مسائل الدوال اللوغارتمية

بسم الله الرحمان الرحيم

أبنائي الطلبة يسرني أن أضع تحت تصرفكم هذه السلسلة الرائعة التي تحتوي على العديد من المسائل الرائعة حول الدوال الاسية وهي عبارة عن تمارين الدالة اللوغارتمية الواردة في البكالوريا الجزائرية

والتي ستحضرون بها اختبارات الفصل الأول وعليكم بحل البقية متى توفر لكم الوقت

أملي فيكم كبيرا ان تحققوا نتائج باهرة في اختباراتكم ثم بعدها نفكر في الفصل الثاني انتم الامل لي ولوالديكم فلا تخيبوا الظن

شكر وتحية لصاحب السلسلة واتمنى من الله العزيز الكريم ان لا يحرمه وان لا يحرمنا معه من الاجر فالدال على الخير كفاعله

هام جدا : ستنقسمون الى ثلاثة اصناف من الطلبة حسب اللون

الصنف الأول : يحل المسألة من البداية الى النهاية ويحدد الوقت المستغرق ثم ينظر الى الحل ليقيم نفسه تقييما موضوعيا وهذا الصنف المحبوب عندي والمرغوب فيه

الصنف الثاني : يحل المسألة وكلما وجد صعوبة في سؤال نظر الى حل السؤال ثم اكمل وهكذا وهذا الصنف لايمكنه معرفة مستواه الحقيقي ولا حجم الوقت المستغرق في الحل لذا فهو عندي ليس من المشكورين ولا من المذمومين ولا انصحه بفعل ذلك

الصنف الثالث : المسألة امامه والحل بجواره يقرأ السؤال ثم يقرا الحل معتقدا انه فهم الحل من خلال قراءته له وهذا خطأ وهو عندي مذموم مكروه ولا اشجع أي طالب ان يكون من هذا الصنف

بني كن من الصنف الأول الملون بالأخضر الرامز للأشياء المحبوبة والمفضلة

والله المستعان وبه التوفيق

شعبة : علوم تجريبية

التمرين [1][باك 2009][م1]

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} h(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغيّر الدالة h ثم أنجز جدول تغيّراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$ ، ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا .

بـ ـ باستخدام النتيجة $\lim_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أن $\lim_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ ـ إستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

د ـ أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند النقطة التي فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4) أرسم (C_f) .

التمرين [2][باك 2010][م1]

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ ـ أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ ـ استنتج أنه يمكن رسم (C_f) إنطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم (C) و (C_f) .

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$.

1) أحسب $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2} \\ >}} g(x)$ ثم بيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g على I ثم شكّل جدول تغيّراتها .

تقول المسألتين من فضلك اكملنا الى الأخير والحل هو الأخير

3) أ ـ أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2<\alpha<3$.

بـ ـ أرسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

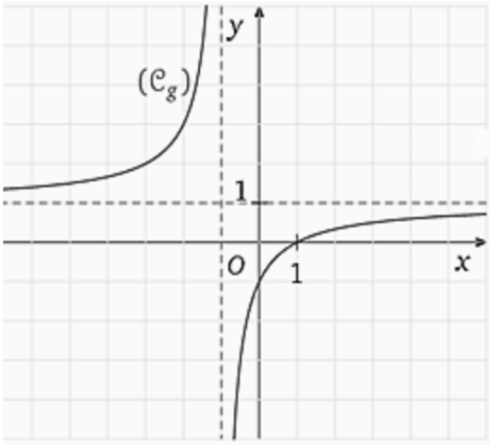
إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) .

4) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

التمرين [3][باك 2011][م1]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،



بقراءة بيانية :

أ ـ شكل جدول تغيرات الدالة g .

بـ ـ حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ ـ عيّن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

بـ ـ أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين [4][باك 2012][م2]

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

بـ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ ـ بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

6) أ ـ نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

بـ ـ بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

حل اولا وان عجزت حاول ثانيا وثالثا والحل هو آخر ما تنظر اليه

التمرين [5] [باك 2013][م2]

I) g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

بــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أـ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

بــ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جــ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أـ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بــ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أـ أحسب x_0 .

بــ أرسم المستقيمين المقاربين و المماس (T) ثمّ المنحنى (C_f) .

جــ عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

التمرين [6] [باك 2014][م1]

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا.

بــ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2) أـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

بــ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جــ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

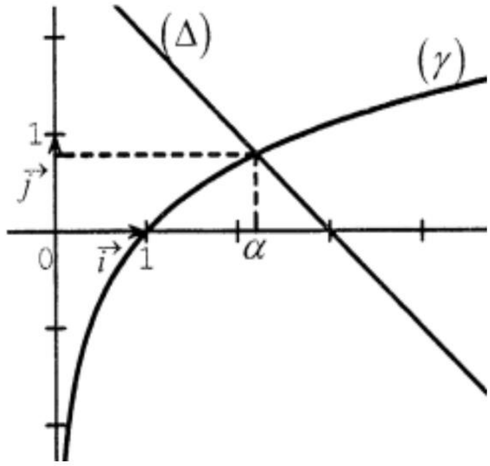
أـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

بــ أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) .

جــ ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين [7] [باك 2015] [م1]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.



I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

التمرين [8] [باك 2016] [الدورة الأولى] [م1]

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة g.

2) أحسب $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

4) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له.

ب- أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ).

5) أرسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C).

6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y=mx-m$ معادلة له.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

ب- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=mx-m$.

التمرين [9][باك 2016][الدورة الثانية][1م]

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسّر النتيجتين هندسيا .

ب- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

د- أرسم المنحنى (C_f) .(نقبل أن : $f(\alpha)=3,16$)

2) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f\left(-|x|\right)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة k زوجية .

ب- بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيّرات الدالة k)

جـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

التمرين [10][باك 2017][1م]

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2}{3}x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

5) أ- بيّن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=\dfrac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $\left(2-3|m|\right)x+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0$

لا تصاحب من يذهب بك الى رذائل الامور وان عثرت تركك

التمرين [11][باك 2017][الدورة الإستثنائية]

I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا .

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=\dfrac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$

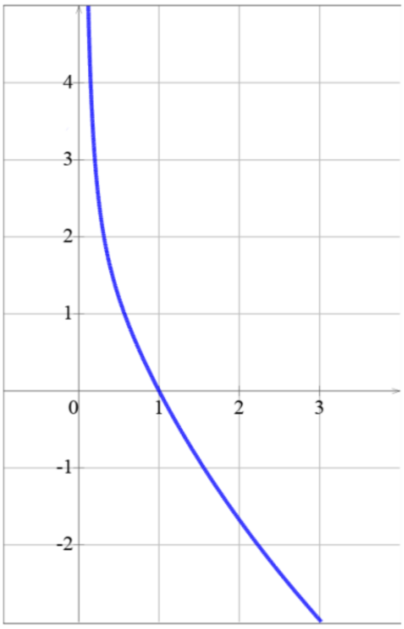
بـ ـ أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج إشارة $f\left(x\right)$.

4) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أنشئ (C_f) .

