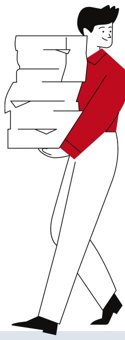
نقاط مهمة حول الدوال

في كل ما ياتي $n;m \in N$ و $a,b,c,d,l,k \in R$

1. النهايات

نهايات دوال مرجعية

نهاية دوال مرجعية



نهاية دالة كثيرة الحدودعند $+\infty$ و$-\infty$

هي نهاية اكبر حد

نهاية دالة ناطقة عند$+\infty$و$-\infty$

هي نهاية اكبر حد في المقام على اكبر حد في البسط

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

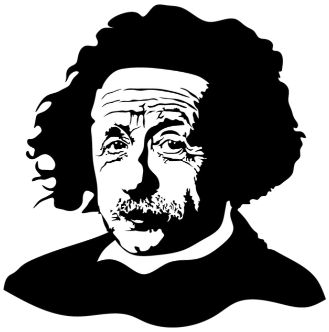
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ax+b = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} ax+b = -\infty$$



مثال1

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = \frac{x^3+x^2+x+4}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = \frac{x^3}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = 1$$

مثال2

$$x^3+x^2+x+27$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = x^3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x| = +\infty$$

• 2 حالات عدم التعين

حالات عدم التعين

$+\infty - \infty$

$0 \times \infty$

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

• 3 طرق ازالة حالة عدم التعين

طرق ازالة حالة عدم التعين

التحليل و الاختزال

استعمال المرافق (خاص بالجذور التربيعية)

استعمال العدد المشتق

مثال1:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x^2+1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}$$

$$= -\frac{5}{3}$$

مثال2:

$$\lim f(x) = \lim \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\lim \sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(لاستعمال هذه الطريقة لابد ان تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

حيث تكون هذه النهاية تساوي العدد المشتق: $f'(x_0)$

مثال2:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=0$$

مثال3:

$f(x)=\sin x$

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=f'(0)=1$$

حيث:

$f(0)=0$ و $f'(x)=\cos(x)$ و $f'(0)=1$

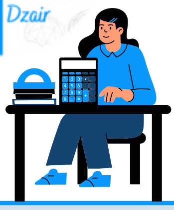
- **4 نهاية مركب دالتين :**

$f = v \circ u$ يكافئ
$$\begin{cases} \lim_{x\to a} u(x) = b \\ \lim_{x\to b} v(x) = c \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}} \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2}{x^2+1} = 2 \\ \lim_{X\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \lim \sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}} = 2$$

• 5المستقيمات المقاربة



المستقيم المقارب

المائل	الافقي	العمودي
$\lim_{x\to\infty} [(x)-(ax+b)]=0$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
التفسير الهندسي	التفسير الهندسي	التفسير الهندسي
المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل ل(Cf) عند ∞	المستقيم ذو المعادلة $y=b$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب ل(Cf) عند∞	المستقيم ذو المعادلة $x=a$ (الموازي لمحور التراتيب) مقارب ل (Cf)

ملاحظة مهمة:

اذا كان:
$$\begin{cases} f(x)=ax+b+g(x) \\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0 \end{cases}$$
فان: المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل ل(Cf) عند ∞

عفايس لازم تعرفهم: 🙂

- اثبات ان $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار∞ نضع: $\lim_{x\to\infty} [f(x)-(ax+b)]=0$
- اثبات المستقيم المقارب العمودي: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

نقول $x=a$ هو مستقيم مقارب عمودي (و متكونش دالة معرفة فيه بصح يكون من مجموعة التعريف الدالة)

- اثبات المستقيم المقارب الافقي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

نقول $y=b$ هو مستقيم مقارب افقي (و نفسو تلقاه كي تحسب نهايات عند ∞)

• شفعية الدالة:(يعني نقولو اذا زوجية و لا فردية)

الدالة f

الزوجية

حذاري تنسى الشرط(1)

1)Df متناظرة بالنسبة الى الصفر
(اي من اجل كل x من Df, فان x- من Df)

2) $f(-x) = f(x)$

و يكون :

منحناها **متناظرة** بالنسبة الى **محور التراتيب**

الفردية

1)Df متناظرة بالنسبة الى الصفر
(اي من اجل كلx منDf; فانx- منDf)

