كوكب النُّخبة - في مادة الرياضيات - المنصة العلمية نحو الامتياز - بكالوريــا 2023 -

يوم الخميس 23 ربيع الثاني 1444 هـ الموافق لـ 17 نوفمبر 2022

ملاحظة : هذه المادة تعتبر من أهم المواد العلمية و المعامل لها يتحدث نحو شعبة رياضيات { 7 } ، شعبة تقني رياضي { 6 } ، شعبة علوم تجريبية { 5 } ،، عِلما أنَّ محور *الدوال* له أكبر نسبة في البرنامج لهذا وجب الاهتمام به أكثر ،،

1

الباقة تحتوي :

باقة الأفكار الذَّهبية في مِحور الدوال

59 فِكرة ذهبية { (مثال + الحل) لكل فكرة }

من إعداد الأستاذ الشَّريف :

،، ســاعد أحمد ،،

خاصة بتلاميذ الشعب : رياضيات ،، تقني رياضي ،، علوم تجريبية

... تذكروا أنَّ :

تعبُ المراجعةُ أفضلُ مِنْ ألمْ السُّقوطْ

https://www.facebook.com/okba.bac2010 من تجميع و تنظيم : عقبة بن نافع

المحور 01 : عموميات حول الدوال..

أ) مجموعة تعريف دالة

01 كيف نعين مجموعة تعريف دالة ؟

طريقة 1:

إذا كانت العبارة على شكل حاصل قسمة ، نكتب الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان المقام (أوالمقامات) يختلف عن الصفر. حلول المعادلة (أو المعادلات) المحصل عليها تعطينا D_f .

مثال01 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{5}{x-3}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+2\neq 0$ و $x-3\neq 0$ أي $x\neq -2$ و $x\neq 3$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-2;3\}$

مثال02 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{2x+5}{|x+2|-3}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $|x+2|-3\neq 0$ أي $|x+2|\neq 3$

ومنه $x+2\neq 3$ و $x+2\neq -3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{-5;1\}$.

طريقة 2:

إذا كانت العبارة تحتوي على الجذور التربيعية ، نكتب الدالة معرفة إذا وفقط إذا كانت العبارة (أو العبارات) الموجودة تحت الجذر التربيعي موجبة أو معدومة. حلول المتراجحة (أو المتراجحات) المحصل عليها تعطينا D_f .

مثال01 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\sqrt{5-2x}-\sqrt{x+3}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $5-2x\geq 0$ و $x+3\geq 0$ أي $x\leq \dfrac{5}{2}$ و $x\geq -3$

ومنه $D_f=\left[-3;\dfrac{5}{2}\right]$.

مثال02 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}-2}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases}2x-3\geq 0\\ x-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}-2\neq 0\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}x\geq \dfrac{3}{2}\\ x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\neq 2\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}x\geq \dfrac{3}{2}\\ x\geq 1\\ x-1\neq 4\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}x\geq \dfrac{3}{2}\\ x\geq 1\\ x\neq 5\end{cases} \text{ ومنه } D_f=\left[\dfrac{3}{2};5\right[\cup\left]5;+\infty\right[$$

طريقة03:

إذا كانت العبارة تحتوي على اللوغاريتم $(\ln)$ ، نكتب الدالة معرفة إذا وفقط إذا كانت العبارة (أو العبارات) الموجودة داخل $\ln$ موجبة تماما. حلول المتراجحة (أو المتراجحات) المحصل عليها تعطينا D_f .

مثال01 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\ln(1-x^2)$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $1-x^2>0$ أي $(1-x)(1+x)>0$ فنجد $D_f=]-1\,;\,1[$.

مثال02 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-2}}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1>0$ و $x-2>0$ أي $x>-1$ و $x>2$ فنجد $D_f=]2\,;+\infty[$.

مثال03 :

عين مجموعة التعريف D_f للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{\ln|x+1|}{(x-2)^2}$

الحل : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x+1\neq 0$ و $x-2\neq 0$ أي $x\neq -1$ و $x\neq 2$ فنجد $D_f=\mathbb{R}-\{-1\,;2\}$.

ب) شفعية دالة

02.كيف نبين أن دالة f زوجية ؟

طريقة:

- نتحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $-x\in D_f$.
- نبين أن $f(-x)=f(x)$ بعد حساب $f(-x)$.
- نستنتج إذن f زوجية.

مثال01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=2-\dfrac{3}{x^2}$. بين أن f زوجية.

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}^*$.
- $f(-x)=2-\dfrac{3}{(-x)^2}=2-\dfrac{3}{x^2}=f(x)$

إذن f زوجية.

مثال02 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-2|x|+3$. بين أن f زوجية.

الحل :

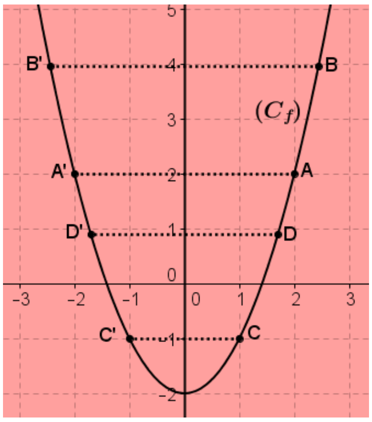
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$.
- $f(-x)=(-x)^2-2|-x|+3=x^2-2|x|+3=f(x)$.

إذن f زوجية.

03 . كيف نفسر بيانيا الدالة الزوجية ؟

طريقة:

إذا كانت الدالة f زوجية فإن المنحني (C_f) الممثل لها يقبل محور التراتيب كمحور تناظر.
يمكن اقتصار دراسة الدالة f على الجزء الموجب (أو السالب) من مجموعة تعريفها ثم نكمل المنحني باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.



04. كيف نبين أن دالة f فردية ؟

طريقة:

- نتحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $-x\in D_f$.
- نبين أن $f(-x)=-f(x)$ بعد حساب $f(-x)$.
- نستنتج إذن f فردية.

مثال01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x$. بين أن f فردية.

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$.
- $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$

إذن f فردية.

مثال02 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. بين أن f فردية.

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$.
- $$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

إذن f فردية.

مثال03 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$. بين أن f فردية.

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

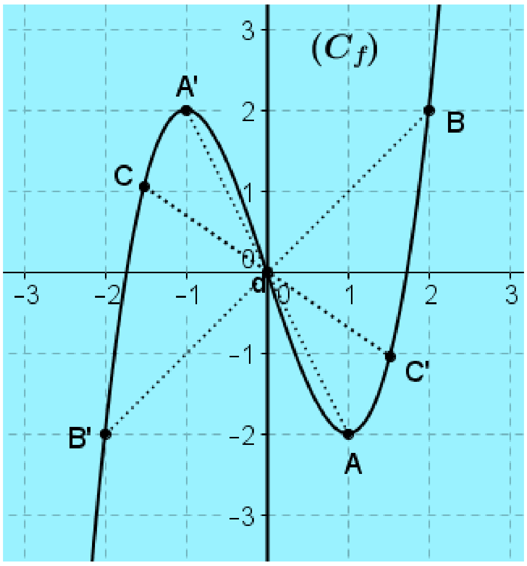
$$f(-x)=\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right|=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{-1}=-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=-f(x)$$

إذن f فردية.

05 . كيف نفسر بيانيا الدالة الفردية ؟

طريقة:

إذا كانت الدالة f فردية فإن المنحني (C_f) الممثل لها يقبل مبدأ الإحداثيين O كمركز تناظر.
يمكن اقتصار دراسة الدالة f على الجزء الموجب (أو السالب) من مجموعة تعريفها ثم نكمل المنحني باستعمال التناظر بالنسبة إلى المبدأ O .



06. كيف نبين أن دالة f دورية ودورها p ؟

طريقة:

- نتحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $(x+p) \in D_f$.
- نبين أن $f(x+p)=f(x)$ بعد حساب $f(x+p)$.
- نستنتج إذن f دورية ودورها p .

مثال01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2\sin^2(x)-3\cos(x)+1$. بين أن الدالة f دورية ودورها 2π .

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا $(x+2\pi) \in \mathbb{R}$
- $f(x+2\pi)=2\sin^2(x+2\pi)-3\cos(x+2\pi)+1$
  $=2\sin^2(x)-3\cos(x)+1=f(x)$

لأن $\cos(x+2\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

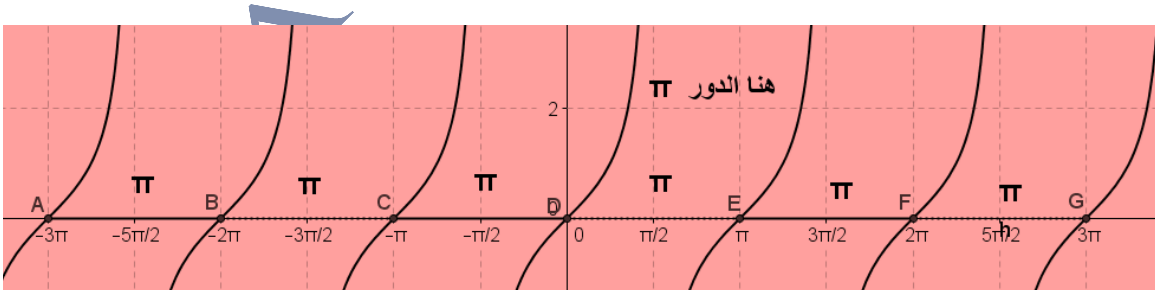
- إذن الدالة f دورية ودورها 2π .

06 . كيف نفسر بيانيا دورية دالة f ؟

طريقة:

إذا كانت الدالة f دورية ودورها p فإن الأجزاء من المنحني (C_f) هي نفسها في المجالات المتتابعة ذات الطول p أو المنحني (C_f) لا يتغير بالإنسحاب ذي الشعاع $p\vec{i}$.

يمكننا اقتصار دراسة الدالة f على مجال طوله p .



07 . كيف ندرس شفعية دالة f ؟

طريقة:

- نتحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $-x \in D_f$.
- نحسب $f(-x)$
- ✓ إذا كان $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية.

المحور 01 : عموميات حول الدوال..

- ✓ إذا كان $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية.
- ✓ إذا كان $f(-x)\neq f(x)$ و $f(-x)\neq -f(x)$ فإن f لا زوجية ولا فردية.
- ✓ إذا كان $x\in D_f$ فإن $-x\notin D_f$ أي إذا كان D_f غير متناظر بالنسبة لـ 0 فإن الدالة لا زوجية ولا فردية

مثال01 :

f دالة معرفة على I حيث $I=]-1;1[$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. أدرس شفعية f .

الحل :

- من أجل كل x من I ، لدينا $(-x)\in I$ لأن $-1<x<1$ بضرب طرفي المتباينة في -1 فإن $1>-x>-1$ أي $-1<-x<1$.
- $f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right)=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$

إذن f فردية.

مثال02 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-3x$. أدرس شفعية f .

الحل :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=(-x)^2-3(-x)=x^2+3x$
- لدينا $f(-x)\neq f(x)$ و $f(-x)\neq -f(x)$ ومنه f لا زوجية ولا فردية.

ت) عناصر التناظر

08. كيف نبرهن أن النقطة $A(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحني الممثل لدالة f ؟

طريقة01:

حتى نبين أن النقطة $A(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) :

1) نكتب دساتير تغيير المعلم $\begin{cases}x=X+\alpha\\ y=Y+\beta\end{cases}$.

2) نكتب معادلة (C_f) في المعلم الجديد ونعبر عنها على الشكل $Y=g(X)$.

3) نبين أن الدالة g فردية.

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2+4$

بين أن النقطة $A(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

1) نكتب دساتير تغيير المعلم: نعتبر في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطة M ذات الإحداثيين $(x;y)$. ولتكن $(X;Y)$ إحداثيي النقطة M في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$

دساتير تغيير المعلم حسب الدرس تعطينا $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$.

2) نكتب معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(A,\vec{i},\vec{j})$

$M\in(C_f)$ تكافئ $y=f(x)$ تكافئ $Y+2=f(X+1)$ أي :

$Y+2=(X+1)^3-3(X+1)^2+4$ وبعد النشر و التبسيط نجد $Y=X^3-3X$

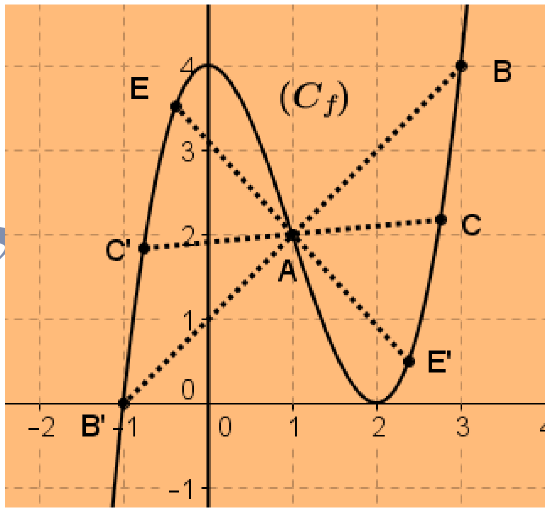
معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(A;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=g(X)$ حيث $g(X)=X^3-3X$

3) نبين أن الدالة g فردية

g معرفة على $\mathbb{R}$ ومنه D_g متناظرة بالنسبة إلى 0.

من أجل كل X من $\mathbb{R}$: $g(-X)=(-X)^3-3(-X)=-X^3+3X=-g(X)$ ومنه g فردية.

وأخيرا النقطة $A(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .



طريقة02:

حتى نبين أن النقطة $A(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

1) نتحقق من أن $(2\alpha-x)\in D_f$.