التمرين [12][باك 2018][2م]

I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$



(C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغيّر الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\dfrac{e^2}{e-1}\right)x-\dfrac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة

تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f\left(x\right)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

التمرين [13][باك 2019][1م]

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^{<}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^{>}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " في المعلم السابق.

أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

بـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) .

4) أرسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

5) g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$. دون حساب عبارة $g(x)$ حدد إتجاه تغيّر الدالة g .

اصبر وحاول ثم حاول ثم استعين بصديق يفهمك ولا تقرأ الحل الى بعد الانهاء

التمرين [14][باك 2020][م1]

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$. الوحدة $2cm$

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا ثم بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

بـ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

جـ ـ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

2) الدالة العدية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

أ ـ بيّن أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

بـ ـ أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

بـ ـ استنتج إتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له .

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) الدالة العددية h معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-|x|+1+\frac{\ln|x|}{x^2}$.

أ ـ بيّن أن h دالة زوجية .

بـ ـ إشرح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة إنطلاقا من (C_f) . (لا يُطلب إنشاء (C_h))

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(x^2+2x+\ln(x+1)\right)=-\infty$$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إتجاه تغير الدالة h:

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $x+1>0$ و $1+2(x+1)^2>0$ ومنه $h'(x)>0$

و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	-1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

حساب $h(0)$ و إستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x :

$$h(0)=0^2+2\times0+\ln(0+1)=0$$

- إشارة $h(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\ln(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، نبرهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $t=\ln u$ فيكون $u=e^t$ و منه : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)}=0$.

جـ- إستنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$ حسب السؤال (بـ)

د- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

التفسير البياني : المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-1)$.

$f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و بالتالي إشارة $f(x)-(x-1)$ من إشارة $-\ln(x+1)$ لأن $x+1>0$.

x	-1 0 $+\infty$
$f(x)-(x-$	$+$ 0 $-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ) (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$ (C_f) تحت (Δ)

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)-1\times\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\left(\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

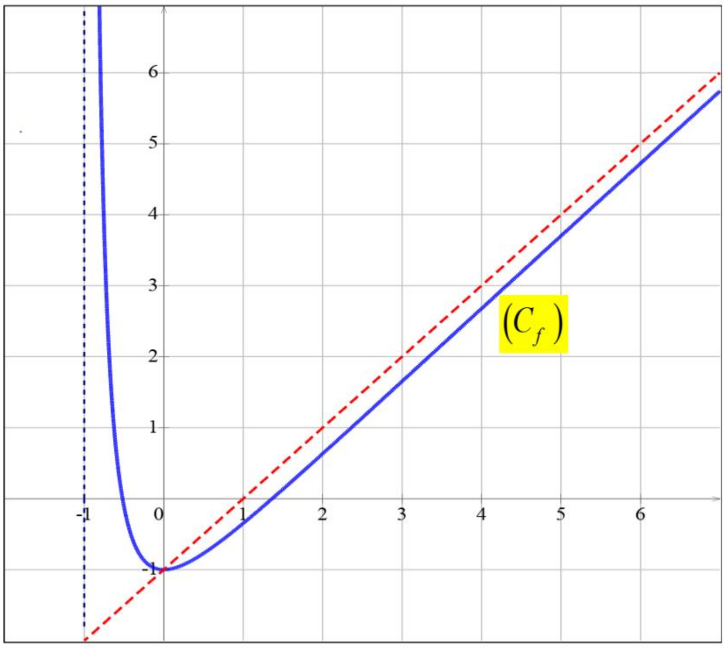
3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

معناه لنثبت أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا محصورا بين $3,3$ و $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]-1;+\infty[$ و بالتالي فهي مستمرة على $[3,3;3,4]$ كون $[3,3;3,4]\subset]-1;+\infty[$.

و لدينا $\begin{cases}f(3,3)\approx 1,96\\ f(3,4)\approx 2,06\end{cases}$ و بالتالي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا في المجال $[3,3;3,4]$.

4) الرسم :



5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

$$S=\int_0^1\left[(x-1)-f(x)\right]dx=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

حل مقترح للتمرين «2» باك 2010

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln(2x-1)\right)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(1+\ln(2x-1)\right)=-\infty$.

2) تبيان أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f قابلة للإشتقاق على I ، و من أجل كل x من I ، $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$

لدينا :من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

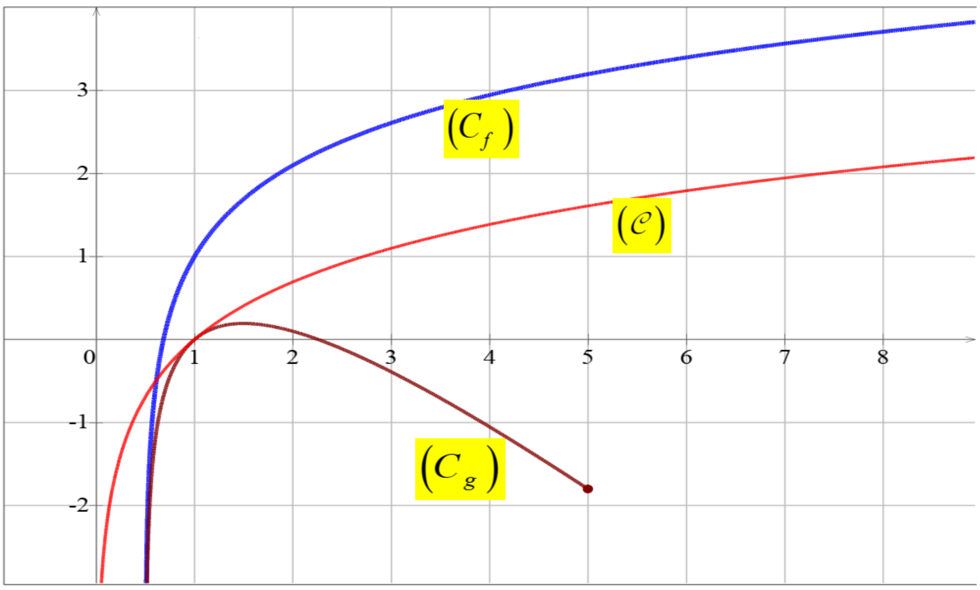
فاصلة هذه النقطة هي حل للمعادلة $f'(x)=1$ في I .

$f'(x)=1$ تكافئ $\dfrac{2}{2x-1}=1$ تكافئ $2=2x-1$ أي $x=\dfrac{3}{2}$.

4) أ ـ من أجل كل x من I : $f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=1+\ln2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ، و منه : $a=-\dfrac{1}{2}$ و $b=1+\ln2$.

بـ ـ لدينا : $f(x)=h(x+a)+b$ حيث : $h(x)=\ln x$ و منه (C_f) هو صورة $(\mathcal{C})$ منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$ أي $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln2\end{pmatrix}$.

الرسم :



II) g الدالة العددية المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}\left(1-x+\ln(2x-1)\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left[\dfrac{1-x}{2x-1}+\dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right]=-\infty$ (تذكَر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g على I :

الدالة g قابلة للإشتقاق على I ، و $g'(x)=-1+\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{-2x+3}{2x-1}$

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $2x-1>0$ و بالتالي إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$.

