الدوال الأصلية

Kimou.

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I جزئي من IR

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F تحقق الشروط التالية :

(1) F قابلة للاشتقاق على I

(2) من أجل كل x من المجال I : $F'(x) = f(x)$

أمثلة : $f : x \longmapsto x^3 - 2x + 1$ $\quad g : x \longmapsto 3x^2 - 2$

الدالة f هي الدالة الأصلية للدالة g على IR لأن $\begin{cases} f \text{ قابلة للاشتقاق على } IR \\ f'(x) = g(x) : IR \text{ من أجل كل } x \text{ من} \end{cases}$

ملاحظة : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن كل دالة معرفة من الشكل $x \longmapsto F(x) + k$ حيث k ثابت حقيقي هي أيضا دالة أصلية للدالة f على المجال I لأنها تحقق شروط التعريف .

مثلا : في المثال السابق الدالة $h : x \longmapsto x^3 - 2x + 7$ هي أيضا دالة أصلية للدالة g على IR لأن من أجل كل x من IR : $h'(x) = 3x^2 - 2$

وجود الدوال الأصلية :

نظرية :

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لا نهائي من الدوال الأصلية على هذا المجال

خاصية : f دالة مستمرة على مجال I . x_0 عدد حقيقي من المجال I و $y_0 \in IR$ من بين الدوال الأصلية غير المنتهية للدالة f على المجال I توجد دالة وحيدة F تحقق الشروط : $\begin{cases} F \text{ دالة أصلية للدالة } f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$

<u>نشاط ـ 1</u>

لتكن f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + \cos x$

1 ـ عين كل الدوال الأصلية للدالة f على IR

2 ـ عين الدالة الأصلية F للدالة f على IR و التي تحقق $F(\pi) = -1$

<u>الحـل ـ 1</u>

1 ـ الدوال الأصلية للدالة f على IR هي كل الدوال التي تكتب من الشكل :

$x \longmapsto x^2 + \sin x + k$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

2 ـ لتكن F الدالة الأصلية لـ f حيث $F(x) = x^2 + \sin x + k$

لدينا : $F(\pi) = \pi^2 + \sin \pi + k = \pi^2 + k$

إذن : $F(\pi) = -1 \Leftrightarrow \pi^2 + k = -1$

$\Leftrightarrow k = -1 - \pi^2$

منه : الدالة F المطلوبة هي : $F(x) = x^2 + \sin x - \pi^2 - 1$

<u>نشاط ـ 2</u>

أثبت بطريقتين مختلفتين أن الدالتين F و G المعرفتان على $]2 ; +\infty[$ كمايلي هما دالتان أصليتان لنفس الدالة التي يطلب تعيينها :

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad ; \quad G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$$

<u>الحـل ـ 2</u>

كل من الدالتين F و G قابلتين للاشتقاق على المجال $]2 ; +\infty[$ إذن : يكفي أن يكون $F'(x) = G'(x)$ من أجل كل x من $]2 ; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$G'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2} + 1 = \frac{-3+(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2 ; +\infty[$: $F'(x) = G'(x)$ إذن : F و G هما دالتان أصليتان للدالة $x \mapsto \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ على المجال $]2 ; +\infty[$

يمكن إثبات أن $F'(x) = G'(x)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$G(x) = \frac{2x-1}{x-2} + x = \frac{2x-1+x^2-2x}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2}$$

$$F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2} = \frac{x^2-2x+3-4+4}{x-2} = \frac{x^2-1-2(x-2)}{x-2} = \frac{x^2-1}{x-2} - 2$$

نتيجة : من أجل كل x من $]2 ; +\infty[$: $F(x) = G(x) - 2$

إذن : $F'(x) = G'(x)$

منه : F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على $]2 ; +\infty[$

الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :

الدالة f	الدالة الأصلية للدالة f	ملاحظات
a	$ax+b$	$x \in IR$ $a \in IR ; b \in IR$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$x \in IR ; c \in IR$ $n \in IN$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in]0 ; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$x \in IR ; c \in IR$
$\cos x$	$\sin x + c$	$x \in IR ; c \in IR$
$1+\tan^2 x$	$\tan x + c$	$x \in IR$ et $x \neq (2k+1)\pi/2$
$u' \times u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$	$n \in IN$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ u قابلة للاشتقاق
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$	u قابلة للاشتقاق $u(x) \neq 0$
$u' e^u$	e^u	u قابلة للاشتقاق

أمثلة : باستعمال الجدول السابق عين الدوال الأصلية للدوال التالية :

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 5$: $x \in IR$

(2) $g(x) = \frac{2}{x^2}$: $x \in IR^*$

(3) $h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$: $x \in]0 ; +\infty[$

(4) $k(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$: $x \in IR$

(5) $\phi(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$: $x \in IR$

الحل :

(1) لدينا : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x^3$ هي : $x \mapsto \frac{1}{3+1} x^{3+1} = \frac{1}{4} x^4$

و الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x$ هي : $x \mapsto \frac{1}{1+1}x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2$

و الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 5$ هي : $x \mapsto 5x$

منه : الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^3 - 3x + 5$ هي الدالة :

$$x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 3\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 5x + c \quad \text{حيث} \quad c \in IR$$

أي : $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$

(2) $g(x) = \frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$

لدينا : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x^{-2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = -\frac{1}{x}$

منه : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 2x^{-2}$ هي $x \mapsto -\frac{2}{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـ g هي الدالة $x \mapsto \frac{-2}{x} + c$

(3) $h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

الدالة الأصلية لـ $x \mapsto x^{-3}$ هي $x \mapsto \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} = \frac{1}{-2}x^{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

الدالة الأصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ هي $x \mapsto \sqrt{x}$

منه : الدالة الأصلية لـ $x \mapsto 3x^{-3} - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ هي الدالة $x \mapsto 3\left(\frac{-1}{2x^2}\right) - 2\sqrt{x} + c$

أي : الدالة الأصلية لـ h هي الدالة $x \mapsto \frac{-3}{2x^2} - 2\sqrt{x} + c$

(4) نضع $u(x) = x^2 + 2x + 5$ إذن : $u'(x) = 2x + 2$ أي $u'(x) = 2(x+1)$

منه : $\frac{u'(x)}{2} = (x+1)$ إذن : $k(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$

أي : $k(x) = \frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^2$

لكن الدالة الأصلية لـ $x \mapsto u'(x)[u(x)]^2$ هي : $x \mapsto \frac{1}{2+1}[u(x)]^{2+1} = \frac{1}{3}[u(x)]^3$

إذن : الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{2}u'(x) \times [u(x)]^2$ هي : $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}[u(x)]^3 = \frac{1}{6}[u(x)]^3$

منه : الدالة الأصلية لـ k هي الدالة : $x \mapsto \frac{1}{6}(x^2+2x+5)^3 + c$

(5) نضع $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2}u'(x)$

إذن : $\phi(x) = \frac{3 \times \frac{1}{2}u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي $\phi(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

لكن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ هي الدالة $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

منه : الدالة الأصلية للدالة $\frac{3}{2}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$ هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{2}(2\sqrt{u(x)})$

أي : الدالة الأصلية لـ ϕ هي : $x \mapsto 3\sqrt{x^2+1} + c$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I

فإن حلول المعادلة التفاضلة $y' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y حيث $y = F(x) + c$ مع c ثابت حقيقي .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y' = x^2 - 2x + 5$ على IR هي مجموعة الدوال y حيث $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$

حيث $c \in IR$ لأن الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto x^2 - 2x + 5$ على IR

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على المجال I فإن حلول المعادلة $y'' = f(x)$ على المجال I هي الدوال y من الشكل : $y = G(x) + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة .

مثلا : حلول المعادلة التفاضلية $y'' = \sin x$ هي الدوال y من الشكل :

$y = -\sin x + ax + b$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة لأن :

الدالة $x \longmapsto -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \sin x$ على IR

و الدالة $x \longmapsto -\sin x$ هي دالة اصلية للدالة $x \longmapsto -\cos x$ على IR

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' + w^2 y = 0$

إذا كان w عدد حقيقي غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' + w^2 y = 0$ على IR هي مجموعة الدوال y من الشكل : $y = a\cos wx + b\sin wx$ حيث a و b أعداد حقيقية

مثلا : حلول المعادلة $y'' + 3y = 0$ هي الدوال من الشكل : $y = a\cos\sqrt{3}\,x + b\sin\sqrt{3}\,x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة .

نشاط :

حل في IR المعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 - 2x + 5$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق $F(1) = -2$

الحــل :

حلول المعادلة $y' = 3x^2 - 2x + 5$ هي الدوال من الشكل :

$y = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث c ثابت حقيقي .

إذن : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ حيث $c \in R$

منه : $F(1) = -2 \Leftrightarrow 1 - 1 + 5 + c = -2$

$\Leftrightarrow c = -7$

أخيرا : $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$

نشاط :

حل في IR المعادلة التفاضلية $y'' + \pi^2 y = 0$ ثم إستنتج الحل F الذي يحقق الشروط : $F(1/2) = 2/3$ و $F'(2/3) = 0$

الحــل :

حلول المعادلة $y'' + \pi^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a\cos\pi x + b\sin\pi x$

منه : $F(x) = a\cos\pi x + b\sin\pi x$ حيث a و b أعداد حقيقية

إذن : $F(1/2) = 2/3 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 0 + b = 2/3$

$\Leftrightarrow b = 2/3$

من جهة أخرى : $F'(x) = -a\pi\sin\pi x + b\pi\cos\pi x$

إذن : $F'(2/3) = 0 \Leftrightarrow -a\pi\sin\frac{2\pi}{3} + b\pi\cos\frac{2\pi}{3} = 0$

$\Leftrightarrow -a\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{3}\pi\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$ لأن $b = 2/3$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}a = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow a = \frac{-1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

نتيجة : $F(x) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}\cos\pi x + \frac{2}{3}\sin\pi x$

حلول تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1

حل في IR المعادلة التفاضلية : $y'' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

الحل 1

لدينا الدالة $x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

و الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c$

منه : حلول المعادلة $y'' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدوال y حيث $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + cx + b$

حيث c و b أعداد ثابتة .

