

التمرين الأول:

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها r حيث $u_3 = 3$ و $u_6 = 9$

(1) أوجد الأساس r و حدّها الأول u_0 .

(2) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

(3) هل العدد 37 حداً من حدود المتتالية (u_n) ؟ إذا كان حداً ما رتبته؟

(4) أحسب المجموع S ؛ حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

(5) احسب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

الحل:

(1) إيجاد الأساس r و حدّها الأول u_0 .

(u_n) متتالية حسابية ومنه $u_6 = u_3 + 3r$ يعني $9 = 3 + 3r$ أي $r = 2$.

ولدينا $u_3 = u_0 + 3r$ يعني $3 = u_0 + 6$ أي $u_0 = -3$.

(2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

$u_n = u_0 + nr$ ومنه $u_n = -3 + 2n$.

(3) هل العدد 37 حداً من حدود المتتالية (u_n) ؟

37 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي k بحيث $u_k = 37$ أي $-3 + 2k = 37$ ومنه $k = 20$ إذن العدد 37 حد من حدود المتتالية (u_n) وهو الحد الحادي والعشرون.

(4) حساب المجموع S ؛ حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

$$S = \frac{21}{2}(u_0 + u_{20}) = \frac{21}{2}(-3 + (-3 + 2 \times 20)) = 357$$

(5) حساب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(-3 - 3 + 2n) = (n+1)(-3+n)$$

التمرين الثاني:

a ، b و c ثلاثة أعداد متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$

1. (أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r .

(ب) علما أنّ $a \times c = -16$

- عيّن الأساس r ثم استنتج a و c .

2. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = -2$ و أساسها 5.

(أ) عبّر عن الحد العام u_n بدلالة n .

(ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة: $v_n - 8u_n = 0$.

- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$.

الحل:

1. (أ) حساب b و كتابة a و c بدلالة r .

لدينا $a + b + c = 9$ و حسب الوسط الحسابي لدينا $a + c = 2b$ ومنه $3b = 9$ أي $b = 3$.

وعليه $a = b - r$ أي $a = 3 - r$ و $c = b + r$ أي $c = 3 + r$.

(ب) تعيين الأساس r ثم استنتاج a و c .

لدينا $a \times c = -16$ معناه $(3-r)(3+r) = -16$ يكافئ $9 - r^2 = -16$ يكافئ $r^2 = 25$ ومنه $r = 5$ أو $r = -5$ وبما أن المتتالية

متزايدة فإنّ $r = 5$.

2. (أ) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n .

$$u_n = -2 + 5n \text{ ومنه } u_n = u_0 + nr$$

(ب) حساب u_{15} ثم استنتاج المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$.

$$u_{15} = -2 + 5 \times 15 = 73$$

$$S = \frac{16}{2}(u_0 + u_{15}) = 8(-2 + 73) = 568$$

3. متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} بالعلاقة: $v_n - 8u_n = 0$.

- حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$

$$\text{لدينا } v_n - 8u_n = 0 \text{ ومنه } v_n = 8u_n$$

$$\text{إذن } S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{15} = 8u_0 + 8u_1 + 8u_2 + \dots + 8u_{15}$$

$$= 8(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}) = 8S = 4544$$

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

1- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم أعط تخميناً لعبارة u_n بدلالة n .

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{n+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

الحل:

1- حساب u_1 ، u_2 ، u_3

$$u_3 = \frac{u_2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}, \quad u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{يبدو أن } u_n = \frac{1}{n+1}$$

2- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{n+1}$.

$$u_0 = \frac{1}{0+1} = 1 \text{ ومنه الخاصية صحيحة من أجل } n = 0$$

نفرض أن $u_n = \frac{1}{n+1}$ ونبرهن أن $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}$ أي نبرهن

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{u_n} + 1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \text{ ومنه } u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n = \frac{1}{n+1}$

3- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $n+2 > n+1$ معناه $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ أي $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

التمرين الرابع:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{4}$.

(1) احسب الحدود u_1, u_2, u_3

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $u_n < 2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $v_n = u_n - 2$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(4) احسب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الحل:

(1) حساب الحدود u_1, u_2, u_3

$$u_3 = \frac{3u_2 + 2}{4} = \frac{3 \times \frac{23}{16} + 2}{4} = \frac{121}{64}, u_2 = \frac{3u_1 + 2}{4} = \frac{3 \times \frac{5}{4} + 2}{4} = \frac{23}{16}, u_1 = \frac{3u_0 + 2}{4} = \frac{3 \times 1 + 2}{4} = \frac{5}{4}$$

(2) أ- برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $u_n < 2$.

لدينا $u_0 < 2$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n < 2$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $u_{n+1} < 2$.

لدينا $u_n < 2$ معناه $3u_n < 6$ يكافئ $3u_n + 2 < 8$ يكافئ $\frac{3u_n + 2}{4} < 2$ أي $u_{n+1} < 2$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$u_n < 2$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

ب- تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

ليكن n عدداً طبيعياً.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{4} - u_n = \frac{2 - u_n}{4}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 2$ ومنه $2 - u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

(3) أ) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

ليكن n عدداً طبيعياً.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 2}{4} - 2 = \frac{3u_n - 6}{4} = \frac{3(u_n - 2)}{4} = \frac{3}{4}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول -1 $v_0 = u_0 - 2 = -1$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية إذن } v_n = v_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ أي } v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$.u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \text{ أي } u_n = v_n + 2 \text{ ومنه } v_n = u_n - 2$$

ج - تعيين نهاية المتتالية (u_n) ؟

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{ ، بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\right] = 2$$

(4) حساب المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتاج المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = - \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} \right)$$

$$S_n = 4 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right)$$

استنتاج المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2) = 2(n+1) + v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$= 2(n+1) + v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= 2(n+1) + 4 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1 \right)$$

التمرين الخامس:(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأوّل $u_0 = 6$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ من أجل كل عدد طبيعي n .1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 . ماذا تخمن بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n) 2. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$.3. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3$.4. أ - برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.ب - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.5. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.أ - عيّن العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.ب - أكتب v_n بدلالة n ، واستنتج كتابة u_n بدلالة n . أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ج - نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، احسب S_n بدلالة n .**الحل:**1. حساب u_1 ، u_2 ، u_3 .

$$.u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 2 = \frac{28}{9} ، u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{10}{3} ، u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = 4$$

التخمين بالنسبة لاتجاه تغيّر المتتالية (u_n) لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ يبدو أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

$$2. \text{التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3).$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$$

$$3. \text{برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n \geq 3.$$

لدينا $u_0 \geq 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n \geq 3$ ونبرهن صحة الخاصية $u_{n+1} \geq 3$.

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3) \text{ وحسب الفرضية لدينا } u_n \geq 3 \text{ معناه } u_n - 3 \geq 0 \text{ يكافئ } \frac{1}{3}(u_n - 3) \geq 0$$

ومنه $u_{n+1} - 3 \geq 0$ أي $u_{n+1} \geq 3$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_n \geq 3$.

$$4. \text{أ. برهان أن المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة.}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2}{3}u_n + 2$$

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n \geq 3 \text{ معناه } \frac{-2}{3}u_n + 2 \leq 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ وبالتالي المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة.}$$

$$\text{ب. استنتاج أن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة.}$$

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

$$5. \text{أ. تعيين العدد الحقيقي } \alpha \text{ بحيث تكون المتتالية } (v_n) \text{ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha$$

$$= \frac{1}{3}(v_n - \alpha) + 2 + \alpha$$

$$= \frac{1}{3}v_n + 2 + \frac{2}{3}\alpha$$

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{3} \text{ إذا فقط إذا كان } 2 + \frac{2}{3}\alpha = 0 \text{ أي } \alpha = -3.$$

$$\text{فيكون حدها الأول } v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

ب. كتابة v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n .

$$u_n = v_n + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3\right) = 3$$

التمرين السادس:

$$1. (u_n) \text{ متتالية حسابية متناقصة معرفة على } \mathbb{N} \text{ بحدّها الأول } u_0 \text{ وأساسها } r.$$

$$\text{أ. عيّن } u_2 \text{ ثم } r \text{ علماً أنّ: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$$

$$\text{ب. اكتب } u_n \text{ بدلالة } n, \text{ ثم احسب المجموع: } S_n = u_0 + u_2 + \dots + u_n$$

2. تعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = e^{14-3n}$ حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول؛ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. ماذا تستنتج؟

ب - احسب المجموع: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ؛ ثم احسب الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

ج - احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$

الحل:

أ - تعيين u_2 ثم r .

لدينا (u_n) متتالية حسابية إذن $2u_2 = u_1 + u_3$ ولدينا $u_1 + u_2 + u_3 = 24$ ومنه $3u_2 = 24$ أي $u_2 = 8$.

لدينا $u_3 = u_2 + r = 8 + r$ و $u_1 = u_2 - r = 8 - r$

$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210$ معناه $(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210$ يكافئ $r^2 = 9$ أي $r = 3$ أو $r = -3$.

من أجل $r = 3$ نجد $u_3 = 11$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متناقصة ومنه $r = -3$.

ب - كتابة u_n بدلالة n ، وحساب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$u_n = u_2 + (n-2)r$ ومنه $u_n = 8 - 3(n-2)$ أي $u_n = 14 - 3n$.

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(14 + 14 - 3n)$

$S_n = \frac{n+1}{2}(28 - 3n)$

2. أ - تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول؛ وحساب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

لدينا $v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3} = e^{14-3n} \times e^{-3} = e^{-3}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-3}$ وحدها الأول $v_0 = e^{14-3 \times 0} = e^{14}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{14-3n} = 0$ نستنتج أن المتتالية (v_n) متقاربة.

