27

تمرين في الدوال الأسية-اللوغاريتمية معا

للشعب: رياضيات + تقني رياضيات+ علوم تجريبية

المرجع: امتحانات رسمية مغربية

جمعها الأستاذ: شعبان أسامة

مصطلحات (المغرب)	مصطلحات (الجزائر)
محور الأفاصيل	محور الفواصل
تناقصية	متناقصة
تزايدية	متزايدة
مركز تماثل	مركز تناظر
$\forall x \in \mathbb{R}$	مهما يكن x من $\mathbb{R}$
أرتوبة	ترتيبة نقطة

5min Maths

ملاحظة:

تم حذف بعض الأسئلة من التمارين لسبب عدم وجدها في التدرج السنوى الجزائرى

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي $g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$

الجدول جانبه هو جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

1) احسب $g(1)$

2) من خلال هذا الجدول حدد إشارة $g(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- تحقق من أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج- حدد الوضع النسبي للمستقيم (D) و المنحنى (C)

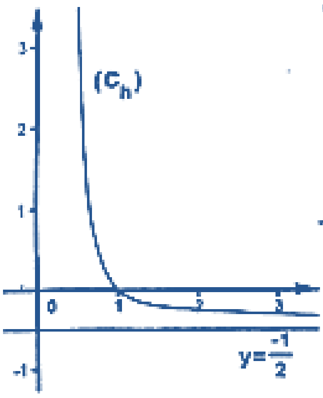
2) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

4) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) و المنحنى (C) (الوحدة: $1\ cm$)



III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=f(x)-x$

1) أ - تحقق من أن $h(1)=0$

ب- في الشكل جانبه (C_h) هو التمثيل المبياني للدالة h . حدد إشارة $h(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$ ثم استنتج أنه لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x)\le x$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0=e$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين بالترجع أن : $1\le u_n\le e$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . (يمكن استعمال نتيجة السؤال III) 1) ب -)

ج – استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

.2

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 .

3) بين أن الدالة f تناقصية على المجال $[0,1]$ وتزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الجزء الثالث

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)$ ($\ln$ هي دالة الوغاريتم النبيري).

وليكن (C) هو المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم.

1) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C).

2) ادرس تغيرات الدالة g (نقبل أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}$).

3) أنشئ المنحنى (C).

.3

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أن f دال فردية.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ- بين أن : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

ج- استنتج أن : $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$ لكل x من $\mathbb{R}^+$.

4) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

5) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم الذي معادلته $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحنى (C).

6) أ- بوضع $t=e^{-x}$ بين أن : $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

ب- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=-1$ و $x=0$.

II- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين بالترجع أن : $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) أ- تحقق باستعمال نتيجة السؤال الثالث ج من الجزء الأول، من أن : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3) بين أن : $u_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

.4

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$

و (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- تحقق من أن : $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بين أن : $f(2-x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تماثل المنحنى (C).

3) أ- تحقق من أن : $f(x)=2\ln(x)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$ لكل x من المجال $[1,+\infty[$.

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ثم أول هذه النتيجة.

4) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

5) أ- بين أن : $f''(x)=\frac{2x(2-x)}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$.   ب- ادرس تقعر المنحنى (C).

6) أنشئ المنحنى (C).

8) أ- بوضع $t=x-1$ بين أن : $\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_{-1}^0\ln(1+t^2)dt=\ln 2-2\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt$.

ج- بين أن : $\int_{-1}^0\frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$ (لاحظ أن : $\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}$ لكل t من $\mathbb{R}$).

د- استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=0$.

.5

الجزء الأول

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$.

1) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ثم ادرس منحى تغيرات الدالة g.

ب- استنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

2) أ- بين أن : $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

ب- بين أن : $(x-1)\ln x\geq 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

3) استنتج أن : $h(x)\succ 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=1+x\ln x-(\ln x)^2$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة مبيانيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ (لاحظ أن : $f(x)=1+x\ln x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$).

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

3) ليكن (Δ) المستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,1)$.