2) نبين أن $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$

بين أن النقطة $A(3;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{3\}$

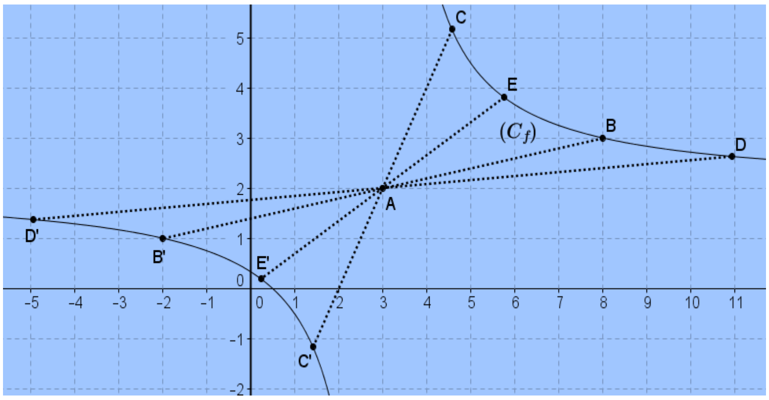
1) نبين أن $(2\alpha-x)\in\mathbb{R}-\{3\}$ أي $(6-x)\in\mathbb{R}-\{3\}$

$x\in\mathbb{R}-\{3\}$ معناه $x\neq 3$ أي $-x\neq -3$ ومنه $6-x\neq 6-3$ أي $6-x\neq 3$ وبالتالي $(6-x)\in\mathbb{R}-\{3\}$.

2) نبين أن $f(6-x)+f(x)=4$

$$f(6-x)+f(x)=\frac{2(6-x)-1}{6-x-3}+\frac{2x-1}{x-3}=\frac{4x-12}{x-3}=\frac{4(x-3)}{x-3}=4$$

ومنه النقطة $A(3;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .



طريقة03:

حتى نبين أن النقطة $A(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

1) نتحقق أن D_f متناظر بالنسبة إلى α أي إذا كان $(\alpha+h)\in D_f$ فإن $(\alpha-h)\in D_f$.

2) نبين أن $f(\alpha+h)+f(\alpha-h)=2\beta$

مثال :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$

بين أن النقطة $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

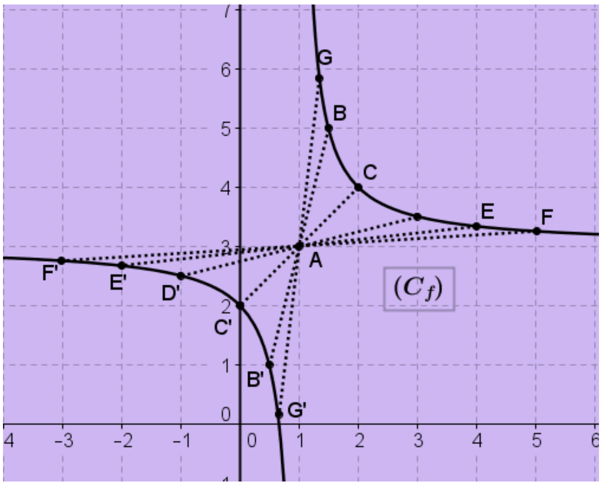
1) نبين أن D_f متناظرة بالنسبة إلى 1 :

f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$. من أجل كل h من $\mathbb{R}$ ، إذا كان $(1+h)\in\mathbb{R}-\{1\}$ فإن $1+h\neq 1$ ومنه $h\neq 0$ إذن $1-h\neq 1$ أي $(1-h)\in\mathbb{R}-\{1\}$ ومنه D_f متناظرة بالنسبة إلى 1.

2) نبين أن $f(1+h)+f(1-h)=6$

$$f(1+h)+f(1-h)=\frac{3(1+h)-2}{1+h-1}+\frac{3(1-h)-2}{1-h-1}=\frac{3h+1}{h}+\frac{-3h+1}{-h}=\frac{6h}{h}=6$$

وأخيرا النقطة $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .



09 . كيف نبرهن أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ هو محور تناظر للمنحني الممثل لدالة f ؟

طريقة01:

حتى نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر للمنحني (C_f) :

1) نكتب دساتير تغيير المعلم $\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y \end{cases}$.

2) نكتب معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(A;\vec{i};\vec{j})$ حيث $A(\alpha;0)$ ونعبر عنها على الشكل $Y=g(X)$.

3) نبين أن الدالة g زوجية.

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-4x+5$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

1) نكتب دساتير تغيير المعلم: نعتبر في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطة M ذات الإحداثيين $(x;y)$ ولتكن $(X;Y)$ إحداثيي النقطة M في المعلم الجديد $(A;\vec{i};\vec{j})$

دساتير تغيير المعلم حسب الدرس تعطينا $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y \end{cases}$.

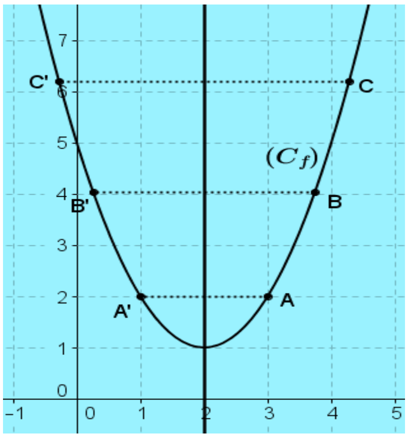
2) نكتب معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(A;\vec{i};\vec{j})$

$M\in(C_f)$ تكافئ $y=f(x)$ تكافئ $Y=f(X+2)$ أي :

$Y=(X+2)^2-4(X+2)+5$ وبعد النشر و التبسيط نجد $Y=X^2+1$

معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(A;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=g(X)$ حيث $g(X)=X^2+1$

3) نبين أن الدالة g زوجية



g معرفة على $\mathbb{R}$ ومنه D_g متناظرة بالنسبة إلى 0.

من أجل كل X من $\mathbb{R}$:

$$g(-X)=(-X)^2+1=X^2+1=g(X)$$

ومنه g زوجية.

وأخيرا المستقيم ذو المعادلة $x=2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

طريقة02:

حتى نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر للمنحني (C_f) :

1) نتحقق من أن $(2\alpha-x)\in D_f$.

2) نبين أن $f(2\alpha-x)=f(x)$.

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-6x+5$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

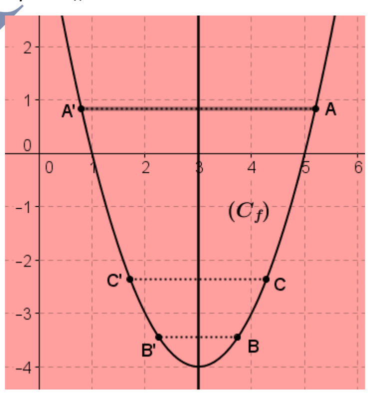
الحل :

1) نتحقق من أن $(2\alpha-x)\in D_f$. $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 3 وبالتالي $(6-x)\in\mathbb{R}$

2) نبين أن $f(6-x)=f(x)$

$$f(6-x)=(6-x)^2-6(6-x)+5=x^2-12x+36-36+6x+5=f(x)$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .



طريقة03:

حتى نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر للمنحني (C_f) :

1) نتحقق أن D_f متناظرة بالنسبة إلى α أي إذا كان $(\alpha+h)\in D_f$ فإن $(\alpha-h)\in D_f$.

2) نبين أن $f(\alpha+h)=f(\alpha-h)$

مثال01:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\,;4\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+5}{x^2-4x}$

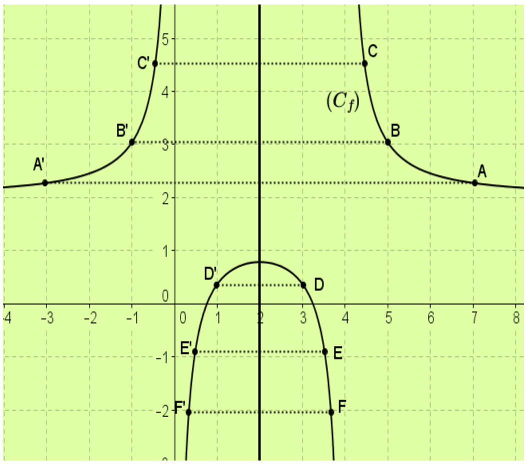
بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

من أجل عدد حقيقي h حيث $(2+h)\in D_f$:

1) نبين أن $(2-h)\in D_f$: $(2+h)\in D_f$ معناه $2+h\neq 0$ و $2+h\neq 4$ أي $h\neq -2$ و $h\neq 2$ معناه $2-h\neq 4$ و $2-h\neq 0$ أي $(2-h)\in\mathbb{R}-\{0\,,4\}$ اي $(2-h)\in D_f$ أي D_f متناظر بالنسبة إلى 2 .

2) نبين أن $f(2+h)=f(2-h)$



$$f(2-h)=\frac{2(2-h)^2-8(2-h)+5}{(2-h)^2-4(2-h)}=\frac{2h^2-3}{h^2-4}$$

$$f(2+h)=\frac{2(2+h)^2-8(2+h)+5}{(2+h)^2-4(2+h)}=\frac{2h^2-3}{h^2-4}$$

ومنه $f(2+h)=f(2-h)$ وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $x=2$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

مثال02:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x$

بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

الحل :

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ ، من أجل كل h من $\mathbb{R}$ بحيث $\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\in\mathbb{R}$ ، $\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\in\mathbb{R}$

ومنه D_f متناظر بالنسبة إلى $\frac{\pi}{2}$.

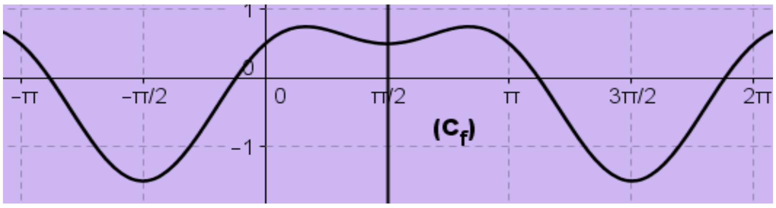
2) نبين أن $f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\frac{1}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\frac{1}{2}\cos(\pi-2h)$$

بما أن $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ و $\cos(\pi+x)=\cos(\pi-x)$ فإن

$$f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\pi+2h\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+\frac{1}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$$

ومنه $f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$ وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .



10. كيف نفسر المساواة $f(x)+f(-x)=c$ ؟

طريقة:

يكفي ملاحظة أن $f(x)+f(-x)=c$ يمكن كتابتها على الشكل: $\frac{f(0+x)+f(0-x)}{2}=\frac{c}{2}$ وهذا يعني أن النقطة $A\left(0;\frac{c}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

مثال:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x)+f(x)=2$ وفسر النتيجة بيانيا.

الحل :

$$f(-x)+f(x)=\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}\left(3e^{-x}-1\right)}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)}+\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

$$=\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}=\frac{2\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}=2$$

نستنتج أن النقطة $A(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .

04.كيف نجد إحداثيي النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى محور الفواصل؟

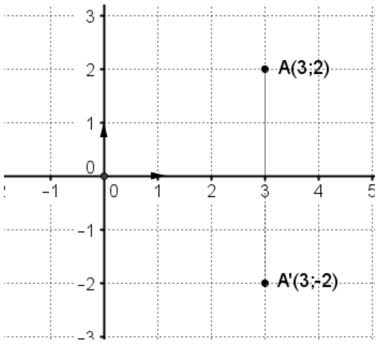
طريقة:

إذا كانت $A'(x';y')$ هي نظيرة $A(x;y)$ بالنسبة إلى محور الفواصل فإن : $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$

مثال :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ تعطى النقطة $A(3;2)$. أوجد $A'(x';y')$ نظيرة النقطة A بالنسبة إلى محور الفواصل.

الحل :



$A'(x';y')$ نظيرة النقطة $A(3;2)$

بالنسبة إلى محور الفواصل معناه $\begin{cases} x'=3 \\ y'=-2 \end{cases}$ أي $A'(3;-2)$

11. كيف نجد إحداثيي النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى محور التراتيب؟

طريقة:

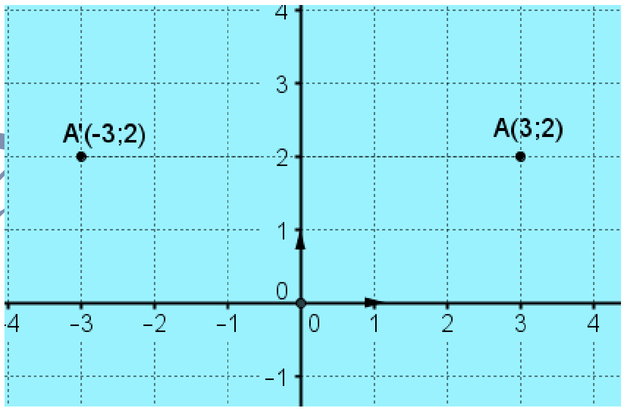
إذاكانت $A'(x';y')$ هي نظيرة $A(x;y)$ بالنسبة إلى محور التراتيب فإن : $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$

مثال :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ تعطى النقطة $A(3;2)$. أوجد $A'(x';y')$ نظيرة النقطة A بالنسبة إلى محور التراتيب.