ب - حساب المجموع: $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ؛ ثم الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - (e^{-3})^{n+1}}{1 - e^{-3}} \right) = e^{14} \left(\frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}} \right)$

لدينا $v_n = e^{14-3n} = e^{u_n}$ ومنه $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times \dots \times e^{u_n}$

$P_n = e^{u_0 + u_1 + \dots + u_n} = e^{S_n} = e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-3(n+1)} = 0$ لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{14} \left(\frac{1 - e^{-3(n+1)}}{1 - e^{-3}} \right) = \frac{e^{14}}{1 - e^{-3}}$ ->

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2}(28-3n) = -\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)} = 0$

التمرين السابع:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ - احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب - أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج - احسب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ؛ ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ - احسب v_2 و v_3 .

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج - اكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .

الحل:

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول u_1 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ - حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

لدينا $u_1 \times u_3 = u_2^2$ ومنه $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ تعني $u_2^3 = 216$ أي $u_2 = 6$.

لدينا $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{q}$ و $u_3 = qu_2 = 6q$.

$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32$ معناه $\frac{6}{q} + 12 + 6q = 32$ بضرب طرفي المعادلة بالعدد q نجد $6 + 12q + 6q^2 = 32q$ أي

$$6q^2 - 20q + 6 = 0 \text{ بعد حساب المميز نجد } q = 3 \text{ أو } q = \frac{1}{3}$$

من أجل $q = \frac{1}{3}$ نجد $u_3 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة وعليه $q = 3$.

ب - كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

$$u_n = u_1 q^{n-1} = 2(3)^{n-1}$$

ج - حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_1 \left(\frac{3^n - 1}{3 - 1} \right) = 2 \left(\frac{3^n - 1}{2} \right) = 3^n - 1$$

تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$.

$$S_n = 728 \text{ معناه } 3^n - 1 = 728 \text{ معناه } 3^n = 729 \text{ يكافئ } \ln 3^n = \ln 729 \text{ ويكافئ } n \ln 3 = \ln 729 \text{ أي } n = \frac{\ln 729}{\ln 3}$$

2. أ - حساب v_2 و v_3 .

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = 5 \text{ ؛ } v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

ب - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$.

- تبين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} \text{ ولدينا } (u_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 3 \text{ إذن } u_{n+1} = 3u_n$$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n}{3u_n} + \frac{u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} \text{ ومنه}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج - كتابة w_n بدلالة n ،

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

استنتاج v_n بدلالة n .

$$v_n = (3)^{n-1} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4 \right) \text{ أي } v_n = 2(3)^n \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right) \text{ يكافئ } v_n = u_n \left(w_n + \frac{2}{3} \right) \text{ يكافئ } w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

التمرين الثامن:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً ومعرفة بـ: $u_0 = e^2$ و $u_8 = 9u_{10}$.

(1) عيّن أساس هذه المتتالية واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

(3) المتتالية (w_n) معرفة على بـ: $w_n = \ln(u_n)$.

أ - برهن أنّ (w_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب - احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

ج - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

الحل:

(1) تعيين أساس هذه المتتالية وحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تذكر الحد العام لمتتالية هندسية أساسها q . $u_n = u_0 q^{n-p}$.

$$u_{10} = u_8 \times q^2$$

$$u_8 = 9u_{10} \text{ معناه } u_8 = 9 \times u_8 \times q^2 \text{ يكافئ } 1 = 9q^2 \text{ يكافئ } q^2 = \frac{1}{9} \text{ وبما أن حدود المتتالية موجبة تماماً فإن } q = \frac{1}{3}$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{لدينا } u_n = u_0 q^n = e^2 \left(\frac{1}{3} \right)^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \text{ لأن } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

(2) حساب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ ، } u_n = e^2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ ومنه:}$$

$$P_n = e^2 \left(\frac{1}{3} \right)^0 \times e^2 \left(\frac{1}{3} \right)^1 \times e^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \dots \times e^2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$P_n = (e^2)^{n+1} \left(\frac{1}{3} \right)^{0+1+2+\dots+n} = e^{2(n+1)} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3. أ - برهان أنّ (w_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

$$w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{3}u_n\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + w_n$$

إذن (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ وحدها الأول $w_0 = \ln(u_0) = \ln e^2 = 2$.

بما أن (w_n) متتالية حسابية أساسها سالب فهي متتالية متناقصة.

ب - حساب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

$$S_n = \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) = \frac{n+1}{2}\left(2 + 2 + n \ln\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(4 - n \ln 3)$$

ج - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2}(4 - n \ln 3)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} \times \frac{4 - n \ln 3}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} \times \frac{4 - n \ln 3}{n} = \frac{1}{2} \times (-\ln 3) = -\frac{\ln 3}{2}$$

التمرين التاسع:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج تقاربها.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4. نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

أ - احسب S_n ثم P_n بدلالة n .

ب - عين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n = e^{\frac{7}{4}}$.

الحل:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة كما يلي: $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

لدينا $u_0 > 1$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_n > 1$ ومنه $\sqrt{u_n} > 1$ أي $u_{n+1} > 1$ و عليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.

2. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

بما أن $u_n > 1$ فإن $u_n^2 > u_n$ ومنه $u_n > \sqrt{u_n}$ أي $u_n > u_{n+1}$ إذا المتتالية (u_n) متناقصة.

استنتج تقاربها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة.

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n)$.

أ - تبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ليكن n عددا طبيعيا

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln \sqrt{u_n} = \ln u_n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2} v_n$$

$$v_0 = \ln u_0 = \ln e = 1$$

ب - كتابة v_n و u_n بدلالة n

$$u_n = e^{v_n} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حساب نهاية المتتالية (u_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$4. \text{ نضع } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

أ - حساب S_n ثم P_n بدلالة n .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$P_n = e^{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)}$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $P_n = e^{\frac{7}{4}}$

$$P_n = e^{\frac{7}{4}} \text{ معناه } e^{2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{\frac{7}{4}} \text{ يكافئ } 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = \frac{7}{4} \text{ يكافئ } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{7}{8} \text{ يكافئ } \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{8} \text{ أي}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ وعليه } n = 3$$

التمرين العاشر:

$$(1) f \text{ دالة معرفة على } [0;1] \text{ بـ: } f(x) = \frac{7x+2}{x+8} \text{ ، } (C) \text{ تمثيلها البياني.}$$

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة f .

ب - بين أنه لما $0 \leq x \leq 1$ فإن $0 \leq f(x) \leq 1$

ج - تحقق أنه لما $0 \leq x \leq 1$ فإن: $f(x) - x = \frac{(1-x)(x+2)}{x+8}$ ، واستنتج وضعية (C) بالنسبة

إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

$$(2) \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{7u_n + 2}{u_n + 8} \end{cases} \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي:}$$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج - هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$.

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$.

$$u_n = \frac{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{-2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}, \text{ ب - عيّن } v_n \text{ بدلالة } n, \text{ ثمّ بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

ج - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د - احسب بدلالة n ، كلا من P_n و S_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

الحل:

أ - دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{7(x+8) - (7x+2)}{(x+8)^2} = \frac{54}{(x+8)^2} \text{ ولدينا } [0;1]$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه دالة متزايدة تماما على $[0;1]$.

ب - تبيان أنّه لما $0 \leq x \leq 1$ فإنّ $0 \leq f(x) \leq 1$

من أجل $0 \leq x \leq 1$ لدينا $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ أي $\frac{1}{4} \leq f(x) < 1$ وبالتالي $0 \leq f(x) \leq 1$.

ج - التحقّق أنّه لما $0 \leq x \leq 1$ فإنّ: $f(x) - x = \frac{(1-x)(x+2)}{x+8}$

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$.

$$f(x) - x = \frac{7x+2}{x+8} - x = \frac{7x+2-x(x+8)}{x+8}$$

$$f(x) - x = \frac{-x^2 - x - 6}{x+8} = \frac{(1-x)(x+2)}{x+8}$$

استنتاج وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$ لدينا $1-x > 0$ و $x+2 > 0$ و $x+8 > 0$ ومنه $f(x) - x > 0$ نستنتج أن

(C) موجود فوق (Δ) .

(2) أ - برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

لدينا $0 \leq u_0 \leq 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل عدد طبيعي n ولنبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ وحسب نتيجة السؤال (1) ب. فإن $0 \leq f(u_n) \leq 1$ أي $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل

كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

ب - استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f(x) - x > 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$ فإن

$$f(u_n) - u_n \geq 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ وبالتالي المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة.}$$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

(3) أ - برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$.

ليكن n عددا طبيعيا:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{7u_n + 2}{u_n + 8} + 2}{\frac{7u_n + 2}{u_n + 8} - 1} = \frac{u_n + 8}{6u_n - 6}$$

$$v_{n+1} = \frac{9u_n + 18}{6u_n - 6} = \frac{9(u_n + 2)}{6(u_n - 1)} = \frac{9}{6} v_n = \frac{3}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{2}$

ب - تعيين v_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ لدينا } v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 1} = -2 \text{ ومنه } v_n = -2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$u_n = \frac{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \text{ ، تبيان أنه، من أجل كل عدد طبيعي } n$$

$$u_n = \frac{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} \text{ أي } u_n = \frac{v_n + 2}{v_n - 1} \text{ ومنه } u_n (v_n - 1) = v_n + 2 \text{ يكافئ } v_n (u_n - 1) = u_n + 2 \text{ معناه } v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}$$

ج - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}{-2 \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(-2 + \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(-2 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}{-2 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}}$$

بما أن $\frac{3}{2} > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

د - حساب بدلالة n ، كلا من P_n و S_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$S_n = v_0 \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right) = -2 \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$S_n = -4 \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = -2 \left(\frac{3}{2}\right)^0 \times -2 \left(\frac{3}{2}\right)^1 \times \dots \times -2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$P_n = (-2)^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{0+1+\dots+n} = (-2)^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الحادي عشر:

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad y=x$$

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بحدّها الأول، $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n$$

أ - أعد رسم هذا الشكل، ثم ممثّل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها، مبرزا خطوط التمثيل.

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ) أثبت أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ج) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب) احسب نهاية (u_n) .

ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$

الحل:

أ - تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

ب - لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ يبدو أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

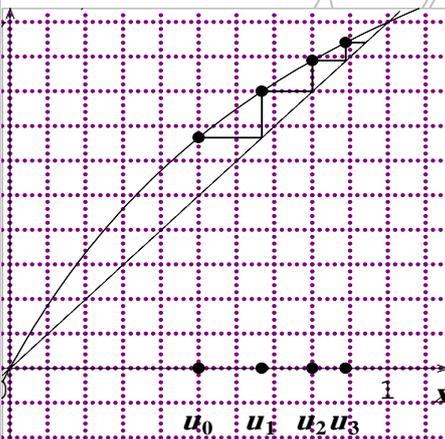
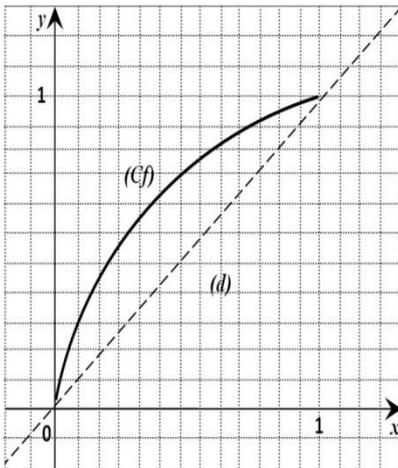
(2) أ) إثبات أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

ليكن x عدداً حقيقياً من المجال $[0;1]$.

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$.

ب) برهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.



لدينا $0 < u_0 < 1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $0 < u_n < 1$ من أجل عدد طبيعي كفي n ونبرهن صحة الخاصية $0 < u_{n+1} < 1$.

لدينا $0 < u_n < 1$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 1]$ فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ ولدينا $f(0) = 0$ ، $f(1) = 1$ ،

و $f(u_n) = u_{n+1}$ إذن $0 < u_{n+1} < 1$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

(ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ليكن n عدداً طبيعياً

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n + 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ومنه $u_n > 0$ و $1 - u_n > 0$ و $u_n + 1 > 0$ إذن $\frac{u_n(1 - u_n)}{u_n + 1} > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

(أ) برهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدّها الأول v_0 .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n + 1}} = \frac{\frac{2u_n - u_n - 1}{u_n + 1}}{\frac{2u_n}{u_n + 1}} = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2} \frac{u_n - 1}{u_n} = \frac{1}{2} v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$

(ب) حساب نهاية (u_n) .

لدينا $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 1}{u_n} = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^0} + \frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^1} + \frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \dots + \frac{1}{-1\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$S_n = -\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = -(1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n)$$

$$S_n = -\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) = 1 - 2^{n+1}$$

تذكير:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

التمرين الثاني عشر:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

1. ادرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[\sqrt{2}; +\infty[$ المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

2. تحقق أنه إذا كان: $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ فإن: $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$.

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

4. برهن أنه إذا كان: $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ فإن: $f(x) \leq x$.

5. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

6. تحقق أن (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

الحل:

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[\sqrt{2}; +\infty[$.

ليكن x عددا حقيقيا من المجال $[\sqrt{2}; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\sqrt{2}; +\infty[$ لدينا $x - \sqrt{2} > 0$ و $x + \sqrt{2} > 0$ و $2x^2 > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ وبالتالي

الدالة f متزايدة تماما على $[\sqrt{2}; +\infty[$.

2. التحقق أنه إذا كان: $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ فإن: $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$.

لدينا f دالة متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{2}; +\infty[$.

إذا كان $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ فإن $f(\sqrt{2}) \leq f(x) \leq f(2)$ ومنه $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ وبالتالي $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$.

3. برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن: $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

لدينا $u_0 = 2$ ومنه $\sqrt{2} \leq u_0 \leq 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ وحسب نتيجة السؤال 2 فإن $\sqrt{2} \leq f(u_n) \leq 2$ أي $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$.

4. برهان أنه إذا كان: $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ فإن: $f(x) \leq x$.

$$f(x) - x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x^2}{2x} = \frac{(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)}{2x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[\sqrt{2}; 2]$ لدينا $\sqrt{2} + x > 0$ و $\sqrt{2} - x \leq 0$ و $2x > 0$ ومنه $f(x) - x \leq 0$ أي

$$f(x) \leq x$$

5. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ ومنه $f(u_n) \leq u_n$ أي $u_{n+1} \leq u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

6. التحقق أن (u_n) متقاربة، و تعيين نهايتها.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\sqrt{2}$ فهي متقاربة

تعيين نهايتها

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ حيث ℓ عدد حقيقي ولدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ وعليه

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \right)$ ومنه $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$ يكافئ $\ell = \frac{\ell^2 + 2}{2\ell}$ يكافئ $\ell^2 - 2 = 0$ ومنه $\ell = \sqrt{2}$ أو $\ell = -\sqrt{2}$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ فإن $\ell = \sqrt{2}$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

التمرين الثالث عشر:

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} حيث حدّها الأول $u_0 = 1$ وبالعلاقة التراجعية $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$

لكل n من \mathbb{N}^* مع $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. أ- عيّن α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

ب- ما طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha \neq 1$.

2. نفرض أنّ $\alpha \neq -1$ و $\alpha \neq 1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha}$

أ- برهن أنّ (v_n) هي متتالية هندسية، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 وأساسها q .

ب- عيّن قيم α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة، ثمّ احسب نهاية المتتالية (v_n) .

الحل:

1. أ- تعيين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) ثابتة معناه $u_0 = u_{n-1} = u_n$ معناه $u_0 = \alpha u_0 + 2$ يكافئ $1 = \alpha + 2$ أي $\alpha = -1$.

ب- طبيعة المتتالية (u_n) إذا كان $\alpha = 1$.

من أجل $\alpha = 1$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_{n-1} + 2$ ومنه $u_n - u_{n-1} = 2$ إذن المتتالية (u_n) حسابية أساسها 2.

2. أ- برهان أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 وأساسها q .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1-\alpha} = \alpha u_n + \frac{2-2\alpha-2}{1-\alpha}$$

$$v_{n+1} = \alpha u_n - \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \alpha \left(u_n - \frac{2}{1-\alpha} \right) = \alpha v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - \frac{2}{1-\alpha} = 1 - \frac{2}{1-\alpha} = \frac{-1-\alpha}{1-\alpha}$.

ب- تعيين قيم α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة.

لدينا $v_n = v_0 \alpha^n = \frac{-1-\alpha}{1-\alpha} \alpha^n$ المتتالية (v_n) متقاربة من أجل قيم α من المجال $]-1; 1[$.

حساب نهاية المتتالية (v_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1-\alpha}{1-\alpha} \alpha^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$$

التمرين الرابع عشر:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$ لكل n من \mathbb{N} .

1. أحسب u_3, u_2, u_1 .

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ من أجل كل n ، حيث α و β عدنان حقيقيان.

- عيّن العددين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

3. نفرض فيما يلي: $\alpha = 6$ و $\beta = -23$.

أ- اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n .

ب - نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $\pi_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثم استنتج عبارة π_n .

الحل:

1. حساب u_1, u_2, u_3 .

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 - 2 \times 1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{11}{3} - 2 + \frac{5}{3} = \frac{19}{9}, \quad u_1 = \frac{2}{3}u_0 - 2 \times 0 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times 3 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 - 2 \times 2 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{19}{9} - 4 + \frac{5}{3} = \frac{-25}{27}$$

2. - تعيين العددين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

$$\text{إذن } u_n = v_n - \alpha n - \beta \text{ لدينا } v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - \alpha n - \beta) - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3}\alpha n - \frac{2}{3}\beta - 2n + \frac{5}{3} + \alpha n + \alpha + \beta$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}\alpha n - 2n + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + n\left(\frac{1}{3}\alpha - 2\right) + \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3}$$

$$(v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{3} \text{ إذا وفقط إذا كان } \frac{1}{3}\alpha - 2 = 0 \text{ و } \frac{1}{3}\beta + \alpha + \frac{5}{3} = 0 \text{ يكافئ } \alpha = 6 \text{ و } \frac{1}{3}\beta + 6 + \frac{5}{3} = 0 \text{ وعليه}$$

$$\alpha = 6 \text{ و } \beta = -23$$

3. أ - كتابة عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = -20 \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ ومنه } v_0 = u_0 + 6 \times 0 - 23 = -20$$

$$\text{لدينا } u_n = v_n - \alpha n - \beta = v_n - 6n + 23 \text{ ومنه } u_n = -20 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6n + 23$$

ب - نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $\pi_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- حساب S_n بدلالة n

$$S_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = -20 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) = -60 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

استنتاج عبارة π_n .

$$\pi_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 - 6 \times 0 + 23) + (v_1 - 6 \times 1 + 23) + \dots + (v_n - 6n + 23)$$

$$\pi_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 6(0 + 1 + \dots + n) + 23(n + 1)$$

$$\pi_n = -60 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - 6 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 23(n+1)$$

$$\pi_n = -60 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - 3(n(n+1)) + 23(n+1)$$

$$\pi_n = -60 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) + (n+1)(-3n+23)$$

التمرين الخامس عشر:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بـ: $u_0 = 3$ و $v_0 = 4$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1. احسب u_1, v_1, u_2, v_2 .

2. من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $w_n = v_n - u_n$.

- بين أن المتتالية (w_n) هندسية وعين نهايتها.

3. ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، ثم استنتج أنهما متجاورتان.

4. نعتبر أن (t_n) هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

أ- برهن أن (t_n) متتالية ثابتة.

ب- عين ℓ ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ج- أوجد عبارتي u_n و v_n بدلالة n ، ثم أوجد مرة ثانية نهايتي (u_n) و (v_n) .

الحل:

1. حساب u_1, v_1, u_2, v_2 .

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}, \quad v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{29}{8}, \quad v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{59}{16}$$

2. - تبيان أن المتتالية (w_n) هندسية.

