بكالوريـــا 2022

المنصة العلمية نحو الامتياز

كوكب النُّخبة في مادة الريـــاضيات

المحطة التحضيرية الممتازة نحو اختبار الفصل الثاني ،، فـ البكالوريا

ملاحظة : هذه المادة تعتبر من أهم المواد العلمية و المعامل لها يتحدث نحو شعبة علوم تجريبية { 5 } ،،

كثيرا من الاهتمام مع الصبر و الإصرار و تُحقِّق الامتياز بإذن الله ،،

علوم تجريبية

الباقة تحتوي :

{ 05 } خَمْسُ إختبارات تحضيرية مُرفقة بالحلول النَّموذجية

باقة الامتياز

... تذكروا أن :

تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

توجيهات المنصة العلمية

1 * **أيُّها التلاميذ الشُّرفاء** ،، من أعماق كوب النُّخبة نضع بين أيديكم هذه الباقة المعلوماتية التطبيقية المُفعمة بالأفكار الطازجة و المفيدة ،، التي تتضمن ::

- **الجزء الأول** :: { 05 } مواضيع ذات نُكهة علمية وفكرية خاصة ،، بحيث تتضمن **محور الدوال وما حمل + محور المتتاليات العددية + محور الدوال الأصلية و الحساب التكاملي** من برنامج مادة الرياضيات ،، { من الصفحة 01 إلى 14 }،،
- **الجزء الثاني** :: الحلــول النمــوذجية للمواضيــع الخمس ،، { من الصفحة 14 إلى 44 }،،

2 * **أيُّها الشُّرفاء** ***رَكِّزوا هُنــا*** ،، هذه الباقة تعتبر محطة تحضيرية لاختبار الفصل الثاني ثم نحو امتحان البكالوريا ،، كما أنها تتضمن محتوى الفصل الأول من أجل الاسترجاع المعلوماتي لهذا تعتبر في الأساس كمراجعة تحصيلية منذ بداية الموسم حتى الآن ،، المطلوب منكم هو استغلال الوقت القادم للمحاولة في هذه الباقة ،،

3 * **أيُّها الشُّرفاء** ***النظاميين*** : وَلْيكن في العلم أن هذه الباقة تشمل المحاور المذكورة في أول التوجيهات ،، أي من لم يدرس المحاور الأخير في القسم النظامي ... عليه بالتركيز على ما تم تناوله من دروس في القسم ،، دون استعجال في دخول المحاور القادمة ،،

4 * **أيُّها الشُّرفاء** ***الأحرار*** : المطلوب منكم المحاولة في كامل مضمون الباقة لتكون بمثابة مرحلة جس النبض و مواكبة وتيرة الدروس النظامية للموسم الحالي ،، مع تدوين الأفكار طبعا ،،

5 * **أيُّها التلاميذ الشُّرفاء ،، تذكروا أنَّ وقت المحاولة يتم تحسينه بالتدرج إلى أن يصبح متوازن مع مضمون الاختبار ،، كما أنَّ هذه الاختبارات مركَّزة نوعا ما ، ابتسموا .. حاولوا**

6 * **أيُّها التلاميذ الشُّرفاء** ،، بعد تفحص المواضيع و المحاولة فيها ،، نرجوا منكم تدوين الأفكار الطازجة في كراس خاص مع تحديد رقم الموضوع و التمرين ،، من أجل العودة لأخذها قُبيل موعد اختبارات الفصل الثاني ،، ثُمَّ الاختبار التجريبي ،، فـالبكالوريا في قادم الزمن .. تسهيلا لكم و استغلالا للوقت .

- **خِتاما ،، اللَّهم نسألك ذاك الشيء لتلاميذنا الشُّرفاء ، فنسجد لك سوِياً مِن شدَّة الفرح .**

تغريدة أمل : *أيُّها التلاميذ الشُّرفــــــاءْ ،، إننـاَ نسعى لتوفير أجود المواد المعلوماتية الأولية لكم ،، من أجل أن تُبدعوا في صُنعِ تاج الامتياز ،، فـ اَبْدِعُوا ،،*

https://www.facebook.com/okba.bac2010

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

- باقة النّخبة منتقاة من أنجع المراجع - محطة التحضير الممتاز - 2 - بكالوريا 2022 -

خـــــــاص بشعبة : عـلـوم تجريبيــة

1- مقتطفات من حقيبة المواضيع الممتازة للأستاذ علالو محمد

2- مقتطف من باقة تمارين الأستاذ توامي عمر

3- مقتطف من باقة تمارين الأستاذ بوشناق يوسف

4- مقتطف من باقة مواضيع الأستاذ سعيد الوزاني

5- مقتطف من باقة تمارين الأستاذ سرخاس عبد البـاسط

6- مقتطف من باقة مواضيع الأستاذ مصطفاي عبد العزيز

7- مقتطف من باقة تمارين الأستاذ قويسم براهيم الخليل

8- مقتطف من باقة تمـــارين الأستاذ بلقاسم عبد الرزاق

9- مقتطفات من مجلة البكالوريات الأجنبية للأستاذ شعبان أسامة

10- بكالوريات رسمية وطنية سابقة للشعب { ر ، ت ر }

تصحيح مفصل من مجلة الرائد الأستاذين بالعبيدي محمد العربي + باي زواوي

11- مقتطفات من اختبارات فصلية و بكالوريات تجريبية وطنية سابقة

12- مقتطفات من امتحانات إثبات المستوى - مؤسسة التكوين عن بعد -

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

كوكب النُّخبة في مــادة الرياضيات - بكالوريا 2022 -

المنصة العلمية : عقبة بن نافع

الجزء الأول 01

خـــاص بشعبة : عـلوم تجريبيـة

المواضيع

ملاحظة :

الحلول للمواضيع موجودة في الجزء **02** بالترتيب ،، من أجل منح وقت للمحاولة و عدم ملاحظة الحلول و تشويش الذاكرة إلا بعد المحاولة المباشرة ،، نَعلم أنَّ الفضول لرؤية الحل قبل المحاولة أو حتى أثناء المحاولة موجود بكثرة عند أغلب التلاميذ ،،، بالتوفيق .

تحت شعار

تعبُ المُراجعةْ أَفضَلُ مِنْ ألمِ السُّقُوطْ

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المنصة العلمية للبكالوريا - عقبة بن نافع - | الموسم الدراسي : 2021 / 2022

شعبة : علـوم تجريبية . | المستوى : سنة ثـالثة ثـانوي

01

الاختبار 01 الخاص بالنُّخبة في مادة : الرياضيات | المدة الزمنية : 135 دقيقة

• الاختبار الأول من محطة التحضير الممتاز - الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

التمرين الأول :

عين في كل حالة الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات (ا) ; (ب) ;(ج) و (د) (التبرير مطلوب)

1)-الكتابة المبسطة للعدد A المعرف بـ: $A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln\left(e+1\right)$ هي:

ا) $A=0$ ب) $A=1$ ج) $A=-1$ د) $A=e$

2)- من اجل كل عدد حقيقي x العدد $2x-\ln\left(e^{x}+3\right)$ يساوي :

ا) $3x+\ln\left(1+3e^{-x}\right)$ ب) $x-\ln\left(1+3e^{-x}\right)$ ج) $x+\ln\left(1+3e^{-x}\right)$ د) $3x-\ln\left(1+3e^{-x}\right)$

3)-عدد حلول المعادلة $e^{x}-3e^{-x}=-2$ في $\mathbb{R}$ هو :

ا) 1 ب) 2 ج) 4 د) 0

4)-النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]$ تساوي :

ا) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{3}{5}$ ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{9}{20}$

5)- نعرف من اجل كل عدد طبيعي n المجموع: $S=e^{\ln5}+e^{2\ln5}+e^{3\ln5}+.......+e^{n\ln5}$ ومنه :

ا) $S=5^{n+1}-1$ ب) $S=\frac{5}{4}\left(1-5^{n}\right)$ ج) $S=\frac{1}{4}\left(1-5^{n+1}\right)$ د) $S=\frac{5}{4}\left(5^{n+1}-1\right)$

التمرين الثاني :

• علما أنَّ : الأجزاء الثلاث مستقلة عن بعضها البعض ،،

الجزء الأول :

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\frac{5x^{2}-x+3}{x^{2}+x+1}$ و $G(x)=\frac{-6x-2}{x^{2}+x+1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$

1/- تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$$

2/- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

الجزء الثالث :

I. f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{3+2\ln x}{x}.$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II. من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x] dx$.

1. بيّن أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.
2. أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0.
3. احسب u_n بدلالة n.
4. من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

- احسب S_n بدلالة n.

أيُّها التلميذ {ة} الشَّريف {ة} ::

حاول ،، قاوم ،، تحدى ،، لا تتردد

لا ملْ ،، لا فشلْ ،، حتى تحقيق ذلك الأملْ

اللهم توفيقاً و نجاحاً لك

التمرين الثالث :

(I) g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=4e^{x}-2xe^{x}-4$

1) أدرس تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5;1,6[$

3) أحسب $g(0)$ و استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}$ ،نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، بحيث : $\|\vec{i}\|=2cm$

1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

2) أ . بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-2x)^{2}}$

ب .أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

3) أ . بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ثم عين حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$

ب.عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $a=1$.

جـ . أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (D) الذي معادلته $y=-1$

د. أرسم المماس (T) ، المستقيم (D) و المنحني (C_f).

4) λ عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0[$.

احسب بـ cm^2 المساحة $S(\lambda)$ ، مساحة الحيز المستوي المحد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=\lambda$ ، $x=0$ و $y=-1$ ، ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\dfrac{|2x-2|}{e^{x}-2x}$ ، نسمي (C_h) المنحني الممثل لها

أ. أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب.أرسم في معلم آخر المنحني (C_h) موضحا كيفية الرسم

جـ .عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $\left|\dfrac{2x-2}{e^{x}-2x}\right|=|m|$ ثلاث حلول متمايزة

...... انتهى الموضوع 01 ،،

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المنصة العلمية للبكالوريا - عقبة بن نافع -　　　　الموسم الدراسي : 2021 / 2022

شعبة : علـوم تجريبية .　　　　02　　　　المستوى : سنة ثـالثة ثـانوي

الاختبار 02 الخاص بالنُّخبة في مادة : الرياضيات　　　　المدة الزمنية : 135 دقيقة

• الاختبار الثاني من محطة التحضير الممتاز - الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

التمرين الأول :

.1 f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

.1أ. عين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

.1ب. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

.1جـ. أرسم المنحنى (C_f) .

.2 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

.2أ. أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ ، والنقط M_1 و M_2 من المنحنى (C_f) التي فواصلها على الترتيب : u_1 و u_2 علما بأن M_0 فاصلتها u_0 .

.2ب. برهن أنه من أجل عدد طبيعي n يكون : $u_n\geq e$.