الحل :

$A'(x';y')$ نظيرة النقطة $A(3;2)$ بالنسبة إلى محور التراتيب معناه $\begin{cases} x'=-3 \\ y'=2 \end{cases}$ أي $A'(-3;2)$



12. كيف نجد إحداثيي النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المبدأ؟

طريقة:

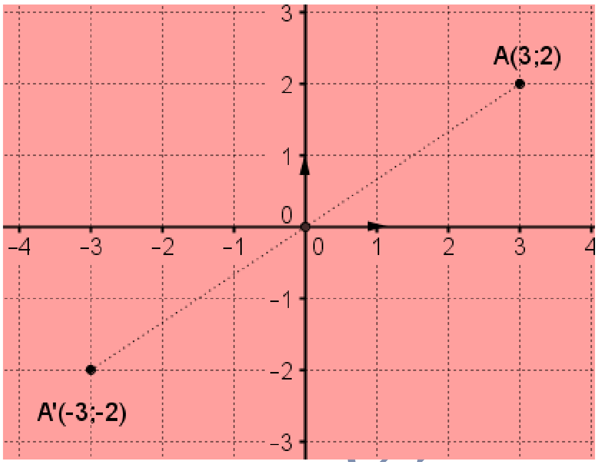
إذاكانت $A'(x';y')$ هي نظيرة $A(x;y)$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيين فإن : $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$

مثال :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ تعطى النقطة $A(3;2)$. أوجد $A'(x';y')$ نظيرة النقطة A بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيين O.

الحل :

$A'(x';y')$ نظيرة النقطة $A(3;2)$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيين O معناه $\begin{cases} x'=-3 \\ y'=-2 \end{cases}$ أي $A'(-3;-2)$



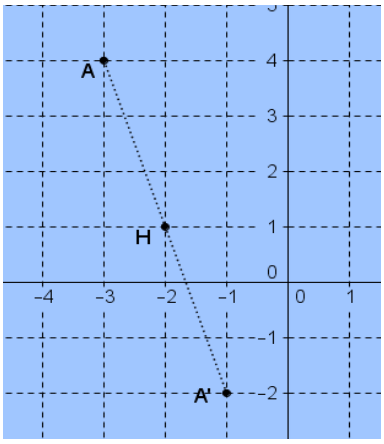
13.كيف نجد إحداثيي النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة $H(\alpha;\beta)$ ؟

طريقة:

النقطتان $A(x;y)$ و $A'(x';y')$ متناظرتان بالنسبة إلى النقطة $H(\alpha;\beta)$ معناه H منتصف $[AA']$ أي $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=\alpha \\ \dfrac{y+y'}{2}=\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x'=2\alpha-x \\ y'=2\beta-y \end{cases}$.

مثال :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ تعطى النقطتان $A(-3;4)$ و $H(-2;1)$. أوجد $A'(x';y')$ نظيرة النقطة A بالنسبة إلى H .



الحل :

$A'(x';y')$ نظيرة $A(-3;4)$ بالنسبة إلى $H(-2;1)$

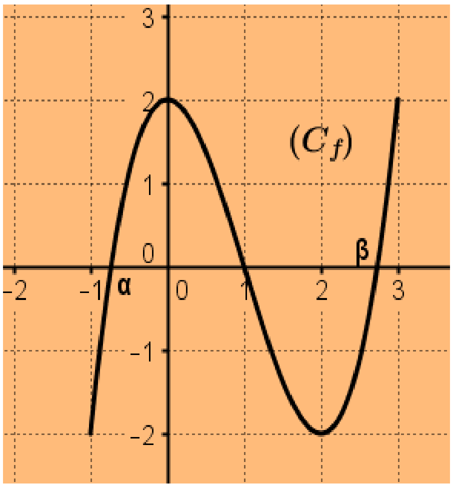
معناه H منتصف $[AA']$ أي $\begin{cases} \dfrac{x'-3}{2}=-2 \\ \dfrac{y'+4}{2}=1 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} x'=-4+3 \\ y'=2-4 \end{cases}$ ومنه $A'(-1;-2)$

ث)كيفية استنتاج رسم منحني انطلاقا من منحني آخر

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1\,;3]$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2+2$ وهذا تمثيلها البياني (C_f) في معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقط فواصلها α ، 1 ، β حيث $\alpha=1-\sqrt{3}$ و $\beta=1+\sqrt{3}$

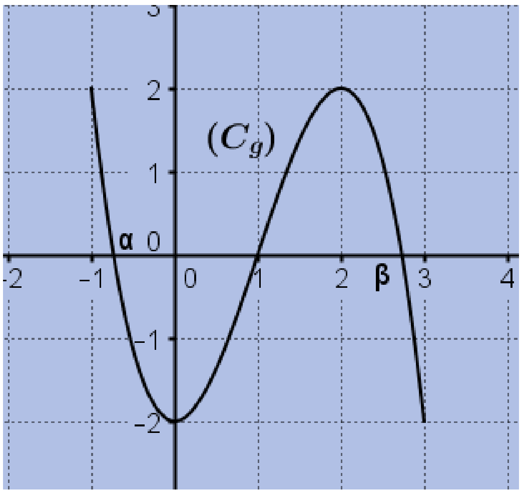


❖ **ندرس نفس المثال على الحالات المختلفة التالية**

14.كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=-f(x)$

طريقة:

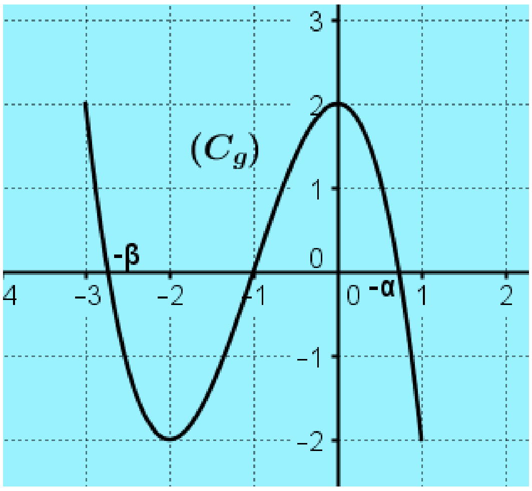
المنحنيان (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل.



15. كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=f(-x)$

طريقة:

المنحنيان (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب.



16. كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=|f(x)|$

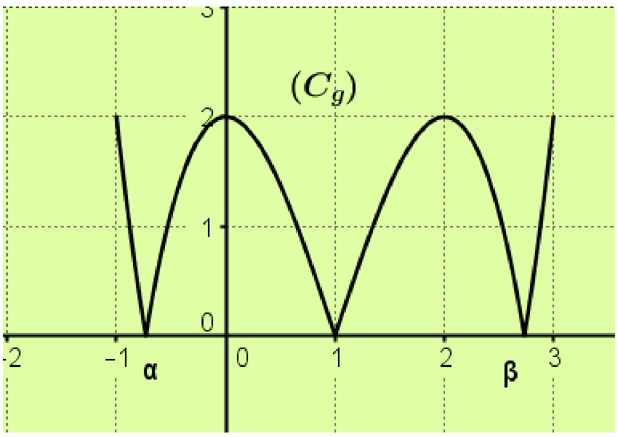
طريقة:

المنحنيان (C_f) و (C_g) منطبقان على مجال ومتناظران بالنسبة إلى محور الفواصل في مجال آخر نحتفظ بالجزء من (C_f) الذي يقع فوق محور الفواصل $(f(x)\geq 0)$ ، أما الجزء الذي يقع تحت محور الفواصل $(f(x)<0)$ ننشئ نظيره بالنسبة إلى محور الفواصل.

إشارة $f(x)$:

نضع $\alpha=1-\sqrt{3}$ و $\beta=1+\sqrt{3}$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in[\alpha;1]\cup[\beta;3] \\ -f(x) & x\in]-1;\alpha[\cup]1;\beta[\end{cases}$$



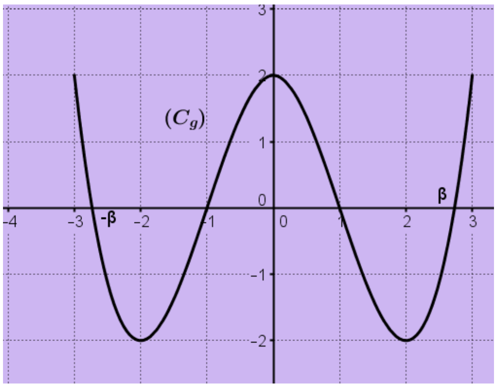
17. كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=f(|x|)$.

طريقة:

المنحنيان (C_f) و (C_g) منطبقان على مجال ومتناظران بالنسبة إلى محور التراتيب في مجال آخر عادة يطلب منا أن نبين أن الدالة g زوجية

إذا كان $(x\geq 0$ و $x\in D_f)$ فإن $|x|=x$ وبالتالي $g(x)=f(x)$ ومنه (C_g) ينطبق على (C_f).

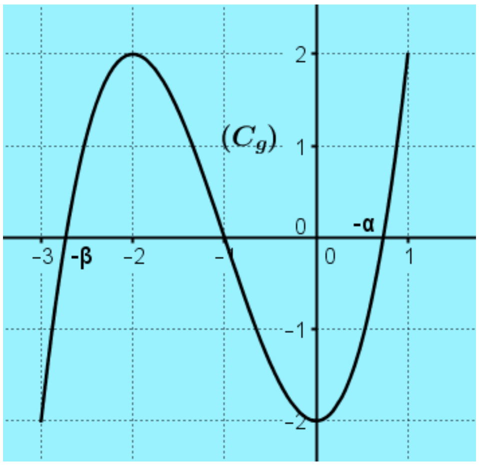
ثم نكمل الجزء الباقي باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.



18.كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=-f(-x)$

طريقة:

المنحنيان (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى المبدأ.



19.كيف نستنتج رسم المنحني (C_g) للدالة g انطلاقا من (C_f) لدالة f حيث $g(x)=f(x+a)+b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

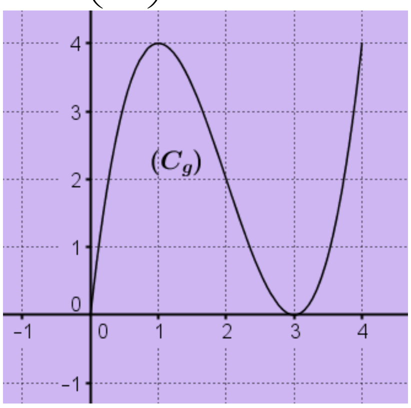
طريقة:

نحصل على المنحني (C_g) انطلاقا من (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$.

مثال: $g(x)=f(x-1)+2$

نحصل على المنحني (C_g)

انطلاقا من (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



ج)نقط تقاطع

20.كيف نجد إحداثيات نقطة أو نقط تقاطع منحنيين (C_f) و(C_g) ؟

طريقة:

1) نحل المعادلة $f(x)=g(x)$ لنجد x_0 فاصلة نقطة (أو فواصل نقط التقاطع).
2) نحسب $f(x_0)$ لنجد ترتيبة نقطة (أو تراتيب نقط التقاطع).
3) نستنتج أن النقط ذات الإحداثيات $(x_0;f(x_0))$ هي النقط المطلوبة.

مثال : (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x)=x^3-16x$ و (C_g) هو التمثيل البياني للدالة g حيث $g(x)=x^2-4x$. أوجد نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و(C_g) .

الحل :

1) نحل المعادلة $f(x)=g(x)$.

$f(x)=g(x)$ تكافئ $x^3-16x=x^2-4x$ أي $x(x^2-16)=x(x-4)$ تكافئ

$x(x-4)(x+4)-x(x-4)=0$ تكافئ $x(x-4)\left[(x+4)-1\right]=0$ معناه

$x(x-4)(x+3)=0$ فنجد $x=0$ أو $x=-3$ أو $x=4$ وهي فواصل نقط التقاطع.

2) نحسب الصور فنجد $g(0)=0$ ، $g(-3)=9+12=21$ ، $g(4)=0$

بإمكاننا حساب الصور بواسطة الدالة f فنجد كذلك $f(0)=0$ ، $f(-3)=21$ ، $f(4)=0$.

3) نستنتج أن المنحنيين (C_f) و(C_g) يتقاطعان في ثلاث نقط $B(-3;21)$, $A(4;0)$, $O(0;0)$

21. كيف نجد إحداثيات نقطة أو نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل ؟

طريقة:

النقطة أو النقط التي يقطع فيها المنحني محور الفواصل يكون ترتيبها معدوما.

- نحل المعادلة $f(x)=0$ لنجد فاصلة أو فواصل (حلول المعادلة) نقط التقاطع.
- النقط ذات الإحداثيين $(x_0;0)$ هي النقط المطلوبة.

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2+3x+2$. عين نقطة أو نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة f مع محور الفواصل ؟

الحل :

نحل المعادلة $f(x)=0$ لنجد فاصلة أو فواصل نقط التقاطع.

$f(x)=0$ معناه $x^2+3x+2=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز فنجد $x_1=-1$ و $x_2=-2$.

وأخيرا المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(-1;0)$ و $B(-2;0)$.

22. كيف نجد إحداثيات نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب ؟

طريقة:

النقطة التي يقطع فيها المنحني محور التراتيب تكون فاصلتها معدومة.

- نحسب $f(0)$ لنجد ترتيبة نقطة التقاطع.
- النقطة ذات الإحداثيين $(0;f(0))$ هي نقطة تقاطع المنحني مع محور التراتيب.

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x+2$. عين نقطة تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة f مع محور التراتيب ؟

الحل :

النقطة المطلوبة فاصلتها معدومة وترتيبها $f(0)$.