إشارة $g'(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

3) أ ـ لدينا : $g(1)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $\begin{cases} g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0{,}19 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α .

التحقق أن $2<\alpha<3$:

لدينا : $\begin{cases} g(2)\approx 0{,}09 \\ g(3)\approx -0{,}39 \end{cases}$ أي : $g(2)\times g(3)<0$ و منه $2<\alpha<3$.

ب ـ رسم المنحنى (C_g) : أنظر الشكل السابق .

4) إشارة $g(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-x=g(x)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$.

إذن : من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]\alpha;+\infty\right[$ ، يكون (C_f) واقعا أسفل (d) .

من أجل $x\in\left]1;\alpha\right[$ ، يكون (C_f) واقعا أعلى من (d) .

(C_f) يقطع (d) في النقطتين $A(1;1)$ و $B(\alpha;\alpha)$.

5) الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1;\alpha\right[$ و منه : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]f(1);f(\alpha)\right[$.

و لدينا : $f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$.

إذن : من أجل كل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن : $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

1) تعيين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

لدينا : $u_n=f\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1+\ln\left[2\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)-1\right]=1+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

و منه : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ يعني $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln 3^2-\ln 2^3=\ln 9-\ln 8=\ln\dfrac{9}{8}$ أي : $n=8$.

2) حساب ، بدلالة n ، المجموع S_n بحيث : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$.

لدينا : من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ، $u_n=1+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

و منه : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+\ln\left(\dfrac{2}{1}\right)+1+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\ldots+1+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

أي : $S_n=(1+1+\ldots+1)+\ln\left(\dfrac{2}{1}\right)+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=n+\ln\left(\dfrac{2\times 3\times\ldots\times n\times(n+1)}{1\times 2\times\ldots\times n}\right)=n+\ln(n+1)$

حل مقترح للتمرين «3» باك 2011

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

أ ـ جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$

ب ـ حل المتراجحة $g(x)>0$ بيانيا :

$g(x)>0$ تكافئ $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

جـ ـ تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

$0<g(x)<1$ تكافئ $x\in\left]1;+\infty\right[$.

II) الدالة f معرفة على المجال $\left]1;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=0\end{cases}$.

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) .

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]1;+\infty\right[$ يكون : $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]1;+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]1;+\infty\right[$:

$$g'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب ـ حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]1;+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]1;+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$$

و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]1;+\infty\right[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]1;+\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	||	$-\infty \nearrow 1$

3) أ ـ باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $\left]1;+\infty\right[$.

لدينا حسب الجزء I) السؤال جـ : من أجل كل $x\in\left]1;+\infty\right[$ ، فإن $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$ و منه $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$.

بـ ـ α عدد حقيقي .

تبيان أن الدالة h بحيث $h(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $\left]\alpha;+\infty\right[$.

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $\left]\alpha;+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]\alpha;+\infty\right[$:

$$h'(x)=1\times\ln(x-\alpha)+\frac{1}{x-\alpha}\times(x-\alpha)-1=\ln(x-\alpha)$$

جـ ـ التحقق :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]1;+\infty\right[$ ، $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=\dfrac{x+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]1;+\infty\right[$:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]1;+\infty\right[$ ، $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$

و بالتالي دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]1;+\infty\right[$ من الشكل :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+\left[(x-1)\ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

1) أ ـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\left[x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}(x+5)=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty\end{cases}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}f(x)=$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

بـ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=0\end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$:

$$f'(x)=1+6\left(\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right)=1-\frac{6}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1-\frac{6}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $\dfrac{x}{x-1}>0$ ومنه $x(x-1)>0$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ و منه :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-2]$ و متناقصة على المجال $[-2;0[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6\ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

بـ ـ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-(x+5)=6\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $x>x-1$ ومنه $\dfrac{x}{x-1}<1$ و بالتالي $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)<0$.

إذن نستنتج أن (C_f) يقع تحت (Δ) .

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و $-1.1<\beta<-1$.

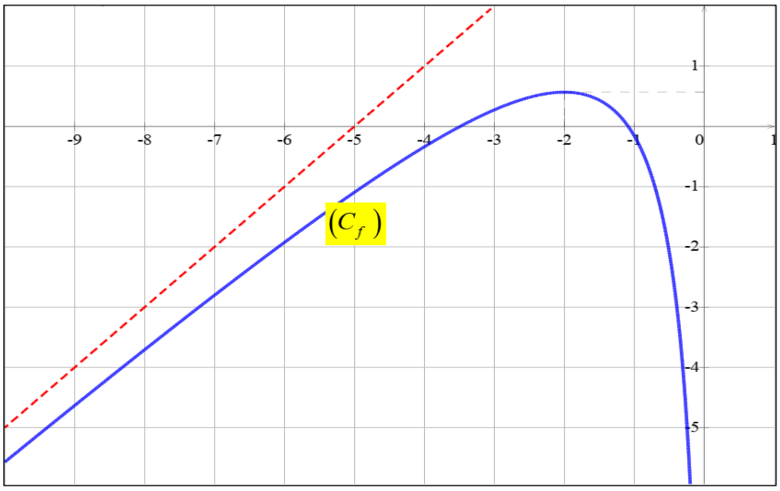
• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$ و $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2[$ و $\begin{cases}f(-3.4)\approx 0,05\\ f(-3.5)\approx -0,01\end{cases}$

أي $f(-3,4)\times f(-3,5)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$ و يحقق $f(\alpha)=0$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-2;0[$ و $]-1{,}1;-1[\subset]-2;0[$ و $\begin{cases} f(-1.1)\approx 0{,}02 \\ f(-1)\approx -0{,}16 \end{cases}$

أي $f(-1{,}1)\times f(-1)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي β حيث $-1.1<\beta<-1$ و يحقق $f(\beta)=0$.

5) الرسم :



6) أ ـ لدينا : $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

تبيان أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

يمكن التحقق أن إحداثيات كلا من النقطتين A و B تحقق المعادلة المعطاة .

$$y_A=\frac{1}{2}x_A+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=3+6\ln\frac{3}{4} \quad ، \quad y_B=\frac{1}{2}x_B+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

(أو يمكن كتابة معادلة للمستقيم (AB) و الحصول على المعادلة المعطاة)

بـ ـ تبيان أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

لدينا : معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{1}{2}$ و بالتالي نحل في المجال $]-\infty;0[$ المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$ تكافئ $x^2-x-12=0$.

المعادلة $f'(x)=\frac{1}{2}$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حل و هو $x_0=-3$.

إذن : المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;y_0)$ ، مع $y_0=f(-3)=2+6\ln\frac{3}{4}$.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$.

تبيان أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و من أجل كل $x\in]-\infty;0[$:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6x}{x(x-1)}-\frac{6}{1-x}=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{6}{x-1}+\frac{6}{x-1}=f(x)$$

و منه الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g:

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x \to -1^+}\left[x^2+2x+4-2\ln(x+1)\right]=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x \to -1^+}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}(x+1)\left[\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}-2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}\right)=+\infty\end{cases}$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة x ، لأنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ فإن: $x+1>0$ و $x+2>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $]-1;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) من جدول التغيرات: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ و بالتالي نستنتج أنه من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

1) أ. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1^+}\left[x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]=\lim\limits_{x \to -1^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[x(x+1)-1+2\ln(x+1)\right]=-\infty$.

