}$ وأنّ $P(B)=\frac{1}{7}$

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يرفق بكلّ سحبة جداء الأرقام الّتي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

2-أ). بيّن أنّ: $P(x=16)=\frac{3}{28}$

2-ب). حدّد قانون احتمال المتغيّر العشوائي x؟

الحل

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_8^3 = 56$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(x)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

1). بيان أنّ: $P(A)=\frac{5}{14}$ وأنّ $P(B)=\frac{1}{7}$:

- بيان أنّ: $P(A)=\frac{5}{14}$:

لئلّا نحصل على أيّة كرة تحمل الرقم 0 فلا بدّ من سحب الكرات الثلاث من الستّ المتبقية، ومنه:

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$$

- بيان أنّ: $P(B)=\frac{1}{7}$:

لنحصل على ثلاث كرات جداء الأرقام الّتي تحملها يساوي 8 فلا بدّ من سحب 3 كرات تحمل الرقم 2 أو سحب الكرات لتشكّل $(2,4,1)$ ومنه:

$$P(B)=\frac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\frac{4+1\times4\times1}{56}$$

$$P(B)=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). بيان أنّ: $P(x=16)=\frac{3}{28}$:

من أجل $x=16$ فلا بدّ من سحب كرة تحمل الرقم 4 وكرتين تحملان الرقم 2، ومنه:

$$P(x=16)=\frac{C_1^1\times C_4^2}{C_8^3}=\frac{1\times6}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

2-ب). قانون احتمال المتغيّر x:

- حساب الاحتمالات:

$$P(x=0)=\frac{C_2^1\times C_6^2+C_2^2\times C_6^1}{C_8^3}=\frac{30+6}{56}=\frac{9}{14}$$

✓ نلاحظ أنّ الحادثة C حادثة سحب كرات مجموع أرقامها معدوم حيث $x=0$ هي الحادثة العكسيّة للحادثة A:

$$P(x=0)=P(C)=1-P(A)$$
$$P(x=0)=\frac{56-20}{56}=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}$$

$$P(x=4)=\frac{C_1^1\times C_4^2}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

$$P(x=8)=P(B)=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$

- نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	0	4	8	16
$P(x=x_i)$	$\frac{36}{56}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{8}{56}$	$\frac{6}{56}$

07. موضوع أجنبي 07

موضوع بكالوريا المغرب دورة عادية 2016

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على 10 كرات: أربع منها حمراء و 6 خضراء، لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيًا وفي آن واحد كرتين من الصندوق.

1). ليكن A الحدث: الكرتان المسحوبتان حمراوان.

بيّن أنّ: $P(A)=\frac{2}{15}$

2). ليكن x المتغيّر العشوائي الّذي يربط كلّ سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقّية في الصندوق بعد السحب.

2-أ). بيّن أنّ مجموعة القيم الّتي يأخذها المتغير العشوائي x هي: $\{2,3,4\}$؟

2-ب). بيّن أنّ $P(x=3)=\frac{8}{15}$

2-ج). حدّد قانون احتمال المتغيّر العشوائي؟

الحل

- تعيين طريقة العدّ: السحب في آن واحد، وعليه فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات الممكنة C_n^k.
- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$$C_n^k = C_{10}^2 = 45$$

- حساب الاحتمالات:

1). بيان أنّ: $P(A)=\frac{2}{15}$:

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

2). المتغيّر العشوائي x:

$$P(x=x_i)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

2-أ). مجموعة قيم x: إمّا ألّا يتمّ سحب أيّة كرة حمراء فيتبقّى 4 كرات: $x=4$، وإمّا أن يتمّ سحب كرة واحدة حمراء ليتبقّى 3 كرات: $x=3$، وإمّا أن يتمّ سحب كرتين حمراوين ويتبقّى كرتين أخريين: $x=2$، ومنه:

$$x\in\{2,3,4\}$$

2-ب). بيان أنّ $P(x=3)=\frac{8}{15}$: من أجل $x=3$ فلا بدّ من سحب كرة حمراء واحدة C_4^1:

$$P(x=3)=\frac{C_4^1\times C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{4\times6}{45}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

2-ج). تحديد قانون احتمال المتغير العشوائي x:

- حساب الاحتمالات:

$$P(x=2)=P(A)=\frac{2}{15}$$

$$P(x=4)=1-[P(x=2)+P(x=3)]$$

$$P(x=4)=\frac{15-(2+8)}{15}=\frac{15-10}{15}=\frac{5}{15}$$

✓ يمكن حساب $P(x=4)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}$

- نلخّصه في الجدول الآتي:

x_i	2	3	4
$P(x=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

08. موضوع أجنبي 08

بكالوريا فرنسا 2010

نصّ التمرين

يحتوي صندوق على 10 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس: 7 منها بيضاء، و3 سوداء، نسحب 3 كرات في آن واحد.

1). احتمال سحب كرتين بيضاوين وكرة واحدة سوداء:

1-أ). $\frac{21}{40}$

1-ب). $\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\times\frac{7}{10}$

1-ج). $\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}$

نسحب من نفس الصندوق كرة واحدة ندوّن لونها ثمّ نعيد الكرة خمس مرّات على التوالي بإرجاع.