.2جـ. برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

.2د. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

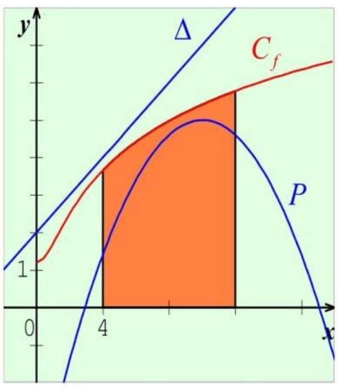
التمرين الثاني :

• علما أنَّ : الجزء الأول مستقل عن الجزء الثاني ،،

الجزء الأول :

في الشكل التالي لدينا:

- المنحنى C_f الممثل للدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$
- القطع المكافئ P الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{10}x^2+2x-5$
- المستقيم Δ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x+2$



نعتبر المساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث: $4\leq x\leq 12$ و $0\leq y\leq f(x)$

.1 باستعمال *الشكل* بين أن: $-\dfrac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}x+2$

.2 استنتج *حصرا* للمساحة A .

الجزء الثاني :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التالية : $y'-y=-(x-1)^2 \quad ...(E)$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c التي من أجلها تكون الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ax^2+bx+c$ حلا للمعادلة التفاضلية (E)

2) عن حلول المعادلة التفاضلية (E_0) التالية : $y'-y=0 \quad ...(E_0)$

3) برهن أن : f حل للمعادلة التفاضلية (E) إذا وفقط إذا كانت $(f-g)$ حل للمعادلة التفاضلية (E_0)

4) استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

5) عين الدالة h التي هي حل للمعادلة التفاضلية (E) و التي تحقق $h'(0)=1$

التمرين الثالث :

:

I) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

- ادرس اتجاه تغير الدالة h، استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$.

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. ب) احسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x)=-h(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3;0.4[$.

- استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له .

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f) .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\frac{1}{2}x+m \quad ...(E)$

5) لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k) (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}^*$

ب) اوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) λ عدد حقيقي حيث: $\lambda>1$. أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا.

- أحسب $\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)$.

...... انتهى الموضوع 02 ،،

• الاختبار الثالث من محطة التحضير الممتاز - الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

التمرين الأول :

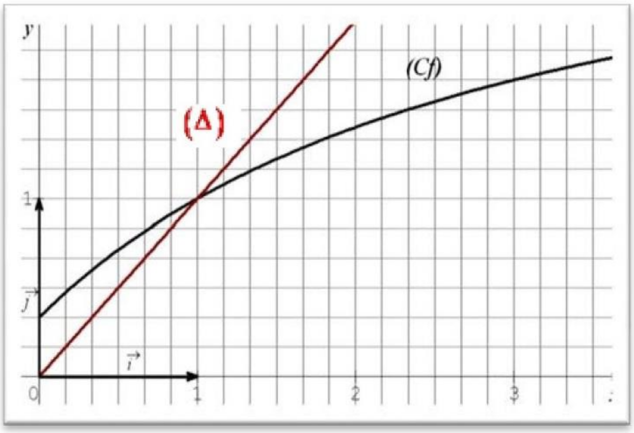
نعتبر الدالة f المعرفة و المتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول u_0 حيث :

$u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

$I)$ عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

$II)$ نضع في كل ما يلي $\alpha=0$



1) أ. انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<1$

ب. بين أن المتتالية متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على ـبـ : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها.

ب. عبر بدلالة n عن v_n و u_n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=1+\dfrac{v_{2021}}{v_{2020}}+...+\dfrac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$. ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

5) احسب بدلالة n المجموع T حيث : $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+...+\ln(|v_{n+2019}|)$

التمرين الثاني :

- **علما أنَّ : الأجزاء الثلاث مستقلة عن بعضها البعض ،،**

الجزء الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{\alpha e^x}{e^x-1}+\dfrac{\beta e^x}{e^x+1}$

2. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$

1/- بيّن أن $x\longmapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$

2/- استنتج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=-3$

الجزء الثالث :

◄ f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+(1+\ln x)^2$ ، ولنعتبر التكاملين :

$$I=\int_1^e(1+\ln x)dx \quad ; \quad J=\int_1^e(1+\ln x)^2dx$$

❶ بين أن $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثمّ استنتج أنّ : $I=e$.

❷ باستعمال التكامل بالتجزئة ، أثبت أنّ : $J=2e-1$.

❸ أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين منحنى الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها :

$$x=1 \quad ; \quad x=e \quad ; \quad y=0$$

التمرين الثالث :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، وحدة الطول $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|=8cm$

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=e^{x}+\ln x-\frac{1}{x}$

1/ ادرس تغيرات الدالة g .

2/ اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0{,}5<\alpha<1$.

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-\frac{\ln x}{e^{x}}$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً .

2/ اثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}=0$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً .

3/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ بين أنه إذا كان $x\in[1;4]$ فإن : $f(x)\in[1;4]$.

5/ أ- نأخذ $\alpha\approx 0{,}7$ ، عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-1} .

ب- أرسم المنحنى (C_f) .

III- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ $u_1=2$ وَ $u_{n+1}=f(u_n)$.

1/ مثل على المنحنى (C_f) النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على الترتيب .

2/ أثبت بالتراجع من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $1\le u_n\le 4$.

3/ ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4/ استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

...... انتهى الموضوع 03 ،،

• الاختبار الرابع من محطة التحضير الممتاز ـ الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

التمرين الأول :

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1) أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $0 < u_n < 1$

جـ. أدرس اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n)

2) نضع أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

أ. برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $P_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$

ب. عين $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

3) نضع أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $v_n = \ln(u_n)$

أ. تحقق من أن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$

ب. بين أن المتتالية العددية (v_n) متزايدة تماما

جـ. بين أن المتتالية العددية (v_n) محدودة

د. استنتج أن المتتالية العددية (v_n) متقاربة ، حدد نهايتها .

و. عين بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

أيها التلاميذ الشرفاء سددوا أقلامكم نحو أوراق المحاولات بتنظيم الإجابات و استغلال الأوقات ،،

التمرين الثاني :

- **علما أنَّ : الجزء الأول مستقل عن الجزء الثاني ،،**

الجزء الأول :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان لدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2 \quad ; \quad g(x)=e^x-ex$$

/1 ادرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) .

/2 احسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. الوحدة 3cm

- λ عدد حقيقي حيث : $0<\lambda<1$ ، نعتبر $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}-x^2\ln x.dx$

1- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ.

2- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1.أدرس اتجاه تغير الدالة g.

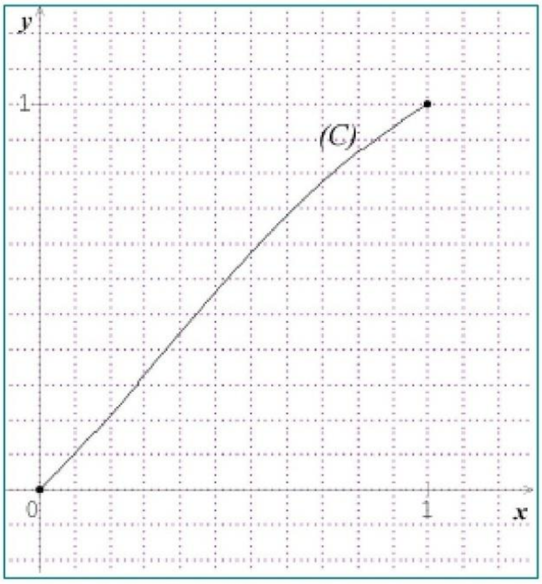
2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$.

3.استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x-x>0$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل :



1.بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.ليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=x$.

أ-بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D).

3.أ-عين دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

ب-احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (D)

و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثالث: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعلاقة: $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1. باستعمال الشكل السابق مثل الحدود الأربعة الأولى دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

2.بين أنه من أجل عدد طبيعي n ، $\dfrac{1}{2}<u_n<u_{n+1}<1$.

3.استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها

..... انتهى الموضوع 04 ،،

• الاختبار الخامس من محطة التحضير الممتاز ـ الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،، ❖

التمرين الأول :

I ـ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2e^{2x}-2e^{x}+1}$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيًّا .

❷ أثبت أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}(1-e^{x})}{(2e^{2x}-2e^{x}+1)^{2}}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات f .

II ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0=\dfrac{3}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(\ln U_n)$.

❶ أثبت بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{1}{2}<U_n<1$.

❷ بيّن أنّ : $U_{n+1}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^{2}+1}$

❸ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

❹ أثبت أنّ المتتالية (V_n) هندسية حيث : $V_n=\ln\left(\dfrac{1}{U_n}-1\right)$ واكتب عبارة حدّها العام .

❺ استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

❻ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=V_{2022}+V_{2023}+V_{2024}+\ldots+V_{2022+n}$.

❼ أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n=S_0+S_1+S_2+\ldots+S_n$.

التمرين الثاني :

- **علما أنَّ : الأجزاء الثلاث مستقلة عن بعضها البعض ،،**

الجزء الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

/1- جد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا:

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$$

/2- استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0)=1$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.
2. استنتج حصرا لِ $f(x)$.
3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1}f(x)dx$

الجزء الثالث :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x)=x+f(x)$$
$$H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$$

/1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$

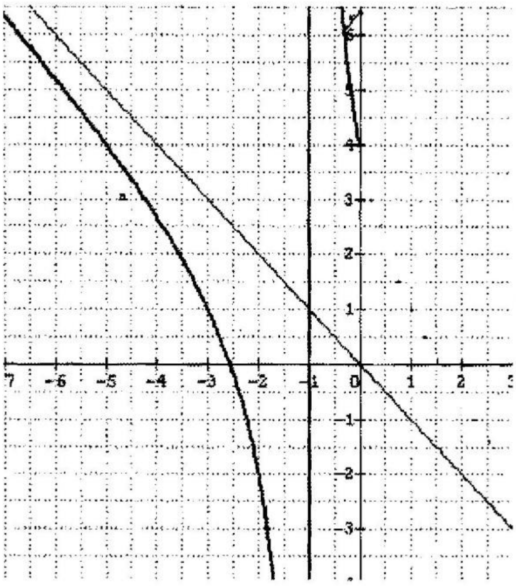
/2.

أ/ احسب التكامل التالي: $A(\lambda)=\int_0^{\lambda}h(x)dx$ حيث: λ عدد حقيقي موجب تماما، وفسر النتيجة بيانيا

ب/ احسب $\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$

التمرين الثالث :

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$



(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

1) أ) أُحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أُحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أُدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أُحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أُكتب معادلتي المماسين $(_1\Delta)$ و $(_2\Delta)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أُرسم $(_1\Delta)$، $(_2\Delta)$ و (C_k).

4) أُحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=-\dfrac{1}{2}$ ، $x=\dfrac{1}{2}$ ، $y=0$

...... انتهى الموضوع 05 ،،

.. انتهى الجزء الأول الخاص بالمواضيع الخمس .. نحو الجزء الثاني الخاص بالحلول ،،

كوكب النُّخبة في مـادة الرياضيات - بكالوريا 2022 -

الجزء الثاني 02

خـــــاص بشعبة : عـلوم تجريبيـة

التصحيح النموذجي

تحت شعار

لا مللْ لا فشلْ ،، نحو تحقيق ذلك الأمل

المنصة العلمية : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

• تصحيح الاختبار الأول من محطة التحضير الممتاز ـ الفصل II ـ

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء بعد الإطلاع على الحل خذوا الأفكار الطازجة مع تدوينها في سِجل خاص بها ،،

حل التمرين الأول :

تعيين الاقتراح الصحيح في كل حالة من بين الاقتراحات (ا) ; (ب) ;(ج) و (د) مع التبرير

1)-الكتابة المبسطة للعدد A المعرف بـ: $A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln\left(e+1\right)$ هي:

لدينا : $A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln\left(e+1\right)$ ومنه $A=\ln\left(e^2+2e+1\right)-\ln e-2\ln\left(e+1\right)$:

ومنه : $A=\ln\left(e+1\right)^2-1-2\ln\left(e+1\right)$ أي $A=2\ln\left(e+1\right)-1-2\ln\left(e+1\right)$ أي : $A=-1$

الجواب ← ج)

2)- من اجل كل عدد حقيقي x العدد $2x-\ln\left(e^x+3\right)$ يساوي :

لدينا : $2x-\ln\left(e^x+3\right)=2x-\ln e^x\left(1+3e^{-x}\right)$ أي : $2x-\ln\left(e^x+3\right)=2x-x-\ln\left(1+3e^{-x}\right)$

ومنه : $2x-\ln\left(e^x+3\right)=x-\ln\left(1+3e^{-x}\right)$ الجواب ← ب)

3)-عدد حلول المعادلة $e^x-3e^{-x}=-2$ في $\mathbb{R}$ هو :

لدينا: $e^x-3e^{-x}=-2$ ومنه $\left(e^x-3e^{-x}\right)e^x=-2e^x$ أي : $e^{2x}+2e^x-3=0$

بوضع : $e^x=\alpha$ نجد ان : $\alpha^2+2\alpha-3=0$ وبحل المعادلة في نجد ان : $\alpha=1$ او $\alpha=-3$

لدينا : $e^x=1$ معناه : $x=0$ بينما المعادلة : $e^x=-3$ لا تقبل حلا ومنه الجواب ← ا)

4)-النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]$ تساوي :

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\times\frac{3x}{3x}\right]$ أي : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{9}{20}\left[\frac{e^{3x}-1}{3x}\right]$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]=\frac{9}{20}\times\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^{3x}-1}{3x}\right]$ أي: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{4}\left[\frac{e^{3x}-1}{5x}\right]=\frac{9}{20}$ الجواب ← .... د)

5)- من اجل كل عدد طبيعي n المجموع: $S=e^{\ln 5}+e^{2\ln 5}+e^{3\ln 5}+.......+e^{n\ln 5}$ ومنه :

يمكن كتابة المجموع S كمايلي: $S=e^{\ln 5}+\left(e^{\ln 5}\right)^2+\left(e^{\ln 5}\right)^3+.......+\left(e^{\ln 5}\right)^n$

أي : $S=5+5^2+5^3+.......+5^n$ وهي تعبر عن مجموع حدود متتالية هندسية اساسها 5 و حدها الاول 5 $v_0=5$

أي $S=\frac{5\left(5^{n+1}-1\right)}{5-1}$ ومنه $S=\frac{5}{4}\left(5^{n+1}-1\right)$ .... الجواب ← د)

حل التمرين الثاني :

الجزء الأول :

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{(x^2+x+1)^2}$ و $G'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{(x^2+x+1)^2}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان F و G هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية : نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$F(x)-G(x)=\frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}-\frac{-6x-2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2-x+3+6x+2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2+5x+5}{x^2+x+1}=\frac{5(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=5$$

أي $[F(x)-G(x)]'=0$ ومنه $F'(x)=G'(x)$ لأن مشتقة 5 تساوي صفر.

الجزء الثاني :

❶ التحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$:

لدينا:

$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1$$

وّ

$$f''(x)=e^{2x+2}+2e^{2x+2}+4xe^{2x+2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}2f(x)+f'(x)-f''(x)&=2xe^{2x+2}-2x+2+e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1-e^{2x+2}-2e^{2x+2}-4xe^{2x+2}\\&=1-2x-3e^{2x+2}\end{aligned}$$

❷ استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}&\Rightarrow 2f(x)=1-2x-3e^{2x+2}-f'(x)+f''(x)\\&\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}e^{2x+2}-\frac{f'(x)}{2}+\frac{f''(x)}{2}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\frac{1}{2}e^{2x+2}-\frac{f(x)}{2}+\frac{f'(x)}{2}+c\\&=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}e^{2x+2}-\frac{xe^{2x+2}-x+1}{2}+\frac{e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1}{2}+c\\&=\frac{2x-2x^2-3e^{2x+2}-2xe^{2x+2}+2x-2+2e^{2x+2}+4xe^{2x+2}-2}{4}+c\\&=\boxed{\frac{1}{4}(2xe^{2x+2}-e^{2x+2}-2x^2+4x-4)+c}\end{aligned}$$

الجزء الثالث :

من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1. تبيين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$:

لدينا من أجل كل $x\in\left]e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[$ ، $f(x)+x>0$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل $x\in\left[e^n;e^{n+1}\right]$ ، $f(x)+x>0$ إذا من أجل كل عدد طبيعي n : $\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx>0$ أي $u_n>0$.

2. التفسير الهندسي للعدد u_0 :

لدينا $u_0=\int_1^e\left[f(x)+x\right]dx$ ومنه u_0 هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$.

3. حساب u_n بدلالة n :

$$u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[\frac{3+2\ln x}{x}\right]dx$$

$$u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[\frac{3}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right]dx=\left[3\ln|x|+2\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$u_n=\left[3\ln e^{n+1}+\left(\ln e^{n+1}\right)^2\right]-\left[3\ln e^n+\left(\ln e^n\right)^2\right]$$

$$u_n=3n+3+(n+1)^2-3n-n^2$$

أي $u_n=2n+4$

4. من اجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. حساب S_n بدلالة n .

(u_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول u_0 حيث $u_0=4$ ومنه

$$S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)=\frac{(n+1)(4+2n+4)}{2}$$ أي $S_n=(n+1)(n+4)$

أيُّها التلميذ {ة} الشَّريف {ة} ::

قاوم ،، تحدى ،، لا تتردد

لا ملْ ،، لا فشلْ ،، حتى تحقيق ذلك الأملْ

اللهم توفيقاً و نجاحاً لك

حل التمرين الثالث :

(I) 1) دراسة تغيرات الدالة g و حساب $g(0)$ و $g(1)$

أ. حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -4$ لأن : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^x(2-x)-4\right) = -\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g : الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$g'(x) = 4e^x - 2\left(e^x + xe^x\right) = 2e^x(1-x)$$

- بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $e^x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1-x)$

وعليه تعطى إشارة $g'(x)$ على النحو التالي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ و متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$2e-4$	$\searrow$	$-\infty$

1) بما أن الدالة g معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,5\ ;\ 1,6]$ و $g(1,5) = 0,48$ و $g(1,6) = -0,04$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,5\ ;\ 1,6[$

إن $g(0)=0$ من خلال دراسة تغيرات الدالة g و $g(\alpha)=0$ و $g(0)=0$ و $g(1)>0$ نتحصل على إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و تفسيرها هندسيا :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x}-2}=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{e^x}{x}-2}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$
- التفسير الهندسي :

المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y=-1$ و مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}$

أي أن $f'(x)=\dfrac{4e^x-2xe^x-4}{(e^x-2x)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

بما أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(e^x-2x)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

عليه الدالة متزايدة تماما على $[0;\alpha]$ و متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و على $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) أ. نبين أن $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$:

لدينا $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$. من جهة أخرى $g(\alpha)=0$ أي أن : $4e^\alpha-2\alpha e^\alpha-4=0$

ومنه $e^\alpha(4-2\alpha)=4$ إذن $e^\alpha=\dfrac{2}{2-\alpha}$ و عليه $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\dfrac{\alpha-1}{\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{2-\alpha}}$

19

عليه $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$ أي أن $f(\alpha)=\dfrac{2-\alpha}{\alpha-1}$

•تعيين حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$:

بما أن $1,5<\alpha<1,6$ فإن $-1,6<-\alpha<-1,5$ ومنه $0,4<2-\alpha<0,5$

وبما أن $0,5<\alpha-1<0,6$ فإن $\dfrac{1}{0,6}<\dfrac{1}{\alpha-1}<\dfrac{1}{0,5}$ ومنه $\dfrac{0,4}{0,6}<f(\alpha)<1$ أي أن $\dfrac{2}{3}<f(\alpha)<1$

ب. تعيين معادلة المماس (T) :

معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $a=1$ هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

وعليه المعادلة $y=\dfrac{2}{e-2}(x-1)$ هي معادلة للمماس (T)

جـ. دراسة الوضع النسبي لكل من (C_f) و (D) : لهذا الغرض نعين إشارة $f(x)+1$

لدينا $f(x)+1=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}+1$ أي أن $f(x)+1=\dfrac{e^x-2}{e^x-2x}$

• لنعين إشارة e^x-2 : لدينا $e^x-2\geq 0$ يكافئ $e^x\geq 2$ أي أن $e^x-2\geq 0$ يكافئ $x\geq \ln 2$

ينتج $e^x-2<0$ يكافئ $x<\ln 2$

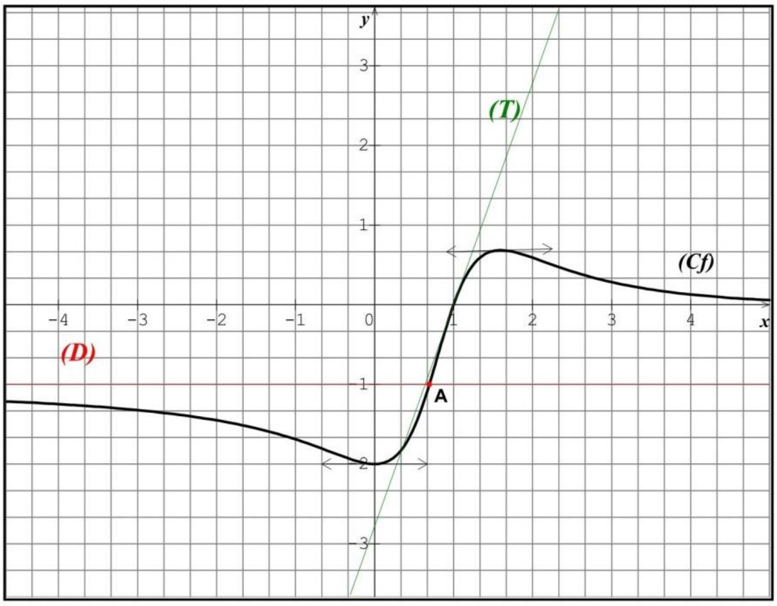
•لنعين إشارة e^x-2x : الدالة $\varphi : x\mapsto e^x-2x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $\varphi'(x)=e^x-2$