التفسير البياني: المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

بـ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$f(x)=1-\dfrac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1\times(1-2\ln(x+1))}{(x+1)^2}=1-\dfrac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2+3-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$$

بـ- دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

لدينا: من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و بالتالي $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ-تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x)=-\infty\end{cases}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-1;+\infty[$ حلا وحيدا α.

التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

لدينا : $]0;0,5[\subset]-1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(0)=-1 \\ f(0.5)\approx 0,37\end{cases}$ أي $f(0)\times f(0,5)<0$ و منه $0<\alpha<0,5$.

3) أ-لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ و منه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا : $f(x)-x=\dfrac{-1+2\ln(x+1)}{x+1}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $-1+2\ln(x+1)$.

x	-1	$-1+\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-1+\sqrt{e};-1+\sqrt{e})$	(C_f) فوق (Δ)

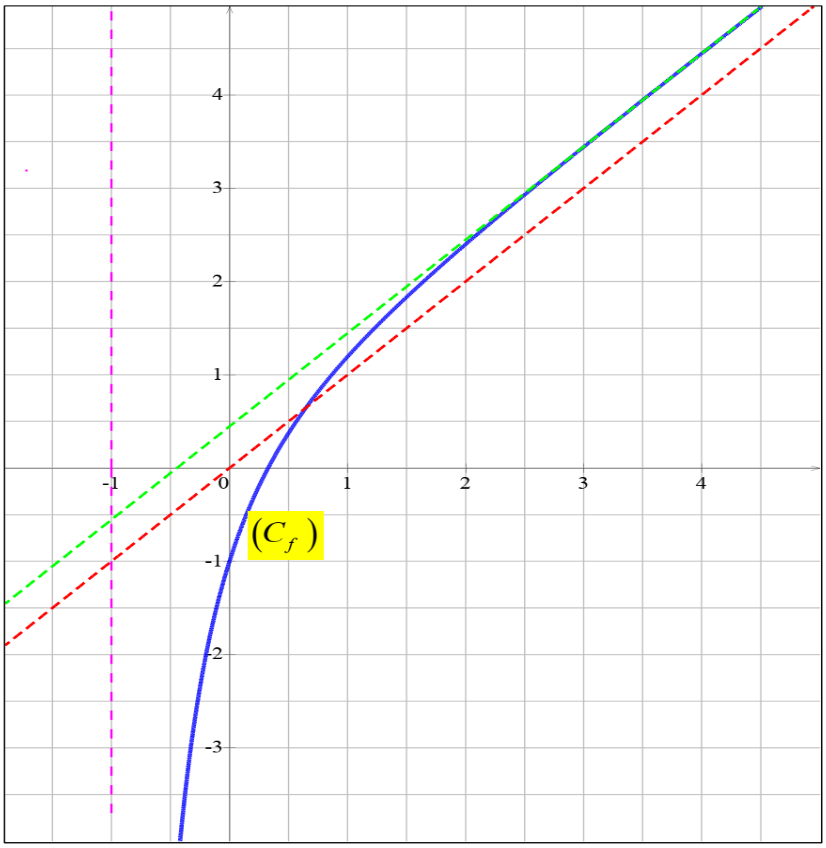
4) المستقيم (T) ذا المعادلة $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ-حساب x_0:

لدينا :

$f'(x_0)=1$ تكافئ $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $g(x_0)=(x_0+1)^2$ تكافئ $2\ln(x_0+1)=3$ تكافئ $x_0=-1+\sqrt{e^3}$

ب-الرسم :



جـ-بيانيا ، حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذن : تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا كان $0<m<\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

1) أـ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=-\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\ln x}{x}\right)=1$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ دراسة إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، و من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]0;e]$ و متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$1+2e^{-1}$	↘	$+\infty$

2) أـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$.

لدينا : $f(x)-y=1+\frac{2\ln x}{x}-1=\frac{2\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ لأن $\frac{2}{x}>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	||	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

بـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-1$.

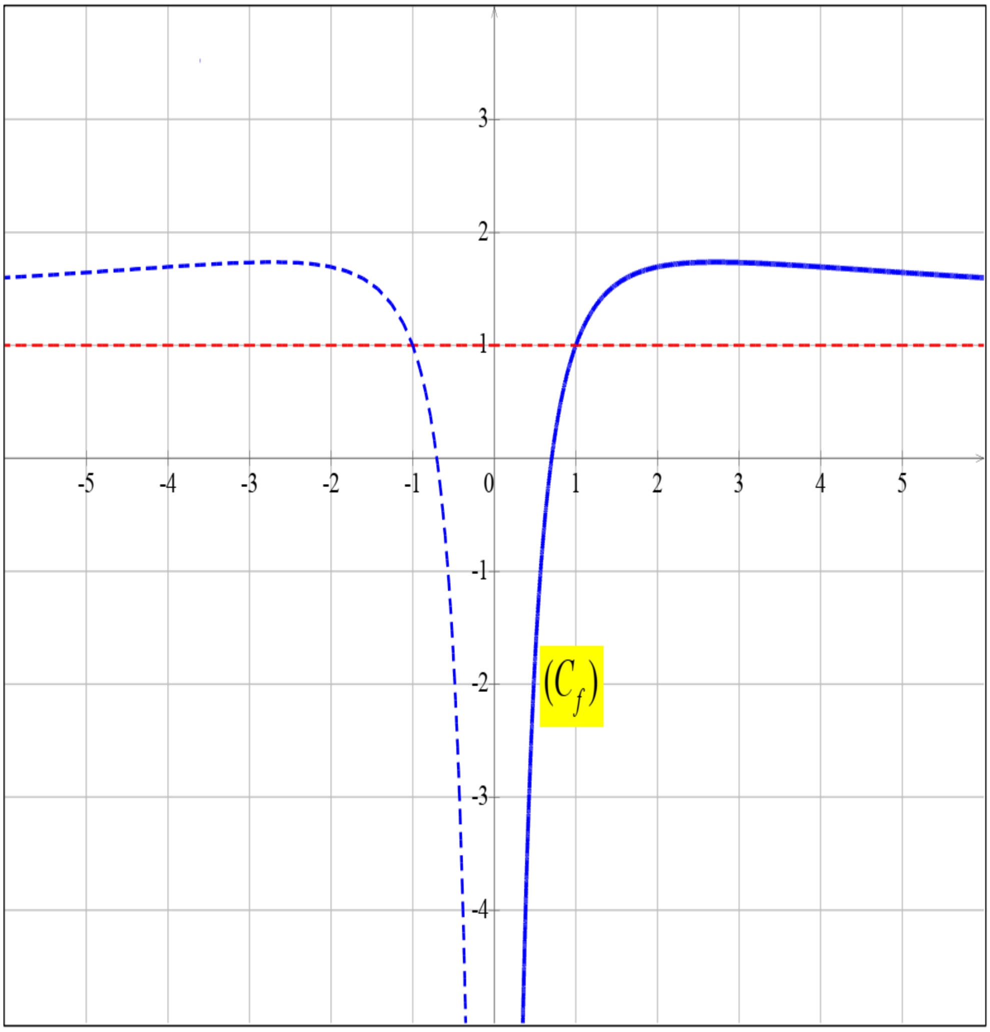
جـ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و $]e^{-0,4};e^{-0,3}[\subset]0;1]$ و $\begin{cases} f\left(e^{-0,4}\right)\approx -0,2\\ f\left(e^{-0,3}\right)\approx 0,2\end{cases}$

أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,3}\right)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α بحيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

3) الرسم :



4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

أ ـ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم :

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

نستنتج أن الدالة h زوجية و تمثيلها البياني (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

بـ ـ كيفية إنشاء المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f) :

من أجل $x\in\,]0;+\infty[$ ، يكون $f(x)=h(x)$ و بالتالي (C_h) منطبق على (C_f) .