أ- بين أن معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) هي $y=x$.

ب- تحقق من أن : $f(x)-x=(\ln x-1)g(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

ج- ادرس إشارة $f(x)-x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ).

4) أنشئ المنحنى (C) والمستقيم (Δ) في نفس المعلم. (نقبل أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5).

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين بالترجع أن $1\prec u_n\prec e$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال السؤال 3) ج- من الجزء الثاني).

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

.6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,2[$ بما يلي : $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$

ب- بين أن $f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}$ لكل x من المجال $]0,2[$.

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f.

2) أ- بين أن النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل المنحنى (C).

ب- اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$.

3) نضع $\varphi(x)=f(x)-x$ لكل x من المجال $]0,2[$.

أ- بين أن $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\prec 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right)\succ 0$. (نأخذ $\ln 3\approx 1{,}1$ و $\ln 7\approx 1{,}94$)

ب- استنتج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا α بحيث $\frac{3}{2}\prec\alpha\prec\frac{7}{4}$ وأول النتيجة مبيانيا.

4) أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1}.

ب- بين أن : $f^{-1}(x)=\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}$ $(\forall n\in\mathbb{R})$

5) أنشئ في نفس المعلم المنحنى (C) والمنحنى (Γ) الممثل للدالة f^{-1}.

6) أ- أحسب $\int_0^{\alpha}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين (C) و (Γ) ومحوري المعلم.

.7

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$.

1) بين أن $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج منحى تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$.

2) بين أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$ و أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)=0$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ – بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب – تحقق من أن : $f(\frac{1}{x})=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ج – احسب $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ (يمكن وضع $t=\frac{1}{x}$) ثم أول النتيجة هندسيا .

د – بين أن (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب هو المستقيم الذي معادلته هي : $y=x$.

2) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

4) أ – بين أن الدالة $G:x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $g:x\to\ln x$ على $]0,+\infty[$.

ب – باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$.

ج – حدد مساحة حيز المستوى المحصور (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=e$.

.8

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ– تحقق من أن : $f(x)=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل x من IR .

ب – بين أن الدالة f زوجية وأن $f(x)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل x من IR .

ج – بين أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$ ثم استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

2) بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0,+\infty[$.

3) أ– بين أن : $f'(x)=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من IR وتحقق من أن : $f'(0)=0$.

ب– بين أن : $e^{4x}-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج أن $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

ج– ضع جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$.

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب) .

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$.

1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

ب- بين أن g تناقصية على $]0,2]$ وتزايدية على $[2,+\infty[$.

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$).

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا .

2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$).

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ (لاحظ أن : $f(x)=x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) .

ج – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

د- بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ).

3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و بين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن $y=x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 .

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$ وأن $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$ (نقبل أن $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$).

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) و نأخذ $e\approx 2,7$).

6) أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $\ln:x\mapsto\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

ثم بين أن: $\int_1^e \ln x\,dx=1$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$.

ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

III- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II-3 أ-) .

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2x$.

1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم بين أن g تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$.

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من IR (لاحظ أن $g(0)=1$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تحقق من أن $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)\times\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من IR^* .

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$).

د- استنتج أن المنحنى (C) يقبل ، بجوار $-\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- لكل x من $[0,+\infty[$ ، تحقق من أن $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}>0$ وأن $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$.

ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}=+\infty$) .

ج- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

د- بين أن : $f(x)-2x\le 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ واستنتج أن (C) يوجد تحت (D) على المجال $[0,+\infty[$.

3) أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من IR.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

4) أنشئ (D) و (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف) .

10

.11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

I.

1) تحقق من أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ و أن : $1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ و أول هذه النتيجة هندسيا .