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2}$$

$$w_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{\frac{v_n - u_n}{2}}{2} = \frac{w_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

تعيين نهاية المتتالية (w_n) .

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \left(\frac{1}{4} \right)^n \text{ لدينا } w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{1}{4} < 1$$

3. دراسة اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^n}{2}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2} = \frac{u_{n+1} - v_n}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n - v_n}{2} = \frac{u_{n+1} + v_n - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما. استنتاج أنهم متجاورتان.

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ وبما أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) إتجاهين مختلفين فهما متجاورتان.

4. أ - برهان أن (t_n) متتالية ثابتة.

ليكن n عددا طبيعيا

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2\left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)\right)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = \frac{1}{3}(u_n + v_n + v_n)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

$$t_{n+1} = t_n$$

إذن (t_n) متتالية ثابتة حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n = t_0 = \frac{1}{3}(u_0 + 2v_0) = \frac{1}{3} \times 11 = \frac{11}{3}$

ب - تعيين l ، النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

بما أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(l + 2l)$ يكافئ

$$l = \frac{11}{3} \text{ أي } \frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 3l$$

ج - ايجاد عبارتي u_n و v_n بدلالة n ،

لدينا $w_n = v_n - u_n$ معناه $\left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - u_n$ ولدينا $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ معناه $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ أي $11 = u_n + 2v_n$ نحصل

$$.v_n = \frac{1}{3}\left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ أي } 3v_n = 11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ بجمع المعادلتين نجد } \begin{cases} 11 = u_n + 2v_n \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n = v_n - u_n \end{cases} \text{ على الجملة}$$

من المعادلة الأولى لدينا $u_n = 11 - 2v_n$ أي $u_n = 11 - \frac{2}{3}\left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

ايجاد مرة ثانية نهايتي (u_n) و (v_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{11}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[11 - \frac{2}{3} \left(11 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right] = 11 - \frac{2}{3} \times 11 = \frac{11}{3} \text{ و}$$

التمرين السادس عشر:

(I) المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

(II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

(1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) أ) برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل:

(1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

$$\frac{5}{6} \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{5}{6} \text{ إذن } v_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} = \frac{5^{n+1} \times 5}{6^n \times 6} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n} = \frac{5}{6} v_n$$

(2) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \times 5^n}{6^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

(II) 1) برهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 6$.

لدينا $1 \leq u_0 \leq 6$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 \leq u_n \leq 6$ من أجل عدد طبيعي كفي n ونبرهن صحة الخاصية $1 \leq u_{n+1} \leq 6$.

لدينا $1 \leq u_n \leq 6$ معناه $5 \leq 5u_n \leq 30$ يكافئ $11 \leq 5u_n + 6 \leq 36$ يكافئ $\sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq \sqrt{36}$ وهذا يعني أن $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من \mathbb{N} فإن $1 \leq u_n \leq 6$.

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \frac{(\sqrt{5u_n + 6} - u_n)(\sqrt{5u_n + 6} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{(u_n + 1)(6 - u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

بما أن $1 \leq u_n \leq 6$ فإن $\sqrt{5u_n + 6} + u_n > 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $6 - u_n \geq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة.

(3) أ) برهان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

$$6 - u_{n+1} = 6 - \sqrt{5u_n + 6} = \frac{(6 - \sqrt{5u_n + 6})(6 + \sqrt{5u_n + 6})}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{36 - (5u_n + 6)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $\sqrt{5u_n + 6} > 0$ معناه $6 + \sqrt{5u_n + 6} > 6$ يكافئ $\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} < \frac{1}{6}$ وبما أن $5(6 - u_n) \geq 0$

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \quad \text{إذن} \quad \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

(ب) تبيان أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ ، استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا $6 - u_0 = 5$ و $v_0 = 5$ إذن $0 \leq 6 - u_0 \leq v_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $6 - u_n \leq v_n$ ومنه $\frac{5}{6}(6 - u_n) \leq \frac{5}{6}v_n$ أي $\frac{5}{6}(6 - u_n) \leq v_{n+1}$ ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \quad \text{إذن} \quad 6 - u_{n+1} \leq v_{n+1} \quad \text{ومن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 6 - u_n \leq v_n.$$

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq 6$ معناه $6 - u_n \geq 0$ ومنه $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$.

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ فإنه حسب النهايات بالحصر $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 - u_n = 0$ وهذا يعني

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

التمرين السابع عشر:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل؛ هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

4. لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $t_n = \ln(v_n)$.

أ- بين أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$ واستنتج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$.

الحل:

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{2}{3} \times 2 + 1 = \frac{7}{3}, \quad u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27}$$

لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2. أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n+3$.

لدينا $u_0 \leq 0+3$ لأن $u_0 = 2$ و $0+3=3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$.

نفرض أن $u_n \leq n+3$ ونبرهن أن $u_{n+1} \leq (n+1)+3$ أي نبرهن أن $u_{n+1} \leq n+4$.

لدينا $u_n \leq n+3$ معناه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$ يكافئ $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n$ أي $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n \leq n+2$ يكافئ

$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq n+3$ أي $u_{n+1} \leq n+3$ وبما أن $n+3 \leq n+4$ فإن $u_{n+1} \leq n+4$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من

أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n+3$.

ب - دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n+3$ يعني $-u_n + n + 3 \geq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة.

ج - استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل

لدينا $u_0 = 2$ والمتتالية (u_n) متزايدة إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$ ومنه (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لا يمكن القول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3. أ - تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1$ معناه $3v_{n+1} = 3u_{n+1} - 3n - 3$ يكافئ $3v_{n+1} = 2u_n + n + 3 - 3n - 3$ يكافئ $3v_{n+1} = 2u_n - 2n$ يكافئ

$3v_{n+1} = 2(u_n - n)$ معناه $3v_{n+1} = 2v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

ب - $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا $v_n = u_n - n$ معناه $u_n = v_n + n$ أي $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

لدينا $1 < \frac{2}{3} < 1$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\right) = +\infty$

ج - حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n + n$.

$$S_n = (v_0 + 0) + (v_1 + 1) + (v_2 + 2) + \dots + (v_n + n)$$

$$S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (0 + 1 + 2 + \dots + n)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right)$$

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

أ - تبيان أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{2}{3}v_n\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(v_n) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + t_n$$

إذن (t_n) متتالية حسابية أساسها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول $t_0 = \ln(v_0) = \ln 2$.

ب - حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

$$A_n = \frac{n+1}{2}(t_0 + t_n) = \frac{n+1}{2} \left(\ln 2 + \ln 2 + n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right)$$

$$A_n = \frac{n+1}{2} \left(\ln 4 + n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right)$$

استنتاج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

لدينا $\ln(P_n) = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n) = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

$$\ln(P_n) = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = A_n$$

$$P_n = e^{\frac{n+1}{2} \left(\ln 4 + n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right)}$$

ومنه $P_n = e^{A_n}$ أي

التمرين الثامن عشر:
 (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$u_0 = e^2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$$

$$v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2} \text{ كما يلي: } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي:}$$

(1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدّها الأول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(4) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

الحل:

(1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ،

ليكن n عددا طبيعيا.

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\ln u_{n+1} + 1) = \frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{\frac{u_n}{e}} + 1 \right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{u_n}{e} \right) + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\ln(u_n) - \ln e) + 1 \right)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(u_n) - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2} \ln u_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln e^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(2) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ أي } v_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

لدينا $v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{2} \ln u_n = v_n - \frac{1}{2}$ يكافئ $\ln u_n = 2v_n - 1$ يكافئ $u_n = e^{2v_n - 1}$ أي $u_n = e^{3 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}$.

(3) حساب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

$$.S_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = 3 \text{ وعليه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ ومنه } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

(4) حساب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = e^{2v_n - 1}$ ، ومنه $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{2v_0 - 1} \times e^{2v_1 - 1} \times \dots \times e^{2v_n - 1}$

$$P_n = e^{(2v_0 - 1) + (2v_1 - 1) + \dots + (2v_n - 1)}$$

$$.P_n = e^{2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) - (n+1)} = e^{2S_n - (n+1)} = e^{6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) - (n+1)}$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) - (n+1)} = 0 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) - (n+1) \right] = -\infty$$

التمرين التاسع عشر:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأوّل $u_0 = \frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

(2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$. استنتج أنّ (u_n) متزايدة تماماً.

(3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

(أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدّها الأوّل.

(ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16} \text{، ثمّ بيّن أنّ: } P_n \text{ بدلالة } n$$

الحل:

(1) برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

لدينا $3 < u_0 < 4$ ومنه خاصية الإبتداء صحيحة

ليكن عدداً طبيعياً

نفرض أنّ $3 < u_k < 4$ إذن $0 < u_k - 3 < 1$ ومنه $0 < \sqrt{u_k - 3} < 1$ يكافئ $3 < 3 + \sqrt{u_k - 3} < 4$ أي $3 < u_{k+1} < 4$ ومنه حسب

مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$.

(2) تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{u_n - 3} - u_n = \sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n - 3} - (u_n - 3))(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))}{(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))} = \frac{u_n - 3 - (u_n - 3)^2}{(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3 - (u_n^2 - 6u_n + 9)}{(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))} = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))}$$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماماً.من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]3; 4[$ لدينا $-x^2 + 7x - 12 > 0$ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 < u_n < 4$ فإن

$$-u_n^2 + 7u_n - 12 > 0 \text{ ولدينا } -3 > u_n - 3 \text{ لأن } u_n > 3 \text{ و } \sqrt{u_n - 3} > 0 \text{ ومنه } \sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3) > 0 \text{ إذن}$$

$$\frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{(\sqrt{u_n - 3} + (u_n - 3))} > 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ وبالتالي المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماماً.}$$

(3) تبرير لماذا (u_n) متقاربة.بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة.**(4) أ) برهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.**

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 3) = \ln(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3) = \ln(\sqrt{u_n - 3})$$

$$v_{n+1} = \ln(\sqrt{u_n - 3})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{u_n - 3}) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ أي $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ **ب) كتابة كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.**

$$v_n = \left(\ln \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\ln \frac{1}{4}\right)} + 3 = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 3 \text{ أي } u_n = e^{v_n} + 3 \text{ يكافئ } u_n - 3 = e^{v_n} \text{ لدينا } v_n = \ln(u_n - 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 3 = 4 \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

كتابة P_n بدلالة n .لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n - 3 = e^{v_n}$.

$$P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} \text{ ومنه}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = \left(\ln \frac{1}{4}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right] = \left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] \text{ ولدينا}$$

$$P_n = e^{\left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]} \text{ إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16} \text{ تبيان أن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(\ln \frac{1}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]} = e^{\ln \frac{1}{16}} = \frac{1}{16} \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = 1 \text{ ومنه } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ لدينا}$$

التمرين العشرون:

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{-4}{u_n - 4}.$$

(1) احسب كلا من u_1, u_2, u_3 .