لدينا $f(0)=2$ ومنه المنحني (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $A(0;2)$

23. كيف نبين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما ؟

طريقة01:

- نضع $y=f_m(x)$ ثم نكتب ذلك على الشكل $(......)m+(......)=0$ حيث القوسان $(......)$ ، $(......)$ يحويان فقط على x و y ولا يحويان m .
- تكون المعادلة $(......)m+(......)=0$ محققة مهما كان m معناه القوسين معدومين.
- نحل الجملة ذات المجهولين x و y وبالتالي نجد النقطتين.

مثال:

- f_m الدالة المعرفة كما يلي : $f_m(x)=\dfrac{mx+m-1}{x-m+1}$ حيث $m\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

المحور 01 : عموميات حول الدوال..

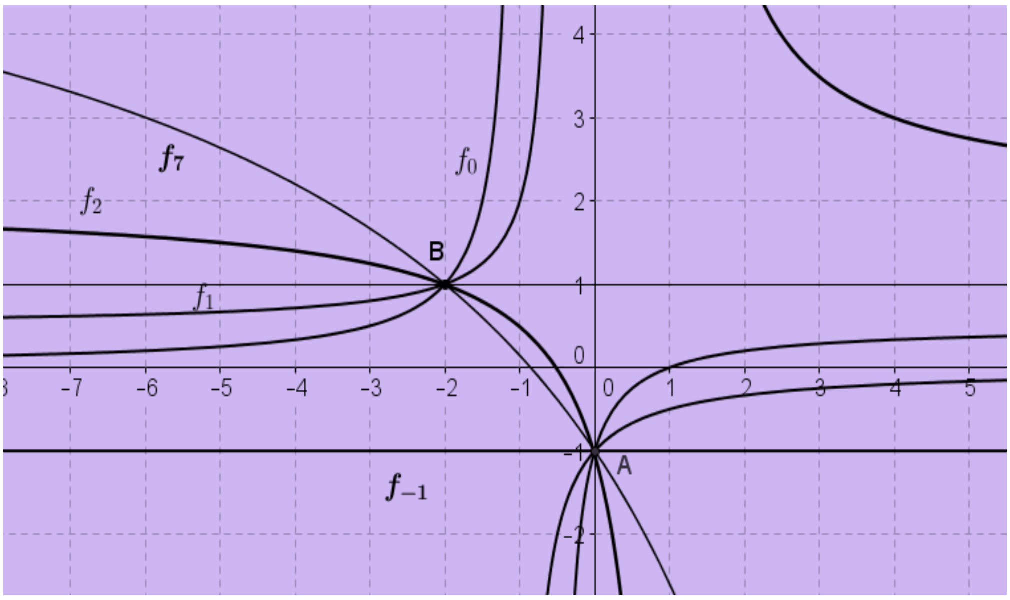
الحل :

- نضع $y=\dfrac{mx+m-1}{x-m+1}$ ومنه $y(x-m+1)=mx+m-1$ أي $(x+1+y)m+(-xy-y-1)=0$.
- نحل الجملة $\begin{cases} x+1+y=0 \\ -xy-y-1=0 \end{cases}$ وبعد كتابتها على الشكل $\begin{cases} y=-x-1 \\ -xy-y-1=0 \end{cases}$ نجد $x=0$ او $x=-2$. من أجل $x=0$ نجد $y=-1$ و النقطة الأولى هي $A(0;-1)$.
- ومن أجل $x=-2$ نجد $y=1$ و النقطة الثانية هي $B(-2;1)$.

ملاحظة هامة:

❖ من أجل $m=1$ تكون $f_1(x)=\dfrac{x+1-1}{x-1+1}=1$ والتمثيل البياني هو مستقيم افقي يشمل النقطة $B(-2;1)$.

❖ من أجل $m=-1$ تكون $f_{-1}(x)=\dfrac{-x-1-1}{x+1+1}=\dfrac{-x-2}{x+2}=-1$ والتمثيل البياني هو مستقيم افقي يشمل النقطة $A(0;-1)$.



طريقة02:

القول أن (C_m) و $(C_{m'})$ لها نقطة مشتركة معناه توجد قيمة لـ x نحددها بحيث مهما كان العددان الحقيقيان m و m' : $f_m(x)=f_{m'}(x)$

مثال:

f_m الدالة المعرفة كما يلي : $f_m(x)=\dfrac{e^{-mx}}{1+e^{-x}}$.

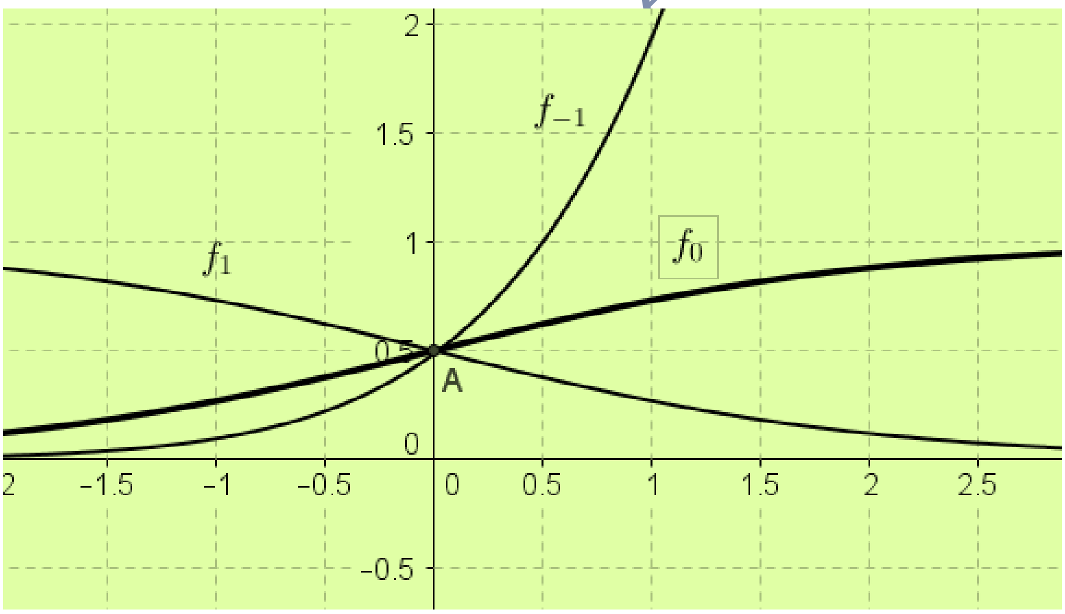
بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثييها.

الحل :

نحل المعادلة ذات المجهول x التالية : $f_m(x)=f_{m'}(x)$ أي $\dfrac{e^{-m'x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-mx}}{1+e^{-x}}$ ومنه $e^{mx}=e^{m'x}$ أي $mx=m'x$ معناه $mx-m'x=0$ أي $(m-m')x=0$.

$(m-m')x=0$ مهما كان العددان الحقيقيان m و m' معناه $x=0$ فنحصل على $y=\dfrac{1}{2}$.

وبالتالي جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.



المحور 02: النهايات و المستقيمات المقاربة..................................

أ) حساب النهايات

24. ماهي حالات عدم التعيين المقررة ؟

هناك أربع حالات عدم التعيين وهي : $\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

25. كيف نحسب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ؟

طريقة:

- نعوض كل x بـ a .

مثال : أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x+\ln x\right)$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-3x}{e^x+2}\right)$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-5}{x^2+3\sqrt{x}}$

الحل :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x+\ln x\right)=(1)^2-3\times 1+\ln(1)=1-3=-2$ لأن $\ln 1=0$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-3}{e^x+2}\right)=\frac{e^0-3}{e^0+2}=-\frac{2}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-5}{x^2+3\sqrt{x}}=\frac{4-5}{16+3\sqrt{4}}=-\frac{1}{22}$

26. كيف نحسب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$: عندما يؤول البسط إلى عدد ثابت غير معدوم ويؤول المقام إلى الصفر؟

طريقة:

- ندرس إشارة المقام
- نحسب النهاية من أجل $x\xrightarrow[x>a]{}a$ و $x\xrightarrow[x<a]{}a$.

مثال : أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2+5x-1}{x^2-3x+2}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{(x+2)^2}$

الحل :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$

- لدينا $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ إذن البسط يؤول إلى 2 ويؤول المقام إلى 0 .

- ندرس إشارة المقام :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^2+1\right)=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x-1\right)=0^- \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2+1\right)=2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x-1\right)=0^+ \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+5x-1}{x^2-3x+2}$

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2+5x-1\right)=5$ و $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+2\right)=0$ إذن البسط يؤول إلى 5 ويؤول المقام إلى 0.
- ندرس إشارة المقام : المقام x^2-3x+2 ينعدم عند 2 وعند 1 .

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(-x^2+5x-1\right)=5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(x^2-3x+2\right)=0^- \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{-x^2+5x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$.

بما أن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(-x^2+5x-1\right)=5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(x^2-3x+2\right)=0^+ \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{-x^2+5x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-x}{(x+2)^2}$

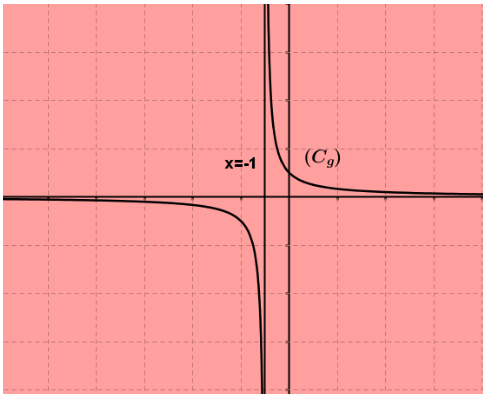
لدينا $\lim\limits_{x\to -2}(1-x)=3$ و $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)^2=0^+$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1-x}{(x+2)^2}=+\infty$

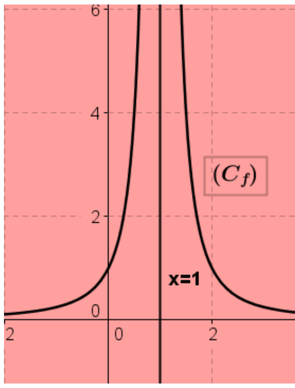
27 . كيف نقرأ بيانيا $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ؟

طريقة:

نأخذ x أقرب مايمكن من a ونلاحظ نحو أي قيمة تقترب $f(x)$.

مثال : عين بيانيا $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}g(x)$





الحل :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty \text{ ، } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0 \ ; \ \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} g(x)=+\infty \ ; \ \lim_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} g(x)=-\infty$$

28 . كيف نزيل حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ ؟

طريقة01: استعمال التحليل

نحلل البسط أو المقام أو كليهما

- **نحصل على عامل في البسط يساوي عامل في المقام نختزلهما**
- **نحسب نهاية ما تبقى.**

مثال01: أحسب $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)=0$ و $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$" .

1) نحلل البسط فنجد $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)}$

2) نختزل و نجد النهاية.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

مثال 02: أحسب $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=0$ و $\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$"

1) نحلل البسط والمقام فنجد $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$

2) نختزل و نجد النهاية.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}$$

طريقة 02: استعمال المرافق:

- نضرب في المرافق ونقسم عليه.
- نحصل على عامل في البسط يساوي عامل في المقام نختزلهما
- نحسب نهاية ما تبقى.

مثال01: أحسب $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ (الجذر موجود في البسط فقط).

الحل :

لدينا $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}-3\right)=0$ و $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$"

- نضرب في المرافق ونقسم عليه

$$\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)}{x-2}\times\frac{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

نختزل و نجد النهاية.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

مثال02: أحسب $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ (الجذر موجود في المقام فقط) .

الحل :

لدينا $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ و $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$"

نضرب في المرافق ونقسم عليه

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}\times\frac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)}$$

نختزل و نجد النهاية.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4$$

مثال 03: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x-2}-2}$. (الجذر موجود في البسط و المقام) .

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{4x+1}-3\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{3x-2}-2\right)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\frac{0}{0}"$

نضرب في مرافقي البسط والمقام ونقسم عليهما

$$\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x-2}-2}=\frac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}$$

$$=\frac{4(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\frac{8}{9}$$

طريقة 03: استعمال العدد المشتق:

1) نحدد عبارة $f(x)$ ونحسب قيمة $f(a)$.

2) نكتب النهاية المعطاة على الشكل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

3) نحسب عبارة $f'(x)$ ثم نحسب قيمة $f'(a)$.

4) من تعريف العدد المشتق نجد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

مثال01: أحسب $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^n-1\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\frac{0}{0}"$

1) نضع $f(x)=x^n$ ومنه $f(1)=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

3) $f'(x)=nx^{n-1}$ ومنه $f'(1)=n$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=n$ أي $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$

مثال02: أحسب $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x+5}-3\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\dfrac{0}{0}$"

1) نضع $f(x)=\sqrt{x+5}$ ومنه $f(4)=3$.

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$ ومنه $f'(4)=\dfrac{1}{6}$

4) $\dfrac{1}{6}=f'(4)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ أي $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\dfrac{1}{6}$

مثال03: أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\dfrac{0}{0}$"

1) نضع $f(x)=\cos x$ ومنه $f(0)=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=-\sin x$ ومنه $f'(0)=0$

4) $0=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$ أي $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$

مثال04: أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\dfrac{0}{0}$"

1) نضع $f(x)=e^x$ ومنه $f(0)=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=e^x$ ومنه $f'(0)=1$

4) $1=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$ أي $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

مثال05: أحسب $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x+x^2}$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$ و $\lim_{x\to 0}(x+x^2)=0$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$"

نكتب $\frac{\ln(1+x)}{x+x^2}$ على الشكل $\frac{\ln(1+x)}{x+x^2}=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x+1}$

1) نضع $f(x)=\ln(1+x)$ ومنه $f(0)=0$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ ومنه $f'(0)=1$

4) $f'(0)=1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ أي $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x+x^2}=1\times 1=1$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

مثال06: أحسب $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}2\sin(x)-1=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-1=2\left(\frac{1}{2}\right)-1=0$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(6x-\pi)=0$ إذن نحن أمام حالة

عدم التعيين من الشكل "$\frac{0}{0}$".