2) $f(-x)=-f(x)$ او $f(-x)+f(x)=0$

و يكون :

منحناها **متناظرة** بالنسبة الى **مبدا المعلم**

• مركز تناظر , و محور التناظر:

مركز التناظر

النقطة $w(a,b)$ مركز تناظر للمنحنى,معناه :

$f(2a-x) +f(x)= 2B$

او

$f(a-x)+f(a+x)=2B$

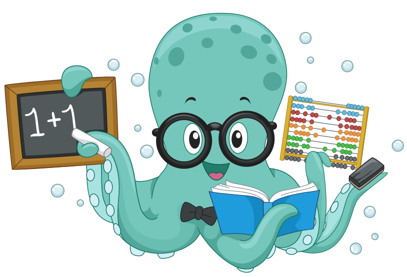
محور التناظر

المستقيم ذو المعادلة $x=a$ **محور التناظر** للمنحنى Cf;معناه :

$f(a-x) = f(a+x)$

او

$f(2a-x) = f(x)$



- **تقاطع (Cf) مع حامل محور التراتيب , و مع حامل محور الفواصل**

تقاطع (Cf) مع حامل محور التراتيب $(Cf)\cap(yy')$:

نحسب: $f(0)$

$(Cf)\cap(yy')=\{A(0;.....)\}$

تقاطع (Cf) مع حامل محور الفواصل $(Cf)\cap(xx')$:

نحل المعادلة $f(x)=0$ في D_f

و نكتب

$(Cf)\cap(xx')=\{A(.....;0),B(.....;0)\}$

- **المماس:**

افكار غير مهمة لطرح سؤال المماس:

الصيغة	الطرح	الاجابة
1 الاساسية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب الدستور: $(T: f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطاة
2	اكتب معادلة المماس للمنحنى (Cf) عند النقطة ذات الترتيب y_0	نحل المعادلة $f(x_0)=y_0$, عند تعين قيمة x_0 نكون قد عدنا الى حالة الاولى .
3	بين انه يوجد مماس او اكثر للمنحنى (Cf) ميله (او معامل التوجيه) يساوي α	نحل المعادلة $f'(x_0)=\alpha$, عدنا الى حالة الاولى ملاحظة: عدد الحلول يدل على عدد المماسات .
4	بين انه يوجد مماس او اكثر للمنحنى (Cf) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$	نحل المعادلة $f'(x_0)=\alpha$, عدنا الى حالة الثانية ملاحظة: مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه .

5	بين انه يوجد مماس او اكثر للمنحنى(Cf)يعامد المستقيم ذا المعادلة $y=\alpha x+\beta$	نحل المعادلة $\alpha.xf'(x_0)=-1$ ملاحظة :مستقيمان متعامدان جداء معاملي التوجيههما يساوي(1-) .
6	بين انه يوجد مماس او اكثرالمنحنى(Cf)يشمل النقطة ذات الاحداثيات$(x_M ; y_M)$	نحل المعادلة (y_M: $f'(x_0)=(x - x_0)+f(x_0$ و عند تعين قيمة (او قيم)x_0 نكون قد عدنا الى الحال الاولى

- **وضعية منحنى(Cf) بالنسبة للمستقيم (D), (ax+b)**

اولا ندرس اشارة الفرق:

f(x)-(ax+b)

f(x)-(ax+b)>0	**f(x)-(ax+b)=0**	**f(x)-(ax+b)<0**
(Cf)يقع اعلى (D)	**(Cf)يقطع اعلى (D)**	**(Cf)يقع اسفل (D)**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- **اشارة $(ax+b)$ $(a \neq 0)$:**

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس اشارة a	0	نفس اشارة a

- **ا اشارة $p(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$:**

تحليل $p(x)$	اشارة $p(x)$	حلول المعادلة $p(x)=0$ في R	المميز $\Delta= b^2-4ac$
لايمكن تحليل $p(x)$	x : $-\infty$ … $+\infty$ $p(x)$: نفس اشارة a	$S = \emptyset$	$\Delta<0$
$p(x)=a(x-x_0)^2$ $(x_0=\frac{-b}{a})$	x : $-\infty$ … $\frac{-b}{2a}$ … $+\infty$ $p(x)$: نفس اشارة a 0 نفس اشارة a	$S=\{\frac{-b}{a}\}$	$\Delta=0$
$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $p(x)$: نفس اشارة a 0 عكس اشارة a 0 نفس اشارة a	$S=\{x_1;x_2\}$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta>0$