(2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أن: $u_n \neq 2$.

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة كما يلي: } v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب إيجاد أساسها و حدّها الأول

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج - هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.

الحل:

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{-4}{u_n - 4}.$$

(1) حساب كلا من u_1, u_2, u_3 .

$$u_1 = \frac{-4}{u_0 - 4} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3} \quad ; \quad u_2 = \frac{-4}{u_1 - 4} = \frac{-4}{\frac{4}{3} - 4} = \frac{-4}{\frac{4 - 12}{3}} = \frac{-4 \cdot 3}{-8} = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad u_3 = \frac{-4}{u_2 - 4} = \frac{-4}{\frac{3}{2} - 4} = \frac{-4}{\frac{3 - 8}{2}} = \frac{-4 \cdot 2}{-5} = \frac{8}{5}$$

(2) تبيان أن: $u_n \neq 2$.

من أجل $n = 0$ نجد $u_0 \neq 2$ ومنه مرحلة الإبتداء صحيحة

ليكن k عددا طبيعيا

نفرض أن $u_k \neq 2$ ونبرهن أن $u_{k+1} \neq 2$

$$\text{لدينا } u_{k+1} - 2 = \frac{-4}{u_k - 4} - 2 = \frac{-4 - 2u_k + 8}{u_k - 4} = \frac{-2(u_k - 2)}{u_k - 4}$$

لدينا حسب الفرضية $u_k \neq 2$ ومنه $u_k - 2 \neq 0$ أي $u_{k+1} \neq 2$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \neq 2$

(3) أ - تبيان أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب إيجاد أساسها و حدّها الأول

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-4}{u_n - 4} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-4 - 2u_n + 8}{u_n - 4}} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-2u_n + 4}{u_n - 4}} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\frac{-2(u_n - 2)}{u_n - 4}} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{u_n - 4}{u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 4}{-2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 4 - 2}{-2(u_n - 2)} = \frac{u_n - 6}{-2(u_n - 2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 4}{-2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 4}{-2(u_n - 2)} + \frac{2}{-2(u_n - 2)} = \frac{-1}{2}$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\frac{1}{2}$

$$\text{وحدها الأول } v_0 = \frac{1}{u_0 - 2} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n ، واستنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 + nr = -1 - \frac{1}{2}n$$

$$\text{لدينا } v_n = \frac{1}{u_n - 2} \text{ ومنه } u_n - 2 = \frac{1}{v_n} \text{ أي } u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{2v_n + 1}{v_n}$$

$$u_n = \frac{2\left(-1 - \frac{1}{2}n\right) + 1}{-1 - \frac{1}{2}n} = \frac{-n - 1}{-1 - \frac{1}{2}n} = \frac{-\frac{1}{2}(2n + 2)}{-\frac{1}{2}(2 + n)} = \frac{2n + 2}{2 + n} \text{ عليه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 2}{2 + n} = 2 \text{ متقاربة لأن } (u_n)$$

التمرين الحادي والعشرون:

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } u_0 = -3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$$

$$(1) \text{ أ) مثل بيانيا الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \left\{ \frac{9}{2} \right\} \text{ ب: } f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}$$

ب) استعمل منحنى الدالة f لتخمين تصرف المتتالية (u_n) .

(2) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

(3) برهن أن (u_n) متزايدة وأنها متقاربة.

(4) نعتبر المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - u_n$.

$$\text{أ) برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي } n, v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n, \text{ ثم استنتج أن: } 0 < v_n < 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$$

ب) ماهي نهاية المتتالية (v_n) ؟

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحل:

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } u_0 = -3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$$

$$(1) \text{ أ) تمثيل بيانيا الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \left\{ \frac{9}{2} \right\} \text{ ب: } f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}$$

ب) حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة.

(2) برهان بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

من أجل $n = 0$ نجد $u_0 < 1$ ومنه مرحلة الإبتداء صحيحة.

ليكن k عددا طبيعيا.

نفترض أن $u_k < 1$ ولنبرهن أن $u_{k+1} < 1$.

$$u_{k+1} - 1 = \frac{u_k - 8}{2u_k - 9} - 1 = \frac{-u_k + 1}{2u_k - 9}$$

و $-u_k + 1 > 0$ و $2u_k - 9 < 0$ ومنه $u_{k+1} - 1 < 0$ أي $u_{k+1} < 1$ إذن من أجل

كل عدد طبيعي n ، $u_n < 1$.

(3) برهان أن (u_n) متزايدة وأنها متقاربة.

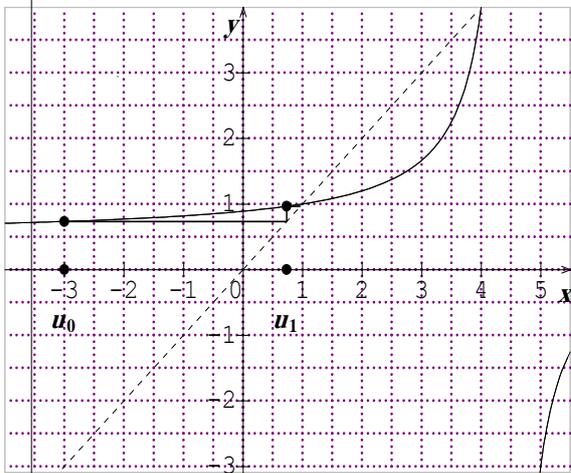
ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} - u_n = \frac{-2u_n + 10u_n - 8}{2u_n - 9} = \frac{-2(u_n - 1)(u_n - 4)}{2u_n - 9}$$

لدينا $u_n < 1$ ومنه $u_n - 1 < 0$ و $u_n - 4 < -3 < 0$ و $2u_n - 9 < 0$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

$$(4) \text{ أ) برهان أنه، من أجل كل عدد طبيعي } n, v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n$$



$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \frac{-(1 - u_n)}{2u_n - 9}$$

لدينا $u_n < 1$ معناه $2u_n < 2$ تكافئ $2u_n - 9 < -7$ تكافئ $\frac{1}{2u_n - 9} > \frac{-1}{7}$ تكافئ $\frac{-1}{2u_n - 9} < \frac{1}{7}$

وبما أن $1 - u_n > 0$ فإن $\frac{-(1 - u_n)}{2u_n - 9} < \frac{1}{7}(1 - u_n)$ أي $v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n$

استنتاج أن: $0 < v_n < 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 < \frac{1}{7}v_0 \\ v_2 < \frac{1}{7}v_1 \\ v_3 < \frac{1}{7}v_2 \\ \vdots \\ v_n < \frac{1}{7}v_{n-1} \end{array} \right. \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n \text{ ومنه}$$

بالضرب طرفاً إلى طرف نجد $v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n < \frac{1}{7}v_0 \times \frac{1}{7}v_1 \times \frac{1}{7}v_2 \times \dots \times \frac{1}{7}v_{n-1}$ ولدينا $v_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n v_0$ ومنه

$$v_n < 4\left(\frac{1}{7}\right)^n \text{ أي } v_0 = 1 - u_0 = 4$$

ولدينا من جهة أخرى $1 - u_n > 0$ ومنه $v_n > 0$ إذن $0 < v_n < 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

(ب) تعيين نهاية المتتالية (v_n) ؟

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ إذن حسب النهايات بالمقارنة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) ؟

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n = 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التمرين الثاني والعشرون:

(u_n) متتالية عددية معرفة بعدها الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$.

1. عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

نفرض فيما يلي أن $\alpha = \frac{3}{2}$.

2. أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

ب - بين أن (u_n) متتالية متناقصة؛ استنتج أنها متقاربة ثم عين نهايتها.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ؛ تأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.

ج - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + \dots + \frac{v_n}{2^n}$ بين أن $S_n = (-n-1)\ln 2$.

د - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ احسب S'_n بدلالة n .

الحل:

1. تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

(u_n) متتالية ثابتة معناه $u_0 = u_n = u_{n+1}$ معناه $u_0 = (u_0 - 1)^2 + 1$ يكافئ $u_0 - 1 - (u_0 - 1)^2 = 0$ يكافئ

$(u_0 - 1)(1 - (u_0 - 1)) = 0$ يكافئ $(u_0 - 1)(-u_0 + 2) = 0$ أي $(\alpha - 1)(-\alpha + 2) = 0$ ومنه $\alpha = 1$ أو $\alpha = 2$.

2. أ - برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ ومنه $1 < u_0 < 2$

نفرض أن $1 < u_n < 2$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن أن $1 < u_{n+1} < 2$.

$1 < u_n < 2$ معناه $0 < u_n - 1 < 1$ ومعناه $0 < (u_n - 1)^2 < 1$ ومنه $0 < (u_n - 1)^2 + 1 < 2$ أي $1 < u_{n+1} < 2$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

ب - تبيان أن (u_n) متتالية متناقصة.

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n = (u_n - 1)^2 - (u_n - 1)$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 1 - 1) = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

بما أن $u_n > 1$ فإن $u_n - 1 > 0$ وبما أن $u_n < 2$ فإن $u_n - 2 < 0$ إذن $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية

(u_n) متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة ونهايتها عدد حقيقي l .