التمرين 2

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I

1 – $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$: $I =]0 ; +\infty[$

2 – $f(x) = e^{ax+b}$: $I = IR$ ، $a \neq 0$

3 – $f(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$: $I = IR$

4 – $f(x) = \cos(2x)\, e^{\sin 2x}$: $I = IR$

الحل 2

1 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ هي $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{-1}{x^2}e^{1/x}$

أي : الدالة $x \longmapsto -e^{1/x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x^2}e^{1/x}$

2 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto ax + b$ هي a حيث $a \neq 0$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto a\, e^{ax+b}$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto e^{ax+b}$ حيث $a \neq 0$

3 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto x^2 - x - 3$ هي $x \longmapsto 2x - 1 = -2\left(-x + \frac{1}{2}\right)$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto -2\left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$

أي : الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{2}e^{x^2-x-3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$

4 – لاحظ أن : مشتقة $x \longmapsto \sin 2x$ هي $x \longmapsto 2\cos 2x$

منه : الدالة $x \longmapsto e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\cos(2x)\, e^{\sin 2x}$

أي : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{2}e^{\sin 2x}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \cos(2x)\, e^{\sin 2x}$

التمرين 3

عين في كل حالة من الحالات التالية الدالة الأصلية للدالة f على المجال I

1 – $I =]-2 ; +\infty[$; $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2 ـ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$: $I =]1 ; +\infty[$

3 ـ $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$: $I =]0 ; \pi[$

4 ـ $f(x) = \frac{-2 e^x}{e^x + 1}$: $I = IR$

الحل ـ 3

1 ـ لاحظ أن مشتقة $x \mapsto x + 2$ هي $x \mapsto 1$

منه : الدالة $x \mapsto \ln|x + 2|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ على $IR - \{-2\}$

بما أن على المجال $I : x + 2 > 0$ فإن الدالة $x \mapsto \ln(x + 2)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2 ـ مشتقة الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ هي الدالة $x \mapsto 2x$

إذن : الدالة $x \mapsto \ln|x^2 - 1|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ على $IR - \{-1 ; 1\}$

أي الدالة $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ على I لأن $x^2 - 1 > 0$

منه : الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$ على I

3 ـ مشتقة الدالة $x \mapsto \sin x$ هي $x \mapsto \cos x$

إذن : الدالة $x \mapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ من أجل $\sin x \neq 0$

أي : الدالة $x \mapsto \ln|\sin x|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ على المجال I

4 ـ مشتقة الدالة $x \mapsto e^x + 1$ هي الدالة $x \mapsto e^x$ على IR

منه : الدالة $x \mapsto \ln|e^x + 1|$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ على IR

أي الدالة $x \mapsto -2\ln|e^x + 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{-2 e^x}{e^x + 1}$ على IR

التمرين ـ 4

لتكن f دالة معرفة على $]-2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x + 3}{(x + 2)^2}$

1 ـ عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من المجال $]-2 ; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-2 ; +\infty[$

الحل ـ 4

1 ـ $$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{a(x+2) + b}{(x+2)^2} = \frac{ax + 2a + b}{(x+2)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x) = \frac{2x + 3}{(x+2)^2}$ نحصل على $\left.\begin{matrix} a = 2 \\ 2a + b = 3 \end{matrix}\right\}$ أي $\left.\begin{matrix} a = 2 \\ b = -1 \end{matrix}\right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]-2 ; +\infty[$: $f(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$

2 ـ الدالة $x \mapsto \ln|x + 2|$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ على $IR - \{-2\}$

إذن : الدالة $x \mapsto 2\ln(x + 2)$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{2}{x+2}$ على $]-2 ; +\infty[$ لأن $x + 2 > 0$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{-2+1}(x + 2)^{-2+1}$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2} = (x + 2)^{-2}$ على $IR - \{-2\}$

أي : الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+2}$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ على المجال $]-2 ; +\infty[$

نتيجة : الدالة $x \longmapsto 2\ln(x+2) - \left(\frac{-1}{x+2}\right)$ أصلية للدالة f على $]-2\,;+\infty[$

أي الدالة $x \longmapsto \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$ دالة أصية للدالة f على $]-2\,;+\infty[$

تحقيق : نضع $F(x) = \frac{1}{x+2} + \ln(x+2)^2$

إذن : $F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2(x+2)}{(x+2)^2}$

منه : $F'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2} = f(x)$

إذن : فعلا F هي دالة أصلية لـ f على $]-2\,;+\infty[$

التمرين ــ 5

f دالة معرفة على $]0\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

1 ــ عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $]0\,;+\infty[$: $f(x) = a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1}$

2 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\,;+\infty[$

الحـل ــ 5

1 ــ من أجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$:

$$a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{a\,e^x - a + b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{(a+b)\,e^x - a}{e^x - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ -a=-2 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} b=1-a \\ a=2 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} b=-1 \\ a=2 \end{array}\right\}$

نتيجة : $f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

2 ــ لدينا : الدالة $x \longmapsto 2x$ أصلية للدالة $x \longmapsto 2$

و الدالة $x \longmapsto \ln|e^x - 1|$ أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$

منه : الدالة $x \longmapsto 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

أي $F(x) = 2x - \ln|e^x - 1|$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$

التمرين ــ 6

في كل حالة من الحالات التالية بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

1 ــ $F(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$ ؛ $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2+1)^2}$: $D = IR$

2 ــ $F(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3}$ ؛ $f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$: $D = IR$

3 ــ $F(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ؛ $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$: $D =]-\infty\,;2[$

4 ــ $F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$ ؛ $f(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$: $D =]0\,;+\infty[$

الحـل ــ 6

1 ــ F قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1) - 2x(x^2-3x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 - 2x^3 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2+1)^2}$$

$$= f(x)$$

إذن : F هي دالة أصلية لـ f على IR

2 ـ F قابلة للاشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{x^2 + 3 - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـ f على IR

3 ـ F قابلة للاشتقاق على $]-\infty ; 2[$ و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]-\infty ; 2[$

4 ـ F قابلة للاشتقاق على $]0 ; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$F'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{6x - (3x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$= f(x)$ إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

<u>**التمرين ـ 7**</u>

F و G دالتان معرفتان على IR^* كما يلي : $F(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$$G(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 : x \in]-\infty ; 0[\\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

1 ـ بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة على IR^*

2 ـ هل يوجد عدد حقيقي ثابت c حيث من أجل كل x من IR^* : $G(x) = F(x) + c$ ؟

<u>**الحـل ـ 7**</u>

1 ـ لدينا : $G(x) = \begin{cases} F(x) - 1 : x \in]-\infty ; 0[\\ F(x) + 2 : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$ إذن : $G'(x) = \begin{cases} F'(x) : x \in]-\infty ; 0[\\ F'(x) : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$

أي : $G'(x) = F'(x) : x \in IR^*$

منه : الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجموعة IR^*

2 ـ إذا وجد عدد حقيقي c حيث $G(x) = F(x) + c$ من أجل كل x من IR^* فإن :

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} - 1 = x^2 + \frac{1}{x} + c \\ x^2 + \frac{1}{x} + 2 = x^2 + \frac{1}{x} + c \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = c \end{cases}$$ مستحيل

إذن : لا يوجد أي عدد حقيقي c يحقق : من أجل كل x من IR^* $G(x) = F(x) + c$

التمرين ــ 8

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3}$

1 ــ تحقق أن الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2}$ هي دالة أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ إستنتج الدالة G الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x = 11/8$

الحـل ــ 8

1 ــ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$: $F'(x) = \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{-2x}{x^4}\right)$

منه : $F'(x) = x + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^3} = f(x)$

إذن : F أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ G أصلية لـ f إذن : $G(x) = F(x) + c$ حيث $c \in IR$

أي : $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + c$

منه : $G\left(\frac{11}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{11}{8}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \frac{8}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \left(\frac{8}{11}\right)^2 + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{121}{64 \times 2} + \frac{8}{11 \times 2} - \frac{24}{11 \times 11}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-121 \times 11 \times 11 + 8 \times 11 \times 64 - 24 \times 64 \times 2}{11 \times 11 \times 64 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{-12081}{15488}$$

نتيجة : الدالة G المطلوبة هي $G(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} - \frac{12081}{15488}$

التمرين ــ 9

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 3x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1}$

1 ــ تحقق أن الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2 + 1)$ هي دالة أصلية لـ f على المجال $]0 ; +\infty[$

2 ــ عين الدالة G الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل $x = 1$

الحـل ــ 9

1 ــ من أجل كل x من المجال $]0 ; +\infty[$ لدينا : $F'(x) = \frac{3}{2}(2x) + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} = f(x)$

إذن : F هي دالة أصلية لـ f على $]0 ; +\infty[$

2 ــ G دالة أصلية لـ f إذن : $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2 + 1) + c$ حيث $c \in IR$

منه : $G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \ln 1 - \ln(1 + 1) + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = \ln 2 - \frac{3}{2}$$

نتيجة : $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln x - \ln(x^2 + 1) + \ln 2 - \frac{3}{2}$ هي الدالة المطلوبة .

التمرين ــ 10

F و G دالتان معرتان على IR كمايلي : $F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$ ؛ $G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على IR بحساب الفرق $F(x) - G(x)$ ثم بحساب المشتقات .

الحل ـ 10

1 ـ بحساب الفرق $F(x) - G(x)$:

من أجل كل x من IR :

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} - \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{5x^2 - x + 3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$= 5$$

إذن : $F(x) - G(x) = 5$ منه : $F(x) = G(x) + 5$

أي : $F'(x) = G'(x)$

أي F و G أصليتان لنفس الدالة .

2 ـ بحساب المشتقات :

$$F'(x) = \frac{(10x - 1)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(5x^2 - x + 3)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{10x^3 + 10x^2 + 10x - x^2 - x - 1 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 5x^2 + x - 3}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{-6(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(-6x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 - 6x - 6 + 12x^2 + 4x + 6x + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

نتيجة : من أجل كل x من IR : $F'(x) = G'(x)$ إذن : F و G أصليتان لنفس الدالة .

التمرين ـ 11

أوجد الدالة الأصلية للدالة f على IR في كل حالة من الحالات التالية :

1 ـ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

2 ـ $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{3}$

3 ـ $f(x) = -3\sin x + 2\cos x + 1$

4 ـ $f(x) = -\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin(x + \pi)$

5 ـ $f(x) = x^2 + 2x - e^x + \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

الحل ـ 11

1 ـ $F(x) = \dfrac{1}{4+1}x^{4+1} - 4\left(\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}\right) - 6\left(\dfrac{1}{1+1}x^{1+1}\right) + x + c$

الدالة الأصلية لـ f $= \dfrac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + x + c$

2 ـ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3}$

منه $F(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2+1}x^{2+1}\right) - \dfrac{2}{3}x + c$

الدالة الأصلية لـ f $= \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{3}x + c$

3 – $F(x) = 3\cos x + 2\sin x + x + c$ الدالة الأصلية لـ f

4 – $F(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(x+\pi) + c$ الدالة الأصلية لـ f

5 – $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - e^x + \ln(x^2+1) + c$ الدالة الأصلية لـ f

التمرين – 12

أوجد الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال $]0 ; +\infty[$

1 – $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ 4 – $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$

2 – $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4}$ 5 – $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$

3 – $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}$

الحل – 12

1 – $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = 2 - x^{-2}$

منه : $F(x) = 2x - \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = 2x + x^{-1} = 2x + \frac{1}{x}$

2 – $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}$

منه : $F(x) = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$

3 – $f(x) = 1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} = 1 + x^{-3} - 2(x^{-4})$

منه : $F(x) = x + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} - 2\left(\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}\right) = x - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3}$

4 – $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + x - 1$

منه : $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

5 – $f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x}$

$F(x) = -e^{-x} + 2\ln|x|$

التمرين – 13

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 3^x - 2^x$

عين دالة أصلية للدالة f على IR

الحل – 13

من أجل كل x من IR : $f(x) = e^{x\ln 3} - e^{x\ln 2}$

منه : $F(x) = \frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{\ln 3}(3^x) - \frac{1}{\ln 2}(2^x)$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين – 14