من إشارة e^x-2 ينتج أن $\varphi(\ln 2)=2-2\ln 2>0$ قيمة حدية صغرى للدالة φ

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\varphi(x)>0$ وعليه إشارة $f(x)+1$ من إشارة e^x-2 ، ينتج من هذا :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x)+1$	$-$	0	$+$
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)	(C_f) يقع أسفل (D)	(C_f) و (D) يتقطعان في النقطة $A(\ln 2;-1)$	(C_f) يقع أعلى (D)

د. رسم المماس (T) ، المستقيم (D) و المنحني (C_f) :



4) حساب $S(\alpha)$: إن $S(\alpha)=4\left(\int_{\lambda}^{10}\left(-1-f(x)\right)dx\right)\ cm^2$

لدينا: $\int_{\lambda}^{0}\left(-1-f(x)\right)dx=-\int_{\lambda}^{0}\left(1+f(x)\right)dx=-\int_{\lambda}^{0}\frac{e^x-2}{e^x-2x}\,dx$

إذن : $\int_{\lambda}^{0}\left(-1-f(x)\right)dx=-\int_{\lambda}^{10}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=-\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^x-2x\right)\right)^2\right]_{\lambda}^{0}$

ومنه : $\int_{\lambda}^{0}\left(-1-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{\lambda}-2\lambda\right)\right)^2$ وعليه : $S(\lambda)=2\left(\ln\left(e^{\lambda}-2\lambda\right)\right)^2\ cm^2$

- حساب $\lim\limits_{\lambda\to\infty}S(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}2\left(\ln\left(e^{\lambda}-2\lambda\right)\right)^2=+\infty$

5) أ. كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

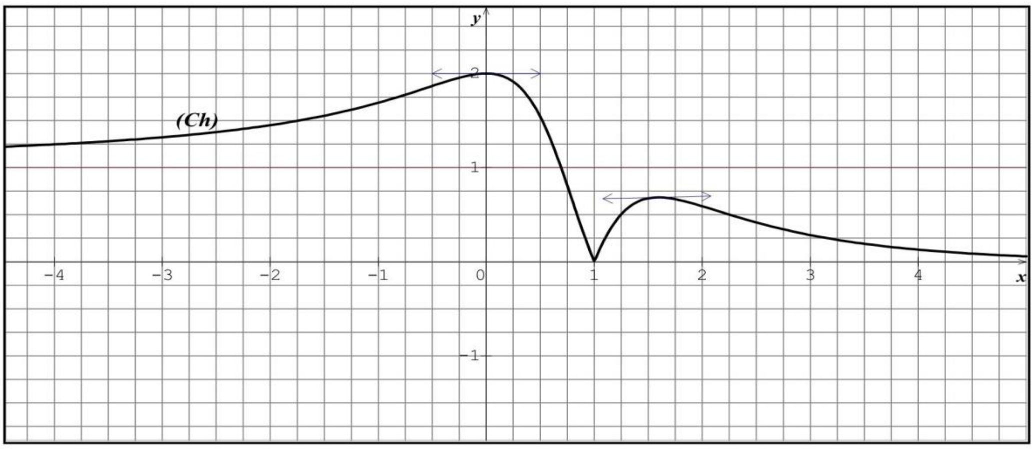
x	$-\infty$ 1 $+\infty$		
$2x-2$	$-$	0	$+$
$\lvert 2x-2\rvert$	$-(2x-2)$	0	$2x-2$
$h(x)$	$\frac{-(2x-2)}{e^x-2x}$	0	$\frac{2x-2}{e^x-2x}$

إذا كان x من المجال $]-\infty;1]$: $h(x)=-f(x)$

إذا كان x من المجال $[1;+\infty[$: $h(x)=f(x)$

ب. في المجال $[1;+\infty[$ المنحني (C_h) منطبق على المنحني (C_f)

في المجال $]-\infty;1]$ المنحني (C_h) نظير المنحني (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل



جـ. بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x-2x>0$ فإن $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right|=\frac{|2x-2|}{e^x-2x}$

وعليه $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right|=|m|$ تكافئ $h(x)=|m|$

ومنه بيانيا تقبل المعادلة $\left|\frac{2x-2}{e^x-2x}\right|=|m|$ ثلاث حلول متمايزة إذا وفقط إذا كان $0<|m|<\alpha$

إذن قيم m هي $]-\alpha;\alpha[$

...... انتهى التصحيح النموذجي للموضوع 01 ،،

• تصحيح الاختبار الثاني من محطة التحضير الممتاز ـ الفصل II ـ

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء بعد الإطلاع على الحل خذوا الأفكار الطازجة مع تدوينها في سِجل خاص بها ،،

حل التمرين الأول :

المعطيات :

1. f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1.أ. تعيين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln x=0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}}=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$.

1.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ، فيكون : $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

• إشارة $f(x)$:

$f'(x)\geq 0$ تكافئ : $\ln x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x\geq 1$

$\Leftrightarrow \ln x\geq \ln e$ ، ومنه : $x\geq e$.

$f'(x)\leq 0$ تكافئ : $x\leq e$

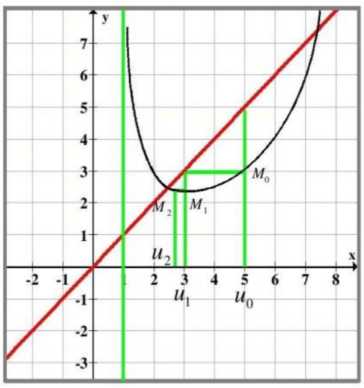
• جدول الإشارة :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

إذن : • $x\in]1;1]$: الدالة f متناقصة.　　　• $x\in[e;+\infty[$: الدالة f متزايدة.

• جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$



1.جـ. رسم المنحنى (C_f) :

2. لدينا المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

2.أ. رسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$:

2.ب. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$

نفرض $P(n)$ القضية " $u_n\geq e$ " ، فيكون :

$n=0$: $u_0=5\geq e$.　　　إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n\geq e$ ثم نبرهن على أن $P(n+1)$ صحيحة أيضا، أي أن : $u_{n+1}\geq e$.

لدينا :

$u_n\geq e$ يستلزم $f(u_n)\geq f(e)$ ، لأن : الدالة f متزايدة

$\Leftarrow u_{n+1}\geq e$ ، لأن : $f(e)=e$ و $f(u_n)=u_{n+1}$.　　　إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$.

2.ج. إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\dfrac{u_n}{\ln u_n}-u_n=u_n\cdot\dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n}$ ، لكن :

• $u_n \geq e$ ومنه : $u_n>0$:

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$ ، ومنه : $\ln u_n \geq 0$

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$

$\Leftarrow 1-\ln u_n \leq 0$. إذن : $u_n\dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n}\leq 0$ ، و عندئذ : المتتالية (u_n) متناقصة.

2.د. تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e فهي متقاربة وتتقارب نحو ℓ حيث : $f(\ell)=\ell$.

$f(\ell)=\ell$ تكافئ : $\ell=\dfrac{\ell}{\ln \ell}$

$\Leftrightarrow \ell(\ln \ell-1)=0$

$\Leftrightarrow \ln \ell-1=0$ ، لأن : $\ell\neq 0$.

$\Leftrightarrow \ln \ell=1$ ، ومنه : $\ell=e$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$.

حل التمرين الثاني :

الجزء الأول :

1) لدينا المنحنى C_f يقع تحت المستقيم Δ إذن من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $f(x)\leq \frac{1}{2}x+2$ ؛ ولدينا القطع المكافئ P يقع تحت المنحنى C_f إذن من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)$ وبالتالي من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ ، $\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq \frac{1}{2}x+2$.

2) لدينا من أجل كل $x\in[4;12]$ ، $\frac{1}{10}x^2+2x-5\leq f(x)\leq \frac{1}{2}x+2$ إذن

$\int_4^{12}\left(\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx\leq\int_4^{12}f(x)dx\leq\int_4^{12}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$ ومعناه $\left[\frac{x^3}{30}+x^2-5x\right]_4^{12}\leq A\leq\left[x^2+2x\right]_4^{12}$ ومعناه

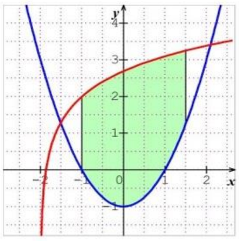
$\left[\frac{12^3}{30}+144-60-\frac{4^3}{30}-16+20\right]\leq A\leq\left[12^2+24-16-8\right]$ أي $143,46\leq A\leq 144$.

ملاحظة:

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

أي $\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geq 0$ ومعناه $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx\geq 0$



نتيجة: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$ ، $f(x)\leq g(x)$ فإن مساحة الحيز المحدد بمنحنيي الدالتين f و g الممثلين في معلم متعامد والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=a$ و $x=b$ هي $\int_a^b[g(x)-f(x)]dx\,ua$.

الجزء الثاني :

1) g حل للمعادلة التفاضلية (E) معناه $g'(x)-g(x)=-(x-1)^2$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=2ax+b$

و عليه g حل للمعادلة التفاضلية (E) معناه $2ax+b-ax^2-bx-c=-x^2+2x-1$

ومنه g حل للمعادلة التفاضلية (E) معناه $-ax^2+(-b+2a)x+b-c=-x^2+2x-1$

ينتج : $\begin{cases} a=1 \\ 2a-b=2 \\ b-c=-1 \end{cases}$ و بالتالي $a=1$ و $b=0$ و $c=1$

2) (E_0) تكافئ $y'=y$ و عليه حلول المعادلة التفاضلية (E_0) هي : $y=ce^x$ مع c عدد حقيقي ثابت

3) أ. نبين أن : إذا كانت f حل لـ(E) فإن $(f-g)$ حل لـ (E_0)

لدينا فرضا f حل لـ(E) معناه $f'(x)-f(x)=-(x-1)^2$ و كذلك g حل لـ(E) معناه $g'(x)-g(x)=-(x-1)^2$

ومنه $(f'(x)-f(x))-(g'(x)-g(x))=0$ ينتج $(f'(x)-g'(x))-(f(x)-g(x))=0$

أي أن $(f-g)'(x)-(f-g)(x)=0$ و عليه $(f-g)$ حل لـ (E_0)

ب. لنبين أن: إذا كان $(f-g)$ حل لـ (E_0) فإن f حل لـ(E)

لدينا فرضا $(f-g)$ حل لـ (E_0) معناه $(f-g)'(x)-(f-g)(x)=0$

أي أن $(f'(x)-f(x))-(g'(x)-g(x))=0$ ومنه $f'(x)-f(x)=g'(x)-g(x)$

وبما أن g حل لـ(E) فإن $g'(x)-g(x)=-(x-1)^2$ و عليه $f'(x)-f(x)=-(x-1)^2$ و بالتالي f حل لـ(E)