• استنتاج تمثيل بياني من اخر:

هذا سؤال غالب يجي في نهاية تمرين بعد تمثيل بيان(Cf)و يطلب منا تمثيل بياني ل(Ch) انطلاقا منه

عبارة الh(x) بدلالة f(x)	استنتاج تمثيل بياني ل(Ch) انطلاقا من (Cf)
$h(x)=f(x)+k$	(Ch) هو الصورة(Cf) بالانسحاب الذي شعاعه$\vec{v}(0;k)$
$h(x)=f(x+b)$	(Ch) هو الصورة(Cf) بالانسحاب الذي شعاعه$\vec{v}(-b;0)$
$h(x)=f(x+b)+k$	(Ch) هو الصورة(Cf) بالانسحاب الذي شعاعه$\vec{v}(-b;k)$
$h(x)=-f(x)$	(Ch) هو نظير(Cf) بالنسبة الى محور الفواصل
$h(x)=f(-x)$	(Ch) هو نظير(Cf) بالنسبة الى محور التراتيب
$h(x)=-f(-x)$	(Ch) هو نظير(Cf) بالنسبة الى مبدا المعلم
$h(x)=f(\|x\|)$	لما $x \geq 0$ (Ch)ينطبق على(Cf) لما $x \leq 0$ (Ch)نظير (Cf) بالنسبة الى محور التراتيب
$h(x)=f(-\|x\|)$	لما $x \leq 0$ (Ch)ينطبق على(Cf) لما $x \geq 0$ (Ch)نظير (Cf) بالنسبة الى محور التراتيب
$h(x)=\|f(x)\|$	لما $f(x) \geq 0$; (Ch)ينطبق على(Cf) لما $f(x) \leq 0$;(Ch)نظير (Cf) بالنسبة الى محور الفواصل

• المناقشة البيانية:

- المعادلة من الشكل $f(x)=m$ و m وسيط حقيقي ← المناقشة الافقية موازية لمحور الفواصل
- المعادلة من الشكل $f(x)=ax+m$ وm وسيط حقيقي ← المناقشة لمائلة موازية المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$
- المعادلة من الشكل $f(x)=mx+b$ و m وسيط حقيقي ← المناقشة دوارنية حول النقطة $(A(0;b$
- المعادلة من الشكل $f(x)=f(m)$ و m وسيط حقيقي ← المناقشة الافقية موازية لمحور الفواصل

• رسم المنحنى البياني(هدف تمرين تع الدوال) :

خطوات رسم المنحنى البياني:

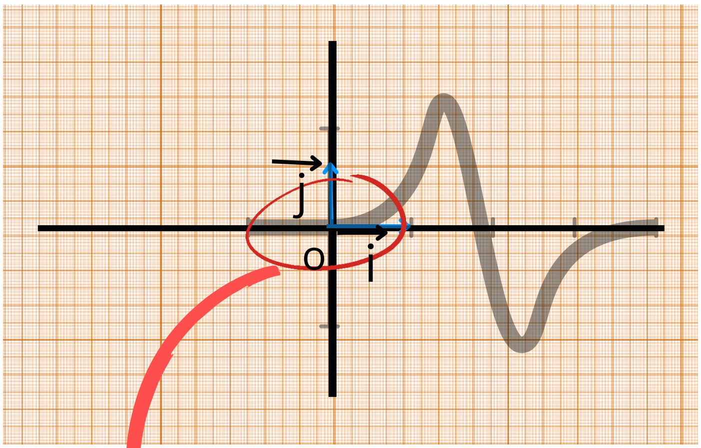
1) رسم معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

2)رسم المستقيمات المقاربة (او المماسات)

3)رسم نقاط تقاطع (Cf)مع حامل محور التراتيب وحامل محور الفواصل, نقاط انعطاف

4)تحديد القيم الحدية العظمى (الكبرى و صغرى)

5)عد ذلك نكمل الرسم حسب الجدول التغيرات (لي نكونو درناه من قبل)



ضروري تكتب في المنحنى $(o;\vec{i};\vec{j})$ كيما درت هدي هي تسمية تع منحنى و تبين الوحدة