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u' \times u^n$ عين الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال I

1 – $f(x) = (x-1)^4$: $I = IR$

2 – $f(x) = \frac{(x+2)^3}{5}$: $I = IR$

3 – $f(x) = 3(3x+4)^5$: $I = IR$

4 – $f(x) = e^x(e^x-1)^2$: $I = IR$

5 — $f(x) = x^2(x^3+1)^4$: $I = IR$

6 — $f(x) = \frac{1}{x}[\ln(x)]^2$: $I =]0 ; +\infty[$

7 — $f(x) = 2\cos x \sin^2 x$: $I = IR$

8 — $f(x) = \tan^3 x(\frac{1}{\cos^2 x})$: $I =]-\pi/2 ; \pi/2[$

9 — $f(x) = -20\,x\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3$: $I = IR$

10 — $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x}+2)^3$: $I = IR$

الحل — 14

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة

$x \longmapsto \frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^n$ إذن :

1 — نضع : $u(x) = x - 1$ منه $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = (x-1)^4 = u'(x) \times [u(x)]^4$

منه : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{4+1}[u(x)]^{4+1}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto (x-1)^4$

أي : $F(x) = \frac{1}{5}(x-1)^5 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 — نضع : $u(x) = x + 2$ إذن : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \frac{(x+2)^3}{5} = \frac{1}{5}u'(x)[u(x)]^3$

منه : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3+1}[u(x)]^{3+1}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{5}u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = \frac{1}{20}(x+2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 — نضع : $u(x) = 3x + 4$ إذن : $u'(x) = 3$

منه : $f(x) = 3(3x+4)^5 = u'(x)[u(x)]^5$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{6}[u(x)]^6$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^5$

أي : $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^6 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 — نضع : $u(x) = e^x - 1$ إذن : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = e^x(e^x - 1)^2 = u'(x)[u(x)]^2$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^2$

أي الدالة $F(x) = \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

5 — نضع : $u(x) = x^3 + 1$ منه : $u'(x) = 3x^2$ أي $x^2 = \frac{1}{3}u'(x)$

منه : $f(x) = x^2(x^3+1)^4 = \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}[u(x)]^5$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{3}u'(x)[u(x)]^4$

أي : $F(x) = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

6 — نضع : $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = \frac{1}{x}$

منه : $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2 = u'(x)[u(x)]^2$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto u'(x)[u(x)]^2$

أي : $F(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

7 – نضع : $u(x) = \sin x$, إذن : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = 2\cos x \sin^2 x = 2u'(x)[u(x)]^2$

منه : الدالة $x \mapsto 2 \times \frac{1}{3}[u(x)]^3$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 2u'(x)[u(x)]^2$

أي : $F(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

8 – نضع : $u(x) = \tan x$ إذن : $u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

منه : $f(x) = \tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = [u(x)]^3 u'(x)$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = \frac{1}{4}\tan^4 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

9 – نضع : $u(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$ منه : $u'(x) = -x$

إذن : $f(x) = -20x\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3 = 20u'(x)[u(x)]^3$

إذن : الدالة $x \mapsto 20 \times \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto 20u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = 5\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^4 + c$ هي دالة أصلية للدالة f

10 – نضع : $u(x) = e^{-2x} + 2$ إذن : $u'(x) = -2e^{-2x}$ منه : $e^{-2x} = -\frac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x}+2)^3 = -\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

منه : الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}[u(x)]^4$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto -\frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

أي : $F(x) = -\frac{1}{8}(e^{-2x}+2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين – 15

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1 – $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$: $I =]2 ; +\infty[$

2 – $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$: $I =]-1 ; +\infty[$

3 – $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$: $I =]1/2 ; +\infty[$

4 – $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$: $I =]1 ; +\infty[$

5 – $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$: $I = IR$

6 – $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$: $I = IR$

7 – $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$: $I =]-1 ; +\infty[$

8 – $I =]-\pi/2\,;\,\pi/2[\;:\; f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

9 – $I =]0\,;+\infty[\;:\; f(x) = \dfrac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2}$

10 – $I = [1\,;+\infty[\;:\; f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x + 2)^2}$

الحــل – 15

لاحظ أن : $\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n} = u'(x) \times [u(x)]^{-n}$

إذن : الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{1-n}[u(x)]^{1-n}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ حيث $n \neq 1$

أي الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^n}$

1 – نضع : $u(x) = x - 2$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{5}{(x-2)^7} = 5\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7}\right)$

منه : الدالة $x \longmapsto 5\left(\dfrac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}}\right)$ دالة أصلية لـ $x \longmapsto 5\,\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

أي : $F(x) = \dfrac{-5}{6(x-2)^6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 – نضع : $u(x) = x + 1$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} = -2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن : الدالة $x \longmapsto -2\left(\dfrac{-1}{2(u(x))^2}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 – نضع : $u(x) = 2x - 1$ إذن : $u'(x) = 2$

منه : $f(x) = \dfrac{2}{(2x-1)^3} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{2(u(x))^2}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{2(2x-1)^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 – نضع : $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2} = \dfrac{1/x}{(\ln x)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{\ln x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 – نضع : $u(x) = 1 + e^x$ إذن : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{1+e^x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 ـ نضع : $u(x) = x^2 - x + 1$ إذن : $u'(x) = 2x - 1$

منه : $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = \dfrac{-1}{x^2-x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 ـ نضع : $u(x) = x^3 + 1$ منه : $u'(x) = 3x^2$

إذن : $f(x) = \dfrac{6x^2}{(x^3+1)^4} = 2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^4}\right)$

الدالة $x \longmapsto 2\left(\dfrac{-1}{3[u(x)]^3}\right)$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto 2\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^4}\right)$

إذن : $F(x) = \dfrac{-2}{3(x^3+1)^3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8 ـ نضع : $u(x) = \cos x$ إذن : $u'(x) = -\sin x$

منه : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} = -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

الدالة $x \longmapsto -\left(\dfrac{-1}{2(u(x))^2}\right)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن : $F(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9 ـ نضع : $u(x) = e^x + 2x$ منه : $u'(x) = e^x + 2$

منه : $f(x) = \dfrac{-e^x - 2}{(e^x+2x)^2} = -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

الدالة $x \longmapsto -\left(\dfrac{-1}{u(x)}\right)$ أصلية لـ $x \longmapsto -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{e^x+2x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10 ـ نضع : $u(x) = \ln x + 2$ منه : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x+2)^2} = \dfrac{1/x}{(\ln x+2)^2} = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

منه : $F(x) = \dfrac{-1}{\ln x + 2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

<u>التمرين ـ 16</u>

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1 ـ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$: $I =]1 ; +\infty[$

2 ـ $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$: $I =]2 ; +\infty[$

3 ـ $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$: $I =]3 ; +\infty[$

4 ـ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$: $I =]-\infty ; 2[$

5 — $I =]0 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$

6 — $I =]3 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

7 — $I =]0 ; \pi[\quad : \quad f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

8 — $I = IR \quad : \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$

9 — $I =]0 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

10 — $I =]1 ; +\infty[\quad : \quad f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

الحل — 16

حسب الخواص فإن الدالة $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

1 — نضع $u(x) = x - 1$ إذن : $u'(x) = 1$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 — نضع $u(x) = x^2 - 4$ إذن : $u'(x) = 2x$

منه : $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2-4} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 — نضع $u(x) = x^2 - x - 6$ إذن : $u'(x) = 2x - 1$

منه : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{x^2 - x - 6} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 — نضع $u(x) = 2 - x$ إذن : $u'(x) = -1$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + 3 = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} + 3$

إذن : $F(x) = -2\sqrt{2-x} + 3x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 — نضع $u(x) = e^x - 1$ منه : $u'(x) = e^x$

منه : $f(x) = \dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2(2\sqrt{e^x - 1}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{e^x - 1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6 — نضع $u(x) = x - 3$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2(2\sqrt{x}) - 2(2\sqrt{u(x)}) + c$

أي : $F(x) = 4\sqrt{x} - 4\sqrt{x-3} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7 ــ نضع $u(x) = \sin x$ منه : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2\sqrt{\sin x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8 ــ نضع $u(x) = 2\cos x + 3$ منه $u'(x) = -2\sin x$ أي $\sin x = \dfrac{-1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

منه : $F(x) = -\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x + 3}) + c$

أي : $F(x) = -\sqrt{2\cos x + 3} + c$ وهي الدالة الأصلية للدالة f

9 ــ نضع $u(x) = x^3 + x^2$ إذن : $u'(x) = 3x^2 + 2x$

إذن : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه : $F(x) = 2\sqrt{x^3 + x^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10 ــ نضع $u(x) = \ln x$ إذن : $u'(x) = 1/x$

منه : $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} = \dfrac{1/x}{\sqrt{\ln x}} = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 17

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I :

1 ــ $I =]1 ; +\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

2 ــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

3 ــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

4 ــ $I = IR$: $f(x) = \dfrac{6x + 3}{x^2 + x + 1}$

5 ــ $I =]0 ; \pi[$: $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

الحل ــ 17

الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ إذن :

1 ــ نضع $u(x) = x - 1$ منه : $u'(x) = 1$

إذن : $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

منه : $F(x) = \ln|x - 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ــ نضع $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \dfrac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ــ نضع $u(x) = e^x + 1$ منه : $u'(x) = e^x$

إذن : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذن : $F(x) = \ln|e^x + 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ــ نضع $u(x) = x^2 + x + 1$ إذن : $u'(x) = 2x + 1$

منه : $f(x) = \dfrac{6x+3}{x^2+x+1} = 3\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\right) = 3\left(\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)$

إذن : $F(x) = 3\ln|x^2 + x + 1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ــ نضع $u(x) = \sin x$ منه : $u'(x) = \cos x$

إذن : $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

منه : $F(x) = \ln|\sin x| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ــ 18

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ عين الدوال الأصلية للدوال f على المجال I في كل من الحالات التالية :

1 ــ $f(x) = e^{4x+1}$: $I = IR$

2 ــ $f(x) = x\, e^{-x^2}$: $I = IR$

3 ــ $f(x) = \dfrac{3}{x^2}\, e^{1/x}$: $I =]0\,;+\infty[$

4 ــ $f(x) = (\sin x)\, e^{\cos x}$: $I = IR$

5 ــ $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}\, e^{\sqrt{x+1}}$: $I =]-1\,;+\infty[$

الحل ــ 18

حسب الخواص فإن الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$

1 ــ نضع $u(x) = 4x + 1$ منه : $u'(x) = 4$

إذن : $f(x) = e^{4x+1} = \dfrac{1}{4}(4e^{4x+1}) = \dfrac{1}{4}\, u'(x)\, e^{u(x)}$

منه : $F(x) = \dfrac{1}{4}\, e^{4x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ــ نضع $u(x) = -x^2$ منه : $u'(x) = -2x$

إذن : $f(x) = x\, e^{-x^2} = \dfrac{-1}{2}(-2x\, e^{-x^2}) = \dfrac{-1}{2}\, u'(x)\, e^{u(x)}$

منه : $F(x) = \dfrac{-1}{2}\, e^{-x^2} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ــ نضع $u(x) = 1/x$ منه : $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

إذن : $f(x) = \dfrac{3}{x^2}\, e^{1/x} = -3\left(-\dfrac{1}{x^2}\, e^{1/x}\right) = -3\, u'(x)\, e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -3\, e^{1/x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ــ نضع $u(x) = \cos x$ منه : $u'(x) = -\sin x$

إذن : $f(x) = \sin x\, e^{\cos x} = -(-\sin x\, e^{\cos x}) = -u'(x)\, e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -e^{\cos x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ــ نضع $u(x) = \sqrt{x+1}$ منه : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

إذن : $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}\, e^{\sqrt{x+1}} = -2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\, e^{\sqrt{x+1}}\right) = -2\, u'(x)\, e^{u(x)}$

منه : $F(x) = -2\, e^{\sqrt{x+1}} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـ 19

تعرف على الشكل المناسب ثم عين الدوال الأصلية لكل دالة f من الدوال التالية على المجال I .