2). احتمال سحب 3 كرات سوداء وكرتين بيضاوين:

2-أ). $\frac{3^3\times7^2}{10^5}$

2-ب). $C_5^2\times(\frac{3}{10})^2\times(\frac{7}{10})^3$

2-ج). $C_5^2\times(\frac{3}{10})^3\times(\frac{7}{10})^2$

MOKHFI CHOUAIB

تسحب من نفس الصندوق، كرة واحدة، فإن تحصّلنا على كرة بيضاء، نرمي قطعة نرد غير مغشوشة مرقمة الأوجه من 1 إلى 6، يربح اللاعب إذا تحصّل على الوجه الذي يحمل الرقم 1.

3). علما أنّ اللاعب قد ربح، فاحتمال سحب كرة بيضاء يساوي:

3-أ). $\frac{7}{60}$

3-ب). $\frac{14}{23}$

3-ج). $\frac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

الحل

1). A: "سحب كرتين بيضاوين وكرة واحدة سوداء":

بما أنّ السحب دفعة واحدة فطريقة العدّ هي عدّ التوفيقات C_k^n: $C_k^n = C_{10}^3 = 120$

$$P(A) = \frac{C_7^2 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

2). B: "الحصول على 3 كرات سوداء وكرتين بيضاوين": السحب على التوالي بإرجاع، الأحداث مستقلة ولا يهمّ الترتيب:

$$P(B) = C_5^2 \times (\frac{3}{10})^3 \times (\frac{7}{10})^2$$

3). $P_U(B)$: "سحب كرة بيضاء علما أنّ اللاعب قد ربح": نضع N حادثة الكرة المسحوبة سوداء، و B حادثة الكرة المسحوبة بيضاء، و U حادثة الكرة المسحوبة تحمل رقم 1، ومنه فإنّ:

$$P_U(B) = \frac{P(U \cap B)}{P(U)}$$

$$P_U(B) = \frac{P(U \cap B)}{P_B(U) \times P(B) + P_N(U) \times P(N)}$$

$$P_U(B) = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{7}{10}}{\frac{1}{6}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}} = \frac{14}{23}$$

09. موضوع أجنبي 09

بكالوريا فرنسا 2006

نصّ التمرين

في ميدان للرماية، يقوم اللاعب بالرّمي عدّة مرّات على التوالي نحو كرة قصد إصابتها، احتمال إصابة الكرة في كلّ رمية يساوي 0.2.

لا يتوقف اللاعب عن الرّمي حتّى يصيب الكرة في مرماه. باعتبار أن الرميات على التوالي مستقلّة:

1). احسب احتمال أن تبقى الكرة سليمة بانتهاء الرمية الثانية؟

2). احسب احتمال أن تفي رميتين بإصابة الكرة؟

3). احسب P_n احتمال أن تفي n رمية بإصابة الكرة؟

4). احسب قيمة n من أجل أن يكون: $P_n > 0.99$

الحل

○ نضع C حادثة إصابة الكرة: $P(C) = 0.2$

1). حساب $P(D)$: حيث D حادثة أن تبقى الكرة سليمة بانتهاء الرمية الثانية:

$$P(D) = P(\bar{C} \cap \bar{C}) = P(\bar{C})^2$$
$$P(D) = [1 - P(C)]^2 = 0.8^2 = 0.64$$

2). حساب $P(\bar{D})$: الحادثة $\bar{D}$ حادثة أن تفي رميتين بإصابة الكرة ما هي إلّا الحادثة العكسيّة للحادثة $P(D)$، ومنه فإن:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.64 = 0.36$$

3). حساب P_n:

$$P_n = P(\bar{C} \cap \bar{C} \cap \ldots \cap \bar{C}) = 1 - [P(\bar{C})]^n$$
$$P_n = 1 - 0.8^n$$

4). حساب قيمة n:

$$P_n > 0.99 \Leftrightarrow 1 - 0.8^n > 0.99 \ldots\ldots A$$
$$A \Leftrightarrow 0.8^n < 0.01$$
$$A \Leftrightarrow n\ln(0.8) < \ln(0.01)$$
$$A \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.8)}$$
$$A \Leftrightarrow n \geq 21$$

MOKHFI CHOUAIB

10. موضوع أجنبي 10

بكالوريا فرنسا 2005

نص التمرين

يلعب طفل بعشرين كريّة: 13 كريّة حمراء و 7 خضراء، يضع الطفل 10 كريّات حمراء و 3 خضراء في علبة مكعّبة، و 3 حمراء و 4 خضراء في علبة أسطوانية.

1). الجولة الأولى: يسحب الطفل 3 كريّات في آن واحد من العلبة المكعّبة، وليكن x المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبة عدد الكريّات الحمراء المسحوبة.

1-أ). عرّف قانون احتمال المتغيّر العشوائي x؟

1-ب). احسب الأمل الرياضي للمتغيّر x؟

2). الجولة الثانية: يعيد الطّفل اللعبة ليختار أحد العلبتين أوّلا، ثمّ يسحب كريّة واحدة من العلبة المختارة.

