الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية : بوعناني الجيلالي - سعيدة المستوى : ثالثة علوم تجريبية

2023 – 2022

الفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

المدة : 75 دقيقة

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

نص التمرين :

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (1 + 2x)e^{2x}$

1. أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. أدرس إتجاه تغيّر الدالّة g ثمّ شكّل جدول تغيراتها .
3. أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالّة العددية معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. أحسب نهايات الدالّة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .
3. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
4. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$
5. إستنتج اتجاه تغيّر الدالّة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .
6. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث : $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.75 < \beta < 0.8$.
7. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .
8. أنشئ (T) , (Δ) و المنحنى (C_f) .
9. ناقش بيانيّا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$

III) لتكن h الدالّة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = \dfrac{1 + 3x - e^{\frac{2}{x}}}{x}$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. أحسب $h'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها .

التصحيح المفصل للفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

I. لدينا g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(1+2x)e^{2x}$.

1) حساب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-(1+2x)e^{2x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{2x}-2xe^{2x}\right)=1$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x}\right)=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-(1+2x)e^{2x}\right]=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(1+2x)e^{2x}\right]=-\infty\end{cases}$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة g:

حساب المشتقة : $g'(x)=-\left(2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}\right)=(-4-4x)e^{2x}$

دراسة إشارة المشتقة $g'(x)$:

$g'(x)=0$ يعني $(-4-4x)e^{2x}=0$ ومنه $-4-4x=0$ أي $x=-1$

جدول إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	↗	$g(-1)=1.14$	↘	$-\infty$

3) حساب $g(0)$ ثم إستنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

$g(0)=1-(1+2\times0)e^{2(0)}=1-1=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

.II f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x+3-xe^{2x}$.

1) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3-xe^{2x}\right)=-\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}\left(-2xe^{2x}\right)=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-xe^{2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}-e^{2x}\right)=-\infty$

2) أ) تبيان أنّ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3-xe^{2x}-x-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}\left(-2e^{2x}\right)=0$

ومنه المستقيم $(\Delta): y=x+3$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=x+3-xe^{2x}-(x+3)=-xe^{2x}$

إشارة الفرق نفس إشارة $-x$ لأنّ $e^{2x}>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	
$f(x)-y$		+	0	-	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ):

إذا كان $x\in]-\infty;0[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ يقع فوق المستقيم (Δ).

إذا كان $x=0$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ يقطع المستقيم (Δ).

إذا كان $x\in]0;+\infty[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ يقع تحت المستقيم (Δ).

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=g(x)$:

لدينا : $f'(x)=1-\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)=1-(1+2x)e^{2x}=g(x)$

ومنه $f'(x)=g(x)$

ب) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) تبيان أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث : $-3.05<\alpha<-3$ و $0.75<\beta<0.8$:

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[-3.05;-3]$ ولدينا :

$$f(-3.05)=-3.05+3-(-3.05)e^{2(-3.05)}=-0.04$$

و $f(-3)=-3+3-(-3)e^{2(-3)}=0.01$

أي $f(-3.05)\times f(-3)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.05<\alpha<-3$.

و لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.75;0.8]$ ولدينا :

$$f(0.75)=0.75+3-(0.75)e^{2(0.75)}=0.39$$

و $f(0.8)=0.8+3-(0.8)e^{2(0.8)}=-0.16$

أي $f(0.75)\times f(0.8)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0.75<\beta<0.8$.

وبالتالي $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث : $-3.05<\alpha<-3$ و $0.75<\beta<0.8$

ب) تبيان أنّ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):

يعني $f'(x)=1$ يكافئ $g(x)=1$

أي $1-(1+2x)e^{2x}=1$ ومنه $-(1+2x)e^{2x}=0$

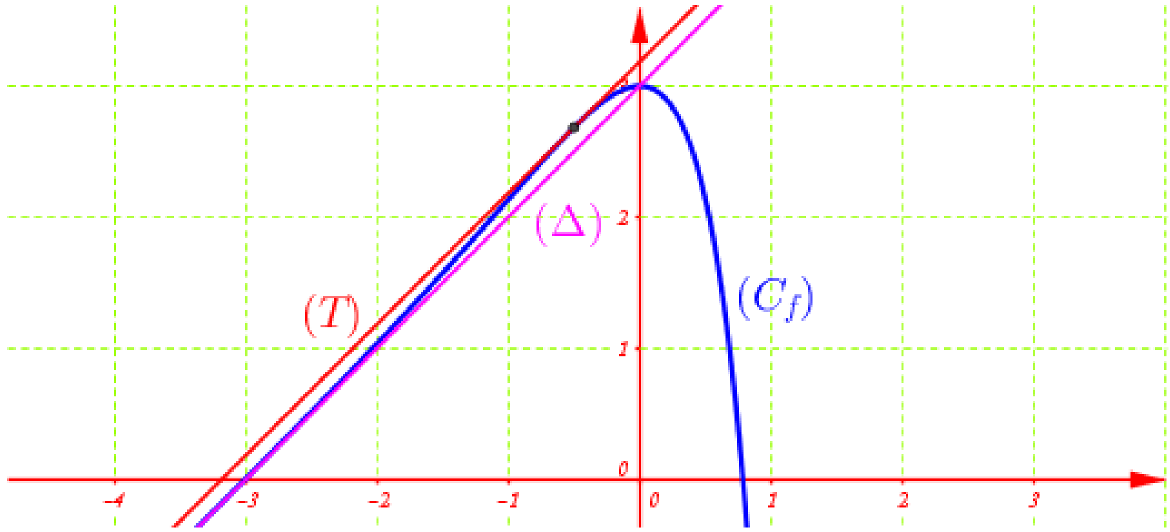
وبالتالي $2x+1=0$ ومنه $x=-\frac{1}{2}$

المنحني $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-\frac{1}{2}$.

تعيين معادلة ديكارتية للمماس (T) : $(T): y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$(T): y=1\times\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}e^{-1}=x+3+\frac{1}{2}e^{-1}$$

ج) الرسم :



5) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $(E): f(x)=x+m$:

حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من المستقيم (Δ) والمماس (T) .

إذا كان $m\in]-\infty;3[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

إذا كان $m=3$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما .

إذا كان $m\in\left]3;3+\frac{1}{2}e^{-1}\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين .

إذا كان $m=3+\frac{1}{2}e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

إذا كان $m\in\left]3+\frac{1}{2}e^{-1};+\infty\right[$ المعادلة ليس لها حل .

6) لدينا h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

أ) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$:

لدينا : $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+3-\frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}}=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}=h(x)$

ب) حساب $h'(x)$: $h'(x)=-\frac{1}{x^2}\times f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\times g\left(\frac{1}{x}\right)$

ج) إستنتاج إتجاه تغير الدالة h وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $h'(x)$ عكس إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$	‖	$-$
$h'(x)$	$-$	‖	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	
$h(x)$	3	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	3