من أجل $x\neq\frac{\pi}{6}$ فإن $\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\frac{2}{6}\times\frac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$

1) نضع $f(x)=\sin(x)$ ومنه $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}\times\frac{\sin(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

3) حساب $f'(x)$: $f'(x)=\cos(x)$ ومنه $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{3}\times f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$ أي $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

6. كيف نزيل حالة عدم التعيين من الشكل $(\infty-\infty)$ ؟

طريقة 01 :

نهاية كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة فيه .

مثال : أحسب 1) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+5\right)$ ، 2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+6\right)$.

الحل:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(-3x+5)=-\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\infty-\infty"$.

1) يمكن الحل مباشرة بحساب نهاية الحد الأعلى درجة أي

$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$ أو بتبيان لماذا نهاية الحد الأعلى درجة :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$

لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0\right)$.

2) يمكن الحل مباشرة بحساب نهاية الحد الأعلى درجة أي

$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$ أو بتبيان لماذا نهاية الحد الأعلى درجة :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$$

طريقة 02 :

إذا كانت العبارة من الشكل $\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}$.

- نضرب ونقسم على مرافق العبارة $\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}$ أي $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}$.
- نحسب نهاية العبارة الناتجة.

مثال 01: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\infty-\infty"$.

- من أجل $x\geq 0$: نضرب $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ ونقسم على مرافقه $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$ فنجد

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$.

مثال 02: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-x\right)$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\infty-\infty"$.

- نكتب $\sqrt{4x^2+x}-x=\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}-x=|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-x$

بما أن $x>0$ فإن $|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-x=x\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-x=x\left[\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-1\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-1\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(4+\frac{1}{x}\right)}-1=1$

مثال 03: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\infty-\infty"$.

- نضرب $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ونقسم على مرافقه أي $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ فنجد

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty$.

طريقة 03 :

إذا كانت العبارة بها اللوغاريتم أو الأسية .

- ممكن نخرج عامل مشترك.
- ممكن توحيد المقامات
- ممكن التجزئة

مثال 01: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\ln x)$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل $"\infty-\infty"$

- نخرج x كعامل مشترك: من أجل $x>0$: $x+1-\ln x=x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

مثال 02: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1-e^{x})$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x})=+\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\infty-\infty$".

- نخرج x كعامل مشترك:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1-e^{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$

مثال 03: أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)$.

الحل :

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$ إذن نحن أمام حالة عدم التعيين من الشكل "$\infty-\infty$".

- نوحد المقامات فنجد: من أجل $x>0$: $1+\frac{1}{x}+\ln x=\frac{x+1+x\ln x}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{x+1+x\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+x)=1$

مثال 04: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-2x+1}{x}$

الحل :

- نجزء: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{x}-2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

29 . كيف نزيل حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$ ؟

طريقة :

- عادة ننشر العبارة لنظهر النهايات الشهيرة

مثال01 : أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(1+\sqrt{x})$

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})=+\infty$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

- ننشر: من أجل $x>0$ ، $\frac{1}{x}(1+\sqrt{x})=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$

مثال02 : أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x\right)e^{-x}$.

الحل :

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

- ننشر : $\left(x^3+3x\right)e^{-x}=x^3e^{-x}+3xe^{-x}=\frac{x^3}{e^x}+3\frac{x}{e^e}$

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}+3\frac{x}{e^e}\right)=0$

مثال03 : أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$

الحل :

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^x\right)=0$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

$\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$. نضع $X=e^x$ عندما $x\to-\infty$ فإن $X\to0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$.

30 . كيف نزيل حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ؟

طريقة 01: في حالة دالة ناطقة (كثير حدود على كثير حدود)

نهاية دالة ناطقة عند ∞ هي نهاية نسبة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

مثال 01: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3-5x^2+7x-3}{x^2-3x+2}$

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3-5x^2+7x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-2-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}-2x=-\infty$$

ممكن نستعمل مباشرة نسبة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام فنجد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3-5x^2+7x-3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}-2x=-\infty\ .$$

طريقة 02: في حالة دالة صماء

- نخرج عامل مشترك ونظهر نهاية شهيرة

مثال 01 : أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+2}$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. نخرج x كعامل مشترك فنحصل على :

$$\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+2}=\frac{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x+2}=\frac{x+|x|\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x+2}$$

من أجل $x>0$:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+2}=\frac{x+x\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{x\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}\right]}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{1+\frac{2}{x}}$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{1+\frac{2}{x}}=2$

طريقة 03: في حالة وجود اللوغاريتم أو الأسية

نخرج عامل مشترك أو نجزء أو نطبق الخواص ثم نظهر نهاية شهيرة

مثال 01: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\ln x}{2-\ln x}$

الحل :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}(2-\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(3+\ln x)=+\infty$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

لدينا مجموعة التعريف $D=\left]0\,;e^2\right[\cup\left]e^2\,;+\infty\right[$

- نخرج $\ln x$ كعامل مشترك فنحصل على :

$$\frac{3+\ln x}{2-\ln x}=\frac{(\ln x)\left(\frac{3}{\ln x}+1\right)}{(\ln x)\left(\frac{2}{\ln x}-1\right)}$$

من أجل $x \in D$ لدينا $\dfrac{\dfrac{3}{\ln x}+1}{\dfrac{2}{\ln x}-1}=\dfrac{3+\ln x}{2-\ln x}$.

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\ln x}=0$ وبالتالي

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\ln x}{2-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{\ln x}+1}{\dfrac{2}{\ln x}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

مثال 02: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{2e^x+3}$

الحل:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x+3\right)=+\infty$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

- نخرج e^x كعامل مشترك فنحصل على : $\dfrac{e^x-1}{2e^x+3}=\dfrac{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\dfrac{3}{e^x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{2+\dfrac{3}{e^x}}$

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{2e^x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{2+\dfrac{3}{e^x}}=\dfrac{1}{2}$.

مثال 03: أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x}$

الحل:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln x\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\right)=+\infty$ وبالتالي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

- نجزء: من أجل $x>0$ $\dfrac{1+\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

31. كيف نجد نهاية دالة مركبة f حيث $f=uov$ ؟

طريقة: إذا كانت f مركبة من دالتين ($f=uov$) فإننا :

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}v(x)=b$.
- و $\lim\limits_{X\to b}u(X)=c$

- نستنتج حسب مبرهنة تركيب الدوال أن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

مثال 01:

أحسب : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-1}\right)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{-x^2+3x+1}$.

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-1}\right)$

- لدينا من جهة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$.
- ولدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{X\to 0}\cos X=1$.
- نستنتج حسب مبرهنة تركيب النهايات أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-1}\right)=1$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{-x^2+3x+2}$.

- لدينا من جهة $\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2+3x+2\right)=-4+6+2=4$.
- ولدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X}=2$.
- نستنتج حسب مبرهنة تركيب النهايات أن $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{-x^2+3x+2}=2$

مثال 02:

أحسب **1)** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{\dfrac{4+x}{x-3}}$ ، **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e+e^{-x}\right)$ ، **3)** $\lim\limits_{x\to-2}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

الحل:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{\dfrac{4+x}{x-3}}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(x-3)=0^+$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}(4+x)=7$ ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{4+x}{x-3}=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن

$$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{\dfrac{4+x}{x-3}}=+\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e+e^{-x}\right)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e+e^{-x}\right)=e$ وبما أن $\lim\limits_{X\to e}\ln X=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e+e^{-x}\right)=1$

3) $\lim_{x\to -2} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

بما أن الدالة معرفة على $]-2\,;2[$ فإن $\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(2+x)=0^+$ و $\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}(2-x)=4$ وبالتالي

$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=0^+$ وبما أن $\lim_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-\infty$

32. كيف نستعمل الحصر $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ لحساب نهاية f ؟

طريقة :

إذا كان لدينا $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ من أجل كل x بجوار a وكانت $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b$

فإن $\lim_{x\to a} f(x)=b$.

مثال01:

1) لتكن f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ $\frac{3}{x^2}\leq f(x)\leq\frac{3}{x}$. أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2) لتكن g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ $\frac{1}{x}\leq g(x)-\frac{5}{2}\leq\frac{3}{x}$. أحسب $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

الحل:

1) بما أن $\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}=0$ فإنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$.

2) بما أن $\lim_{x\to +\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$ فإنه حسب مبرهنة الحصر $\lim_{x\to +\infty}\left[g(x)-\frac{5}{2}\right]=0$ ومنه

$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\frac{5}{2}$

مثال02:

لتكن f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) بين أنه من أجل كل $x\in[0\,;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) بين أنه من أجل كل $x\in]0\,;+\infty[$ ، $0\leq f(x)\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$.

3) استنتج $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

الحل:

1) لدينا من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ ،

$$f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}$$

2) من أجل كل $x \in]0\ ;+\infty[$ ، لدينا $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ أي $f(x)\geq 0$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا: $\sqrt{x+2}\geq 0$ ومنه $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\geq\sqrt{x}$ وبالتالي $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ومنه $\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ أي $f(x)\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3) بما أن $0\leq f(x)\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$ فحسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

مثال 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ $f(x)=1+\dfrac{\cos x}{x^2}$

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1-\dfrac{1}{x^2}\leq f(x)\leq 1+\dfrac{1}{x^2}$

2) أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1) نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1\leq\cos x\leq 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ،

$$-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\cos x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1-\dfrac{1}{x^2}\leq 1+\dfrac{\cos x}{x^2}\leq 1+\dfrac{1}{x^2}$ أي $1-\dfrac{1}{x^2}\leq f(x)\leq 1+\dfrac{1}{x^2}$

2) بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

مثال 04:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $\dfrac{x+1}{x+3}\leq\dfrac{x-\sin x}{x+3}\leq\dfrac{x-1}{x+3}$.

2) لتكن f الدالة المعرفة على $]0\ ,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x+3}$ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

الحل :

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $-1 \le \sin x \le 1$ و منه $-1 \le -\sin x \le 1$

نضيف x إلى كل طرف نجد $x-1 \le x-\sin x \le x+1$ ثم نقسم على العدد الحقيقي

$x+3$ الموجب تماما نجد $\frac{x-1}{x+3} \le \frac{x-\sin x}{x+3} \le \frac{x+1}{x+3}$

2) لدينا $f(x)=\frac{x-\sin x}{x+1}$ أي $\frac{x-1}{x+3} \le f(x) \le \frac{x+1}{x+3}$. بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+3}=1$

فحسب مبرهنة الحصر يكون لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

33 . كيف نستعمل علاقة الترتيب $f(x) \le h(x)$ أو $f(x) \ge g(x)$ لحساب نهاية f ؟

طريقة :

- إذا كانت $f(x) \ge g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي قريب من a وكانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- إذا كانت $f(x) \le h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي قريب من a وكانت $\lim\limits_{x\to a} h(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

مثال 01:

3) لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) \ge 3x-5$. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

4) لتكن u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) \le -3x^2-5x+1$. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$

الحل:

3) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5)=+\infty$ فإنه حسب مبرهنة المقارنة والترتيب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

- ملاحظة : عند $-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-5)=-\infty$ وبالتالي لا نستطيع استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

4) بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2-5x+1\right)=-\infty$ فإنه حسب مبرهنة المقارنة والترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=-\infty$

- ملاحظة : عند $+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2-5x+1\right)=-\infty$ وبالتالي لا نستطيع استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

مثال 02:

لتكن f دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\sqrt{x}+4$

1) أنشر $\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

2) بين أنه من أجل كل x من $[0\,;+\infty[$ ، $f(x) \ge 3\sqrt{x}$

3) أستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل:

1) $\left(\sqrt{x}-2\right)^2 = x-4\sqrt{x}+4$.

2) لدينا من أجل كل x من $[0\,;+\infty[$ ،

$f(x)-3\sqrt{x} = x-\sqrt{x}+4-3\sqrt{x} = x-4\sqrt{x}+4 = \left(\sqrt{x}-2\right)^2$ أي $f(x)-3\sqrt{x} \geq 0$

ومنه $f(x) \geq 3\sqrt{x}$.

3) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$ فحسب مبرهنة المقارنة والترتيب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

مثال 03:

لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x) = 3x + \dfrac{\cos x}{x+1}$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x < -1$ فإن $f(x) \leq \dfrac{3x^2+3x+1}{x+1}$.

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

الحل:

لدينا $\cos x \geq -1$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x < -1$ أي $x+1 < 0$ فإن

$\dfrac{\cos x}{x+1} \leq \dfrac{-1}{x+1}$ وبإضافة $3x$ نجد $\dfrac{\cos x}{x+1} + 3x \leq \dfrac{-1}{x+1} + 3x$ أي $\dfrac{\cos x}{x+1} + 3x \leq \dfrac{3x^2+3x-1}{x+1}$

معناه $f(x) \leq \dfrac{3x^2+3x+1}{x+1}$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ $= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+3x+1}{x+1}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ب)المستقيمات المقاربة

34. كيف نبين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا ؟

طريقة :

- نختار قيمة ممنوعة a من $\mathbb{R}$ للدالة f و نحسب $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ لنجد $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f).