من أجل $x\in\,]-\infty;0[$ ، (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لكون الدالة h زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $2\ln|x|=(m-1)|x|$ تكافئ $1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}=m$ أي $h(x)=m$

و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) و المستقيم ذي المعادلة $y=m$.

لما $m\in\,]-\infty;0]$ المعادلة تقبل حلين .

لما $m\in\left]0;1+\dfrac{2}{e}\right[$ المعادلة تقبل أربعة حلول .

لما $m=1+\dfrac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلين (مضاعفين).

لما $m\in\left]1+\dfrac{2}{e};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حلول .

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية :

تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]0;+\infty[$:

من أجل $x \in]0;\alpha[$ ، (γ) يقع تحت (Δ) .

من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، (γ) يقع فوق (Δ) .

2) إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) التحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

لدينا : $\begin{cases} g(2,2)\approx -0,011 \\ g(2,3)\approx 0,13 \end{cases}$ و منه $g(2,2)\times g(2,3)<0$ أي $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x-2)=-\infty\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)\right]=+\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-2)=+\infty\end{cases}$

2) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-2+x-1}{x^2}=\frac{-3+x+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تبيان أن : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha+3$ و بالتالي : $f(\alpha)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha+1)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2,2<\alpha<2,3$ يكافئ : $\begin{cases}\frac{1}{2,3}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{2,3} \\ 1,2<\alpha-1<1,3 \\ (1,2)^2<(\alpha-1)^2<(1,3)^2\end{cases}$ و منه $\frac{(1,2)^2}{2,3}<\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}<\frac{(1,3)^2}{2,2}$

و منه : $-\frac{(1,2)^2}{2,3}<f(\alpha)<-\frac{(1,3)^2}{2,2}$ أي : $-0,76<f(\alpha)<-0,62$.

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

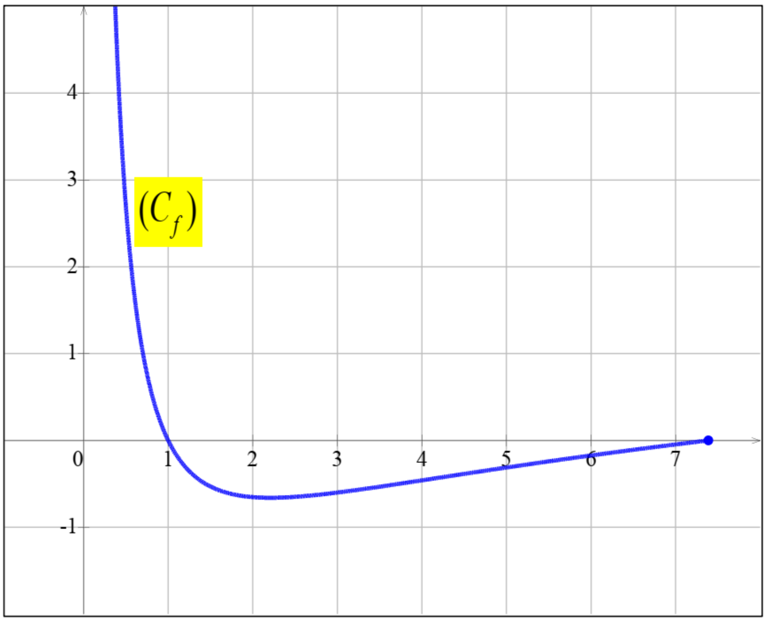
لندرس إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=\frac{1}{x}(x-1)(-2+\ln x)$ ومنه إشارة $f(x)$ من إشارة $(x-1)(-2+\ln x)$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه (C_f) فوق حامل محور الفواصل على كل من المجالين $]e^2;+\infty[$ و $]0;1[$ وتحته على المجال $]1;e^2[$ ، و يتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

الرسم :



III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) تبيان أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ يعني : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ تكافئ : $x=1$ أو $x=e^2$ ، و منه منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^2 .

2) تبيان أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

نضع : $u(x)=x\ln x-x$

الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $u'(x)=\ln x+\frac{1}{x}\times x-1=\ln x$.

و منه الدالة u هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

إستنتاج عبارة الدالة F:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\left(\ln t-2-\frac{\ln t}{t}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[t\ln t-t-2t-\frac{1}{2}(\ln t)^2-2\ln t\right]_1^x=(2+x)\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2-3x$$

I) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$.

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x^2-1$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة على المجال $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

2) $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]0;+\infty[$ هي $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بالتالي من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+x-1$.

1) حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+x-1\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+1=\dfrac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$ ، إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1 :

لدينا : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(T): y=2x-2$.

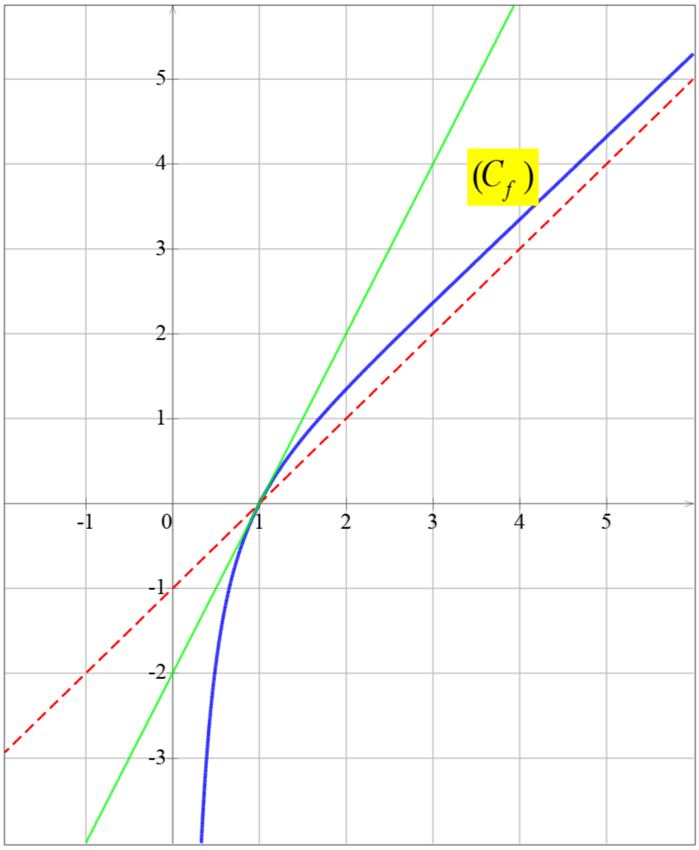
4) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و منه المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y=x-1$ معادلة له .