من أ. و ب ينتج أن : f حل لـ(E) إذا وفقط إذا كان $(f-g)$ حل لـ (E_0)

4) بما أن f حل لـ(E) إذا وفقط إذا كان $(f-g)$ حل لـ (E_0) و $(f-g)$ حل لـ (E_0) تعني

$f(x)-g(x)=ce^x$ و بما أن $g(x)=x^2+1$ فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ $f(x)=x^2+1+ce^x$ مع c عدد حقيقي ثابت

5) بما أن الدالة h حل لـ(E) فإن $h(x)=x^2+1+ce^x$

إن الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h'(x)=2x+ce^x$. بما أن $h'(0)=1$ فإن $c=1$

و عليه $h(x)=x^2+1+e^x$

حل التمرين الثالث :

I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

دراسة اتجاه تغير الدالة h: h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث

$$h'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ ، $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;0[$ ، $[1;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0} h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

اذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)\succ 0$

II) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

1) أ) حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)^{\nearrow 0}-x^{\nearrow+\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow 0}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)^{\nearrow 0}-x^{\nearrow-\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow 0}\right)=\boxed{+\infty}$$

ب) حساب:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow+\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\ <}}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow-\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2) أ) نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $2x^2f'(x)=-h(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ ، $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{2x\,x}{x^2}-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

$f'(x)=\boxed{\frac{-h(x)}{2x^2}}$ ومنه: $2x^2f'(x)=-(x^2-\ln(x^2))=\boxed{-h(x)}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)\prec 0$ ومنه:

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

x	$-\infty$	-1	β	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	‖	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3/2$ ↘	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0	↘ $-3/2$	↘ $-\infty$

ج) نبين أن $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ **مستقيم مقارب للمنحنى** (C_f):

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ): ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq0$

يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}\approx-0.37$		0		$\frac{1}{e}\approx0.37$	$+\infty$
$-\ln x^2-2$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{1}{e};-0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)

3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$:

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac{2}{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة f فردية .

تفسير النتيجة بيانيا: النقطة O مركز تناظر للمنحنى (C_f).

ب) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3;0.4[$: لدينا الدالة f معرفة ومستمرة (قابلة للاشتقاق) ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec0$ ، $f(0.3)\approx0.53$; $f(0.4)\approx-0.41$

حسب مبرهنة ق المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

α على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\alpha)=0$

استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصرا له: بما أن النقطة O مركز تناظر لـ (C_f) و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0.3;0.4[$ فإن (C_f) يقطع حامل محورالفواصل في نقطة فاصلتها α ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها β بالنسبة للنقطة O حيث $0.3 \prec \alpha \prec 0.4$ و عليه يكون $-0.4 \prec \beta \prec -0.3$

4) أ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما: $f'(x_0)=\dfrac{-1}{2}$

$\dfrac{-\left(x_0^{\,2}-\ln\left(x_0^{\,2}\right)\right)}{2x_0^{\,2}}=\dfrac{-1}{2}$ يكافئ $\ln\left(x_0^{\,2}\right)=0$ ومنه: $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\dfrac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\dfrac{-1}{2}x-1$

ب) إنشاء (Δ)، (T_1)، (T_2) و (C_f):

ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة (E): هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث: $(\Delta_m): y=-\dfrac{1}{2}x+m$

m	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
عدد و إشارة حلول (E)	حل وحيد سالب	حل مضاعف موجب + حل سالب	حلين موجبين + حل سالب	حلين مختلفين في الإشارة	حل موجب + حلان سالبان	حل موجب + حل مضاعف سالب	حل وحيد موجب

5) نبين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_k)

$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $k(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\dfrac{2}{(x+1)}\right)+2$

بما أن: $\boxed{k(x)=f(x+1)+2}$ فإن (C_k) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه : $\vec{V}=\boxed{-\vec{i}+2\vec{j}}$

6) أ) نبين ان الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{2}x^2-\dfrac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$F'(x)=\dfrac{1}{2}\left(-x-\dfrac{1}{4}.2\ln\left(x^2\right).\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-x-\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}-\dfrac{2}{x}\right)=f(x)$

ومنه: F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

ب) إيجاد الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$:

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x \to F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\dfrac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$$x \to \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$$

ج) حساب التكامل: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ حيث $\lambda \succ 1$

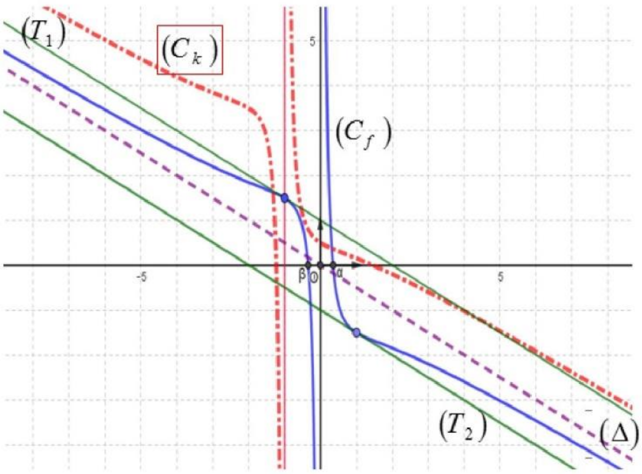
$$A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\lambda}$$

$$=\boxed{\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\quad (u.a)}$$

تفسيرالنتيجة هندسيا: $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\,;x=\lambda\,;y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$



نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

...... انتهى التصحيح النموذجي للموضوع " 02 "

• تصحيح الاختبار الثالث من محطة التحضير الممتاز - الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء بعد الإطلاع على الحل خذوا الأفكار الطازجة مع تدوينها في سِجل خاص بها ،،

حل التمرين الأول :

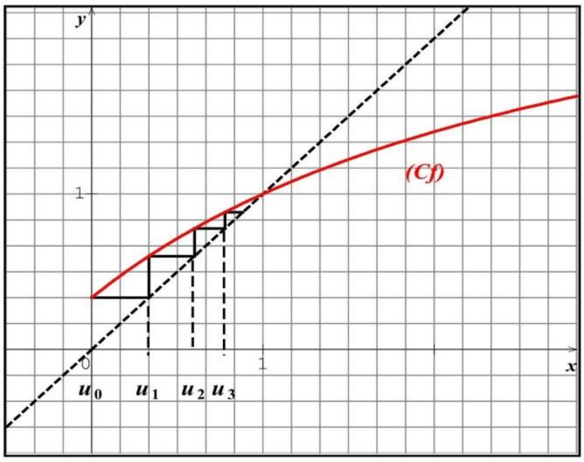
I) تعيين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

نعلم أنه تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n$

وعليه من أجل $n=0$ نجد : $u_1=u_0=\alpha$ أي أن $f(\alpha)=\alpha$ ومنه $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3}=\alpha$ إذن $\alpha^2=1$ و بما أن $\alpha\geq 0$ فإن $\alpha=1$

II) نعتبر $\alpha=0$

1) أ . نقل الشكل و تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 :



ب التخمين: من خلال تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة

2) أ. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<1$

(نوظف الاستدلال بالتراجع)

- من أجل $n=0$: $0\leq u_0<1$ محققة لأن $u_0=0$
- لنفرض أن $0\leq u_n<1$ و لنبرهن أن $0\leq u_{n+1}<1$

بما أن فرضا $0\leq u_n<1$ و الدالة f متزايدة تماما

على $[0;+\infty[$ فإن $f(0)\leq f(u_n)<f(1)$

ومنه $\frac{1}{3}\leq f(u_n)<1$ أي أن $0\leq u_{n+1}<1$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n<1$

ب. لنبين أن (u_n) متزايدة تماما : ليكن n عدد طبيعي ، لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+1}{u_n+3}-u_n$

أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+1}{u_n+3}=\frac{-(u_n-1)(u_n+1)}{u_n+3}$ و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0\leq u_n<1$ فإن $u_n-1<0$

و $u_n+1>0$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فإنها متقاربة

3) أ. نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

(v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n\times q$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}$ ومنه $v_{n+1}=\frac{2u_n-2}{4u_n+4}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أي أن $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+1}=-1$

ب. تعيين عبارة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=-1$

فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- تعيين عبارة u_n بدلالة n : لدينا $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$ ومنه $v_n(u_n+1)=u_n-1$ إذن $u_n(v_n-1)=-1-v_n$

و عليه $u_n=\frac{-1-v_n}{-1+v_n}$ ينتج أن $u_n=\frac{-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

4) حساب S_n بدلالة n :

لدينا : $S_n=1+\frac{v_{2021}}{v_{2020}}+...+\frac{v_{n+2019}}{v_{2020}}$ أي أن $S_n=\frac{1}{v_{2020}}\left(v_{2020}+v_{2021}+...+v_{n+2019}\right)$

و عليه $S_n=\frac{1}{v_{2020}}\times\left[v_{2020}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$ و بالتالي $S_n=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$: بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=2$

5) حساب المجموع T حيث : $T=\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+1}|)+...+\ln(|v_{n+2019}|)$.

بما أن $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $\ln(|v_n|)=\ln\left[\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|\right]$ ومنه $\ln(|v_n|)=-n\ln 2$ وهو حد عام لمتتالية حسابية

أساسها $(-\ln 2)$ وعليه $T=\frac{2020}{2}\left[\ln(|v_n|)+\ln(|v_{n+2019}|)\right]$

وبالتالي $T=1010\left[-n\ln 2-(n+2019)\ln 2\right]$ ومنه $T=-(2039190)\times\ln 2$

حل التمرين الثاني :

الجزء الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{6e^x}{e^{2x}-1}$

1. تعين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{\alpha e^x}{e^x-1}+\frac{\beta e^x}{e^x+1}$.

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=6\end{cases}\Rightarrow\alpha=-3,\beta=3$ و بالتالي: $f(x)=\frac{-3e^x}{e^x-1}+\frac{3e^x}{e^x+1}$

2.استخدم النتيجة السابقة لإيجاد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

نلاحظ أن الدالة f مكتوبة من الشكل : $f(x)=\frac{ag'(x)}{g(x)}+b\frac{h'(x)}{h(x)}$

اذن دالتها الأصلية تكتب من الشكل: $F(x)=-3\ln\left(e^x-1\right)+3\ln\left(e^x+1\right)+c$ يمكن استعمال خواص الدالة اللوغاريتمية لتبسيطها أكثر.