نعتبر الأحداث التالية:

- C_1: الطفل يختار العلبة المكعّبة.
- C_2: الطفل يختار العلبة الأسطوانية.
- R: الطفل يسحب كريّة حمراء.
- V: الطفل يسحب كريّة خضراء.

2-أ). مثّل شجرة الاحتمال الّتي تنمذج هذه المرحلة؟

2-ب). احسب احتمال الحادثة R؟

2-ج). علما أنّ الطفل سحب كريّة حمراء، ما احتمال أن تكون الكريّة المسحوبة من العلبة المكعّبة؟

3). يعيد الطفل الجولة الثانية من اللعبة n مرّة وذلك مع إرجاع الكرة المسحوبة في كلّ مرّة إلى مكانها.

3-أ). احسب بدلالة n الاحتمال P_n: احتمال سحب الطفل على الأقلّ لكريّة حمراء بعد n سحبة؟

3-ب). احسب أصغر عدد من السحبات n تحقّق:

$P_n \geq 0.99$

الحل

1). المرحلة الأولى:

1-أ). قانون احتمال المتغيّر العشوائي x:

- تعيين طريقة العدّ: بما أنّ السحب في آن واحد، فطريقة العدّ الملائمة هي عدّ التوفيقات: C_k^n.
- الحالات الممكنة: بما أنّ الطفل يقوم بسحب 3 كريّات من العلبة المكعّبة الّتي تحوي 10 كريّات حمراء و 3 خضراء، فإن:

$C_k^n = C_{13}^3 = 286$

- قيم المتغيّر العشوائي: $x \in \{0, 1, 2, 3\}$

○ $x = 0$: لا يسحب الطفل أيّ كريّة حمراء.

$$P(x=0) = \frac{C_{10}^0 \times C_3^3}{C_{13}^3} = \frac{1}{286} \approx 0.003$$

○ $x = 1$: يسحب الطفل كريّة حمراء واحدة فقط.

$$P(x=1) = \frac{C_{10}^1 \times C_3^2}{C_{13}^3} = \frac{30}{286} \approx 0.104$$

○ $x = 2$: يسحب الطفل كريّتين حمراوين.

$$P(x=2) = \frac{C_{10}^2 \times C_3^1}{C_{13}^3} = \frac{135}{286} \approx 0.472$$

○ $x = 3$: يسحب الطفل ثلاث كريّات حمراء.

$$P(x=3) = \frac{C_{10}^3 \times C_3^0}{C_{13}^3} = \frac{120}{286} \approx 0.419$$

- نلخّصه بالجدول التالي:

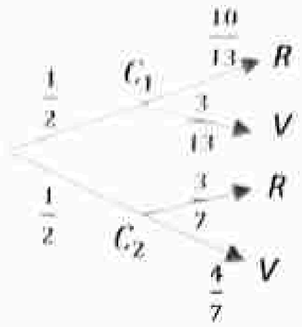
x_i	0	1	2	3
$P(x=x_i)$	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

1-ب). حساب الأمل الرياضي $E(x)$:

$$E(x) = \frac{0+30+2\times135+3\times120}{286} = \frac{30}{13} \approx 2.307$$

2). المرحلة الثانية:

2-أ). شجرة الاحتمال:



2-ب). حساب $P(R)$: انطلاقا من شجرة الاحتمال:

$$P(R) = \frac{10}{13} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{109}{182} \approx 0.598$$

2-ج). حساب $P_R(C_1)$:

$$P_R(C_1) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{10}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{182}{109}$$

$$P_R(C_1) = \frac{70}{109} \approx 0.642$$

3). المرحلة الثالثة:

3-أ). حساب P_n:

$$P_n = P(\bar{R} \cap \bar{R} \cap \ldots \cap \bar{R}) = 1 - [P(\bar{R})]^n$$

$$P_n = 1 - [(1 - \frac{109}{182})]^n$$

$$P_n = 1 - (\frac{73}{182})^n$$

3-ب). حساب n: بما أنّ n يعبّر عن عدد السحبات فلا بدّ أن يكون عددا طبيعيّا، وللبحث عن أصغر قيمة لعدد السحبات من أجل: $P_n \geq 0.99$ فإنّ:

$$P_n \geq 0.99 \iff 1 - (\frac{73}{182})^n \geq 0.99$$

$$n\ln(\frac{73}{182}) \leq \ln(0.01)$$

$$\boldsymbol{n} = 6$$

تمّ بعون الله

غكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك
code: 22-18

MOKHFI CHOUAIB

YouTube قناة الأستاذ نور الدين أكبر قناة خاصة بالرياضيات في الوطن العربي

السعر: 250 دج

مكتبة عكاشة أكثر من مجرد دار نشر

مكتبة عكاشة
FB: okacha bookStore
Okacha.bookstore@gmail.com
03Rue de Stade Ouled Fayet-Alger- Algérie
Tel: 0540 87 38 02|0673 08 62 05 |0 72 38 82 02
03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة

22-19
9 789931 856184

معتمد من طرف

تصميم بواسطة

تحت إشــراف