تعيين نهايتها.

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$ والدالة $x \mapsto (x - 1)^2 + 1$

مستمرة على \mathbb{R} إذن $l = (l - 1)^2 + 1$ ومنه $l = 1$ أو $l = 2$ ولدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ والمتتالية (u_n) متناقصة إذن $l = 1$ أي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

أ - برهان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln((u_n - 1)^2 + 1 - 1)$$

$$v_{n+1} = \ln(u_n - 1)^2 = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n ؛

$$v_n = (-\ln 2)2^n$$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 1)$ معناه $u_n = e^{v_n} + 1$ ومنه $u_n = e^{(-\ln 2)2^n} + 1$.

التأكد من النهاية المحصل عليها في 2. ب.

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\ln 2)2^n = -\infty$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(-\ln 2)2^n} = 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{(-\ln 2)2^n} + 1 = 1$.

ج - نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \frac{v_2}{2^2} + \dots + \frac{v_n}{2^n}$

تبيان أن $S_n = (-n-1)\ln 2$.

$$S_n = \frac{(-\ln 2)2^0}{2^0} + \frac{(-\ln 2)2^1}{2^1} + \dots + \frac{(-\ln 2)2^n}{2^n}$$

$$S_n = (-\ln 2) + (-\ln 2) + \dots + (-\ln 2)$$

$$S_n = (n+1)(-\ln 2) = (-n-1)\ln 2$$

د- نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$ ؛ احسب S'_n بدلالة n .

$$S'_n = ((-\ln 2)2^0)^2 + ((-\ln 2)2^1)^2 + ((-\ln 2)2^2)^2 + \dots + ((-\ln 2)2^n)^2$$

$$S'_n = (\ln 2)^2 (2^0)^2 + (\ln 2)^2 (2^1)^2 + (\ln 2)^2 (2^2)^2 + \dots + (\ln 2)^2 (2^n)^2$$

$$S'_n = (\ln 2)^2 \left[(2^0)^2 + (2^1)^2 + (2^2)^2 + \dots + (2^n)^2 \right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2 \left[(2^2)^0 + (2^2)^1 + (2^2)^2 + \dots + (2^2)^n \right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2 \left[4^0 + 4^1 + 4^2 + \dots + 4^n \right]$$

$$S'_n = (\ln 2)^2 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} \right) = (\ln 2)^2 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{3} \right)$$

التمرين الثالث والعشرون:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

(1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n > 0$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علل.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3(1+u_n)$.

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) بين أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

الحل:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

(1) حساب u_1 ، u_2 و u_3 .

$$u_2 = (1+u_1)e^{-2} - 1 = e^{-2} - 1 ، u_1 = (1+u_0)e^{-2} - 1 = e^2 \times e^{-2} - 1 = 0$$

$$u_3 = (1+u_2)e^{-2} - 1 = (e^{-2})e^{-2} - 1 = e^{-4} - 1$$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n > 0$.

لدينا $1+u_0 = e^2$ ومنه $1+u_0 > 0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنّ $1+u_n > 0$ ونبرهن أنّ $1+u_{n+1} > 0$.

لدينا $1+u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$ ولدينا حسب الفرضية $1+u_n > 0$ ومنه $1+u_{n+1} > 0$.

وعليه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $1+u_n > 0$.

(3) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$u_{n+1} - u_n = (1+u_n)e^{-2} - 1 - u_n = (1+u_n)e^{-2} - (1+u_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = (1+u_n)(e^{-2} - 1)$$

وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1+u_n > 0$ و $e^{-2} - 1 < 0$ فإن $(1+u_n)(e^{-2} - 1) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

يمكن استعمال البرهان بالتراجع.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} < u_n$.

لدينا $u_0 = e^2 - 1$ و $u_1 = 0$ ومنه $u_1 < u_0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $u_{k+1} < u_k$ ونبرهن أن $u_{k+2} < u_{k+1}$.

لدينا $u_{k+1} < u_k$ معناه $1+u_{k+1} < 1+u_k$ يكافئ $(1+u_{k+1})e^{-2} < (1+u_k)e^{-2}$ يكافئ

$(1+u_{k+1})e^{-2} - 1 < (1+u_k)e^{-2} - 1$ أي $u_{k+2} < u_{k+1}$ وعليه نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي

n : $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n > 0$ أي $u_n > -1$ ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 وبما أنها متناقصة فهي متقاربة.

(4) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = 3(1+u_{n+1}) = 3((1+u_n)e^{-2}) = e^{-2}v_n$$

$$v_0 = 3(1+u_0) = 3e^2$$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n .

$$v_n = 3e^2(e^{-2})^n = 3e^{-2n+2}$$

لدينا $v_n = 3(1+u_n)$ ومنه $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$ أي $u_n = e^{-2n+2} - 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} - 1 = -1 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n+2} = 0$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3e^2(e^{-2})^n$.

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = 3e^2(e^{-2})^0 \times 3e^2(e^{-2})^1 \times \dots \times 3e^2(e^{-2})^n$$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = (3e^2)^{n+1} (e^{-2})^{0+1+\dots+n} = (3e^2)^{n+1} (e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = (3e^2)^{n+1} \times e^{-n(n+1)} = (3e^2 \times e^{-n})^{n+1} = (3e^{2-n})^{n+1}$$

$$\ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n) = \ln(3e^{2-n})^{n+1} = (n+1)\ln(3e^{2-n})$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$$

طريقة ثانية:

$$\ln v_n = \ln(3e^{-2n+2}) = \ln 3 + \ln e^{-2n+2} \text{ معناه } v_n = 3e^{-2n+2} \text{ ، } n \text{ عدد طبيعي}$$

$$\ln v_n = \ln 3 + 2 - 2n$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (\ln 3 + 2 - 2 \times 0) + (\ln 3 + 2 - 2 \times 1) + \dots + (\ln 3 + 2 - 2n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2(0+1+\dots+n)$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - 2 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2) - n(n+1)$$

$$\cdot \ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$$

كما أنه يمكن الإستدلال على الخاصية بالتراجع.

التمرين الرابع والعشرون:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$(I) \text{ الدالة المعرفة على المجال } [0; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$$

(1) عين إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0; 6]$.

$$(II) \text{ نعتبر المتتاليتين } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ المعرفتين كما يلي: } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

(1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

$$(2) \text{ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 2 \leq u_n < \alpha \text{ و } \alpha < v_n \leq 5 \text{ حيث: } \alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

ب) استنتج اتجاه تغيّر كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

$$(3) \text{ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$\text{ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ج) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

الحل:

(1) تعيين إتجاه تغيّر الدالة f .

$$\text{الدالة } f \text{ تقبل الإشتقاق على } [0; +\infty[\text{ ولدينا } f'(x) = \frac{4(x+1) - 4x - 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

(2) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

ليكن x عدداً حقيقياً من المجال $[0; +\infty[$.

$$f(x) - x = \frac{4x+1}{x+1} - x = \frac{4x+1-x^2-x}{x+1}$$

$$f(x) - x = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x+1} = \frac{\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} - x\right)\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} + x\right)}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ ، $\frac{x + \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}}{x + 1} > 0$ ، ومنه إشارة $f(x) - x$ مثل إشارة $\left(-x + \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$

x	0	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-
الوضعية	(D) فوق (C_f)		(D) تحت (C_f)
	(D) و (C_f) يتقاطعان في النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$		

(II) نعتبر المتالتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ) إنشاء على محور الفواصل الحدود $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3$.

ب) تخمين اتجاه تغير وتقارب كل من المتالتين (u_n) و (v_n) .

حسب الشكل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة ويتقاربان نحو العدد $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

(2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$.

لدينا $2 \leq u_0 < \alpha$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $2 \leq u_n < \alpha$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.

$2 \leq u_n < \alpha$ معناه $f(2) \leq f(u_n) < f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

بما أن $u_{n+1} = f(u_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(2) = 3$ إذن $3 \leq u_{n+1} < \alpha$ أي $2 \leq u_{n+1} < \alpha$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$.

وكذلك لدينا $\alpha < v_0 \leq 5$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $\alpha < v_n \leq 5$ من أجل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.

$\alpha < v_n \leq 5$ معناه $f(\alpha) < f(v_n) \leq f(5)$ لأن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

بما أن $v_{n+1} = f(v_n)$ و $f(\alpha) = \alpha$ و $f(5) = \frac{7}{2}$ إذن $\alpha < v_{n+1} \leq \frac{7}{2}$ أي $\alpha < v_{n+1} \leq 5$.

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$.

ب) استنتاج اتجاه تغير المتالتين (u_n) و (v_n) .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; \alpha[$ ، $f(x) - x > 0$ ، وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2 \leq u_n < \alpha$ فإن

$f(u_n) - u_n > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وعليه المتتالية (u_n) متزايدة.

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ لدينا $f(x) - x < 0$ ، وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\alpha < v_n \leq 5$ فإن

$f(v_n) - v_n < 0$ أي $v_{n+1} - v_n < 0$ وعليه المتتالية (v_n) متناقصة.

$$(3) \text{ أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{4u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{4v_n u_n + 4v_n + u_n + 1 - 4v_n u_n - v_n - 4u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n - 3u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 2$ معناه $u_n + 1 \geq 3$ و $v_n \geq 2$ لأن $\alpha < v_n \leq 5$ معناه $v_n + 1 \geq 3$

$$\text{إذن } (v_n + 1)(u_n + 1) \geq 9 \text{ يكافئ } \frac{3}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3} \text{ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n > u_n$$

$$\text{فإن } v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n) \text{ أي } \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$$

$$(ب) \text{ تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{لدينا } v_0 - u_0 = 5 - 2 = 3 \text{ و } \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \text{ أي } v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{0-1} \text{ ومنه الخاصية صحيحة من أجل } n = 0$$

$$\text{نفرض أن } v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ ونبرهن أن } v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1} \text{ أي نبرهن أن } v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{لدينا } v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ معناه } \frac{1}{3}(v_n - u_n) < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ أي } \frac{1}{3}(v_n - u_n) < \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل}$$

$$\text{عدد طبيعي } n, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n) \text{ ومنه } v_{n+1} - u_{n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{وعليه من أجل كل عدد طبيعي } n, v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ومن جهة أخرى لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \alpha$ و $v_n > \alpha$ ومنه $v_n > u_n$ أي $v_n - u_n > 0$

$$\text{وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n: 0 < v_n - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(ج) \text{ استنتاج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ حسب النهايات بالمقارنة نستنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

تحديد نهاية كل من (v_n) و (u_n)

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة والمتتالية (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان فهما

متقاربتان ولهما نفس النهاية l .