بـ ـ دراسة الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) :

لدينا $f(x)-y=\dfrac{\ln x}{x}$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

5) الرسم :



6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له.

أ ـ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A\,(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

لدينا $y_A = mx_A - m$ أي $0 = m - m$ و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي m ، $A \in (\Delta_m)$

بـ ـ المناقشة البيانية :

لدينا : (Δ_m) معامل توجيهه m و يشمل النقطة $A\,(1;0)$.

إذا كان $m \in]-\infty;1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .

إذا كان $m \in]1;2[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان $m = 2$ فإن المعادلة تقبل حل (مضاعف) و هو 1.

إذا كان $m \in]2;+\infty[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

7) أ ـ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$ من الشكل : $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$. (لاحظ أن $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ من الشكل $u' \times u$)

بـ ـ حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

$$I_n = \int_1^n \left[f(x) - (x-1)\right]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^n = \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

جـ ـ تعيين أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإن : $I_n > 2$.

$I_n > 2$ معناه $(\ln n)^2 > 4$ أي $\ln n > 2$ أو $\ln n < -2$ (مرفوض) و منه $n > e^2$ و عليه : أصغر قيمة لـ n_0 هي $n_0 = 8$.

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$.

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right]=-\infty$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $g'(x)=e+\dfrac{2}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $g'(x)>0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) تبيان أنه للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و $\begin{cases} g(-0,34)\approx-0,03\\ g(-0,33)\approx 0,02\end{cases}$ أي $g(-0,34)\times g(-0,33)<0$ و منه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إشارة $g(x)$:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

1) أ ـ تبيان أن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\dfrac{e}{x+1}\right)=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}\times\ln(x+1)\right]=-\infty\end{cases}$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\left[e+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (حامل محور الفواصل) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1)^2-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

جـ ـ دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$:

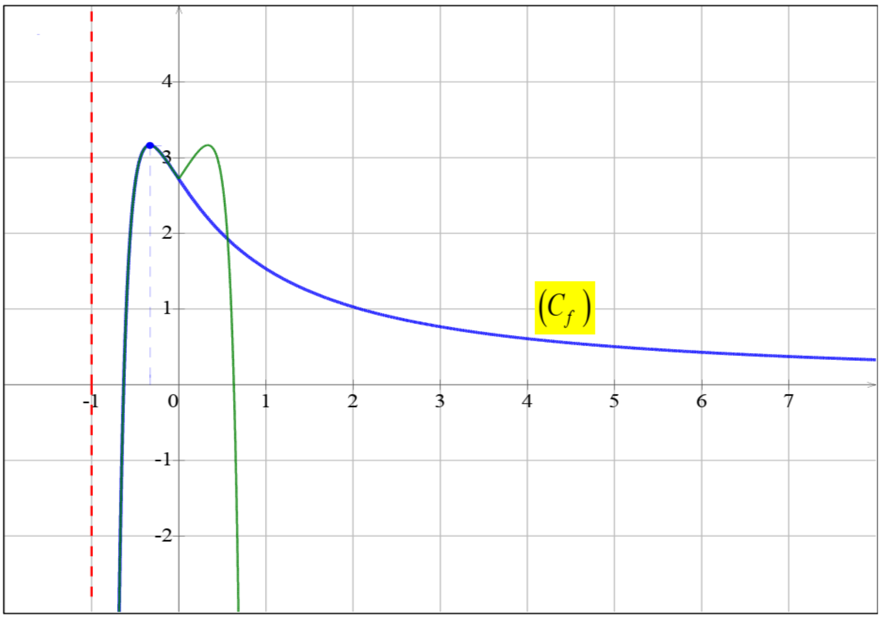
x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$ و متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

د ـ الرسم :



2) أ ـ تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

نضع : $h(x)=\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ ، الدالة h قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$:

$$h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}\left[1+\ln(x+1)\right]+\left(\frac{1}{x+1}\right)\times\left(\frac{-1}{x+1}\right)=\frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

بـ ـ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]dx=\left[e\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]\right]_0^1=\frac{1+(2e-1)\ln 2}{2}$$

3) k الدالة العددية المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$

أ ـ تبيان أن الدالة k زوجية :

المجال $]-1;1[$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل كل $x\in]-1;1[$: $k(-x)=f(-|-x|)=f(-|x|)=k(x)$.

و بالتالي الدالة k زوجية .

بـ ـ شرح كيفية إنشاء المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) :

لدينا : $k(x)=f(-|x|)=\begin{cases}f(x);x\in]-1;0]\\ f(-x);x\in[0;1[\end{cases}$

إذن : من أجل $x\in]-1;0]$ ، (C_k) ينطبق على (C_f) و نتم الرسم باستخدام التناظر بالنسبة لمحور التراتيب لكون k زوجية .

الرسم : أنظر الشكل .

جـ ـ المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $k(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_k) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$.

إذا كان $m>f(\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

إذا كان $m=f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين (مضاعفين) مختلفين في الإشارة .

إذا كان $e<m<f(\alpha)$ فإن المعادلة تقبل 4 حلول ، حلان سالبان و حلان موجبان .

إذا كان $m=e$ فإن المعادلة تقبل 3 حلول ، حل سالب و آخر موجب و الثالث معدوم .

إذا كان $m<e$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

f الدالة المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) تبيان أن الدالة f فردية :

المجموعة D متناظرة بالنسبة إلى الصفر (من أجل كل $x\in D$ ، $-x\in D$)

و من أجل كل $x\in D$ ، $f(-x)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-f(x)$

التفسير البياني : مبدأ المعلم O مركز تناظر بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2) حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب معادلتيهما : $x=1$ و $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

3) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على D ، من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$f'(x)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2\left(x^2-1\right)+6}{3\left(x^2-1\right)}=\frac{2x^2+4}{3\left(x^2-1\right)}=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا : من أجل كل x من D ، $x^2-1>0$ و منه $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على D .

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ -1		1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,8;1,9[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases}f(1,9)\approx 0,10\\ f(1,8)\approx -0,05\end{cases}$

أي $f(1,8)\times f(1,9)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

5) لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{2}{3}x\right]=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$