1 ـ $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3 \quad : \quad I = \mathbb{R}$

2 ـ $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} \quad : \quad I =]-\infty ; -1[$

3 ـ $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right) \quad : \quad I =]-1 ; +\infty[$

4 ـ $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \quad : \quad I =]0 ; \pi/2[$

5 ـ $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad : \quad I =]1 ; +\infty[$

الحل ـ 19

1 ـ نضع $u(x) = x^4 + 2$ منه $u'(x) = 4x^3$

إذن : $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3 = \dfrac{1}{2}(4x^3)(x^4+2)^3 = \dfrac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{1}{3+1}[u(x)]^{3+1}$ أصلية للدالة $x \longmapsto u'(x)[u(x)]^3$

إذن : $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}(x^4+2)^4\right) + c$

أي: $F(x) = \dfrac{1}{8}(x^4+2)^4 + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

2 ـ نضع $u(x) = x^2 - 1$ منه $u'(x) = 2x$

إذن : $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-1}} = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

الدالة $x \longmapsto 2\sqrt{u(x)}$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن : $F(x) = -\dfrac{3}{2}(2\sqrt{x^2-1}) + c$

أي: $F(x) = -3\sqrt{x^2-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

3 ـ نضع $u(x) = x^3 + 1$ إذن : $u'(x) = 3x^2$

إذن : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x^2}{x^3+1}\right) = \dfrac{1}{6}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة $x \longmapsto \ln|u(x)|$ أصلية للدالة $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذن: $F(x) = \dfrac{1}{6}\ln|x^3+1| + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4 ـ نضع $u(x) = \cos x$ إذن $u'(x) = -\sin x$

منه : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = -\left(\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}\right) = -\left(\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right)$

الدالة $x \longmapsto \dfrac{-1}{u(x)}$ هي الدالة الأصلية لـ $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن : $F(x) = -\left(-\dfrac{1}{\cos x}\right) + c$

أي: $F(x) = \dfrac{1}{\cos x} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5 ـ نضع $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ منه $u'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

إذن : $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = -\left(\frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -u'(x)\,e^{u(x)}$

الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

إذن : $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـ 20

عين دالة أصلية على IR لكل من الدوال التالية :

1 ـ $f(x) = \sin^2 x$

2 ـ $f(x) = \cos^2 x$

3 ـ $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

الحـل ـ 20

1 ـ $f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

بما أن : $x \longmapsto \frac{1}{2}x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{2}$

$x \longmapsto \sin 2x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto 2\cos 2x$

فإن : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2\cos 2x)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$ هي دالة أصلية لـ f

2 ـ $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

منه : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2\cos 2x)$

بما أن : $\left.\begin{array}{l} x \longmapsto \frac{1}{2}x \text{ أصلية لـ } x \longmapsto \frac{1}{2} \\ x \longmapsto \sin 2x \text{ أصلية لـ } x \longmapsto 2\cos 2x \end{array}\right\}$

فإن : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3 ـ $f(x) = \sin x \cos x$

نضع $u(x) = \sin x$ إذن : $u'(x) = \cos x$

منه : $f(x) = u'(x) \times u(x)$

إذن : $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين ـ 21

حل في المجال I المعادلات التفاضلية التالية :

1 ـ $I = IR \;:\; y' = 2x^2 + x - 1$

2 ـ $I = IR^* \;:\; y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

3 ـ $I = IR \;:\; y' = 3\sin(2x)$

4 ـ $I = IR \;:\; y' = 4x^3 - 3x^2 - 1$

الحـل ـ 21

البحث عن حل المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هو البحث عن الدالة F الأصلية للدالة f على IR حيث $F'(x) = f(x)$ أي : $F'(x) = y'$ منه : $y = F$ كمايلي :

1 ـ $y' = 2x^2 + x - 1 \Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

2 – $y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 2x + 1 - x^{-2}$

$\Rightarrow y = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + x - \left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right) + c$

$\Rightarrow y = x^2 + x + \frac{1}{x} + c$

3 – $y' = 3\sin(2x) \Rightarrow y = 3\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + c$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}\cos 2x + c$

4 – $y' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y = x^4 - x^3 - x + c$

التمرين – 22

حل المعادلات التفاضلية التالية على المجال I :

1 – $I = IR^* \; : \; y'' = \frac{x^2+1}{x^2}$

2 – $I = IR \; : \; y'' = \cos(2x+3)$

3 – $I = IR \; : \; y'' = \cos 2x - 2\sin x$

4 – $I = IR^* \; : \; y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2}$

الحل – 22

1 – $y'' = \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow y'' = 1 + x^{-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = 1 + x^{-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = 1 + x^{-2} \end{cases}$ (g دالة أصلية لـ $x \longmapsto 1 + x^{-2}$) لأن $g'(x) = y''$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = x - \frac{1}{x} + c \end{cases}$

$\Rightarrow y' = x - \frac{1}{x} + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

2 – $y'' = \cos(2x+3) \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos(2x+3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos(2x+3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c \end{cases}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x+3)\right] + cx + d$

$\Rightarrow y = \frac{-1}{4}\cos(2x+3) + cx + d$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

3 –
$$y'' = \cos 2x - 2\sin x \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \cos 2x - 2\sin x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \cos 2x - 2\sin x \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos x + c \end{cases}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sin 2x + 2\cos x + c$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}\cos 2x + 2\sin x + cx + d$$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

4 –
$$y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g'(x) = x^2 + x + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y' = g(x) \\ g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c \end{cases}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \ln|x| + cx + d$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \ln|x| + cx + d$$ حيث c و d أعداد حقيقية ثابتة

التمرين ـــ 23

حل المعادلات التفاضلية التالية في IR :

1 – $y'' + y = 0$

2 – $y'' + 9y = 0$

3 – $4y'' + \pi^2 y = 0$

الحـل ـــ 23

حلول المعادلة $y'' + w^2 y = 0$ هي الدوال من الشكل $y = a\cos wx + b\sin wx$ كمايلي :

1 – $y'' + y = 0 \Rightarrow y'' + (1)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos x + b\sin x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

2 – $y'' + 9y = 0 \Rightarrow y'' + (3)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos 3x + b\sin 3x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

3 – $4y'' + \pi^2 y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{\pi^2}{4} y = 0$

$\Rightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$

$\Rightarrow y = a\cos\frac{\pi}{2}x + b\sin\frac{\pi}{2}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

التمرين ـــ 24

حل المعادلة التفاضلية **$4y'' + 121y = 0$** ثم عين الحل **F** الذي يحقق الشرطين $\begin{cases} F(\pi) = 1 \\ F'(\pi) = 2 \end{cases}$

الحل – 24

$$4y''+121y=0 \Rightarrow y''+\frac{121}{4}y=0$$
$$\Rightarrow y''+\left(\frac{11}{2}\right)^2 y=0$$
$$\Rightarrow y=a\cos\frac{11}{2}x+b\sin\frac{11}{2}x$$

إذن : $F(x)=a\cos\frac{11}{2}x+b\sin\frac{11}{2}x$ حيث a و b أعداد حقيقية ثابتة

لدينا : $F(\pi)=a\cos\frac{11}{2}\pi+b\sin\frac{11}{2}\pi$
$$=0+b\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=b\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-b$$

إذن : الشرط $F(\pi)=1$ يصبح : $-b=1$ أي : $b=-1$

و لدينا أيضا : $F'(x)=\frac{-11}{2}a\sin\frac{11}{2}x+\frac{11}{2}b\cos\frac{11}{2}x$

منه : $F'(\pi)=\frac{-11}{2}a\sin\frac{11}{2}\pi+\frac{11}{2}b\cos\frac{11}{2}\pi$
$$=\frac{-11}{2}a(-1)$$
$$=\frac{11}{2}a$$

إذن : الشرط $F'(\pi)=2$ يصبح : $\frac{11}{2}a=2$ أي : $a=\frac{4}{11}$

نتيجة : $a=\frac{4}{11}$ ؛ $b=-1$ إذن : $F(x)=\frac{4}{11}\cos\frac{11}{2}x-\sin\frac{11}{2}x$

التمرين – 25

1 – حل المعادلة التفاضلية $9y''+4y=0$ .... (1)

2 – عين الحل الخاص F للمعادلة (1) و الذي يحقق الشرطين التاليين :

(1) منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$
(2) منحنى الدالة F يقبل مماس عند النقطة A معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$

3 – برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $F(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$

4 – حل المعادلة $F(x)=0$ ثم مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية .

الحل – 25

1 – $9y''+4y=0 \Rightarrow y''+\frac{4}{9}y=0$
$$\Rightarrow y''+\left(\frac{2}{3}\right)^2 y=0$$
$$\Rightarrow y=a\cos\frac{2}{3}x+b\sin\frac{2}{3}x$$

2 – F حل المعادلة (1) إذن : $F(x)=a\cos\frac{2}{3}x+b\sin\frac{2}{3}x$ حيث a و b أعداد حقيقية نبحث عنها حسب الشروط كمايلي :

منحنى الدالة F يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$ إذن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$

لدينا : $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}+b\sin\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$

$$= a\cos\frac{\pi}{3} + b\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

إذن : الشرط $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$ يصبح : $\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

أي : (α).......... $a + b\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

من جهة أخرى : $F'(x) = \frac{-2a}{3}\sin\frac{2}{3}x + \frac{2b}{3}\cos\frac{2}{3}x$

منه : $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2a}{3}\sin\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2} + \frac{2b}{3}\cos\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$
$$= \frac{-2a}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{2b}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{-2a}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2b}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$= \frac{-a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3}$$

إذن : الشرط معامل توجيه المماس عند النقطة A هو $-\frac{2}{3}$ يصبح : $F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

أي : $\frac{-a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{3} = -\frac{2}{3}$ أي : (β).......... $a\sqrt{3} - b = 2$

لنحل إذن الجملة : $\begin{cases} a + b\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \\ a\sqrt{3} - b - 2 = 0 \end{cases}$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4$$

إذن :
$$\begin{cases} a = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3} \\[2ex] b = \dfrac{\begin{vmatrix} -2\sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{-4} = \dfrac{-6+2}{-4} = 1 \end{cases}$$

خلاصة : $a = \sqrt{3}$ ؛ $b = 1$

إذن : $F(x) = \sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x + \sin\frac{2}{3}x$ و هو المطلوب

3 ــ لدينا : $F(x) = \sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x + \sin\frac{2}{3}x$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}x\right)$$
$$= 2\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{2}{3}x\right) + \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{2}{3}x\right)\right]$$
$= 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ و هو المطلوب

4 ــ $F(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$ حيث $k \in Z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{8}{12}\pi + 2\pi k \\ \text{أو} \\ \frac{2}{3}x = \frac{-4}{12}\pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \times \frac{8}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \\ \text{أو} \\ x = \frac{-3}{2} \times \frac{4}{12}\pi + \frac{3}{2} \times 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 3\pi k \\ \text{أو} \\ x = \frac{-\pi}{2} + 3\pi k \end{cases}$$ و هي حلول المعادلة $F(x) = 0$ في IR

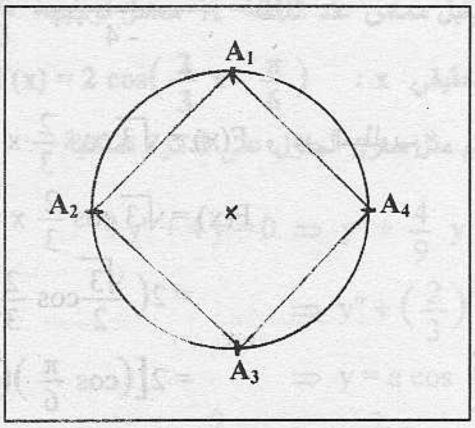
الحلول على الدائرة المثلثية

من أجل $k = 0$: $\begin{cases} x = \pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

من أجل $k = 1$: $\begin{cases} x = \pi + 3\pi = 4\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5}{2}\pi \end{cases}$

من أجل $k = 2$: $\begin{cases} x = \pi + 6\pi = 7\pi & \text{نتوقف} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 6\pi & \text{نتوقف} \end{cases}$

إذن : صور حلول المعادلة على الدائرة المثلثية هي النقط A_1 ؛ A_2 ؛ A_3 ؛ A_4 كمايلي :



التمرين – 26

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; 1[$ بـ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1 – عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل x من $]0 ; 1[$:

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

2 ـ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0 ; 1[$ تحقق $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$

الحل ـ 26

1 ـ من أجل كل x من $]0 ; 1[$ لدينا :
$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + 1) + b\,x^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2 - 2ax + a}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ -2a=2 \\ a=-1 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} b=-a \\ a=-1 \\ a=-1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} b=1 \\ a=-1 \end{array}\right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]0 ; 1[$: $f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$

2 ـ لدينا : $f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = -(x^{-2}) + (x-1)^{-2}$

$\left.\begin{array}{l} \text{الدالة } x \longmapsto \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = -\frac{1}{x} \text{ أصلية للدالة } x \longmapsto x^{-2} \\ \text{الدالة } x \longmapsto \frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1} = \frac{-1}{x-1} \text{ أصلية للدالة } x \longmapsto (x-1)^{-2} \end{array}\right\}$

منه الدالة : $x \longmapsto -\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -x^{-2} + (x-1)^{-2}$

أي : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + c$ حيث c عدد حقيقي ثابت يمكن البحث عنه بحساب $F\left(\frac{1}{2}\right)$ كمايلي :

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{1/2} - \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} + c = 6$$
$$\Leftrightarrow c = 6 - 2 - 2$$
$$\Leftrightarrow c = 2$$

نتيجة : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + 2$

تحقيق : $F(x) = \frac{x - 1 - x + 2x(x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x-1)}$

$$F'(x) = \frac{(4x-2)\,x(x-1) - (2x-1)(2x^2 - 2x - 1)}{x^2(x-1)^2}$$
$$= \frac{(2x-1)[2x(x-1) - 2x^2 + 2x + 1]}{x^2(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

$= f(x)$ إذن : F أصلية لـ f

التمرين ـ 27

f دالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{(x^2-1)^3}$

1 ـ عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3}$

2 ـ إستنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1 ; +\infty[$

3 ـ إستنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق : $F(0) = 1$

الحـل ـ 27

1 ـ من أجل كل x من $]1\,;+\infty[$:

$$\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}=\frac{a(x+1)^3+b(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}$$
$$=\frac{a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2-1)^3}$$
$$=\frac{(a+b)x^3+3(a-b)x^2+3(a+b)x+a-b}{(x^2-1)^3}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l}a+b=1\\a-b=0\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}a=1/2\\b=1/2\end{array}\right\}$

نتيجة : من أجل كل x من $]1\,;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{1}{2(x+1)^3}$

2 ـ الدالة $x\longmapsto\frac{1}{(x+1)^3}$ من الشكل $x\longmapsto(x+1)^{-3}$ إذن : الدالة $x\longmapsto\frac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x+1)^2}$ هي دالة أصلية لـ $x\longmapsto\frac{1}{(x+1)^3}$

الدالة $x\longmapsto\frac{1}{(x-1)^3}$ من الشكل $x\longmapsto(x-1)^{-3}$ إذن : الدالة $x\longmapsto\frac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x-1)^2}$ هي دالة أصلية لـ $x\longmapsto\frac{1}{(x-1)^3}$

منه : الدالة $x\longmapsto\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2(x-1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2(x+1)^2}\right)+c$ هي دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{2(x-1)^3}$

أي : $F(x)=\frac{-1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3 ـ $F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4}-\frac{1}{4}+c=0$

$\Leftrightarrow c=1/2$

منه : $F(x)=\frac{-1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{2}$ هي الدالة الأصلية المطلوبة .

التمرين ـ 28

f دالة معرفة على $]-1\,;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$

1 ـ أكتب $f(x)$ من الشكل $\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1\,;+\infty[$

الحـل ـ 28

1 ـ

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2}=\frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l}a=1\\a+b=2\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}a=3\\b=-1\end{array}\right\}$

نتيجة : $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$

2 ـ الدالة $x\longmapsto\ln|x+1|$ أصلية لـ $x\longmapsto\frac{1}{x+1}$

الدالة $x\longmapsto\frac{-1}{x+1}$ أصلية لـ $x\longmapsto\frac{1}{(x+1)^2}$

منه : الدالة $x \longmapsto 3\ln|x+1| - \left(\frac{-1}{x+1}\right) + c$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

أي : $F(x) = 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـــ 29

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ على $]1\,;+\infty[$

الحـل ـــ 29

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x & x^2-2x+1 \\ \hline \underline{x^2-2x+1} & 1 \\ -1 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

منه : $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين ـــ 30

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$ على $]-3\,;2[$

الحـل ـــ 30

لنبسط عبارة $f(x)$ باستعمال القسمة الاقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2+4x-25 & x^2+x-6 \\ \hline \underline{3x^2+3x-18} & 3 \\ x-7 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 3 + \frac{x-7}{x^2+x-6}$

لاحظ أن : $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$

إذن : $f(x) = 3 + \frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$

لنبحث عن الأعداد a و b حيث $\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$

$$\frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2} = \frac{ax-2a+bx+3b}{(x+3)(x-2)} = \frac{(a+b)x+3b-2a}{(x+3)(x-2)}$$

بالمطابقة مع العبارة $\frac{x-7}{(x+3)(x-2)}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ -2a+3b=-7 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} 3a+3b=3 \\ -2a+3b=-7 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} 5a=10 \\ b=1-a \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}\right\}$ منه : $\frac{x-7}{(x+3)(x-2)} = \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)}$

نتيجة : $f(x) = 3 + \frac{2}{(x+3)} - \frac{1}{(x-2)}$

منه : $F(x) = 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين ـــ 31

عين دالة أصلية للدالة $f : x \longmapsto \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$ على $]-\infty\,;-1[$

الحـل ـــ 31

لنبسط عبارة $f(x)$ كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+2 & x+1 \\ \hline \underline{2x^2+2x} & 2x+1 \\ x+2 & \\ \underline{x+1} & \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1}$

منه : $F(x) = x^2 + x + \ln|x+1| + c$ هي الدالة الأصلية لـ f

التمرين – 32

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \cos^3 x$

1 – تحقق أن : $f(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل – 32

1 – من أجل كل x من IR :

$$\cos x - \cos x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$$
$$= \cos x(\cos^2 x)$$
$$= \cos^3 x$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب

2 – الدالة $x \longmapsto \sin x$ أصلية لـ $x \longmapsto \cos x$

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \cos x \sin^2 x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين – 33

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin x + \sin^3 x$

1 – تحقق أن : $f(x) = 2\sin x - \sin x \cos^2 x$

2 – إستنتج دالة أصلية للدالة f

الحل – 33

1 –

$$2\sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x + \sin x - \sin x \cos^2 x$$
$$= \sin x + \sin x(1 - \cos^2 x)$$
$$= \sin x + \sin x \sin^2 x$$
$$= \sin x + \sin^3 x$$
$$= f(x)$$ و هو المطلوب

2 – الدالة $x \longmapsto -\cos x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x$

الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x \cos^2 x$

منه : الدالة $x \longmapsto -2\cos x - \left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right) + c$ أصلية لـ $x \longmapsto 2\sin x - \sin x \cos^2 x$

أي الدالة : $x \longmapsto -2\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين – 34

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$

1 – عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$f(x)= \sin x(a\cos^2 x + b\cos^4 x)$

2 – إستنتج دالة أصلية لـ f

الحل – 34

1 –

$$f(x) = \sin^3 \cos^2 x$$
$$= \sin x(\sin^2 x \cos^2 x)$$
$$= \sin x(1 - \cos^2 x)\cos^2 x$$
$$= \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

2 – لدينا : $f(x) = \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x)$

أي : $f(x) = \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x$

الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{3}\cos^3 x$ أصلية لـ $x \longmapsto \sin x \cos^2 x$

الدالة $x \longmapsto \frac{1}{5}\cos^5 x$ أصلية لـ $x \longmapsto -\sin x \cos^4 x$

إذن : الدالة $x \longmapsto \frac{-1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$ أصلية للدالة f

التمرين – 35

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$

1 – أكتب $f(x)$ على الشكل : $\cos x(a \sin^4 x + b \sin^6 x + c \sin^8 x)$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية .

2 – إستنتج دالة أصلية لـ f

الحل – 35

– 1

$$f(x) = \sin^4 x \cos^5 x$$
$$= \cos x \sin^4 x \cos^4 x$$
$$= \cos x \sin^4 x(1 - \sin^2 x)^2$$
$$= \cos x \sin^4 x(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$$
$$= \cos x(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)$$ و هو المطلوب

2 – لدينا : $f(x) = \cos x(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x)$

أي : $f(x) = \cos x \sin^4 x - 2\cos x \sin^6 x + \cos x \sin^8 x$

منه : $F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + c$ هي دالة أصلية لـ f

التمرين – 36

u و v دالتان معرفتان على $I = [0 ; \pi/4]$ كمايلي $u(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ و $v(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

1 – تحقق أن من أجل كل x من I : $u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

2 – أوجد دالة أصلية V للدالة v على I و التي تنعدم من أجل 0

الحل – 36

– 1

$$u'(x) = \frac{\cos x \cos^3 x + 3\sin x \cos^2 x \sin x}{(\cos^3 x)^2}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x - 3\cos^4 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{3\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^6 x}$$
$$= \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$ و هو المطلوب

2 – حسب السؤال (1) : $u'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

منه : $u'(x) - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^4 x}$

أي : $\frac{1}{3}u'(x) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^4 x}$

أي : $\frac{1}{3}u'(x) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} = v(x)$

إذن : الدالة الأصلية للدالة v هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{3}u'(x) - \frac{1}{3\cos^2 x}$

منه : $V(x) = \frac{1}{3}u(x) - \frac{1}{3}\tan x + c$

أي : $V(x) = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\tan x + c$ حيث $c \in IR$

البحث عن c :

$$V(0)=0 \Leftrightarrow \frac{\sin 0}{3\cos^3 0} - \frac{1}{3}\tan 0 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = 0$$

نتيجة : $V(x) = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{3}\tan x$

التمرين ــ 37

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x\cos x$

1 ــ أثبت أن : $f(x) + f''(x) = -2\sin x$

2 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحـل ــ 37

1 ــ $f'(x) = \cos x - x\sin x$

$f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x$ منه : $f''(x) = -2\sin x - f(x)$

أي : $f''(x) + f(x) = -2\sin x$ و هو المطلوب .

2 ــ لدينا : $f''(x) + f(x) = -2\sin x$

إذن : $f(x) = -f''(x) - 2\sin x$

أي : الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto -f''(x) - 2\sin x$

منه : $F(x) = -f'(x) + 2\cos x + c$

أي : $F(x) = -\cos x + x\sin x + 2\cos x + c$

أي : $F(x) = \cos x + x\sin x + c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

تحقيق : $F'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x = f(x)$

التمرين ــ 38

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x\sin x$

1 ــ تحقق أن f تقبل دالة أصلية F من الشكل : $F(x) = a\,x\cos x + b\sin x$

2 ــ عين F حيث $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

الحـل ــ 38

1 ــ لتكن F معرفة بـ $F(x) = a\,x\cos x + b\sin x$

إذن : $F'(x) = a\cos x - a\,x\sin x + b\cos x$

أي : $F'(x) = (a+b)\cos x - a\,x\sin x$

أي : $F'(x) = (a+b)\cos x - a\,f(x)$

إذن : يكفي أن يكون $a + b = 0$ و $-a = 1$ حتى تكون $F'(x) = f(x)$ أي F دالة أصلية لـ f على R

أي : $\left.\begin{matrix} a=-1 \\ b=1 \end{matrix}\right\}$ منه : $F(x) = -x\cos x + \sin x$

نتيجة : الدوال الأصلية لـ f على IR هي دوال من الشكل : $F(x) = -x\cos x + \sin x + c$

2 ــ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -1$$

نتيجة : $F(x) = -x\cos x + \sin x - 1$

التمرين ــ 39

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 e^{2x}$

1 ــ عين الأعداد الحقيقية a , b , c حيث تكون الدالة F المعرفة على IR

بـ $F(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$ أصلية لـ f

2 ــ إستنتج دالة أصلية ϕ للدالة f تنعدم من أجل $x = 0$

الحـل ــ 39

1 ــ تكون F دالة أصلية لـ f إذا و فقط إذا كان $F'(x) = f(x)$ من أجل كل x من IR

$$F'(x) = (2\,a\,x + b)\,e^{2x} + 2(a\,x^2 + b\,x + c)\,e^{2x}$$
$$= [2\,a\,x^2 + (2\,a + 2b)\,x + b + 2\,c]\,e^{2x}$$

بالمطابقة مع $f(x) = x^2 e^{2x}$ نحصل على $\left\{\begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 1/4 \end{array}\right.$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ دالة أصلية لـ f

2 ـ لتكن ϕ دالة أصلية لـ f إذن : $\phi(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + c$ حيث $c \in IR$

$$\phi(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -1/4$$

منه : $\phi(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} - \frac{1}{4}$

تحقيق : $\phi'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$

$$= \left(x - \frac{1}{2} + x^2 - x + \frac{1}{2}\right)e^{2x}$$

$$= x^2 e^{2x}$$

$$= f(x)$$

التمرين ـ 40

عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال D

1 ـ $f(x) = \sqrt{x}$: $D =]0 ; +\infty[$

2 ـ $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$: $D = IR$

3 ـ $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$: $D =]-1 ; +\infty[$

الحل ـ 40

1 ـ $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ إذن : $F(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

2 ـ $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = x(x^2+1)^{1/2}$

نضع : $u(x) = x^2 + 1$ إذن : $u'(x) = 2x$ منه : $x = \frac{1}{2}u'(x)$

إذن : $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^{1/2}$

منه : $F(x) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}[u(x)]^{\frac{1}{2}+1}\right) + c$

أي : $F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u(x)\sqrt{u(x)}\right) + c$

أي : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c$

3 ـ $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} = (x+1)^{1+\frac{1}{2}}$

نضع $u(x) = x + 1$ إذن : $u'(x) = 1$

منه : $f(x) = u'(x)[u(x)]^{1+\frac{1}{2}}$

إذن : $F(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+1}[u(x)]^{1+\frac{1}{2}+1} + c$

أي : $F(x) = \frac{2}{5}[u(x)]^2\sqrt{u(x)} + c$

أي : $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} + c$

التمرين ـ 41

لتكن f الدالة المعرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$

1 ـ عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = e^x + a + \dfrac{b\,e^x}{e^x - 1}$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$

الحل ـ 41

1 ـ
$$e^x + a + \frac{b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - e^x + a\,e^x - a + b\,e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} + (a + b - 1)\,e^x - a}{e^x - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$ نحصل على $\begin{cases} a + b - 1 = 1 \\ -a = -1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

نتيجة : $f(x) = e^x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

2 ـ $f(x) = e^x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ إذن : $F(x) = e^x + x + \ln|e^x - 1| + c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين ـ 42

f دالة معرفة على $]2 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right|$

1 ـ عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]-a ; +\infty[$ بـ $g(x) = (x + a)\ln|x + a| - x$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة $h : x \longmapsto \ln|x + a|$ على $]-a ; +\infty[$

3 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]2 ; +\infty[$

الحل ـ 42

1 ـ
$$g'(x) = \ln|x + a| + (x + a) \times \frac{1}{x + a} - 1 = \ln|x + a| + 1 - 1 = \ln|x + a|$$

2 ـ لدينا : $g'(x) = \ln|x + a|$ أي $g'(x) = h(x)$

منه : g هي دالة أصلية لـ h على $]-a ; +\infty[$

3 ـ $f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| = \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$

حسب السؤال (1) فإن :

الدالة $x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - x$ أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x - 2|$

الدالة $x \longmapsto (x + 2)\ln|x + 2| - x$ أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x + 2|$

إذن : الدالة $x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - x - [(x + 2)\ln|x + 2| - x]$

أصلية للدالة $x \longmapsto \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$

أي الدالة $x \longmapsto (x - 2)\ln|x - 2| - (x + 2)\ln|x + 2| + c$ أصلية للدالة f

التمرين ـ 43

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{6\,e^x}{e^{2x} - 1}$

1 ـ عين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(x) = \dfrac{a\,e^x}{e^x - 1} + \dfrac{b\,e^x}{e^x + 1}$

2 ـ إستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0 ; +\infty[$

الحل ـ 43

1 ـ
$$\frac{a\,e^x}{e^x - 1} + \frac{b\,e^x}{e^x + 1} = \frac{a\,e^{2x} + a\,e^x + b\,e^{2x} - b\,e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{(a + b)\,e^{2x} + (a - b)\,e^x}{e^{2x} - 1}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \dfrac{6e^x}{e^{2x}-1}$ نحصل على $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a=6 \\ b=-a \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

نتيجة : $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x-1} - \dfrac{3e^x}{e^x+1}$

2 ــ الدالة $x \mapsto \ln|e^x-1|$ أصلية لـ $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x-1}$

الدالة $x \mapsto \ln|e^x+1|$ أصلية لـ $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن : الدالة $x \mapsto 3\ln|e^x-1| - 3\ln|e^x+1| + c$ هي دالة أصلية لـ f

التمرين ــ 44

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (2x^2-7x+5)e^x$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 ــ تحقق أن من أجل كل x من IR : $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

3 ــ إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR

الحل ــ 44

1 ــ
$$f'(x) = (4x-7)e^x + (2x^2-7x+5)e^x$$
$$= (2x^2-7x+5+4x-7)e^x$$
$$= (2x^2-3x-2)e^x$$
$$f''(x) = (4x-3)e^x + (2x^2-3x-2)e^x$$
$$= (2x^2-3x-2+4x-3)e^x$$
$$= (2x^2+x-5)e^x$$

2 ــ من أجل كل x من IR فإن :
$$4e^x + 2f'(x) - f''(x) = 4e^x + 2(2x^2-3x-2)e^x - (2x^2+x-5)e^x$$
$$= (4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x$$
$$= (2x^2-7x+5)e^x$$
$= f(x)$ و هو المطلوب

3 ــ حسب السؤال السابق فإن : $f(x) = 4e^x + 2f'(x) - f''(x)$

الدالة $x \mapsto 4e^x$ أصلية لـ $x \mapsto 4e^x$

الدالة $x \mapsto f(x)$ أصلية لـ $x \mapsto f'(x)$

الدالة $x \mapsto f'(x)$ أصلية لـ $x \mapsto f''(x)$

منه الدالة $x \mapsto 4e^x + 2f(x) - f'(x) + c$ أصلية لـ f

أي الدالة $x \mapsto 4e^x + 2(2x^2-7x+5)e^x - (2x^2-3x-2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \mapsto (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x + c$ أصلية للدالة f

أي الدالة $x \mapsto (2x^2-11x+16)e^x + c$ أصلية للدالة f

تحقيق : نضع $F(x) = (2x^2-11x+16)e^x + c$

إذن : $F'(x) = (4x-11)e^x + (2x^2-11x+16)e^x$

أي : $F'(x) = (2x^2-11x+16+4x-11)e^x$

أي : $F'(x) = (2x^2-7x+5)e^x$

أي : $F'(x) = f(x)$

التمرين ــ 45

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^x \cos x$

1 ــ أحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2 ــ أوجد العددين a و b حيث من أجل كل x من IR : $f(x) = a f''(x) + b f'(x)$

3 ــ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على IR

الحل ــ 45

1 ــ
$$f'(x) = e^x\cos x - e^x\sin x$$
$$f''(x) = (e^x\cos x - e^x\sin x) - (e^x\sin x + e^x\cos x)$$
$$= -2e^x\sin x$$

2 ـ لدينا : $f(x) = e^x \cos x$ و $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

إذن : $f'(x) = f(x) - e^x \sin x$

أي : $e^x \sin x = f(x) - f'(x)$

نعوض $e^x \sin x$ بـ $f(x) - f'(x)$ في عبارة $f''(x)$ فنحصل على :

$$f''(x) = -2\,(f(x) - f'(x))$$

أي : $f''(x) = -2 f(x) + 2 f'(x)$

أي : $2 f(x) = 2 f'(x) - f''(x)$

منه : $f(x) = f'(x) - \frac{1}{2} f''(x)$ و هو المطلوب

نتيجة : $a = -1/2$ ؛ $b = 1$

3 ـ الدالة $x \longmapsto f(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto f'(x)$
الدالة $x \longmapsto -\frac{1}{2} f'(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto -\frac{1}{2} f''(x)$

منه : الدالة $F : x \longmapsto f(x) - \frac{1}{2} f'(x) + c$ هي دالة أصلية لـ f

إذن : $F(x) = e^x \cos x - \frac{1}{2}(e^x \cos x - e^x \sin x) + c$

$$= \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$$

$= \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + c$ هي دالة أصلية لـ f

تحقيق : $F'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x - \frac{1}{2}(-2 e^x \sin x)$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x + e^x \sin x$$

$$= e^x \cos x$$

$$= f(x)$$

التمرين ـ 46

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^3 e^{2x}$

أوجد دالة أصلية F للدالة f على IR حيث $F(x) = p(x) e^{2x}$ و p كثير حدود من الدرجة الثالثة .