الجزء الثاني :

❶ تبيين أن $x \longmapsto x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}(x\ln x - x)' &= \ln x + \frac{1}{x}x - 1\\ &= \ln x + 1 - 1\\ &= \ln x\end{aligned}$$

❷ استنتاج عبارة F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ والتي تحقق $F(1)=-3$:

لدينا:

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)\\ &= \ln x - 2 - \frac{1}{x}\ln x + 2\frac{1}{x}\end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}F(x) &= x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c\\ &= x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c\end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}F(1) = -3 &\Longrightarrow -3 + c = -3\\ &\Longrightarrow c = 0\end{aligned}$$

وعليه:

$$\boxed{F(x) = x\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x}$$

الجزء الثالث :

◄ f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x^2}+(1+\ln x)^2$ ، ولنعتبر التكاملين :

$$I=\int_1^e (1+\ln x)dx \quad ; \quad J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$$

❶ $H'(x)=h(x)$ ، ولدينا :

$$I=\int_1^e (1+\ln x)dx = I = \int_1^e h(x)\,dx = [x\ln x]_1^e = e\ln e - 1\ln 1 = e$$

❷ لنثبت أنّ : $J = 2e - 1$.

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = (1+\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u'(x) = \frac{2}{x}(1+\ln x) \\ v(x) = x \end{array} \right.$$

⊡ ومنه :

$$J = \left[x(1+\ln x)^2\right]_1^e - 2I = e(1+\ln e)^2 - 1(1+\ln 1)^2 - 2e = 4e - 1 - 2e = 2e - 1$$

❸ حساب مساحة الحيز :

$$A = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x^2} + (1+\ln x)^2\right] dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}dx + J = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e + 2e - 1 = \frac{2e^2-1}{e} ua$$

حل التمرين الثالث :

I- 1/ دراسة تغيرات الدالة g:

① مجموعة التعريف : $D_g =]0;+\infty[$

② حساب النهايــات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\underbrace{e^x}_{1} + \underbrace{\ln x}_{-\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right] = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^x}_{+\infty} + \underbrace{\ln x}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right] = +\infty$

③ اتجاه التغير : الدالة g معرفة وَ قابلة للاشتقاق على D_g حيث : $g'(x) = e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

لدينا من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x > 0$ وَ $\frac{1}{x^2} > 0$ وَ $\frac{1}{x} > 0$ إذن : $g'(x) > 0$ وَ بالتالي g دالة متزايدة تماماً .

④ جدول التغيرات :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2/ إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α:

⇦ لدينا : $g(1) \approx 1,72$ وَ $g(0,5) = -1,04$ منه : $g(0,4) \times g(0,5) < 0$

⇦ g دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0,5;1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 1$.

3/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أنه :

⇦ إذا كان : $x \in]0;\alpha[$ فإن : $g(x) < 0$ $\qquad$ ⇦ إذا كان : $x \in]\alpha;+\infty[$ فإن : $g(x) > 0$.

II- 1/ حساب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[x - \frac{\overbrace{\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{e^x}_{1}}\right] = +\infty$ منه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$.

2/ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} = 0 \times 0 = 0$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.

الاستنتاج: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \underbrace{\frac{\ln x}{e^x}}_{0}\right] = +\infty$ ، نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

3/ لنبين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

الدالة f معرفة وَ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}e^x - e^x \ln x}{e^{2x}} = 1 - \frac{e^x\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)}{e^{2x}} = 1 - \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \frac{e^x + \ln x - \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

منه : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

- جدول تغيرات الدالة f:

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ لأن : $e^x > 0$ إذن :

⇦ إذا كان : $x \in]0;\alpha[$ فإن : $f'(x) < 0$ وَ بالتالي f دالة متناقصة تماماً .

⇦ إذا كان : $x \in [\alpha;+\infty[$ فإن : $f'(x) \geq 0$ وَ بالتالي f دالة متزايدة تماماً .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4/ لنبين أنه إذا كان $x \in [1;4]$ فإن $f(x) \in [1;4]$:

لدينا $x \in [1;4]$ معناه : $1 \leq x \leq 4$ وَ f دالة متزايدة تماماً على المجال $[1;4]$

منه : $f(1) \leq f(x) \leq f(4)$ تكافئ: $1 \leq f(x) \leq 3{,}98$ تكافئ: $1 \leq f(x) \leq 4$ إذن : $f(x) \in [1;4]$.

5/ أ- تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-1}:

لدينا : $\alpha \approx 0{,}7$ منه $f(\alpha) \approx 0{,}7 - \frac{\ln 0{,}7}{e^{0{,}7}} \approx 0{,}877$ إذن : $f(\alpha) = 0{,}9$

ب- رسم المنحنى:

III- 1/ إنشاء النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 : (أنظر الشكل)

2/ لنثبت بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $p(n): 1 \leq u_n \leq 4$

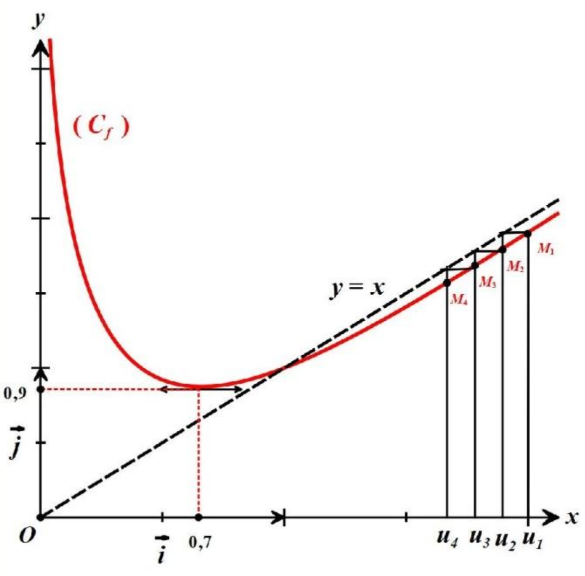
⇦ لنتحقق من صحة $p(1)$: من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = 2$ أي : $1 \leq u_1 \leq 4$ منه $p(1)$ محققة .

⇦ نفرض صحة $p(n)$ أي : $1 \leq u_n \leq 4$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $1 \leq u_{n+1} \leq 4$

لدينا حسب فرضية التراجع أن $1 \leq u_n \leq 4$ وَ f دالة متزايدة تماماً

منه : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(4)$ وحسب ما سبق نجد : $1 \leq u_{n+1} \leq 4$ منه الخصية $p(n+1)$ صحيحة .

إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq 4$.



3/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$

لأن من أجل كل $x \in [1;4]$ لدينا : $f(x) - x < 0$

منه (u_n) متتالية متناقصة تماماً .

4/ استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن $u_n \geq 1$ أي (u_n) محدودة من الأسفل وَ متناقصة تماماً فهي متقاربة

إذن (u_n) متقاربة تعني : $\lim_{x\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} u_n = \ell$

لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$ منه : $\ell = f(\ell)$ و منه : $\ell = \ell - \frac{\ln \ell}{e^\ell}$

و منه : $\frac{\ln \ell}{e^\ell} = 0$ أي : $\ell = 1$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} u_n = 1$.

...... انتهى التصحيح النموذجي للموضوع 03 ،،

• تصحيح الاختبار الرابع من محطة التحضير الممتاز - الفصل II -

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء بعد الإطلاع على الحل خذوا الأفكار الطازجة مع تدوينها في سِجل خاص بها ،،

حل التمرين الأول :

1) أ . من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}$ أي أن $u_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$ ومنه $u_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

طريقة ثانية : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$ ومنه $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}$

إذن $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ أي أن $1-\frac{1}{(n+1)^2}=u_n$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $n(n+2)>0$ و $(n+1)^2>0$ ومنه $0<u_n$

و بما أن $\frac{1}{(n+1)^2}>0$ فإن $1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ إذن $u_n<1$ و بالتالي $0<u_n<1$

جـ. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ ومنه $u_{n+1}=1-\frac{1}{(n+2)^2}$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $(n+2)^2>(n+1)^2$ فإن $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{(n+2)^2}$ ومنه $-\frac{1}{(n+1)^2}>-\frac{1}{(n+2)^2}$

و بالتالي $1-\frac{1}{(n+1)^2}>1-\frac{1}{(n+2)^2}$ و عليه $u_{n+1}>u_n$ ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

2) أ. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $P_n=\frac{n+2}{2n+2}$:

(1) من أجل $n=1$: $P_1=u_1=\frac{3}{4}$ من جهة أخرى $P_1=\frac{1+2}{2+2}=\frac{3}{4}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=1$

(2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، كيفي ؛ لنفرض أن $P_n=\frac{n+2}{2n+2}$ و لنبرهن أن $P_{n+1}=\frac{n+3}{2n+4}$

لدينا $P_{n+1}=u_1\times u_2\times\ldots\times u_n\times u_{n+1}$ ومنه $P_{n+1}=P_n\times u_{n+1}$ و بما أن فرضا $P_n=\frac{n+2}{2n+2}$ و كذلك $u_{n+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

فإن $P_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}\times\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ ومنه $P_{n+1}=\frac{n+3}{2(n+2)}$ أي أن $P_{n+1}=\frac{n+3}{2n+4}$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $P_n=\frac{n+2}{2n+2}$

ب. لدينا $\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

3) أ. بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n>0$ فإن (v_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$

ب. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $v_n=\ln(u_n)$ فإن $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})$ وبما أن $u_{n+1}>u_n>0$ و نعلم أن الدالة $x\mapsto\ln x$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $\ln(u_{n+1})>\ln(u_n)$ ومنه $v_{n+1}>v_n$

إذن المتتالية (v_n) متزايدة تماما

جـ. بما أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $0<u_n<1$ فإن $\ln(u_n)<0$ أي أن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛ $v_n<0$ أي أن المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى بالعدد صفر

د. بما أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد صفر فإنها متقاربة

* **حساب نهاية** (v_n) : بما أن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=0$

و. لدينا $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ أي أن $S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + ... + \ln(u_n)$ ومنه $S_n = \ln(u_1 \times u_2 \times ... \times u_n)$

وعليه $S_n = \ln(P_n)$ ينتج أن $S_n = \ln\left(\frac{n+2}{2n+2}\right)$

- إن $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(P_n) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

حل التمرين الثاني :

الجزء الأول :

❶ دراسة الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (C_g) :

$$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow e^x - \frac{1}{2}ex^2 - e^x + ex = 0$$
$$\Rightarrow ex\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ex = 0 \\ \text{أو} \\ -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- الوضعية:

- (C_f) تحت (C_g) لما $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$
- (C_f) يقطع (C_g) لما $x = 0$ و $x = 2$ أي في النقطتين ذات الاحداثيتين $(0; 1)$ و $(2; 2)$.
- (C_f) فوق (C_g) لما $x \in]0; 2[$

❷ حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) :

$$\int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2}e\int_0^2 x^2dx + e\int_0^2 xdx$$
$$= -\frac{1}{2}e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= -\frac{1}{2}e\left(\frac{8}{3}\right) + e\left(\frac{4}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{3}e$$

لدينا وحدة الطول هي $2cm$ ومنه وحدة المساحة هي $2^2 = 4cm^2$

وعليه مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) هي:

$$\frac{2}{3}e \times 4cm^2 = \boxed{\frac{8e}{3}\ cm^2}$$

الجزء الثاني :

1) حساب $A(\lambda)$ دلالة λ باستعمال المكاملة بالتجزئة

لدينا: $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} -x^2 \ln x . dx$

نضع: $u(x) = \ln x$ ومنه $u'(x) = \frac{1}{x}.dt$ و $v'(x) = -x^2.dx$ ومنه $v(x) = -\frac{1}{3}x^3$

وعليه $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} -x^2 \ln x.dx = [u(x).v(x)]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} u'(x).v(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3.\ln x\right]_{\lambda}^{1} + \frac{1}{9}[x^3]_{\lambda}^{1}$

$$A(\lambda) = \frac{1}{3}\lambda^3.\ln\lambda - \frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{9}$$

2) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} A(\lambda)$.