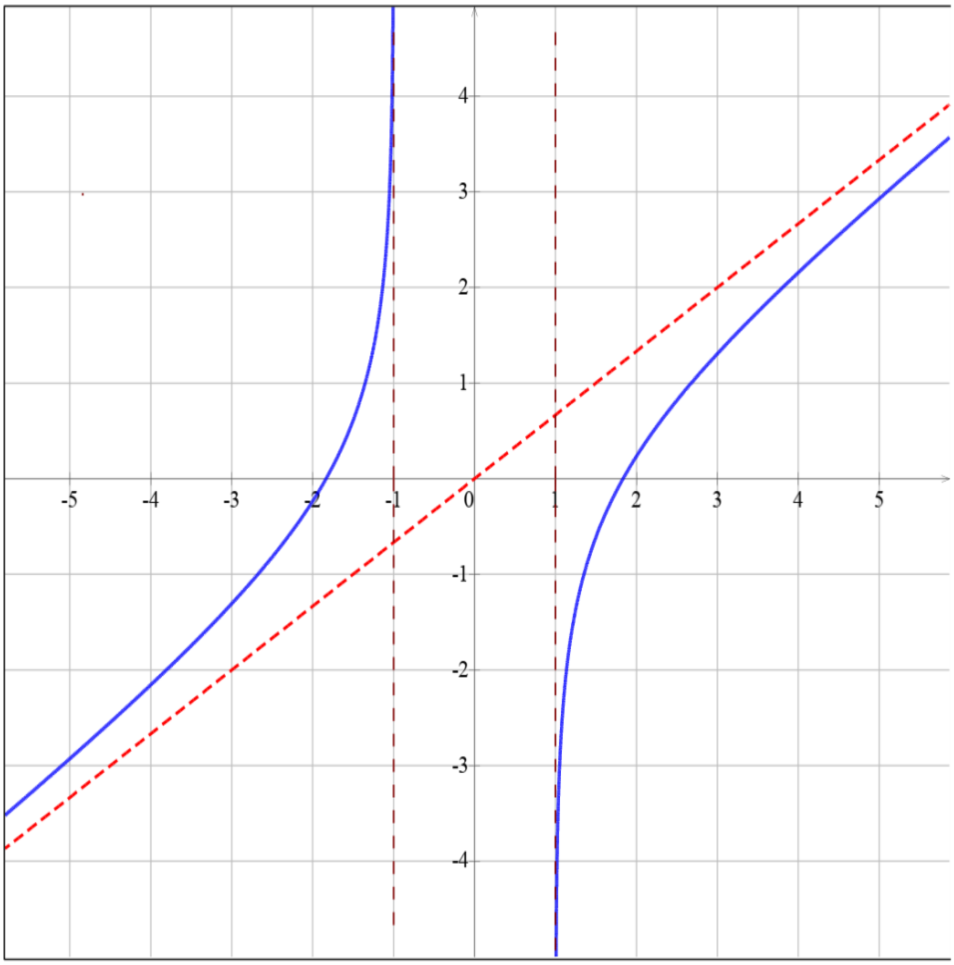
و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

لدينا : $f(x)-y=f(x)-\frac{2}{3}x=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

x	$-\infty$ $\quad$ -1		1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$		$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

6) الرسم :



7) المناقشة البيانية :

$$\left(2-3|m|\right)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \text{ تكافئ } 2x-3|m|x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \text{ تكافئ } \frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=|m|x$$

أي $f(x)=|m|x$ و منه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|x$.

(مناقشة دورانية)

إذا كان $m\in\left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ أي $|m|\in\left[0;\frac{2}{3}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين .

إذا كان $m\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $|m|\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.

1) حساب النهايات :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right)\left[1+2\ln(2x+1)\right]\right]=-\infty$$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+2\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}\right]=0$

التفسير : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{4}{2x+1}\times(2x+1)^2-4(2x+1)\left[1+2\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{(2x+1)\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^4}=\frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$ لأن : $(2x+1)^3>0$ من أجل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ و متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x)=0$:

$f(x)=0$ تكافئ $1+2\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2}$

إشارة $f(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-1\right)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4) تبيان المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f''(x)=\frac{\frac{-8\times2}{2x+1}\times(2x+1)^3-3\times2(2x+1)^2\times\left[-8\ln(2x+1)\right]}{(2x+1)^6}=\frac{16\left(-1+3\ln(2x+1)\right)}{(2x+1)^4}$$

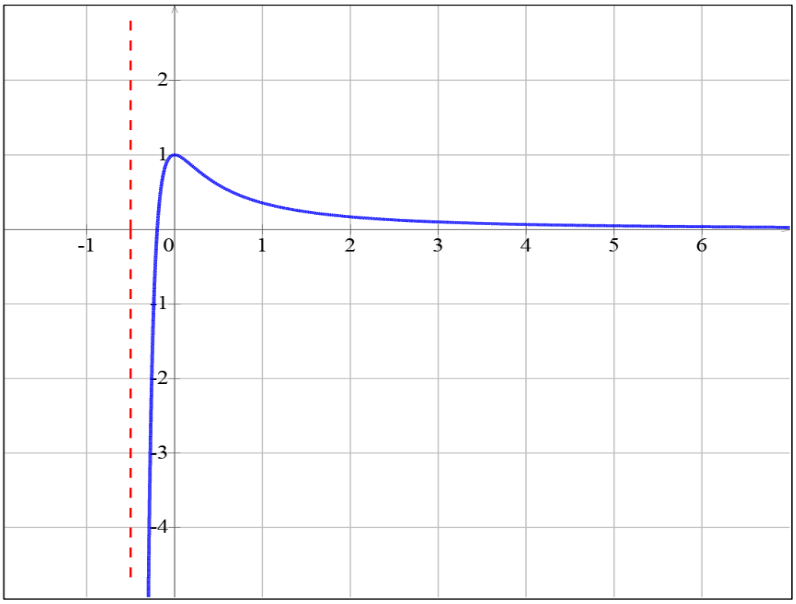
$f''(x)=0$ تكافئ $-1+3\ln(2x+1)=0$ تكافئ $\ln(2x+1)=\frac{1}{3}$ تكافئ $2x+1=e^{\frac{1}{3}}$ أي : $x=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$

إشارة $f''(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثييها : $\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

الرسم :



II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=2\left[-x+\ln(2x+1)\right]$.

1) أ ـ دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$g'(x)=2\left[-1+\frac{2}{2x+1}\right]=2\left[\frac{-2x+1}{2x+1}\right]$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ب ـ تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $1,2<\alpha<1,3$.

لدينا : $g(0)=0$.

الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\supset]1,2;1,3[$ و $\begin{cases} g(1,2)\approx 0,05 \\ g(1,3)\approx -0,04 \end{cases}$

أي $g(1,2)\times g(1,3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

جـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$.

إثبات أن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{2x+1}{(2x+1)^2}=\frac{g(x)}{(2x+1)^2}$.

و لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $g(x)<0$ و بالتالي $f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $f(x)>0$.

إذن : من أجل كل $x\geq\frac{3}{2}$ ، $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$.

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$:

لدينا : $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx > \int_n^{n+1} f(x)dx > 0$ و منه $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

و لدينا $\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$ و منه $0<I_n<\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$.