3) أ. بين : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و تحقق من أن $f'(0)=0$

ب. أدرس إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ و استنتج أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty,0]$

4) أ. تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

ب. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

5) أ. تحقق من أن : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب. أدرس إشارة كل من $\sqrt{e^x}-2$ و $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$

ج. استنتج أن : $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$

د. بين أن $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[0,\ln 4]$

6) أنشئ المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما أصغر من -1 و أفصول الأخرى أكبر من 2 تحديدهما غير مطلوب و نأخذ $\ln 4\approx 1,4$)

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f

1) بين أن : $0\le u_n\le\ln 4$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=1+4xe^{2x}$.

1) بين أن : $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من IR .

2) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ وتناقصية على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

3) أ- بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{e}$ ثم تحقق من أن $g\left(-\frac{1}{2}\right)>0$.

ب - استنتج أن : $g(x)>0$ لكل x من IR .

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$.

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (نذكر أن : $\lim_{u\to-\infty} ue^{u}=0$) .

2) بين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من IR ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على IR .

3) أ - احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ واستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

ب - احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ واستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ج - حدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C) ثم بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ و فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

4) أ - بين أن $y=x$ هي معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O .

ب - بين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها $-\frac{1}{2}$ (تحديد أرتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب) .

5) أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx=1$.

ب - احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (T) المماس للمنحنى (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

1) أ- تحقق من أن $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2+3x+2)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب – بين أن : $g'(x) = \dfrac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

2) أ – تحقق من أن $\dfrac{3x^2+3x+2}{x} > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب – استنتج أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0,+\infty[$.

3) أ – بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ وأنها تزايدية على $[1,+\infty[$.

ب - استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1) > 0$) .

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$.

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$) .

1) بين أن : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ، ثم استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$.

2) أ - بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

ب - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$ ثم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$) .

ج - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) بين أن $y = 3(x-1)$ هي معادلة للمستقيم المماس للمنحنى (C) في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$.

4) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها) .

5) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1 - \frac{2}{e}$ (ضع : $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ و $v(x) = \ln x$) .

ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$

هي $\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) cm^2$.

I – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-1+\ln(x)$

1) أ – بين أن $g'(x)=\dfrac{x+1}{x}$ لكل x من I .

ب – بين أن الدالة g تزايدية على I .

2) استنتج أن $g(x)\geq 0$ على $[1,+\infty[$ وأن $g(x)\leq 0$ على $]0,1]$ (لاحظ أن $g(1)=0$) .

II – لتكن f الدالة العددية المعرفة على I بما يلي : $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\ln x$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$) .

1) أ – بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ وأول النتيجة هندسيا .

ب – بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (لاحظ أن $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I) .

ج – استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

2) أ – بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I .

ب – استنتج أن الدالة f تزايدية على $[1,+\infty[$ و تناقصية على $]0,1]$.

ج – أعط جدول تغيرات الدالة f على I .

3) أنشئ (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $1{,}5$ و 2) .

4) أ – بين أن $H:x\mapsto\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ على المجال I .

ب – بين أن $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}$.

ج – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\displaystyle\int_1^e\ln x\,dx=1$.

5) أ – تحقق من أن $f(x)=\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ لكل x من I .

ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي : $0.5\ cm^2$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمايلي : $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

و (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن $f(-x)=-f(x)$ لكل x من IR واستنتج أن النقطة O مركز تماثل للمنحنى (C)

2) تحقق من أن : $f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$ لكل x من IR

(يستحسن استعمال هذه الصيغة ل $f(x)$ لمعالجة الأسئلة الموالية)

3) أ- بين أن : $f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ لكل x من IR وتحقق من أن : $f'(0)=\frac{3}{2}$

ب- بين أن الدالة f تزايدية على IR

ج- بين أن $y=\frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O

4) أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ واستنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج - بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D)

5) أنشئ المستقيمين (D) و (T) والمنحنى (C) (نذكر أن O هو مركز تماثل للمنحنى (C))

6) أ- بين أن الدالة $H:x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على IR

ب - استنتج أن : $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln 4-\ln 3$

ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 2$

.16

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x)=(x-2)^2 e^x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $1\,cm$)

1) أ - بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل، بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه.