الحـل ـ 46

ليكن $p(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$ حيث a ؛ b ؛ c ؛ d أعداد حقيقية و $a \neq 0$

نضع : $F(x) = p(x) e^{2x}$

إذن : $F'(x) = (3 a x^2 + 2 b x + c) e^{2x} + 2(a x^3 + b x^2 + c x + d) e^{2x}$

أي : $F'(x) = (2 a x^3 + 2 b x^2 + 2 c x + 2 d + 3 a x^2 + 2 b x + c) e^{2x}$

أي : $F'(x) = [2 a x^3 + (2 b + 3 a) x^2 + (2 c + 2 b) x + 2 d + c] e^{2x}$

حتى تكون F دالة أصلية لـ f يكفي و يلزم أن يتحقق أن من أجل كل x من IR

$F'(x) = f(x)$ أي $F'(x) = x^3 e^{2x}$

إذن بالمطابقة نحصل على $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 3a = 0 \\ 2c + 2b = 0 \\ 2d + c = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3/4 \\ c = 3/4 \\ d = -3/8 \end{cases}$

نتيجة : $F(x) = \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) e^{2x}$

تحقيق : $F'(x) = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right) e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8}\right) e^{2x}$

$$= \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{4}\right) e^{2x}$$

$$= x^3 e^{2x}$$

$$= f(x)$$

التمرين ـ 47

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x}$

حيث λ ؛ θ ؛ a ؛ b أعداد حقيقية ثابتة .

1 ـ أحسب $f'(x)$

لتكن g الدالة المعرفة على IR بـ $g(x) = (\sin x - 5 \cos x)\, e^{-x}$

2 ـ باستعمال نتيجة السؤال (1) عين دالة أصلية G للدالة g و التي تحقق $G(0) = 3$

الحـل ـ 47

1 ـ $f'(x) = (-a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x)\, e^{\lambda x} + \lambda (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x}$

$= (a\lambda \cos \theta x + b\lambda \sin \theta x - a\theta \sin \theta x + b\theta \cos \theta x)\, e^{\lambda x}$

$= [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x]\, e^{\lambda x}$

2 ـ حسب السؤال (1) فإن الدالة $x \longmapsto (a \cos \theta x + b \sin \theta x)\, e^{\lambda x} + c$

هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto [(a\lambda + b\theta) \cos \theta x + (b\lambda - a\theta) \sin \theta x]\, e^{\lambda x}$

نضع : $\begin{cases} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a\lambda + b\theta = -5 \\ b\lambda - a\theta = 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ -a + b = -5 \\ -b - a = 1 \end{cases}$ منه $\begin{cases} \lambda = -1 \\ \theta = 1 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

منه : الدالة $x \longmapsto (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + c$ هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto [-5 \cos x + \sin x]\, e^{-x}$

أي : $G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + c$ حيث c ثابت حقيقي نبحث عنه كمايلي :

$G(0) = 3 \Rightarrow (2\cos(0) - 3\sin(0))\, e^{0} + c = 3$

$\Rightarrow 2 + c = 3$

$\Rightarrow c = 1$

نتيجة : $G(x) = (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x} + 1$

تحقيق : $G'(x) = (-2 \sin x - 3 \cos x)\, e^{-x} - (2 \cos x - 3 \sin x)\, e^{-x}$

$= (-2 \sin x - 3 \cos x - 2 \cos x + 3 \sin x)\, e^{-x}$

$= (\sin x - 5 \cos x)\, e^{-x}$

$= g(x)$

التمرين ـ 48

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = e^{-x} \sin x$

1 ـ أحسب المشتقات المتتابعة للدالة f إلى غاية الرتبة 4 (نرمز لها f' ؛ f'' ؛ $f^{(3)}$ ؛ $f^{(4)}$)

2 ـ أوجد علاقة بين الدالة f و مشتقتها $f^{(4)}$ (ذات الرتبة 4)

3 ـ إستنتج دالة أصلية F للدالة f على IR

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = F[(2n + 1)\pi] - F[2\pi n]$

4 ـ أحسب u_0

5 ـ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi} + 1)$

6 ـ بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب أساسها

7 ـ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

الحـل ـ 48

1 ـ

$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$f''(x) = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -2 e^{-x} \cos x$

$f^{(3)}(x) = 2 e^{-x} \cos x + 2 e^{-x} \sin x$

$f^{(4)}(x) = -2 e^{-x} \cos x - 2 e^{-x} \sin x - 2 e^{-x} \sin x + 2 e^{-x} \cos x = -4 e^{-x} \sin x$

2 ـ حسب السؤال السابق لدينا : $f^{(4)}(x) = -4 e^{-x} \sin x$

أي : $f^{(4)}(x) = -4 f(x)$

منه : $f(x) = \dfrac{-1}{4} f^{(4)}(x)$ و هو المطلوب

3 ــ الدالة $x \mapsto f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto f^{(4)}(x)$

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$ هي دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{-1}{4} f^{(4)}(x)$

منه : $F(x) = \frac{-1}{4} f^{(3)}(x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{4}(2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x)$

أي : $F(x) = \frac{-1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

4 ــ من أجل $n = 0$ نحصل على : $u_0 = F(\pi) - F(0)$

$$= \left[\frac{-1}{2}e^{-\pi}(\cos\pi + \sin\pi)\right] - \left[\frac{-1}{2}e^{0}(\cos 0 + \sin 0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$$

5 ــ ليكن n عدد طبيعي كيفي إذن : $(2n+1)$ عدد فردي و $(2n)$ عدد زوجي .

منه : $\begin{cases}\cos(2n+1)\pi = -1\\ \sin(2n+1)\pi = 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos 2n\pi = 1\\ \sin 2n\pi = 0\end{cases}$

إذن : $\left.\begin{array}{l} F[(2n+1)\pi] = -\frac{1}{2}e^{-(2n+1)\pi}(-1+0) = \frac{1}{2}e^{-(2n+1)\pi} \\ F[2n\pi] = -\frac{1}{2}e^{-2n\pi}(1+0) = -\frac{1}{2}e^{-2n\pi}\end{array}\right\}$

نتيجة : $F[(2n+1)\pi] - F[2n\pi] = \frac{1}{2}e^{-2n\pi-\pi} - \frac{-1}{2}e^{-2n\pi}$

$$= \frac{1}{2}e^{-2n\pi}(e^{-\pi} + 1)$$

خلاصة : من أجل كل n من IN : $u_n = \frac{1}{2}e^{-2n\pi}(e^{-\pi}+1)$ و هو المطلوب .

6 ــ لدينا من أجل كل n من IN : $u_n = \frac{1}{2}e^{-2n\pi}(e^{-\pi}+1)$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)(e^{-2\pi})^n$$

إذن : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$ و أساسها $e^{-2\pi}$

7 ــ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)(e^{-2\pi})^n$

$= 0$ لأن $0 < e^{-2\pi} < 1$

التمرين ــ 49

f دالة معرفة على $IR - \{-2 ; 2\}$ بـ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

1 ــ بين أن f زوجية ثم أدرس تغيراتها .

2 ــ بين أن يمكن كتابة $f(x)$ من الشكل : $f(x) = 1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

3 ــ إستنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

لتكن g الدالة المعرفة على $D = IR - \{-2 . 2\}$ بـ $g(x) = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

نسمي (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

4 ــ بين أن g فردية ثم أدرس تغيراتها .

5 ـ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب معادلته .

6 ـ أرسم المنحنى (C) .

7 ـ أحسب مشتقة الدالة $h : x \longmapsto (x + a) \ln|x + a| - x$ من أجل $x \neq a$

8 ـ إستنتج دالة أصلية G للدالة g على المجال D

الحل ـ 49

1 ـ من أجل كل x من $IR - \{-2 . 2\}$ فإن $(-x) \in IR - \{-2 . 2\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

نتيجة : f دالة زوجية . يمكن إقتصار دراستها على المجال $[0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ كمايلي :

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{4}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{(2)^2}{x^2 - 4} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{4}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

f دالة قابلة للاشتقاق على $IR - \{-2 . 2\}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

إذن : $f'(x)$ تتبع إشارة $-8x$ فقط لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-8x$		+	0	-	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	-	‖	-	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

ملاحظة : تم إستنتاج النهايات على المجال $]-\infty ; 0[$ بالتناظر إلى محور التراتيب لأن f دالة زوجية .

2 ـ ليكن $x \in IR - \{-2 ; 2\}$:

$$1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{x^2 - 4 + a(x+2) + b(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + (a+b)x + 2a - 2b - 4}{x^2 - 4}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ نحصل على $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a - 2b - 4 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

نتيجة : $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ و هو المطلوب

3 ـ الدالة $x \longmapsto x$ أصلية لـ $x \longmapsto 1$

الدالة $x \longmapsto \ln|x - 2|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{x-2}$

الدالة $x \longmapsto \ln|x + 2|$ أصلية لـ $x \longmapsto \frac{1}{x+2}$

إذن : الدالة $x \longmapsto x + \ln|x - 2| - \ln|x + 2|$ هي دالة أصلية لـ f

أي : $F(x) = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$ هي دالة أصلية للدالة f

4 ـ من أجل كل x من D فإن $(-x) \in D$

$$g(-x) = -x + \ln\left|\frac{-x-2}{-x+2}\right|$$

$$= -x + \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \quad \text{لأن} \quad \frac{-x-2}{-x+2} = \frac{-(x+2)}{-x+2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$= -x - \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| \quad \text{لأن} \quad \ln\left|\frac{a}{b}\right| = -\ln\left|\frac{b}{a}\right|$$

$$= -\left(x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right)$$

$= -g(x)$ إذن g دالة فردية .