مثال 01:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2-7x+2}{x-2}$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

الحل :

بما أن الدالة f غير معرفة عند 2 نحسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-7x+2\right)=-8$

بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}\left(x^2-7x+2\right)=-8\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}\left(x-2\right)=0^+\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x)=-\infty$.

بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}\left(x^2-7x+2\right)=-8\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}\left(x-2\right)=0^-\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x)=+\infty$.

ومنه المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته الديكارتية $x=2$.

مثال02 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

الحل :

بما أن الدالة f غير معرفة عند 0 نحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+2\right)=3$

بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x+2\right)=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(e^x-1\right)=0^+\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

بما أن $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(e^x+2\right)=3\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(e^x-1\right)=0^-\end{cases}$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=-\infty$.

ومنه المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته الديكارتية $x=0$.

مثال03 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+3+\ln(x-1)$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

الحل:

بماأن الدالة f غير معرفة عند 1 نحسب $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (2x+3+\ln(x-1)) = -\infty$

ومنه المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته الديكارتية $x=1$.

35. كيف نبين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ؟

طريقة :

- إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$
- نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=b$ هو مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$.

مثال 01:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2-7x+1}{2x^2-x+11}$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

الحل :

- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ فإن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته الديكارتية $y=\dfrac{1}{2}$ بجوار $-\infty$.
- بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ فإن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته الديكارتية $y=\dfrac{1}{2}$ بجوار $+\infty$.

مثال02 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-3e^x+1}{e^x+2}$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما.

الحل :

- بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3e^x+1}{e^x+2} = \dfrac{1}{2}$ فإن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته الديكارتية $y=\dfrac{1}{2}$ بجوار $-\infty$.

- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3e^x+1}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(-3+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}=-3$ لأن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

فإن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته الديكارتية $y=-3$ بجوار $+\infty$.

مثال03 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0\,;\,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{-x+\ln x}{x}$

بين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيا مقاربا أفقيا يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

الحل :

- من أجل كل x من $]0\,;\,+\infty[$: $f(x)=\frac{-x+\ln x}{x}=-1+\frac{\ln x}{x}$
- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته الديكارتية $y=-1$ بجوار $+\infty$.

36. كيف نبين أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا ؟

طريقة :

حتى أبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$ هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

مثال01:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=2x+3-\frac{1}{x-1}$. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

الحل :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)-(2x+3)=2x+3-\frac{1}{x-1}-2x-3=-\frac{1}{x-1}$.

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x-1}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=0$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

مثال02:

f دالة معرفة على D_f حيث $D_f=]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2-1}+2x$.

- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 3x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.
- بين أن المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = x$ هومستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $-\infty$.

الحل :

- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$

لدينا من أجل كل x من D_f : $f(x)-3x=\sqrt{x^2-1}+2x-3x=\sqrt{x^2-1}-x$

نضرب ونقسم على المرافق فنجد $f(x)-3x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=3x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

- نبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

لدينا من أجل كل x من D_f : $f(x)-x=\sqrt{x^2-1}+2x-x=\sqrt{x^2-1}+x$

نضرب ونقسم على المرافق فنجد $f(x)+x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}=0$ ومنه المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $-\infty$.

مثال 03:

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-x+\ln x}{x}$. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

الحل :

- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$.

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f(x)-(x-1)=\frac{x^2-x+\ln x}{x}-x+1=\frac{x^2-x+\ln x-x^2+x}{x}=\frac{\ln x}{x}.$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

مثال 04:

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\ln(x-2)-\ln(x+1)+x$. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

الحل:

- نبين أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$.

لدينا من أجل كل x من $]2;+\infty[$: $f(x)-x=\ln(x-2)-\ln(x+1)=\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$.

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+1}=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

مثال 05:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.
- بين أن المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $-\infty$.

الحل:

- نبين: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)-(x-1)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}-x+1=-\frac{e^x+1}{e^x-1}+1=-\frac{2}{e^x-1}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{e^x-1}=0$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $+\infty$.

- نبين: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)-(x+1)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}-x-1=-\frac{e^x+1}{e^x-1}-1=-\frac{2e^x}{e^x-1}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x-1}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ ومنه المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f بجوار $-\infty$.

37 . كيف ندرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) الممثل للدالة f والمستقيم المقارب ؟

طريقة :

ليكن (Δ) : المستقيم المقارب المائل للمنحني ذو المعادلة $y=ax+b$

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$

- إذا كان $[f(x)-(ax+b)]<0$ في المجال I يكون المنحني (C_f) تحت المستقيم (Δ) في هذا المجال.
- إذا كان $[f(x)-(ax+b)]>0$ في المجال J يكون المنحني (C_f) فوق المستقيم (Δ) في هذا المجال.
- إذا كان $[f(x)-(ax+b)]=0$ من أجل $x=x_0$ فإن المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $A(x_0;f(x_0))$

مثال : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=2x-3+\frac{x-2}{x^2+1}$

أدرس وضعية المنحني (C_f) الممثل للدالة f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-3$.

الحل :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-(2x-3)]$

$$[f(x)-(2x-3)]=2x-3+\frac{x-2}{x^2+1}-2x+3=\frac{x-2}{x^2+1}$$

إشارة هذا الفرق هي نفس إشارة البسط لأن المقام موجب دوما.

$[f(x)-(2x-3)]=0$ من أجل $x=2$ ومنه (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(2,f(2))$ أي $A(2,1)$

$[f(x)-(2x-3)]<0$ من أجل $x<2$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]-\infty,2[$.

$[f(x)-(2x-3)]>0$ من أجل $x>2$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]2,+\infty[$.

38 . كيف نفسر بيانيا نهاية دالة ؟

طريقة :

نفسر نهاية دالة بيانيا من باب المستقيمات المقاربة.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ حيث $a\in\mathbb{R}$ نستنتج أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=a$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ حيث $b\in\mathbb{R}$ نستنتج أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=b$.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ نستنتج أن (C_f) المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=ax+b$.

مثال :

أحسب النهايات التالية وفسر النتيجة بيانيا

1) $\lim\limits_{x\to2}(x+1-\ln|x-2|)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+11}{2x^2+5}$, 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x+1]$ حيث $h(x)=x-1+e^x$.

الحل

1) نضع $g(x)=x+1-\ln|x-2|$

$\lim\limits_{x\to2}g(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+1-\ln|x-2|)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to2}\ln|x-2|=-\infty$. نستنتج أن (C_g) المنحني الممثل للدالة g يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=2$.

2) نضع $f(x)=\dfrac{5x^2-3x+11}{2x^2+5}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-3x+11}{2x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2}{2x^2}=\dfrac{5}{2}$ نستنتج أن (C_f) المنحني الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=\dfrac{5}{2}$ بجوار $+\infty$.

3) لدينا $[h(x)-x+1]=\left[h(x)-(x-1)\right]=\left[x-1+e^x-x+1\right]=e^x$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x+1]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و نستنتج أن (C_h) المنحني الممثل للدالة h يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=x-1$ بجوار $-\infty$.

39 . كيف نجد معادلة المستقيم المقارب المائل للمنحني ؟

طريقة :

معادلة المستقيم (Δ) : $(a\neq0)$ $\quad y=ax+b$. نجد العددين الحقيقيين a و b كما يلي:

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x)-ax]=b$.

مثال 01: f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x^2-x+5}{x-2}$ أوجد معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) للمنحني (C_f) الممثل للدالة f.

الحل :

نفرض أن معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) : $y=ax+b$

$$a=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x+5}{x-2}}{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x^2-x+5}{x^2-2x}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$$b=\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{3x^2-x+5}{x-2}-3x\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{5x+5}{x-2}=5$$

ومنه معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) : $y=3x+5$.

مثال 02:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$

2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

3) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

ب) بين أنه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]=\beta$

ج) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

الحل:

1) حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: بماأن $\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$: لدينا

$$f(x)-(x+2)=\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)=\frac{\left[\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$$

$$f(x)-(x+2)=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}=0$.

2) نستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$ معادلته $y=x+2$.

3) أ) حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

بماأن $\lim_{x\to-\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

ب) إيجاد α و β بحيث $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]=\beta$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ معناه $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}=\alpha$ معناه $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\alpha$ أي

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\alpha$ وبالتالي $\alpha=-1$.

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]=\beta$ معناه $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}+x\right]=\beta$ معناه

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+4x+5}+x\right]\left[\sqrt{x^2+4x+5}-x\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\beta$ أي $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=\beta$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}=\beta$ أي $\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}=\beta$ ومنه $\beta=-2$.

ج) نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ معادلته $y=-x-2$

40. كيف ندرس استمرارية دالة f عند a حيث $a\in D_f$ ؟

طريقة:

- نحسب $\lim_{x\to a}f(x)$ ثم $f(a)$.
- إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ نستنتج أن f مستمرة عند a .
- إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)$ نستنتج أن f غير مستمرة عند a .

مثال 01 :

أدرس الإستمرارية عند 2 للدالة f المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} & ;\ x\neq 2 \\ f(2)=4 \end{cases}$$

الحل :

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(2)=4$.
- نحسب $\lim_{x\to2}f(x)$: $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$
- وجدنا $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$ ومنه f مستمرة عند 2 .

مثال 02 :

أدرس الإستمرارية عند -1 للدالة f المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{x+1} & ;\ x\neq -1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

الحل :

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(-1)=3$.

- نحسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$
- وجدنا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$ ومنه f غير مستمرة عند -1 .

مثال 03 :

أدرس الإستمرارية عند 2 للدالة f المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x)=2x^2-5x+3 & ; x>2 \\ f(x)=x-1 & ; x\leq 2 \end{cases}$$

الحل

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و $f(2)=1$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2x^2-5x+3)=1 \quad \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x-1)=1$$

- بما أن $f(2)=1=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ إذا f مستمرة عند 2.

مثال 04 :

أدرس الإستمرارية عند 0 للدالة f المعرفة بـ:
$$\begin{cases} f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

الحل :

- نبدأ بحساب نهاية $x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ عند 0 . نعلم أن $-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$ بما أن $x^2\geq 0$ فنحصل على الحصر $-x^2\leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$ وبما أن $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ فحسب مبرهنة النهايات والحصر فإن $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$.
- وبما أن $f(0)=0$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)$ أي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ومنه الدالة f مستمرة عند 0 .

مثال 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $x\neq 3$
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-3} \\ f(3)=2 \end{cases}$$

عين العددين الحقيقيين b , a حتى تكون الدالة f مستمرة عند 3 .

الحل :

f مستمرة عند 3 معناه f معرفة عند 3 و $\lim_{x\to3} f(x) = f(3) = 2$.

$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2+ax+b}{x-3}$. البسط يؤول إلى $(9+3a+b)$ والمقام يؤول إلى 0.

- إذا كان $9+3a+b \neq 0$ فإن الدالة f غير مستمرة عند 3.
- إذن نأخذ $9+3a+b=0$ ومنه $b=-3a-9$.

$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{x^2+ax-3a-9}{x-3} = 2$ ومنه

$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3} = 2$ أي $\lim_{x\to3}(x+3+a) = 2$ ومنه $6+a=2$ إذن نحصل على $a=-4$, $b=3$.

41 . كيف نبين استمرارية دالة f على مجال ؟

طريقة :

نطبق نتيجة الدرس التالية:

- الدوال : كثير حدود ، الناطقة ، cos ، sin ، الجذر التربيعي ، القيمة المطلقة كلها دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.
- الدوال الناتجة من مجموع ، جداء ، قسمة أو تركيب هذه الدوال هي دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.

مثال: أدرس استمرارية الدوال التالية على المجال I .

1) $f(x)=2x^3-5x+3$, $I=\mathbb{R}$ ، 2) $g(x)=\frac{x-1}{x^2-3x}$, $I=\mathbb{R}-\{0;3\}$

3) $h(x)=\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$, $\mathbb{R}-\{1\}$ ، 4) $u(x)=e^{2x-1}+\ln(x-1)$, $I=]1,+\infty[$

الحل :

1) $f(x)=2x^3-5x+3$. f دالة كثير حدود وبالتالي هي مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=\frac{x-1}{x^2-3x}$. g دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}-\{0;3\}$.

3) $h(x)=\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

الدالة $x \mapsto \frac{2x}{x-1}$ دالة ناطقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}-\{1\}$ والدالة $\sin$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، h هي مركب الدالتين السابقتين ، فهي مستمرة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R}-\{1\}$.

4) $u(x)=e^{2x-1}+\ln(x-1)$

الدالة الأسية و الدالة $x \mapsto 2x-1$ مستمرتين على $\mathbb{R}$ ومنه الدالة $x \mapsto e^{2x-1}$ باعتبارها مركب الدالتين السابقتين فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ، الدالة $x \mapsto \ln(x-1)$ مستمرة على مجموعة تعريفها $]1;+\infty[$. وأخيرا الدالة u هي مركب الدوال المستمرة السابقة فهي مستمرة على مجموعة تعريفها $]1;+\infty[$.

42 . كيف نبين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[a;b]$ ؟

طريقة:

- نبين أن الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- نحسب $f(a)$ و $f(b)$ لنبين أن k محصور بين هذين العددين.
- نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[a;b]$.

مثال :

بين أن المعادلة $x^3-2x-3=0$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[1;2]$

الحل :

نضع $f(x)=x^3-2x-3$. المعادلة $x^3-2x-3=0$ تكافئ $f(x)=0$. نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[1;2]$.

- الدالة f كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[1;2]$.
- لدينا $f(1)=1-2-3=-4$ و $f(2)=8-4-3=1$ ، $-4\leq 0\leq 1$ أي 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$.
- نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[1;2]$.