لدينا: $A(\lambda) = \frac{1}{3}\lambda^3.\ln\lambda - \frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{9}$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} A(\lambda) = \frac{1}{9}$ لان: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \lambda^3 \ln\lambda = 0$ نهاية شهيرة

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا: $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} -x^2 \ln x.dx$ تكافئ $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} [f(x) - x].dx$

$\frac{1}{9}$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات :

$x = 1$ و $x = \lambda$ و $y = x$ (نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم).

حل التمرين الثالث :

I.الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1. اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، $g'(x)=e^x-1$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x-1	$+$

و عليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2.عين حسب قيم x اشارة $g(x)$:

بما أن $g(0)=0$ و الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$. اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $g(x)\geq g(0)=0$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

3. لدينا: $g(x)\geq 0$ أي:

$$e^x-x\geq 1 \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^x-x\geq 0$$

اذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x-x>0$.

II.الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

1. لدينا $x\in[0;1]$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $[0;1]$فان ، $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$.

أي $0\leq f(x)\leq 1$ تكافئ $f(x)\in[0;1]$.

اذن من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2.أ-

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{e^x-x}-x=\frac{e^x-1-x\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\frac{(1-x)\left(e^x-(1+x)\right)}{e^x-x}$$

اذن : $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

ب- الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D):

من أجل كل x من $[0;1]$، $g(x)\geq 0$ و $1-x>0$ و $e^x-x>0$

اذن $f(x)-x>0$ أي أن للمنحنى (C) يقع فوق المستقيم (D) و يتقاطعان في النقطة $(0;0)$ و $(1;1)$.

3.أ- دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

نلاحظ أن: $\left(e^x - x\right)' = e^x - 1$ و عليه $F(x) = \ln\left(e^x - x\right) + c, \left(c \in \mathbb{R}\right)$

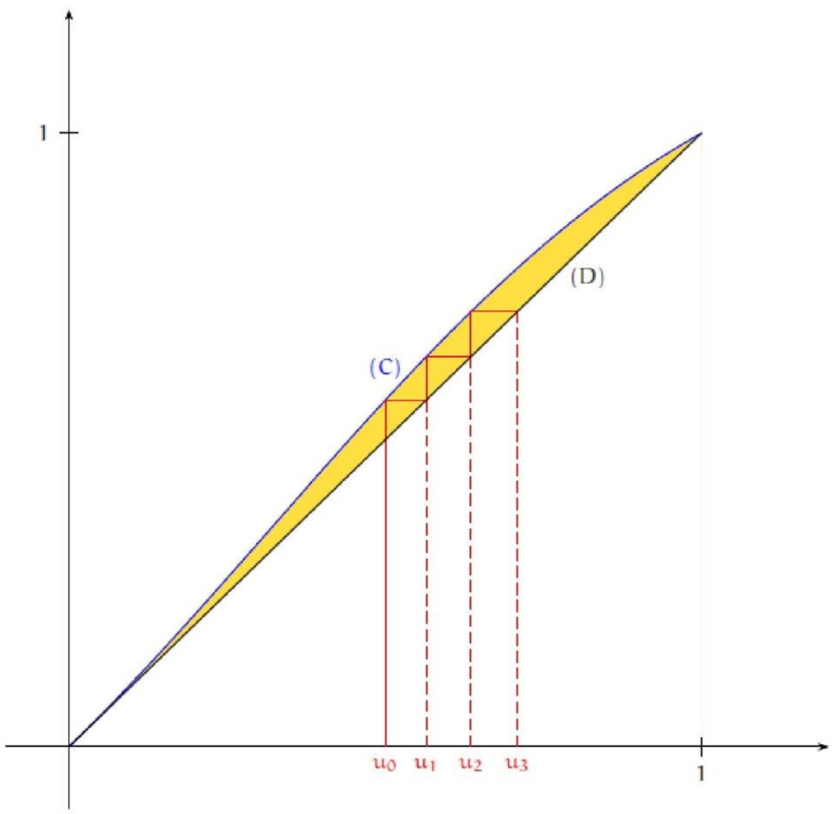
ب- مساحة الحيز:

على المجال $\left[0;1\right]$ $f(x) > x$ و بالتالي:

$$\int_0^1 f(x) - x dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \left[F(x)\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \ln\left(e-1\right) - \frac{1}{2} u.a$$

الجزء الثالث:

1. خطوط التمثيل.



2.لدينا: $u_0 = \frac{1}{2}$ و منه $\frac{1}{2} \le u_0 \le 1$.

ليكن $n \ge 0$ نفرض أن $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$ و بما أن f دالة متزايدة تماما على المجال $\left[0;1\right]$

و منه نستنتج أن $f\left(\frac{1}{2}\right) \le f\left(u_n\right) \le f\left(1\right)$ أي: $\frac{1}{2} \le u_{n+1} \le 1$.

و عليه حسب خاصية الاستدلال بالتراجع لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$.

حسب ما سبق لدينا على المجال $[0;1]$ ، $f(x) > x$ و بما أن $u_n \in [0;1]$

فان $f(u_n) \geq u_n$.

اذن من أجل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{2} < u_n < u_{n+1} < 1$.

3. بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو العدد l حيث $l \in [0;1]$.

لأن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

$l = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(l)$.

من أجل $x = 1$ لدينا $f(x) = x$ و بالتالي، $l = 1$ و عليه: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

......انتهى التصحيح النموذجي للموضوع 04 ،،

• تصحيح الاختبار الخامس من محطة التحضير الممتاز ـ الفصل II ـ

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء بعد الإطلاع على الحل خذوا الأفكار الطازجة مع تدوينها في سِجل خاص بها ،،

حل التمرين الأول :

الجزء الأول :

❶ ايجاد عددين حقيقين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ لدينا: $f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2} \\ &= \frac{ax+2a+bx-2b}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$4a=1 \Longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

بالتعويض نجد:

$$\boxed{b=-\frac{1}{4}}$$

ومنه:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}}$$

❷ استنتج دالة أصلية F للدالة f والتي تحقق $F(0)=1$

لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

ومنه:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} F(1)=0 &\Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c=0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{-2}{2}\right|+c=0 \\ &\Longrightarrow c=0 \end{aligned}$$

وعليه:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$$

الجزء الثاني :

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.

2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$، $f(0)\leq f(x)\leq f(e-1)$ أي $1\leq f(x)\leq 2$.

3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\leq \int_1^{e-1} f(x)dx \leq 2(e-2)$.

الجزء الثالث :

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= x+f(x) \\ &= e^{-x}(x^2+3x+2) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c) \\ &= e^{-x}(-ax^2+(2a-b)x+b-c) \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a=1 \\ 2a-b=3 \\ b-c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \\ c=-7 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{aligned} H(x) &= (-x^2-5x-7)e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x^2+5x+7) \end{aligned}$$

❷

أ/ حساب التكامل $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^\lambda h(x)dx \\ &= [H(x)]_0^\lambda \\ &= H(\lambda)-H(0) \\ &= -e^{-\lambda}(\lambda^2+5\lambda+7)+7 \end{aligned}$$

- **تفسير النتيجة بيانيا:**

لدينا:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_0^\lambda h(x)dx \\ &= \int_0^\lambda (f(x)-(-x))dx \\ &= \int_0^\lambda (f(x)-y_{(\Delta)})dx \end{aligned}$$

ومنه $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المحدد بالمستوي (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين: $x=0$ وَ $x=\lambda$

ب/ حساب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2+5\lambda+7)+7\right] \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \left[-e^{-\lambda}(\lambda^2)+7\right] \\ &= 7 \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني :

I ـ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{2e^{2x}-2e^{x}+1}$.

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ تفسير النتيجتين هندسيًّا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{2}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}}=\tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

⊡ منحنى الدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا أفقيًّا معادلتة $y=\dfrac{1}{2}$ في جوار $+\infty$.

⊡ منحنى الدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا أفقيًّا معادلتة $y=0$ في جوار $-\infty$.

❷ الإثبات :

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)-\left(4e^{2x}-2e^{x}\right)e^{2x}}{\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{2e^{2x}\left(2e^{2x}-2e^{x}+1-2e^{2x}+e^{x}\right)}{\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)^{2}}$$
$$=\frac{2e^{2x}\left(1-e^{x}\right)}{\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)^{2}}$$

⊡ لنشكل جدول تغيرات f : لدينا $f'(x)=0$ تكافئ $1-e^{x}=0$ تكافئ $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$

II ـ (U_n) متتالية عددية معرفة بـ : $U_0=\dfrac{3}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=f(\ln U_n)$.

❶ لنثبت بالتّراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{1}{2}<U_n<1$.

⊡ $\dfrac{1}{2}<U_0=\dfrac{3}{4}<1$ ، وعليه $P(0)$ محققة .

⊡ لنفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: لدينا $\dfrac{1}{2}<U_n<1$ ومنه $\ln\frac{1}{2}<\ln U_n<0$ ومنه $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)<f\left(\ln U_n\right)<f(0)$ ومنه $\dfrac{1}{2}<U_{n+1}<1$.

⊡ إذًا صحة $P(n+1)$ وعليه صحة $P(n)$.

❷ الإثبات : لدينا من جهة

$$U_{n+1}=f\left(\ln U_n\right)=\frac{e^{2\ln U_n}}{2e^{2\ln U_n}-2e^{\ln U_n}+1}=\frac{e^{\ln U_n^{2}}}{2e^{\ln U_n^{2}}-2U_n+1}=\frac{U_n^{2}}{2U_n^{2}-2U_n+1}$$

⊡ ومن جهة أخرى :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1}=\frac{1\times U_n^2}{\left(\frac{1}{U_n^2}-\frac{2}{U_n}+2\right)U_n^2}=\frac{U_n^2}{2U_n^2-2U_n+1}$$

❸ لندرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثمّ نستنتج أنّها متقاربة :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{1-U_n\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2-U_n}{\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1}=\frac{-2U_n^2+3U_n-1}{\left[\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1\right]U_n}=\frac{-2U_n^2+3U_n-1}{\left[\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1\right]U_n}$$

$$=\frac{-2\left(U_n-1\right)\left(U_n-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1\right]U_n}>0$$

⊡ ومنه (U_n) متزايدة تمامًا .

⊡ بما أنّ (U_n) متزايدة تمامًا ومحدودة فهي متقاربة .