2) أ - تحقق من أن $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ لكل x من $I\!R$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول هذه النتيجة هندسيا (نذكر أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ لكل n من $I\!N^*$)

3) أ- بين أن $f'(x)=x(x-2)e^x$ لكل x من $I\!R$

ب- بين أن الدالة f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[2,+\infty[$ وأن الدالة f تناقصية على المجال $[0,2]$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على $I\!R$

4) أ- بين أن $f''(x)=(x^2-2)e^x$ لكل x من $I\!R$ ثم استنتج أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديد أرتوبيهما غير مطلوب .

ب- أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) أ- بين أن $H: x\mapsto (x-1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h: x\mapsto xe^x$ على $I\!R$ ثم احسب $\int_0^1 xe^x\,dx$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_0^1 x^2e^x\,dx=e-2$

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي $5(e-2)\ cm^2$

6) استعمل المنحنى (C) لإعطاء عدد حلول المعادلة : $x^2=e^{-x}+4x-4$ ، $x\in I\!R$

.17

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-x-\ln x$

1) أ- تحقق من أن $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$ لكل x من IR .

ب- بين أن $g'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ واستنتج أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ وتزايدية على $[1,+\infty[$

2) بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(1)=0$) .

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^2-1-(\ln x)^2$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\,cm$) .

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ و أول هندسيا هذه النتيجة .

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ (لاحظ أن $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$)

ج- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه .

2) أ- بين أن $f'(x)=2\left(\dfrac{x^2-\ln x}{x}\right)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب- تحقق من أن $\dfrac{x^2-\ln x}{x}=\dfrac{g(x)}{x}+1$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$

3) أ- بين أن $y=2x-2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$

ب- أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (T) والمنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة هي A)

4) أ- تحقق من أن $H:x\mapsto x(\ln x-1)$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$ ثم بين أن $\int_1^e \ln x\,dx=1$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e (\ln x)^2\,dx=e-2$

ج- بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) ومحور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\dfrac{1}{3}\left(e^3-6e+8\right)cm^2$

.18

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$

1) بين أن $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0,+\infty[$

2) تحقق من أن $g(1)=0$ ثم استنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0,1]$ و $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\,cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة f تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $f(x)\geq 2$ لكل x من $]0,+\infty[$

4) أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب)

5) نعتبر التكاملين I و J التاليين : $I=\int_1^e(1+\ln x)\,dx$ و $J=\int_1^e(1+\ln x)^2dx$

أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $I=e$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $J=2e-1$

ج- احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\left(xe^{x}-1\right)e^{x}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $2\,cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول النتيجة هندسيا

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه

3) أ- بين أن $f'(x)=e^{x}\left(e^{x}-1+2xe^{x}\right)$ لكل x من IR ثم تحقق من أن $f'(0)=0$

ب- بين أن $e^{x}-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ و أن $e^{x}-1\leq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على IR

4) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$ (نقبل أن $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$)

ب- أنشئ (C) في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها)

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_{0}^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$

6) احسب ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين

اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$

.20

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\,cm$) .

I) 1) بين أن $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ (D_f هي مجموعة تعريف الدالة f)

2) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما .

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده

ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$)

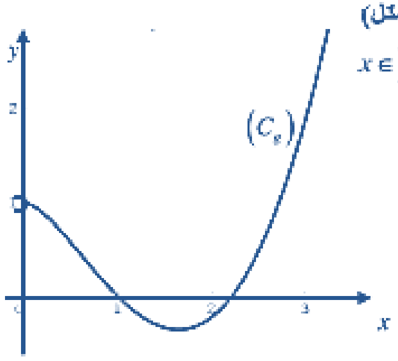
3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)



1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية: $g(x)=0$ ، $x\in]0,+\infty[$

ب- نعطي جدول القيم التالي :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

2) أ- تحقق من أن $f(x)-x=\frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α

ج- حدد ، انطلاقا من (C_g) ، إشارة الدالة g على المجال $[1,\alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1,\alpha]$

3) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

4) أ- بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f)

ب- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le\alpha$ لكل n من $I\!N$

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2) ج-)

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=e^x-2x$

1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR ثم استنتج أن g تناقصية على $]-\infty,\ln 2]$ و تزايدية على $[\ln 2,+\infty[$

2) تحقق من أن $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ ثم حدد إشارة $g(\ln 2)$

3) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من IR

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)

1) أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ (لاحظ أن $e^x-2x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$ لكل x من IR^*)

ب) أول هندسيا كل نتيجة من النتيجتين السابقتين .