التغيرات : g معرفة على D

$$g(0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} 2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{\substack{y \to 0 \\ >}} 2 + \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \ln\left|\frac{x}{x}\right| = +\infty$$

g قابلة للاشتقاق على D و دالتها المشتقة $g'(x) = f(x)$ لأن g هي دالة أصلية للدالة f حسب السؤال (3)
منه جدول إشارة $g'(x)$ هو نفسه جدول إشارة $f(x)$.
إذن : حسب جدول تغيرات الدالة f نستنتج إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة g :

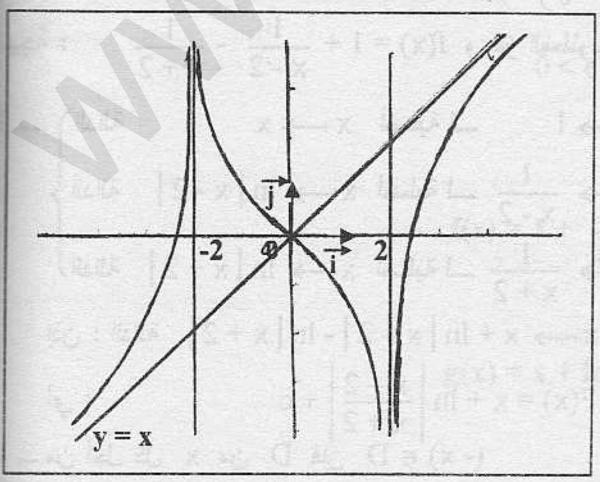
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

ملاحظة : النهايات على المجال $]-\infty ; 0[$ تستنتج بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ لأن الدالة g فردية .

5 — $$\lim_{x \to \infty} g(x) - x = \lim_{x \to \infty} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \lim_{x \to \infty} \ln\left|\frac{x}{x}\right| = 0$$

إذن : المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ عند $+\infty$ و $-\infty$

6 — الإنشاء : لاحظ من جدول تغيرات الدالة g أن $g'(0) = 0$
و الدالة g' لا تغير إشارتها حول 0 إذن النقطة $A(0 ; 0)$
هي نقطة إنعطاف المنحنى (C)



7 ـ
$$h'(x) = \ln|x+a| + \frac{1}{x+a}(x+a) - 1$$
$$= \ln|x+a| + 1 - 1$$
$$= \ln|x+a|$$

إذن : h هي دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln|x+a|$

8 ـ الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln|x-2| - x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x-2|$

الدالة $x \longmapsto (x+2)\ln|x+2| - x$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln|x+2|$

إذن : الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln(x-2) - x - [(x+2)\ln|x+2| - x]$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

لأن $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = \ln|x-2| - \ln|x+2|$

منه : الدالة $x \longmapsto (x-2)\ln(x-2) - (x+2)\ln|x+2|$ هي دالة أصلية لـ $x \longmapsto \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

نتيجة : $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (x-2)\ln|x-2| - (x+2)\ln|x+2| + c$ هي دالة أصلية للدالة g .

التمرين ـ 50

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2}$ و (C) منحناها في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$

1 ـ أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها .

2 ـ أحسب $f(\sqrt{e})$ ثم أدرس تغيرات الدالة f

3 ـ عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

4 ـ أرسم (C)

5 ـ أثبت أن من أجل كل $x > 0$: $f(x) > 0$

6 ـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد حلول المعادلة : $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$

لتكن g دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـ $g(x) = x + \frac{3}{4x} + \frac{3\ln x}{2x}$

7 ـ أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ فسر النتيجة هندسيا .

8 ـ أحسب $g'(x)$ ثم إستنتج تغيرات الدالة g

9 ـ عين معادلة المماس (T) للمنحنى (γ) الممثل للدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

10 ـ بين أن (γ) يقبل نقطة إنعطاف يطلب إحداثياها .

11 ـ أحسب $g(1/2) \times g(1)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة $g(x) = 0$ ؟

12 ـ بين أن (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب معادلته

13 ـ أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) ثم أرسم (γ)

الحـل ـ 50

1 ـ f معرفة على $]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3\ln x}{2x^2} = +\infty$$ لأن $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\ln x}{x^2} = +\infty\end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x} \times \frac{\ln x}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{2x} = 0\end{array}\right\}$ لأن

2 ـ
$$f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3\ln(e^{1/2})}{2e} = 1 + \frac{3}{4e} - \frac{3}{4e} = 1$$

التغيرات :

$$f'(x) = \frac{-8x(3)}{16x^4} - \frac{\frac{3}{x}(2x^2) - 4x(3\ln x)}{4x^4}$$

$$= \frac{-3x}{2x^4} - \frac{6x - 12x\ln x}{4x^4}$$

$$= \frac{-3x - 3x + 6x\ln x}{2x^4}$$

$$= \frac{6x(-1 + \ln x)}{2x^4}$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-1 + \ln x)$ فقط لأن $\left.\begin{matrix} 2x^4 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\}$ كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f :

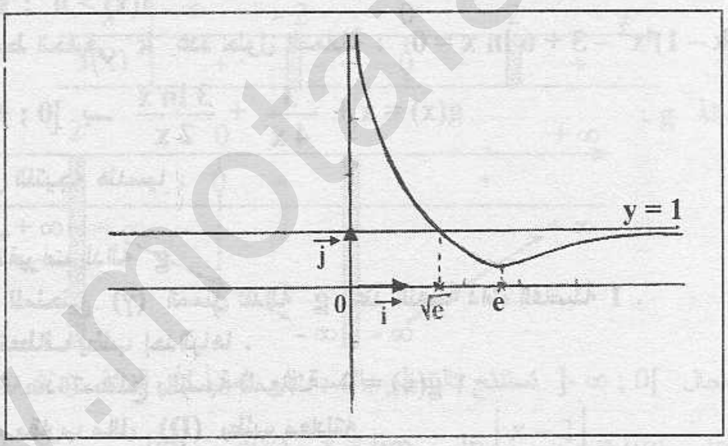
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1 - \frac{3}{4e^2}$	$\nearrow$	1

$$f(e) = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3\ln e}{2e^2} = 1 + \frac{3}{4e^2} - \frac{3}{2e^2} = 1 - \frac{3}{4e^2} > 0$$

3 ـ المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى (C) على اليمين عند 0

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ـ الإنشاء



5 ـ حسب الإنشاء فإن المنحنى (C) يقع دائما فوق محور الفواصل إذن : من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$

6 ـ ليكن : $x > 0$: $4kx^2 - 4x^2 - 3 + 6\ln x = 0 \Leftrightarrow 4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$

$$\Leftrightarrow 4kx^2 = 4x^2 + 3 - 6\ln x$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4x^2 + 3 - 6\ln x}{4x^2}$$

$$\Leftrightarrow k = 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3}{2x^2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow k = f(x)$$

إذن : عدد حلول المعادلة $4(k-1)x^2 - 3 + 6\ln x = 0$ هو عدد نقط تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ مع المنحنى (C) الممثل للدالة f كمايلي :

لما $k \in \left]-\infty ; 1 - \frac{3}{4e^2}\right[$: لا يوجد نقط تقاطع إذن : المعادلة لا تقبل حلولا في IR

لما $k = 1 - \frac{3}{4e^2}$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا هو $x = e$

لما $k \in \left]1 - \frac{3}{4e^2} ; 1\right[$: يوجد نقطتي تقاطع إذن : المعادلة تقبل حلين مختلفين

لما $k \in [1 ; +\infty[$: يوجد نقطة تقاطع واحدة إذن : المعادلة تقبل حلا واحدا .

7 – $$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}\left[x^2 + \frac{3}{4} + 3 \ln x\right] = -\infty$$

لأن $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty \end{array}\right\}$

التفسير الهندسي : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب لمنحنى الدالة g عند 0 على اليمين .

8 – $$g'(x) = 1 + \frac{-12}{16x^2} + \frac{\frac{3}{x}(2x) - 6 \ln x}{4x^2}$$

$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{6 - 6 \ln x}{4x^2}$$

$$= 1 - \frac{3}{4x^2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$$

$$= 1 + \frac{3}{4x^2} - \frac{3 \ln x}{2x^2}$$

$$= f(x)$$

إذن : إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ أي $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $]0 ; +\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{3}{4x} + \frac{3 \ln x}{2x} = +\infty$$

9 – $$\left.\begin{array}{l} g(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \\ g'(1) = f(1) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \end{array}\right\}$$

إذن : معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي :

$y = \frac{7}{4}(x - 1) + \frac{7}{4}$ أي $y = \frac{7}{4}x$

10 – $g''(x) = [g'(x)]' = f'(x)$ لأن $g'(x) = f(x)$

إذن : $g''(x) = \frac{6x(-1 + \ln x)}{2x^4}$ حسب السؤال (2)

منه جدول إشارة $g''(x)$ على $]0 ; +\infty[$: هو نفسه جدول إشارة $f'(x)$ كمايلي :

x	0		e		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : g'' تنعدم عند e و تغير إشارتها .

منه : النقطة $A(e\,;g(e))$ هي نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة g

حساب $g(e)$: $g(e)=e+\frac{3}{4\,e}+\frac{3}{2\,e}=\frac{4\,e^2+9}{4\,e}$

منه : $A\left(e\,;\frac{4\,e^2+9}{4\,e}\right)$ هي نقطة إنعطاف المنحنى (γ)

11 — $g(1)=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}>0$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{6}{4}-\frac{6\ln 2}{2}=2-3\ln 2<0$

$\left.\begin{array}{l}\text{g مستمرة على } [1/2\,;1]\\ g(1)\times g(1/2)<0\end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا من المجال $]1/2\,;1[$

12 — $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\frac{3}{4\,x}+\frac{3\ln x}{2\,x}-x\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{4\,x}+\frac{3}{2}\times\frac{\ln x}{x}=0$ لأن $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}$

منه المنحنى (γ) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) عند $+\infty$ معادلته $y=x$

13 — وضعية (γ) بالنسبة إلى (D) :

$g(x)-x=\frac{3}{4\,x}+\frac{3\ln x}{2\,x}=\frac{3}{2\,x}\left(\frac{1}{2}+\ln x\right)$

إذن : إشارة $[g(x)-x]$ هي إشارة $\frac{1}{2}+\ln x$ فقط لأن $\frac{3}{2\,x}>0$ كمايلي :

$\frac{1}{2}+\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x\geq\ln e^{-1/2}$

$\Leftrightarrow x\geq e^{-1/2}$

$\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{\sqrt{e}}$

منه إشارة $g(x)-x$ كما يلي :

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
$g(x)-x$	‖	-	0	+	

نتيجة :

لما $x\in\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$: (γ) تحت (D)

لما $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$: (γ) يقطع (D)

لما $x\in\left]\frac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$: (γ) فوق (D)

الإنشاء :