❹ لنثبت أنّ (V_n) هندسية ونكتب عبارة حدّها العام :

$$V_{n+1}=\ln\left(\frac{1}{U_{n+1}}-1\right)=\ln\left[\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1-1\right]=\ln\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2=2\ln\left(\frac{1}{U_n}-1\right)=2V_n$$

⊡ ومنه (V_n) هندسية أساسها 2 وحدّها الأول :

$$V_0=\ln\left(\frac{1}{U_0}-1\right)=\ln\left(\frac{4}{3}-1\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

⊡ ومنه : $V_n=\ln\left(\frac{1}{3}\right)2^n$.

❺ لنستنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثمّ نحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$:

$$U_n=\frac{1}{1+e^{V_n}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}}$$

⊡ ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}}=1$$

❻ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n=V_{2022}\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\ln\left(\frac{1}{3}\right)2^{2022}\left(2^n-1\right)$$

❼ حساب بدلالة n المجموع T_n :

$$T_n=\ln\left(\frac{1}{3}\right)2^{2022}\left[\left(2^1+2^2+...+2^{n+1}\right)-\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n+1}\right)\right]$$

$$=\ln\left(\frac{1}{3}\right)2^{2022}\left[2\left(2^{n+1}-1\right)-n-1\right]$$

$$=\ln\left(\frac{1}{3}\right)2^{2022}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

حل التمرين الثالث :

I)1-أ)حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (\frac{4}{x+1}) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} (\frac{4}{x+1}) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + \frac{4}{x+1}) = +\infty$

ب)تشكيل جدول التغيرات بقراءة بيانية

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		$-$	‖	$-$	
g(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

2-أ) حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + \frac{4}{x+1}) = +\infty$$

ب) التحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{4}{x+1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{4}{x+1}) = 0$

ج) دراسة تغيرات الدالة g

<u>اتجاه التغير</u> لدينا: g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

$g'(x) = 0$ معناه $(x-1)(x+3) = 0$ معناه: $x=1$ أو $x=-3$ مرفوض

إشارة المشتق هي حسب إشارة $x-1$ وعليه جدول تغيرات هو كالتالي:

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		$-$		$+$	
g(x)	4	↘	3	↗	$+\infty$

II1-أ)حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ والاستنتاج

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h + \frac{4}{h+1} - 4}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h^2 - 3h}{h(h+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{h-3}{h+1} = -3$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h^2-5h}{h(h+1)} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-h-5}{h+1} = -5$$

نستنتج أن k ليست قابلة للإشتقاق عند0 لأن العدد (-3) لايساوي (-5).

ب) اعطاء تفسيرا هندسيا للنتيجة

k قابلة للإشتقاق من اليمن وقابلة للإشتقاق من اليسار فإن منحنى الدالة k يقبل نصفي مماسين عند النقطة التي فاصلتها 0 .النقطة التي احداثياها (0;4)هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة k

2)كتابة معادلتي المماسين (Δ_1)و (Δ_2)

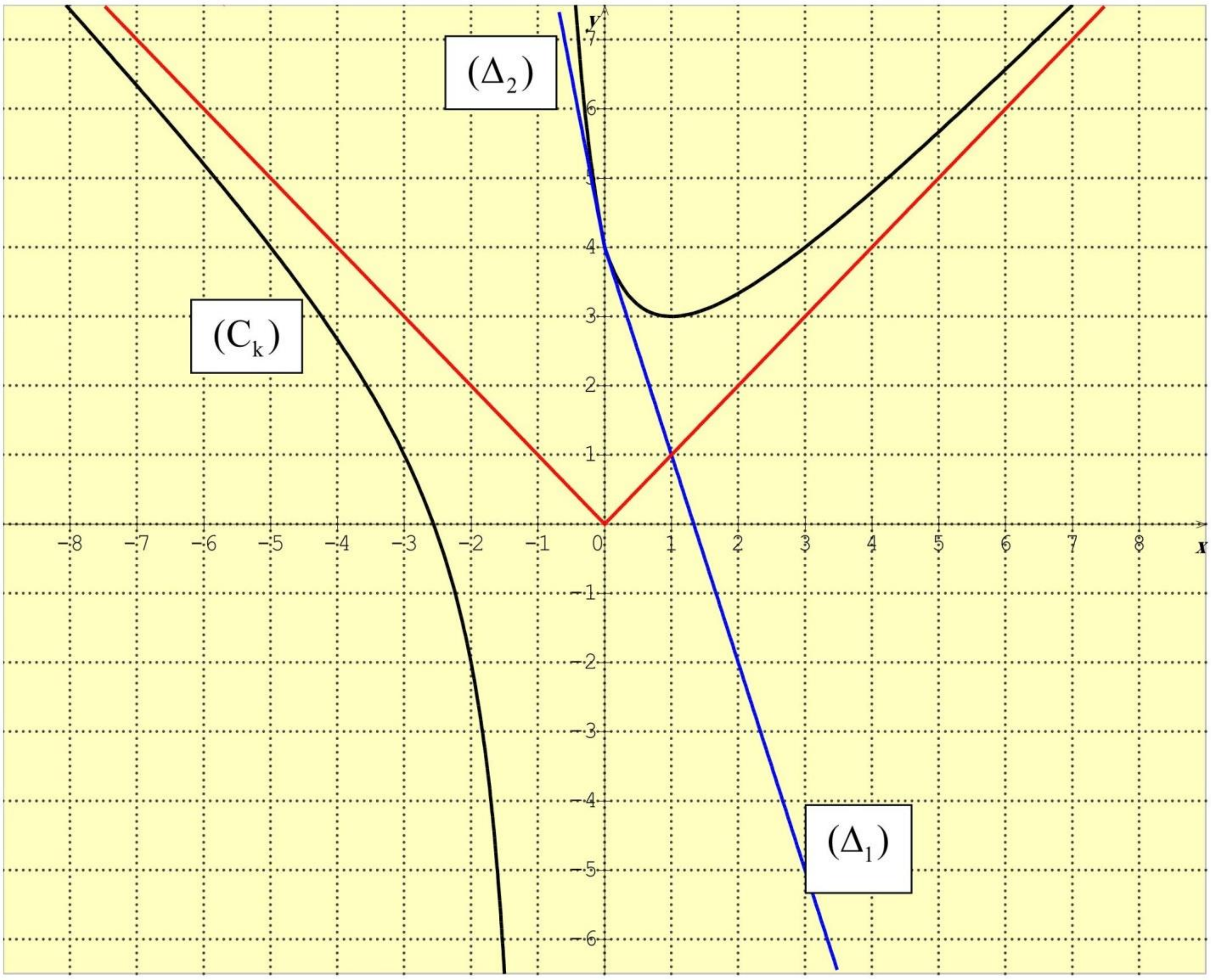
*(Δ_1)هو نصف المماس عند0 $= x_0$حيث $x_0 \geq 0$ لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ أي $y=-3x+4$

*(Δ_2)هو نصف المماس عند $x_0 = 0$حيث $x_0 \leq 0$ لدينا: $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ أي $y=-5x+4$

3)رسم كلا من (Δ_1)و (Δ_2)والمنحنى (C_k)

لرسم المنحنى (C_k)نلاحظ:إذا كانت $x \leq 0$فإن: $k(x)=f(x)$ومنه: $(C_f)=(C_k)$

إذا كانت $x \geq 0$فإن: $k(x)=g(x)$ومنه: $(C_g)=(C_k)$



4) حساب مساحة الحيز

مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$، $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$.

هي العدد الحقيقي $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx$

لدينا : k دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}=\begin{cases} x+\frac{4}{x+1};x\geq 0 \\ -x+\frac{4}{x+1};x<0 \end{cases}$

ومنه: $S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} k(x)dx=S_1+S_2$ حيث $S_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-x+\frac{4}{x+1})dx$ و $S_2=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{4}{x+1})dx$

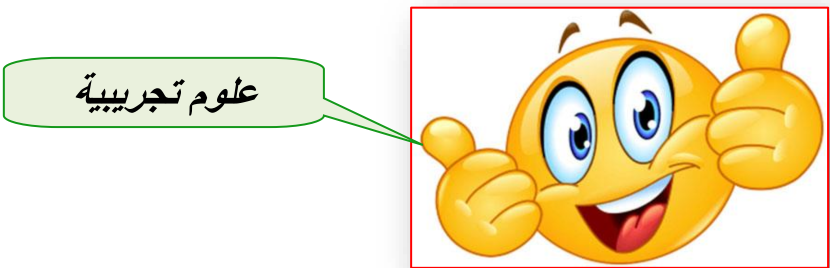
لدينا: $S_1=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-x+\frac{4}{x+1})dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+4\ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=0+\frac{1}{8}+4\ln 2$

$$S_2=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{4}{x+1})dx=\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln|x+1|\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+4\ln\frac{3}{2}-0=\frac{1}{8}+4\ln 3-4\ln 2$$

وعليه: $S=S_1+S_2=\left(\frac{1}{4}+4\ln 3\right)(u.a)$

......انتهى التصحيح النموذجي للموضوع 05 ،،

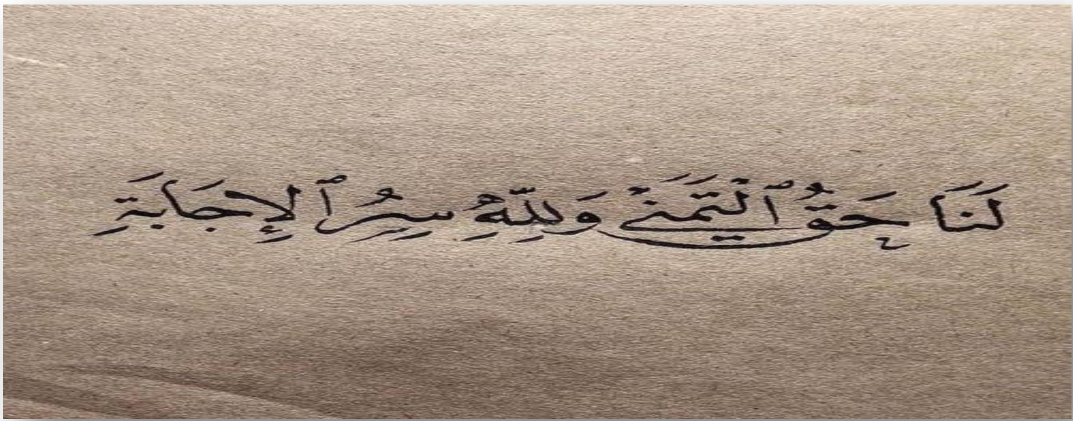
انتهى الجزء 2 الخاص بالحلول النموذجية ،، نتمنى الاستفادة بذاك القدر الذي نريده منكم .



- شعار العمل في الموسم -

تعبُ المُراجعةْ أَفضَلُ مِنْ ألمِ السُّقُوطْ

بالتوفيق و النجاح لجُموع التلاميذ الشُّرفاء



صناعة الطريق الذهبي نحو بكالوريا 2022

https://www.facebook.com/okba.bac.2010