43 . كيف نبين أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$ ؟

طريقة:

- نبين أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على المجال $[a;b]$.
- نحسب $f(a)$ و $f(b)$ ونبين أن k محصور بين هذين العددين.(إذا كان $k=0$ يكفي أن نبين $f(a)\times f(b)<0$ لأن مادام 0 محصور بينهما فهما من إشارتين مختلفتين).
- نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

المحور 03:الإستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة................................

مثال 01 :

بين أن المعادلة $x^3+3x+1=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1\,;\,0]$

الحل :

نضع $f(x)=x^3+3x+1$. المعادلة $x^3+3x+1=0$ تكافئ $f(x)=0$. نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدافي المجال $[-1\,;\,0]$.

- الدالة f كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[-1\,;0]$.
- نبين أن الدالة f رتيبة على المجال $[-1\,;0]$:

f قابلة للإشتقاق على $[-1\,;0]$ ودالتها المشتقة $f\,'$ حيث $f\,'(x)=3x^2+3$ وهي موجبة تماما وبالتالي f متزايدة تماما على $[-1\,;0]$.

- نتحقق من أن 0 محصور بين $f(0)$ و $f(-1)$

لدينا $f(0)=1$ و $f(-1)=-3$ إذن $f(0)\times f(-1)<0$.

- نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاوحيدا في المجال $[-1\,;\,0]$.

مثال 02 :

f الدالة المعرفة على $]-\infty\,,1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{-x+1}-x$.بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا في المجال $]-\infty\,,1]$.

الحل :

- الدالة f مستمرة على $]-\infty\,,1]$ باعتبارها مجموع دالتين مستمرتين على نفس المجال.
- الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty\,,1[$ ودالتها المشتقة $f\,'$ حيث $f\,'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{-x+1}}-1$

وهي سالبة تماما على $]-\infty\,,1[$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty\,,1]$

- لدينا $f(1)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، والعدد 3 إذن محصور بين $f(1)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلاوحيدا في المجال $]-\infty\,,1]$.

مثال 03 :

هذا جدول تغيرات دالة كثير حدود f . بين أن المعادلة $f(x)=4$ تقبل حلاوحيدا α في المجال $[-2\,;\,1]$.

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

الحل :

لدينا $f(-2)=7$ ، $f(1)=-1$ و $-1\le 4\le 7$.

f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;1]$.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=4$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[-2;1]$.و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن α وحيد.

44 . كيف نستنتج إشارة دالة f على مجال بعدما بينا أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ؟

طريقة1: إستنتاج إشارة f مباشرة من جدول التغيرات

مثال :

استنتج مباشرة من جدول تغيرات الدالة f ، إشارة f على $\mathbb{R}$ وذلك حسب قيم x

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ 2

الحل :

مباشرة من جدول التغيرات نستنتج أن $f(x)\le 0$ على المجال $]-\infty ; \alpha]$ و $f(x)\ge 0$ على المجال $[\alpha ; +\infty[$.

طريقة2:: إستنتاج إشارة f بالحساب من جدول التغيرات

مثال :

استنتج بالحساب من جدول تغيرات الدالة f ، إشارة f على $\mathbb{R}$ وذلك حسب قيم x

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

الحل :

- من أجل $x\in]-\infty , \alpha]$ لدينا $x\le\alpha$ وبما أن الدالة f متناقصة على $]-\infty ; \alpha]$ ، نستنتج أن $f(x)\ge f(\alpha)$ وبما أن $f(\alpha)=0$ فإن $f(x)\ge 0$ من أجل $x\in]-\infty ; \alpha]$.
- من أجل $x\in[\alpha ; +\infty[$ لدينا $x\ge\alpha$ وبما أن الدالة f متناقصة على $[\alpha ; +\infty[$ ، نستنتج أن $f(x)\le f(\alpha)$ وبما أن $f(\alpha)=0$ فإن $f(x)\le 0$ من أجل $x\in[\alpha ; +\infty[$.

أ) قابلية الإشتقاق

45 كيف ندرس قابلية الإشتقاق لدالة f عند العدد الحقيقي a حيث $a \in D_f$ ؟

طريقة:

نحسب نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ عندما يؤول h إلى 0 :

- إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ حيث ℓ عدد حقيقي نقول أن f قابلة للإشتقاق عند a وعددها المشتق هو $f'(a)$ حيث $f'(a)=\ell$.
- إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن f غير قابلة للإشتقاق عند a.
- إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ غير موجودة مثل $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ أو $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \neq \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نقول أن f غير قابلة للإشتقاق عند a.

ملاحظة: يمكن كتابة $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ بعد وضع $a+h=x$ على الشكل التالي $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

مثال1:

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-7x$. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 5 .

الحل : نحسب $\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$.

لدينا $f(5)=-10$ و $\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{25+h^2+10h-7h-35+10}{h}=\frac{h^2+3h}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+3)=3$.

إذن f قابلة للإشتقاق عند 5 وعددها المشتق : $f'(5)=3$.

مثال 02: أدرس قابلية إشتقاق الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ عند 1.

الحل : نعين مجموعة تعريف الدالة f : تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-1\geq 0$ أي $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. نستعمل $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

من أجل كل $x \in]1,+\infty[$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}-0}{x-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\times\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x^2-1}=0^+$ ومنه $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

هذه النهاية غير محدودة وبالتالي الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x^2-1}$ غير قابلة للإشتقاق عند 1 .

مثال03 : أدرس قابلية إشتقاق الدالة $f:x\mapsto x|x-1|$ عند 1 .

الحل :

$f(x)=x|x-1|$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1

$$\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{(1+h)|1+h-1|}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\xrightarrow{>}0}(1+h)=1$$

$$\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{(1+h)|1+h-1|}{h}$$
$$=\lim_{h\xrightarrow{<}0}\frac{(1+h)|h|}{h}=\lim_{h\xrightarrow{<}0}-(1+h)=-1$$

ومنه $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

ومنه وأخيرا الدالة $f:x\mapsto x|x-1|$ غير قابلة للإشتقاق عند 1.

46. كيف نفسر بيانيا $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$ ؟

طريقة:

المنحني (C_f) يقبل مماسا عموديا(يوازي حامل محور التراتيب) عند النقطة ذات الفاصلة a.

مثال :

لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي $f(x)=\sqrt{x-2}$.

أحسب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وفسر النتيجة بيانيا.

الحل :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\sqrt{2+h-2}-0}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل مماسا عموديا(يوازي حامل محور التراتيب) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

47. كيف نفسر بيانيا النتيجتين التاليتين:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\alpha$ و $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\beta$ **حيث** $\alpha\neq\beta$ ؟

طريقة:

هذه النتيجة معناها العدد المشتق من اليمين عند a لا يساوي العدد المشتق عند a من اليسار.

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند a و المنحني (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة a. تسمى النقطة ذات الفاصلة a **نقطة زاوية**.

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3-x|x-2|$.

أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ وفسر النتيجة بيانيا.

الحل :

نكتب عبارة $|x-2|$ بدون استعمال رمز القيمة المطلقة.

- من أجل كل x من $[2;+\infty[$ يكون $|x-2|=x-2$ وبالتالي :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3-x(x-2)-3}{x-2}=\frac{-x^2+2x}{x-2}=\frac{-x(x-2)}{x-2}$$ ومنه

$$\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}\frac{-x(x-2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\x>2}}(-x)=-2$$

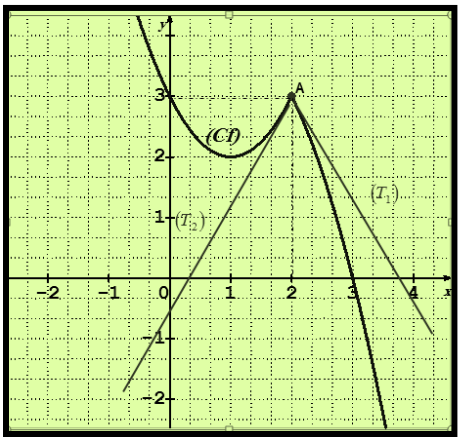
- من أجل كل x من $[2;+\infty[$ يكون $|x-2|=-x+2$ وبالتالي

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3-x(-x+2)-3}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}$$ ومنه

$$\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}}(x)=2$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ وبالتالي $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ليس لها نهاية عند2 وأخيرا

الدالة $f:x\mapsto 3-x|x-2|$ غير قابلة للإشتقاق عند 2 و المنحني (C_f) يقبل نصفي مماسين (T_1) و (T_2) عند النقطة $A(2,3)$. تسمى النقطة $A(2,3)$ نقطة زاوية.



48.كيف نحسب $f'(a)$ ؟

طريقة:

نحسب $f'(x)$ ثم $f'(a)$.

مثال:

1) أحسب $f'(a)$ حيث $f(x)=2x^3-5x+1$ و $a=-1$

2) أحسب $g'(a)$ حيث $g(x)=e^x-2-\ln(x+1)$ و $a=0$

3) أحسب $h'(a)$ حيث $h(x)=x+1+\sqrt{x^2+3}$ و $a=1$

الحل :

1) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي f' حيث $f'(x)=6x^2-5$ ومنه $f'(-1)=6-5=1$.

2) g قابلة للإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي g' حيث $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ ومنه $g'(0)=e^0-1=1-1=0$.

3) h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي h' حيث $h'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

ومنه $h'(1)=1+\dfrac{1}{\sqrt{4}}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

49.كيف نفسر بيانيا $f'(a)$ ؟

طريقة:

$f'(a)$ هو معامل توجيه المماس للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها a .

50. كيف نعين $f'(a)$ بيانيا ؟

طريقة:

$f'(a)$ هو معامل توجيه المماس للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها a .

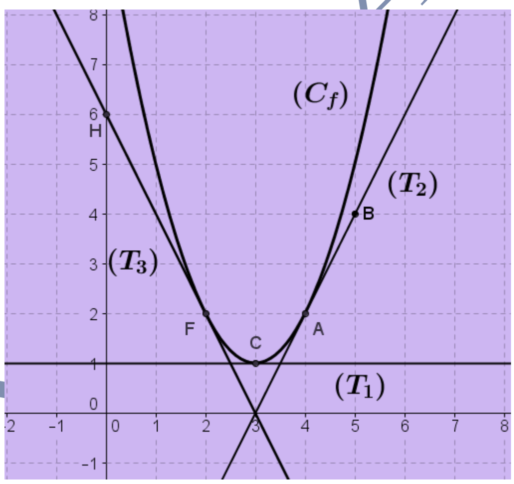
- نعين بيانيا نقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ من هذا المماس فيكون $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- إذا كان $f'(a)=0$ فإن المماس عند النقطة التي فاصلتها a يوازي محور الفواصل .

مثال :

(T_1) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $C(3;1)$. عين بيانيا $f'(3)$.

(T_2) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(4;2)$. عين بيانيا $f'(4)$.

(T_3) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $F(2;2)$. عين بيانيا $f'(2)$.



الحل :

(T_1) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $C(3;1)$ وهو يوازي محور الفواصل إذن $f'(3)=0$.

(T_2) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $A(4;2)$. نختار نقطة أخرى من هذا المماس ولتكن $B(5;4)$ وعليه $f'(4)=\dfrac{4-2}{5-4}=2$.

(T_3) هو مماس للمنحني (C_f) عند النقطة $F(2;2)$. نختار نقطة أخرى من هذا المماس ولتكن $H(0;6)$ وعليه $f'(2)=\dfrac{6-2}{0-2}=-2$.

51. كيف نحسب $f'(x)$ ؟

طريقة: مشتقات الدوال المألوفة

الدالة	المشتقة	مجال قابلية الإشتقاق
$x \mapsto a$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$n \geq 2$ $x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x} \quad , \ (x \geq 0)$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \ (x > 0)$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$ أو $]-\infty\,;0[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$

طريقة: مشتقات الدوال المركبة

الدالة	المشتقة	
$u+v$	$u'+v'$	u و v قابلتين الإشتقاق
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	u و v قابلتين الإشتقاق
$\dfrac{u}{v} \quad (v \neq 0)$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	u و v قابلتين الإشتقاق و $(v \neq 0)$
$k\,u$ حيث $k \in \mathbb{R}$	$k\,u'$ حيث $k \in \mathbb{R}$	u قابلة للإشتقاق

u^n حيث $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	u قابلة للإشتقاق
$\frac{1}{u}$ حيث $(u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$	u قابلة للإشتقاق و$(u \neq 0)$
$\frac{1}{u^n}$ حيث $(u \neq 0)$ و $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$	u قابلة للإشتقاق و$(u \neq 0)$
$\sqrt{u}$ حيث $u \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u قابلة للإشتقاق و$(u > 0)$
e^u	$u'e^u$	u قابلة للإشتقاق
$\ln u$ حيث $u > 0$	$\frac{u'}{u}$	u قابلة للإشتقاق و$(u > 0)$
$\sin u$	$u'\cos u$	u قابلة للإشتقاق
$\cos u$	$-u'\sin u$	u قابلة للإشتقاق
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	u قابلة للإشتقاق و $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$
uov	$v' \times u'ov$	u و v قابلتين الإشتقاق

52.كيف نجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها x_0 ؟

طريقة:

معادلة المماس (T): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x$. أوجد معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.

الحل :

معادلة (T): $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. لدينا $f(2) = 2$ و $f'(x) = 3x^2 - 3$ و $f'(2) = 9$

ومنه $y = 9(x-2) + 2$ أي $y = 9x - 16$.