- حساب $g(1)$: $g(1)=1-(\ln 1)^2-\ln 1-1=0$
- إشارة $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=-\infty$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(1+x\ln x)=1\end{cases}$ (تذكر أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} x\ln x=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

- تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)=0$ ، (تذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

2) أ ـ تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x)-(\ln x+1)(1+x\ln x)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-(1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1}{(1+x\ln x)^2}$$

و منه : من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ ـ إتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) تبيان أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل :

أولا : تعيين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

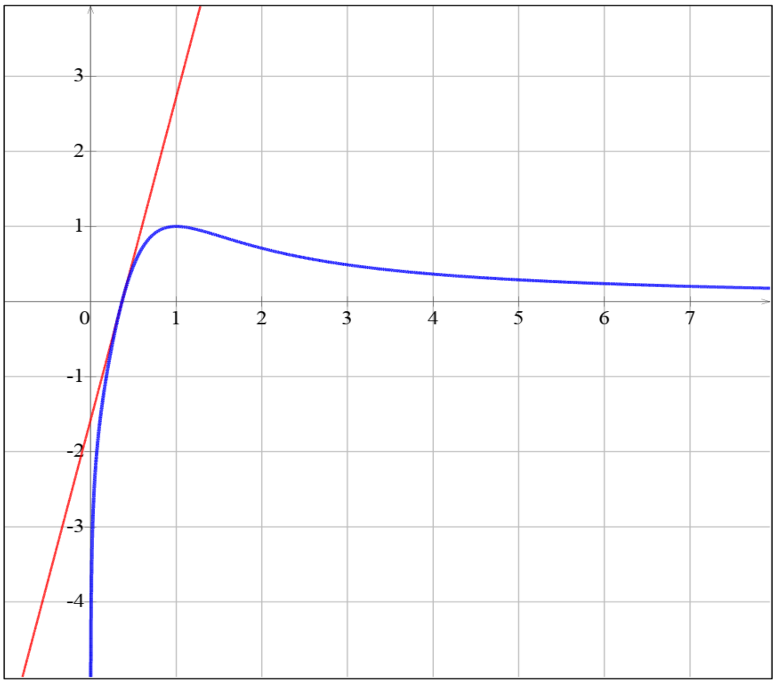
نحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}=0$ تكافئ $1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=-1$ أي : $x=\frac{1}{e}$.

معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$:

لدينا : $(T): y=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)+f\left(\frac{1}{e}\right)$ و منه $(T): y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$.

الرسم :



4) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

$(e-1)f(x)=e^2x-me$ تكافئ $f(x)=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$

حلول المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y=\frac{e^2}{e-1}x-\frac{e}{e-1}m$.

من البيان : المعادلة تقبل حلين متمايزين لما $-\frac{e}{e-1}m<-\frac{e}{e-1}$ أي $m>1$.

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

لدينا : $I_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n\left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)dx=\left[\ln(1+x\ln x)\right]_1^n=\ln(1+n\ln n)$.(لاحظ أن f من الشكل : $\frac{u'}{u}$)

2) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) :

ندرس إشارة الفرق : $I_{n+1}-I_n$

لدينا : $I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_1^n f(x)dx+\int_n^{n+1}f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1}f(x)dx$

و من أجل $n>1$: $\int_n^{n+1}f(x)dx>0$ و بالتالي المتتالية (I_n) متزايدة تماما .

حل مقترح للتمرين 13 باك 2019

f الدالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\ln x$.

1) أ ـ حساب النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$.

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$

التفسير البياني : المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

بـ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x-2}+\ln x\right]=+\infty$.

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{x(x-2)^2}=\frac{-x+x^2-4x+4}{x(x-2)^2}=\frac{x^2-5x+4}{x(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-5x+4 لكون $x(x-2)^2>0$ من أجل كل x من $]0;2[\cup]2;+\infty[$.

- إشارة $f'(x)$:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

و منه : الدالة f متزايدة على المجالين $[4;+\infty[$ و $]0;1]$ و متناقصة على المجالين $]2;4]$ و $[1;2[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 4$	↗	$+\infty$

3) أ ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=0$.

التفسير : المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

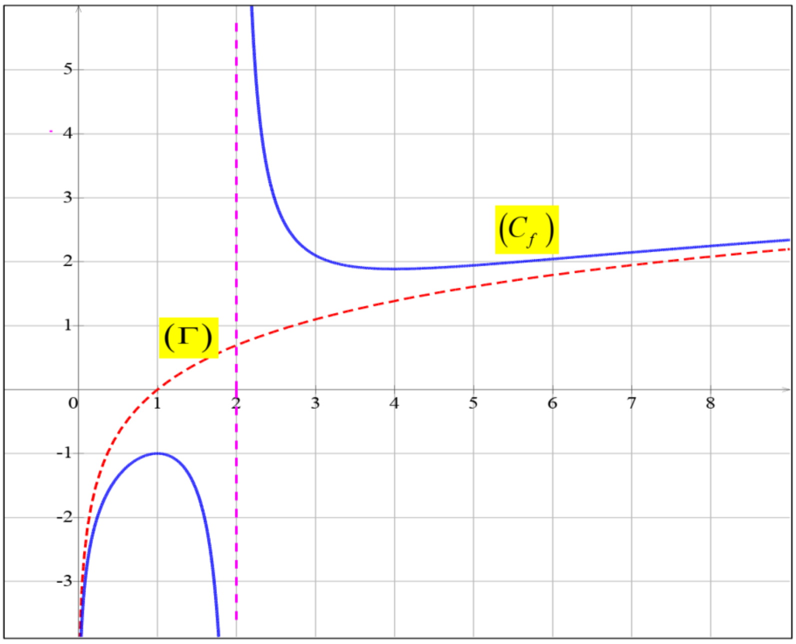
بـ ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

لدينا : $f(x)-\ln x=\dfrac{1}{x-2}$ و منه إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ من إشارة $x-2$.

على المجال $]0;2[$: (C_f) يقع تحت (Γ) .

على المجال $]2;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Γ) .

4) الرسم :



5) H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما .

أ- تعيين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا :

$$H(x)=[t\ln t]_3^x-\int_3^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-3\ln 3-\int_3^x dt=x\ln x-3\ln 3-[t]_3^x$$

و منه $H(x)=x\ln x-3\ln 3-(x-3)$ أي : $H(x)=-x+3+x\ln x-3\ln 3$.

بـ- حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

$$A=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}+\ln x\right)dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+\int_3^4\ln x\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}\right)dx+H(4)=\left[\ln|x-2|\right]_3^4+H(4)$$

و منه $A=\ln 2+4\ln 4-4-3\ln 3+3$ أي : $A=(-1+9\ln 2-3\ln 3)(u.a)$.

6) g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$.

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق ، و $g'(x)=-2f'(-2x)$.

إتجاه تغير الدالة g :

$g'(x)>0$ تكافئ $f'(-2x)<0$ تكافئ : $\begin{cases}1<-2x<2\\ 2<-2x<4\end{cases}$ أو تكافئ : $\begin{cases}-1<x<-\frac{1}{2}\\ -2<x<-1\end{cases}$ أو .

و منه الدالة g متزايدة على $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup]-2;-1[$ و متناقصة على $\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]-\infty;-2[$.

بالتوفيق للجميع

والله ابنائي الطلبة ان لم تحلوا مسائلكم وانتم تملكون هذا الكنز من التمارين المحلولة حلا مفصلا وتقيموا انفسكم فلا تلومون الى انفسكم ان تحققون ما تصبون اليه

لقد اشتقت ان طالبا بينكم اتمتع معكم بجمال الموقع وروعة محتوياته فان لم تحشد هممكم فانتم ذوي قلوب باردة ولا تريدون اسعاد والديكم و انفسكم وعندئذ سيغضبون عليكم واكون معهم من الغاضبين

هي ابنائي الى الحل الى العمل الى الجد ممنوع التهاون ممنوع التكاسل ممنوع التسويف

والله المستعان وبه التوفيق والسلام عليكم

الى لقاء آخر مع محور الاحتمالات