2) أ) بين أن $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ لكل x من IR

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ على IR ثم أعط جدول تغيرات الدالة f على IR

ج) بين أن $y=x$ هي معادلة للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة O أصل المعلم .

3) أنشئ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (T) والمنحنى (C) (نأخذ $\dfrac{1}{e-2}\approx 1,4$ و نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما ينتمي إلى المجال $]0,1[$ و أفصول الأخرى أكبر من $\dfrac{3}{2}$)

4) أ- بين أن $xe^{-x}\leq \dfrac{x}{e^x-2x}\leq \dfrac{1}{e-2}$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\dfrac{2}{e}$

ج- لتكن ، ب cm^2 ، $A(E)$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

بين أن $1-\dfrac{2}{e}\leq A(E)\leq \dfrac{1}{e-2}$

III- لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $h(x)=f(x)$

IV- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=-2$ و $u_{n+1}=h(u_n)$ لكل n من IN

1) بين بالترجع أن $u_n\leq 0$ لكل n من IN

2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية (يمكنك ملاحظة ، مبيانيا ، أن $h(x)\geq x$ لكل x من المجال $]-\infty,0]$)

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

.22

.I نتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x+x\ln x$

1) أ- بين أن $g'(x)=\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

2) أحسب $g(1)$ و استنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$

.II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ و أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ لاحظ أن

$f(x)=\dfrac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$)

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1)=0$

ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$

4) أنشئ ، في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول الأخرى محصور بين 2 و $2,5$ و نأخذ $f(0,3)=0$)

5) أ- بين أن $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}dx=1$

ب- أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

6) نتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ- بين أن الدالة h زوجية و أن $h(x)=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C') الممثل للدالة h

.23

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$

الجدول جانبه هو جدول تغيرات الدالة g على $]0,+\infty[$

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $g(1)$ ↗ $+\infty$

1) احسب $g(1)$

2) استنتج انطلاقا من الجدول أن: $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ و أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (لحساب النهاية يمكنك كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$)

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ- بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$

4) أ- بين أن $I(1\ ,0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)

ب- بين أن $y=x-1$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة I

ج- أنشئ ، في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، المستقيم (T) و المنحنى (C)

5) أ- بين أن $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_1^2 (x+1)\ln x\,dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$

ج- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

6) حل مبيانيا المتراجحة : $(x+1)\ln x\ge\frac{3}{2}(x-1)$; $x\in]0,+\infty[$

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$

1) تحقق من أن $g(1)=0$

2) انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g جانبه :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

بين أن $g(x)\le 0$ لكل x من المجال $]0\,,1]$

و أن $g(x)\ge 0$ لكل x من المجال $[1\,,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1\ cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة.

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- بين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0\,,1]$ و تزايدية على المجال $[1\,,+\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$

4) أ- حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x=0$

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.

ج- بين أن $f(x)\le x$ لكل x من المجال $[1\,,2]$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على $[1\,,2]$

5) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (D) و المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين $2{,}4$ و $2{,}5$)

6) أ- بين أن $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$

ب- بين أن الدالة $H:x\mapsto 2\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto \dfrac{2}{x}-1$ على المجال $]0,+\infty[$

ج- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x\,dx=(1-\ln 2)^2$

د- احسب ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\sqrt{3}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $I\!N$

1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $I\!N$

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II) 4) ج-)

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

.25

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$

الجدول جانبه يمثل جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) تحقق من أن $g(0)=0$