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ والدالة f مستمرة على $[0; +\infty[$ إذن $l = f(l)$

$$\text{وحسب ماسبق } l = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

التمرين الخامس والعشرون:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$

(1) الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right]$ بـ: $h(x) = \sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل)

(أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

(2) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 8$.

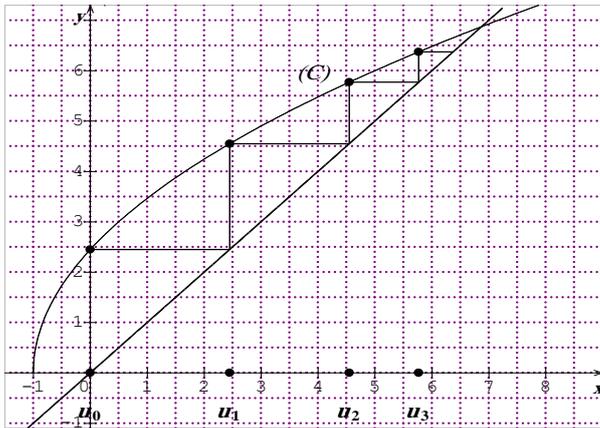
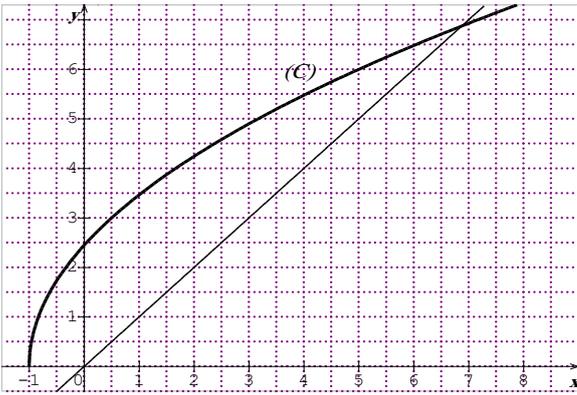
(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$$

(ج) استنتج اتجاه تغير (u_n) .

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



الحل:

(1) (أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

(ب) حسب تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

(2) (أ) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 8$.

لدينا $0 \leq u_0 < 8$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

لنفرض أن $0 \leq u_n < 8$ وعليه $0 \leq 6u_n < 48$ يكافئ

$$16 \leq 6u_n + 16 < 64 \text{ يكافئ } 4 \leq \sqrt{6u_n + 16} < 8 \text{ لأن دالة الجذر}$$

التربيعي متزايدة تماماً ومنه $0 \leq \sqrt{6u_n + 16} < 8$ أي $0 \leq u_{n+1} < 8$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $0 \leq u_n < 8$ وهذا حسب مبدأ الاستدلال

بالتراجع.

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6u_n+16} - u_n = \frac{(\sqrt{6u_n+16} - u_n)(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n+16 - u_n^2}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)} = \frac{-(u_n^2 - 6u_n - 16)}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-8)(u_n+2)}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)} = \frac{(8-u_n)(u_n+2)}{(\sqrt{6u_n+16} + u_n)}$$

(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 \leq u_n < 8$.

ومنه $8 - u_n > 0$ و $u_n + 2 > 0$ و $\sqrt{6u_n+16} + u_n > 0$ إذن $\frac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n} > 0$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$

$$(3) \text{ أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$ ومنه $8 - u_n > 0$.

$$8 - u_{n+1} = 8 - \sqrt{6u_n + 16} = \frac{(8 - \sqrt{6u_n + 16})(8 + \sqrt{6u_n + 16})}{(8 + \sqrt{6u_n + 16})} = \frac{64 - (6u_n + 16)}{(8 + \sqrt{6u_n + 16})}$$

$$8 - u_{n+1} = \frac{48 - 6u_n}{(8 + \sqrt{6u_n + 16})} = \frac{6(8 - u_n)}{(8 + \sqrt{6u_n + 16})} = \frac{6(8 - u_n)}{(8 + \sqrt{6u_n + 16})}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 0$ معناه $6u_n + 16 \geq 16$ ومنه $\sqrt{6u_n + 16} \geq 4$ يكافئ $8 + \sqrt{6u_n + 16} \geq 12$

$$\text{أي } \frac{1}{8 + \sqrt{6u_n + 16}} \leq \frac{1}{12} \text{ وبما أن } 8 - u_n > 0 \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ فإن } \frac{6(8 - u_n)}{8 + \sqrt{6u_n + 16}} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$$

$$0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n) : n \text{ عدد طبيعي}$$

$$(ب) \text{ تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ، $8 - u_n > 0$.

$$\text{لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{لدينا } 8 - u_0 = 8 \text{ و } 8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 8 \text{ أي } 8 - u_0 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^0 \text{ ومنه الخاصية صحيحة من أجل } n = 0$$

$$\text{نفرض أن } 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ ولنبرهن صحة الخاصية } 8 - u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ معناه } \frac{1}{2}(8 - u_n) \leq 8 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ أي } \frac{1}{2}(8 - u_n) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ وبما أنه من أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n) \text{ فإن } 8 - u_{n+1} \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$0 < 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ أي } 8 - u_n \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ يكون حسب النهايات بالمقارنة } \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 - u_n = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8$$

التمرين السادس والعشرون:

$$\text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بـ: } u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n}$$

$$1. \text{ أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 3u_n}(2 - u_n)$$

$$\text{ب - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 < u_n < 2$$

$$\text{ج - بين أن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.}$$

$$2. \text{ أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\text{ ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

ج - حدد نهاية المتتالية (u_n) .

الحل:

$$1. \text{ أ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2 - u_n)$$

ليكن n عددا طبيعيا

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2+6u_n-2-3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$$

ب - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_n < 2$.

لدينا $0 < u_0 < 1$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $0 < u_n < 2$ ونبرهن أن $0 < u_{n+1} < 2$.

$$\text{لدينا من الفرضية } u_n > 0 \text{ معناه } 2 + 3u_n^2 > 0 \text{ و } 1 + 3u_n > 0 \text{ ومنه } \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} > 0 \text{ أي } u_{n+1} > 0$$

$$\text{ولدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n}(2 - u_n), \text{ ومن الفرضية لدينا } u_n < 2 \text{ معناه } 2 - u_n > 0 \text{ و}$$

$$\frac{3u_n}{1+3u_n} > 0 \text{ لأن } u_n > 0 \text{ ومنه } \frac{3u_n}{1+3u_n}(2 - u_n) > 0 \text{ ومنه } 2 - u_{n+1} > 0 \text{ أي } u_{n+1} < 2.$$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 0 < u_n < 2$.

ج - تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة.

ليكن n عددا طبيعيا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} - u_n = \frac{2+3u_n^2 - u_n - 3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2-u_n}{1+3u_n}$$

$$\text{ولدينا } 0 < u_n < 2 \text{ معناه } 2 - u_n > 0 \text{ و } 1 + 3u_n > 0 \text{ ومنه } \frac{2-u_n}{1+3u_n} > 0 \text{ أي } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ وبالتالي المتتالية } (u_n)$$

متزايدة.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

$$2. \text{ أ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\text{لدينا } \frac{3u_n}{1+3u_n} = \frac{1+3u_n-1}{1+3u_n} = 1 - \frac{1}{1+3u_n}$$

$$\text{ولدينا } u_n < 2 \text{ معناه } 1 + 3u_n < 7 \text{ يكافئ } \frac{1}{1+3u_n} > \frac{1}{7} \text{ يكافئ } -\frac{1}{1+3u_n} < -\frac{1}{7} \text{ يكافئ } 1 - \frac{1}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\text{ ب - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$2 - u_0 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^0 \text{ أي } \left(\frac{6}{7}\right)^0 = 1 \text{ و } 2 - u_0 = 1$$

ليكن n عددا طبيعيا.

$$2 - u_{n+1} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} \text{ ونبرهن أن } 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\text{من الفرضية } 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n \text{ ولدينا } \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7} \text{ إذن } \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n) < \frac{6}{7} \left(\frac{6}{7}\right)^n \text{ أي } \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n) < \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} \text{ ومنه من أجل}$$

$$\text{كل عدد طبيعي } n, 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

ج - تحديد نهاية المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{6}{7}\right)^n \text{ و بما أن } -1 < \frac{6}{7} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - u_n = 0$$

$$\text{أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

التمرين السابع والعشرون:

$$f \text{ الدالة المعرفة على المجال }]-1; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} \text{ و } (C) \text{ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) .

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ كما يلي: } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ - باستعمال المنحنى (C) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ مثل على محور الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

ب - اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربا.

(4) أ - باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 1 \leq u_n \leq 3$.

ب - بين أن (u_n) متزايدة؛ هل هي متقاربة؟ برر.

$$(5) \text{ أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$$

$$\text{ب - استنتج أن } 3 - u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{ج - حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

الحل:

(1) دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ لدينا $x+3 > 0$ و $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة

$$(x-1)$$

من أجل كل $x \in]-1; 1[$ ، $f'(x) < 0$ ومن أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماماً على $[-1;1]$ و متزايدة تماماً على $[1;+\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 + 3 = 4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

(2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C).

(3) أ - تمثيل على محور الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .

ب - اعطاء تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

حسب الشكل المقابل يبدو أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة.

(4) أ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 1 \leq u_n \leq 3$.

لدينا $1 \leq u_0 \leq 3$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

نفرض أن $1 \leq u_n \leq 3$ ونبرهن أن $1 \leq u_{n+1} \leq 3$.

لدينا $1 \leq u_n \leq 3$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1;3]$ فإن

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(3) \quad \text{أي} \quad 2 \leq u_{n+1} \leq 3 \quad \text{وبالتالي} \quad 1 \leq u_{n+1} \leq 3.$$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي $n, 1 \leq u_n \leq 3$.

ب - تبيان أن (u_n) متزايدة؛

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} \geq u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ ومنه $u_1 \geq u_0$ أي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

ليكن n عدداً طبيعياً

نفرض أن $u_{n+1} \geq u_n$ ونبرهن صحة الخاصية $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \geq u_n$ والدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1;3]$ إذن $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ ولدينا $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ و

$$f(u_n) = u_{n+1} \quad \text{ومنه} \quad u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n, u_{n+1} \geq u_n$ أي المتتالية (u_n) متزايدة؛

المتتالية (u_n) متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3.

$$(5) \text{ أ - تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$$

$$3 - u_{n+1} = 3 - \frac{u_n^2 + 3}{u_n + 1} = \frac{3u_n + 3 - u_n^2 - 3}{u_n + 1} = \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 1} = \frac{u_n}{u_n + 1}(3 - u_n)$$

$$\frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 1}{u_n + 1} = 1 - \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{لدينا}$$

$$3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$$

$$\frac{u_n}{u_n+1} \leq \frac{3}{4} \text{ أي } 1 - \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{u_n+1} \leq -\frac{1}{4} \text{ يكافئ } \frac{1}{u_n+1} \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{ولدينا } u_n \leq 3 \text{ يعني } u_n + 1 \leq 4 \text{ يكافئ } \frac{1}{u_n+1} \geq \frac{1}{4} \text{ أي } \frac{u_n}{u_n+1} (3-u_n) \leq \frac{3}{4} (3-u_n) \text{ فإن } 3-u_n \geq 0$$

$$\text{ب - استنتاج أن } 3-u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

نستعمل البرهان بالتراجع

$$\text{لدينا } 3-u_0 = 2 \text{ و } 2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2 \text{ ومنه } 3-u_0 \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \text{ أي الخاصية محققة من أجل } n=0$$

$$\text{لنفرض أن } 3-u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ من أجل عدد طبيعي } n \text{ ونبرهن أن } 3-u_{n+1} \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{لدينا } 3-u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ معناه } \frac{3}{4} (3-u_n) \leq 2 \times \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ أي } \frac{3}{4} (3-u_n) \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{ولدينا حسب السؤال السابق من أجل كل عدد طبيعي } n, 3-u_{n+1} \leq \frac{3}{4} (3-u_n) \text{ ومنه } 3-u_{n+1} \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\text{اذن نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 3-u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{ج - تحديد } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ لدينا } 0 \leq 3-u_n \leq 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{وبما أن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ إذن حسب النهايات بالمقارنة } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3-u_n = 0 \text{ أي}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

تمارين مقترحةتمرين 01:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بالشكل: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$

1. احسب الحدود الخمس الأولى.
2. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 4$.
 - أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية.
 - ب - أوجد عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
 - ج - استنتج نهاية (v_n) ثم نهاية (u_n) .

تمرين 02:

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $n \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 2) \end{cases}$

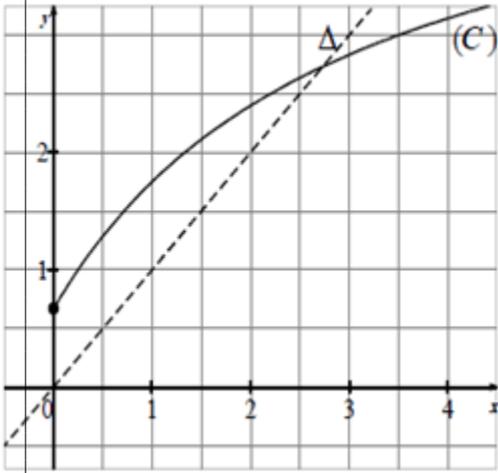
1. احسب u_1, u_2, u_3 .
 2. α عدد حقيقي، نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \alpha$.
 - أ - عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية.
 - ب - عبّر عن v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n .
 - ج - هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان؟
 - د - احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ والمجموع: $L_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- ما هي نهاية L_n عندما يؤول n إلى $+\infty$ ؟

تمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$

- (1) أ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على \mathbb{R} ، كما يلي: $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$
 - ب) باستعمال الرّسم السابق، مثّل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 .
 - ج) أعط تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.
- (2) أ) برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 4$.
 - ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
 - ج) هل (u_n) متقاربة؟ برّر إجابتك.
- (3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.
 - أ - عيّن قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
- (4) نضع $\alpha = -4$
 - أ) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
 - ب) تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .
 - ج) احسب بدلالة n المجموعين: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

تمرين 04:



في الشكل المقابل، (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$:-

$$f(x) = \frac{5x+2}{x+3} \text{ و } (\Delta) \text{ المستقيم ذو المعادلة } y = x$$

1. أ - ادرس اتجاه تغيّر الدالة على المجال $[0; +\infty[$.

ب - بيّن أنّه إذا كان $x \in [0; 3]$ فإنّ $f(x) \in [0; 3]$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

أ - أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n) .

3. أ - برهن بالتراجع، أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < u_{n+1} < 3$ ،

ب - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين 05:

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = 1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+u_n}$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2. برهن بالتراجع من أجل عدد طبيعي n ، أنّ: $0 < u_n < 2$.

3. أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنّها متقاربة، حدّد نهايتها.

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$.

أ - بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية، عيّن أساسها وحدّها الأول.

ب - أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج - تحقّق من نهاية u_n المحسوبة في السؤال 3.

د - احسب بدلالة n ، المجموع S_n ، حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

تمرين 06:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً حيث:
$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 30e \\ \ln(u_2) - \ln(u_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$$

حيث \ln اللوغاريتم النيبيري ذو الأساس e .

1. عيّن u_1 و q أساس (u_n) .

2. عبّر عن u_n بدلالة n .

3. أحسب بدلالة n ، المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

4. (v_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = \ln(u_{n+2}) + \ln(u_{n+1})$.

أ - اكتب v_n بدلالة n ، ثم بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية.

ب - عيّن العدد الطبيعي n ، بحيث: $v_0 + v_1 + \dots + v_n = 12 + 48\ln 3$.

تمرين 07:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بـ: $u_0 = \alpha$ حيث α عدد حقيقي

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n - \frac{3}{2}$.

1- عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نضع $\alpha = \frac{5}{2}$ ، برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$.

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية حسابية، بطلب تعيين أساسها، ثم عبّر عن v_n بدلالة n .

ب- نضع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ؛ احسب بدلالة n المجموع S_n .

ج- عيّن عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم احسب بدلالة n ، المجموع T_n ؛ حيث: $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

تمرين 08:

1- المتتالية (u_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1- احسب v_0 ، v_1 .

2- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية بطلب تعيين أساسها.

3- أ- بيّن أن: $S_n = u_n - 1$ علماً أن: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

ب- اكتب بدلالة n ، ثم احسب نهاية v_n .

ج- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$ ، وبيّن أن (u_n) متقاربة.

4- المتتالية (w_n) معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) ثابتة بطلب تعيين قيمتها.

ب- بيّن مرة ثانية أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$.

تمرين 09:

a عدد حقيقي موجب تماماً ويختلف عن 1 ولتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n : $u_{n+1} = au_n^2$ ونعرّف في \mathbb{N} المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = \frac{\ln u_n}{\ln a} + b$ ، حيث b عدد حقيقي

(1) جد قيمة b التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية، عيّن عندئذ حدها الأول وأساسها.

(2) استنتج بدلالة a و n الحد العام u_n .

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

- بين أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $p_n = a^{2^{n+1} - (n+2)}$

(4) ادرس حسب قيم a نهاية p_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

تمرين 10:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

ب- عيّن بدلالة n .

ج- بيّن أن (w_n) متتالية حسابية أساسها 5، ثم عيّن بدلالة n .

د - احسب بدلالة n ، المجموع S_n ، حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

هـ - عيّن بدلالة n .

و - بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

ي - استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 11:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}$.

1) أ - المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. دون حساب مثل على المستقيم $(O; \vec{i})$ الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 وذلك باستعمال المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ والمنحنى (C) الممثل للدالة العددية f

المعرفة على المجال $]-3; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$.

ب - أعط تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب ونهاية المتتالية (u_n) .

2) أ - أثبت أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، فإن: $0 < u_n < 2$.

ب - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة واحسب نهايتها .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

أ - أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. ثمّ تحقق من نتيجة السؤال 2 - ج .

تمرين 12:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335 \end{cases}$ ، حيث α عدد حقيقي .

1. عيّن العدد الحقيقي α الذي تكون من أجله المتتالية (u_n) ثابتة .

2. نضع فيما يلي: $\alpha = 2009$.

أ - أثبت، باستعمال البرهان بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 2010$.

ب - بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة .

ج - استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $v_n = u_n - 2010$.

أ - أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب - أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ عبارة u_n بدلالة n .

ج - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د - احسب، بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = v_0 + 6v_1 + 6^2v_2 + \dots + 6^n v_n$.

تمرين 13:

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 4$.

2- أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علّل إجابتك.

3- أ) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n : 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 14:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$$
 حيث n عدد طبيعي.

ولتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = u_n + n - 1$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

2) أ- اكتب v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- بين أن: $S_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ و $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

تمرين 15:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 3$ ؛

2) ادرس رتبة المتتالية (u_n) .

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$ ؛

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ ؛

5) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