53.كيف نجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي ترتيبها y_0 ؟

طريقة:

نجد أولا x_0 فاصلة النقطة وذلك بحل المعادلة $f(x_0)=y_0$ حيث y_0 معلومة.

ثم نجد معادلة المماس (T): $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

مثال :

f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\ln(x+1)$. أوجد معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي ترتيبها 2.

الحل :

نحل المعادلة $f(x_0)=y_0$ أي $1+\ln(x_0+1)=2$ ومنه $\ln(x_0+1)=1$ أي $x_0+1=e$ ومنه $x_0=e-1$.

معادلة (T): $y=f'(e-1)(x-e+1)+f(e-1)$. لدينا $f(e-1)=2$ و $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

و $f'(e-1)=\dfrac{1}{e-1+1}=\dfrac{1}{e}$ ومنه $y=\dfrac{1}{e}x+1+\dfrac{1}{e}$.

54.كيف نبين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) معامل توجيهه يساوي a ؟

طريقة:

نحسب $f'(x)$ ثم نحل المعادلة ذات المجهول x_0 التالية $f'(x_0)=a$ ويكون عدد الحلول هو عدد المماسات.

مثال : f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{\ln x}{x}$. أثبت أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x+1$

الحل :

نحسب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\left[\dfrac{1}{x}\times x-\ln x\right]}{x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

نحل المعادلة $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$ أي $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\dfrac{1}{2}$ ومنه $1-\ln x_0=0$ أي $x_0=e$. ومنه يوجد مماس واحد (T) للمنحني عند $x_0=e$ يوازي المستقيم (Δ) وتكون معادلة (T): $y=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{1}{e}$

55.كيف نبين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=mx+p$ ؟

طريقة:

يكون مستقيمان متعامدان اذا كان جداء معاملي توجيههما (ميليهما) يساوي -1 .

نحسب $f'(x)$ ثم نحل المعادلة ذات المجهول x_0 التالية $f'(x_0)=-\frac{1}{m}$ ويكون عدد الحلول هو عدد المماسات.

مثال :

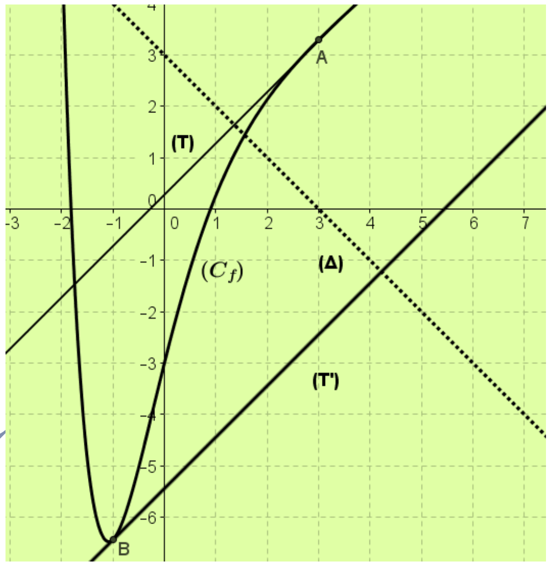
f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x}+x$. أثبت أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مماسين (T) و (T') يعامدان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+3$

الحل:

نحسب $f'(x)$: $f'(x)=(2x)e^{-x}-e^{-x}\left(x^2-3\right)+1=\left(-x^2+2x+3\right)e^{-x}+1$

نحل المعادلة $f'(x_0)=-\frac{1}{-1}$ أي $f'(x_0)=1$ أي $\left(-x_0^2+2x_0+3\right)e^{-x_0}+1=1$ ومنه $-x_0^2+2x_0+3=0$ لها حلان هما $x''_0=-1$ و $x'_0=3$. ومنه يوجد مماسان (T) و (T') للمنحني عند $x'_0=3$ و $x''_0=-1$ يعامدان (Δ) وتكون معادلة (T) عند $x'_0=3$ هي $y=x+6e^{-3}$ ومعادلة (T') عند $x''_0=-1$ هي $y=x-2e$

أنظر الشكل :



56. كيف نبين وجود مستقيم (T) يشمل النقطة $A(\alpha\,;\,\beta)$ ويمس المنحني (C_f) في نقطتين مختلفتين؟

طريقة:

نكتب معادلة المماس (T) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ في النقطة التي فاصلتها x_0 .

بما أن (T) يشمل $A(\alpha\,;\,\beta)$ فإن $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$

نحسب $f'(x)$ ثم نحل المعادلة ذات المجهول x_0 التالية $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ فنجد قيمتين لـ x_0 هما x_0' و x_0'' تكون النقطتان هما $B_1\left(x'_0;f(x'_0)\right)$; $B_2\left(x''_0;f(x''_0)\right)$. ونجد معادلة (T) .

مثال : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{\ln x^2}{x}$. أثبت أن المنحني (C_f) الممثل للدالة f يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحني (C_f) في نقطتين يطلب تعيينهما وإيجاد معادلة للمماس (T).

الحل :

معادلة المماس (T) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. بما أن (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ فإن $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ أي $-x_0f'(x_0)+f(x_0)=1$ ونحل هذه المعادلة فنجد قيمتين للعدد x_0.

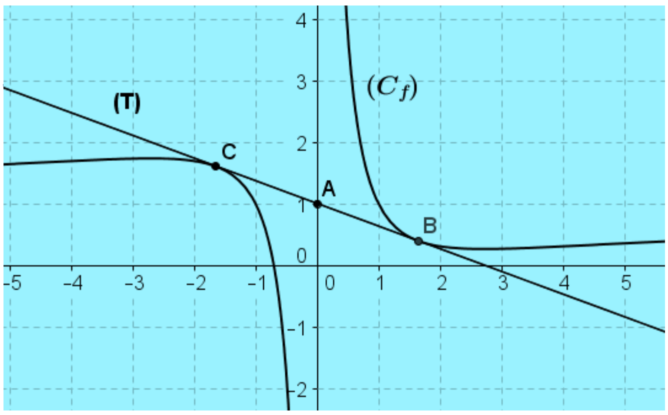
نجد أولا $f'(x)$ فنجد $f'(x)=\frac{-2+\ln(x)^2}{x^2}$ ومنه $f'(x_0)=\frac{-2+\ln(x_0)^2}{(x_0)^2}$ ولدينا $f(x_0)=1-\frac{\ln(x_0)^2}{(x_0)}$. نعوض $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ في المعادلة $x_0f'(x_0)+f(x_0)=1$ فنجد :

$-x_0\left[\frac{-2+\ln(x_0)^2}{(x_0)^2}\right]+1-\frac{\ln(x_0)^2}{x_0}=1$ ومنه $\frac{2-\ln(x_0)^2}{x_0}-\frac{\ln(x_0)^2}{x_0}=0$ أي $\frac{2-2\ln(x_0)^2}{x_0}=0$

وبالتالي $\ln(x_0)^2=1$ أي $(x_0)^2=e$ ومنه $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$.

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطتين $B\left(\sqrt{e};f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ و $C\left(-\sqrt{e};f\left(-\sqrt{e}\right)\right)$ أي $B\left(\sqrt{e};1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ و $C\left(-\sqrt{e};1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

أنظرالشكل :



57. كيف نبين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=mx+p$ ؟

طريقة:

نحل المعادلة $f'(x_0)=m$ لأن:

يكون مستقيمان متوازيان اذا كان لهما نفس معامل التوجيه.

لدينا معامل توجيه المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هو $f'(x_0)$ ومعامل توجيه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=mx+p$ هو m.

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x-2)e^x+x$. بين أنه يوجد مماس (T) للمنحني (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

الحل :

نحل المعادلة $f'(x_0)=1$

نحسب $f'(x)$: $f'(x)=e^x+(x-2)e^x+1=(x-1)e^x+1$.

$f'(x_0)=1$ معناه $(x_0-1)e^{x_0}+1=1$ ومنه $(x_0-1)e^{x_0}=0$ أي $x_0=1$.

إذن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) عند نقطته التي فاصلتها $x_0=1$.

58. كيف نعين نقطة الإنعطاف للمنحنى (C_f) ؟

طريقة01:

نحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$. اذا انعدمت $f''(x)$ عند x_0 حيث $x_0 \in D_f$ وغيرت إشارتها عند المرور بـ x_0 تكون النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف .

مثال : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2+4$. بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

الحل :

نحسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$: f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2-6x$ و $f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0$ تكافئ $6x-6=0$ أي $x=1$. ولدينا إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)$ انعدمت عند 1 وغيرت إشارتها عند 1 وبالتالي المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(1;2)$.

طريقة02:

اذا انعدمت $f'(x)$ عند x_0 حيث $x_0 \in D_f$ ولم تغير إشارتها عند المرور بـ x_0 تكون النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف .

مثال :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x$.

1) أحسب $f'(x)$ و ادرس اشارتها.

2) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

الحل:

- نحسب $f'(x)$: $f'(x)=e^{2x}-2e^{x}+1=\left(e^{x}-1\right)^{2}$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^{x}-1=0$ أي $x=0$.

- إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$f'(x)$ انعدمت عند 0 ولم تغير إشارتها وبالتالي المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

طريقة03:

يمكن استغلال الوضعية النسبية للمنحني والمماس لمعرفة نقطة الإنعطاف.

مثال:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x-1)^{3}+x$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1) أوجد معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند $x_0=1$.

2) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و (T).

3) استنتج ان للمنحني (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

الحل :

1) معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند $x_0=1$.

لدينا $f'(x)=3(x-1)^{2}+1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=x$ هي معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند $x_0=1$.

2) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و (T).

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$: $f(x)-x=(x-1)^{3}+x-x=(x-1)^{3}$

- $f(x)-x\geq 0$ من أجل $x\geq 1$ وبالتالي المنحني (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[1;+\infty[$.
- $f(x)-x\leq 0$ من أجل $x\leq 1$ وبالتالي المنحني (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;1]$.

3) نستنتج ان للمنحني (C_f) نقطة انعطاف $A(1;f(1))$ أي $A(1;1)$.

59. كيف نبين أن دالة f محصورة بين دالتين : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ على مجال I ؟

طريقة:

- من أجل كل عدد حقيقي x من I نضع $\phi(x)=f(x)-g(x)$ و $\theta(x)=f(x)-h(x)$.
- ندرس اتجاه تغير الدالتين φ و θ لنبين أن $\phi(x)\geq 0$ و $\theta(x)\leq 0$ على المجال I .

مثال :

بين أنه من أجل كل x حيث $x \geq 0$ ، لدينا $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

الحل :

نضع $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$ و $h(x) = x$ وبالتالي $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$ تكافئ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

نسمي $\varphi(x) = f(x) - g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ و $\theta(x) = f(x) - h(x) = \ln(x+1) - x$

- ندرس اتجاه تغير الدالة φ : φ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة φ' حيث $\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1}$ وهي موجبة من أجل كل x من $[0;+\infty[$ وبالتالي φ متزايدة على $[0;+\infty[$.بما أن φ متزايدة من أجل x حيث $x \geq 0$ فإن $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ تكافئ $\varphi(x) \geq \ln(0+1) - 0 + \frac{0^2}{2}$ تكافئ $\varphi(x) \geq 0$.و بالتالي $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$..............(**1**)
- ندرس اتجاه تغيرا الدالة θ : θ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة θ' حيث $\theta'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$ وهي سالبة من أجل كل x من $[0;+\infty[$ وبالتالي θ متناقصة على $[0;+\infty[$.بما أن θ متناقصة من أجل $x \geq 0$ فإن $\theta(x) \leq \theta(0)$ تكافئ $\theta(x) \leq \ln(0+1) - 0$ تكافئ $\theta(x) \leq 0$ وبالتالي $\ln(x+1) \leq x$..................(**2**)

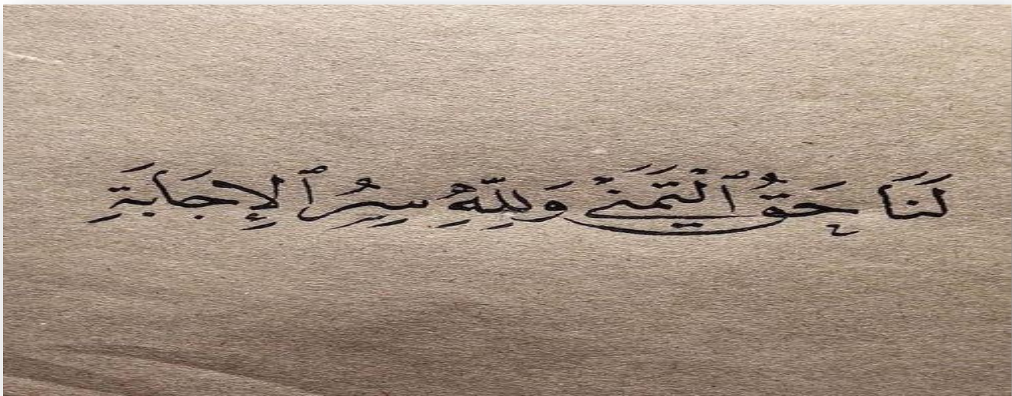
نستنتج من (**1**) و (**2**) أنه من أجل كل $x \geq 0$ ، لدينا $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

شِعار العمل في هذا الموسم :

تعبُ المُراجعةْ أَفضَلُ مِنْ ألمِ السُّقُوطْ

صناعة الطريق الذهبي نحو بكالوريا 2023

بالتوفيق و النَّجاح لجُموع التلاميذ الشُّرفاء



https://www.facebook.com/okba.bac.2010