2) حدد إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[0,+\infty[$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\left(x^{2}-x\right)e^{-x}+x$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $1cm$)

1) أ- تحقق من أن $f(x)=\frac{x^{2}}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}+x$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقاربا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

ج- تحقق من أن $f(x)=\frac{x^{2}-x+xe^{x}}{e^{x}}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

د- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا

2) أ- تحقق من أن $f(x)-x$ و $x^{2}-x$ لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

ب- استنتج أن (C) يوجد فوق (D) على كل من المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$ و تحت (D) على المجال $[0,1]$

3) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$

ب- استنتج أن الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$ و تزايدية على $[0,+\infty[$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أ- تحقق من أن $f''(x)=\left(x^{2}-5x+4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4

5) أنشئ (D) و (C) في نفس المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نأخذ $f(4)\simeq 4,2$)

6) أ- بين أن الدالة $H:x\mapsto\left(x^{2}+2x+2\right)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto -x^{2}e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ثم استنتج أن $\int_{0}^{1}x^{2}e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\frac{e-2}{e}$

ج- أحسب ب cm^{2} مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

III. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن $0\le u_n\le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكن استعمال نتيجة السؤال $II-3$) ب-)

26..

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x)=1-(x+1)^2e^x$$

1) تحقق من أن $g(0)=0$

2) انطلاقا من التمثيل المبياني (C_g) للدالة g (انظر الشكل جانبه)

بين أن $g(x)\ge 0$ لكل x من $]-\infty,0]$

وأن $g(x)\le 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x+1-(x^2+1)e^x$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

1) أ- تحقق من أن $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ب- احسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ واستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ج- بين أن المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (D)

2) أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (يمكنك كتابة $f(x)$ على الشكل $x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$)

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ ، فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه.

3) أ- بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- بين أن الدالة f تزايدية على $]-\infty,0]$ و تناقصية على $[0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

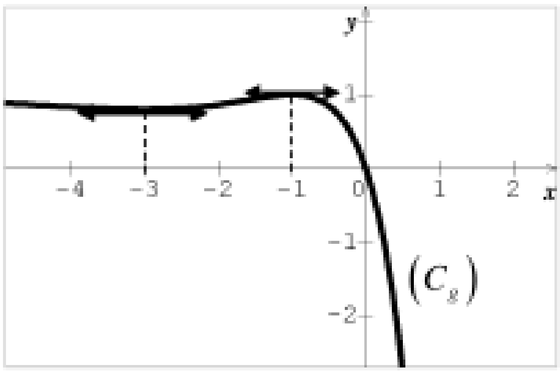
ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما -3 و -1

4) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (D) و المنحنى (C_f) (نأخذ $f(-3)\approx-2,5$ و $f(-1)\approx-0,75$)

5) أ- تحقق من أن $H:x\mapsto(x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$ ثم بين أن $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx=\frac{2}{e}-1$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$

ج- احسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (D) و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=-1$



.27

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\ln(1-x^3) & \text{إذا كان } x \prec 0 \\ f(x)=4x\sqrt{x}-3x^2 & \text{إذا كان } x \geq 0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) أ- بين أن الدالة f متصلة في النقطة 0 .

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة 0 (نذكر بأن $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$).

2) بين أن الدالة f تناقصية على المجالين $]-\infty,0[$ و $[1,+\infty[$ وتزايدية على المجال $[0,1]$.

3) أ- احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب- تحقق من أنه لكل $x \prec 0$ ، $\frac{f(x)}{x}=3\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$.

ج- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

4) أنشئ المنحنى (C).

5) ليكن h قصور الدالة f على المجال $]-\infty,0[$.

أ- بين أن h تقابل من المجال $]-\infty,0[$ نحو مجال J يجب تحديده.

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0=\frac{4}{9}$ و $u_{n+1}=4u_n\sqrt{u_n}-3u_n^2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f .

أ- بين بالترجع أن $\frac{4}{9}\leq u_n\leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

تجدون هذا الملف على صفحة