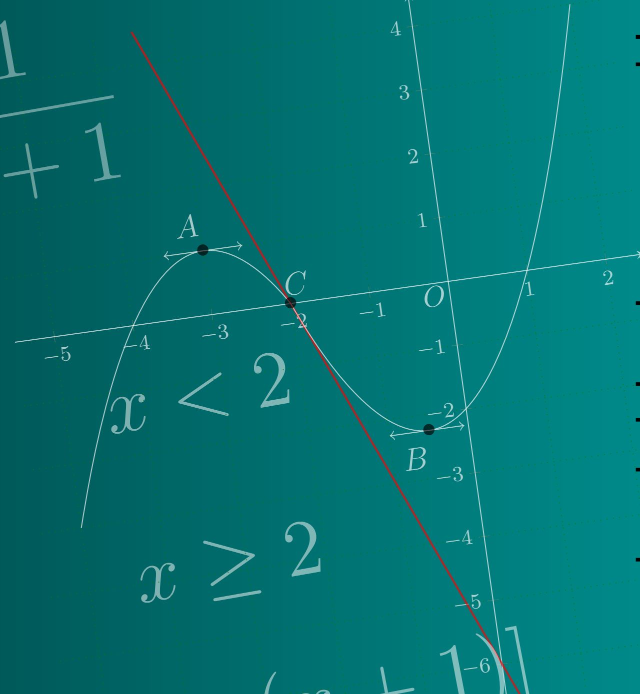
Ahmed Abderrahmane Kouadri

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}$$



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\alpha & x<2\\ \frac{x^2}{x+1} & x\geq 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$

تمارين شاملة في الدالة اللوغاريتمية مع الحل

الأستاذ: أحمد عبد الرحمان قوادري

01 جزء التمارين

02 جزء الحلول

BAC
2022

تمارين دوال لوغاريتمية

التمرين الأول

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الأول

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$$

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- بيّن أنّ الدّالة g زوجية.

3- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$، ثمّ استنتج أنّ $g(-\alpha) = 0$.

4- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$. ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة f؟

ب- فسّر النتيجة هندسيا.

2- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

3- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(x^2+1)}$.

4- أ- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f).

5- بيّن أنّ الدّالة f فردية.

6- بيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$، ثمّ استنتج عبارة $f(-\alpha)$.

7- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha(\alpha f(x)-2)+f(x)}{(x-\alpha)(\alpha^2+1)} = 0$.

8- مثّل بيانيا (C_f).

التمرين الثاني

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الثاني

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$g(x) = x - 2\ln x$$

1- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2- استنتج أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ: $g(x) > 0$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- احسب نهاية الدّالة f عند الصفر من اليمين. ماذا تستنتج؟

2- أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3- أ- بيّن أنّ من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4- أ- اكتب معادلة للمماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

5- أ- أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

ب- تحقّق من أنّ: $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

6- مثّل بيانيّا كل من المماس (T) والمنحنى (C_f) (نقبل أنّ النقطة $I(e; e-1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)).

7- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x التالية: $m = (\ln x)^2$.

التمرين الثالث

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الثالث

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$.

1- ادرس تغيرات الدالة g

2- احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x - 1 + x(\ln x)^2$

أ) احسب $h'(x)$ وبيّن أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$. (حيث h' الدالة المشتقة للدالة h)

ب) بيّن أن العدد 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 1$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1- أثبت أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ، ثم احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها

-2

أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{1}{x} \times g(x)$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ على المجال $[1 : +\infty[$

4- احسب $f(4)$ ، $f(6)$ ، ثم مثّل بيانيّا (C_f)

(III) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب تماما التالية : $f(x) = f(e^m)$.

التمرين الرابع

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الرابع

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = 1 + x^2 + \ln x$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g .

2 - بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$.

3 - استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = -x + \frac{2 + \ln x}{x}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$.

1 - احسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3 - بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ثمّ عيّن حصراً للعدد $f(\alpha)$.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ واستنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

- ادرس الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 - أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . اكتب معادلة المماس (T) .

6 - مثّل بيانيّا (T)، ثمّ (C_f) علما أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_0 و x_1 حيث : $0.2 \prec x_0 \prec 0.1$ و $1.6 \prec x_1 \prec 1.5$.

التمرين الخامس

اضغط للذهاب إلى حل التمرين الخامس ←

(I) نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التالية:

$$y'+2y=\frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

1- تحقّق من الدّالة $f:x\mapsto e^{-2x}\ln(2e^{x}+1)$ حل لـ (E).

2- برهن أنّ الدّالة k حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $f-k$ حل للمعادلة (E') ....$y'+2y=0$.

3- أوجد مجموعة حلول المعادلة (E')، ثمّ استنتج حلول (E).

4- هل توجد دالة k حل لـ (E) بحيث تمثيلها البياني في معلم معطى يشمل النقطة $O(0;0)$؟ برّر إجابتك.

(II) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{e^{x}}{2e^{x}+1}-\ln(2e^{x}+1)$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- عيّن إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(III) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=e^{-2x}\ln(2e^{x}+1)$$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2 أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f(x)=\frac{x}{e^{2x}}+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right)$.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$.

4- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

5- احسب $f(0)$ و $f(-1)$، ثمّ مثّل بيانيّا (C_f).

(IV) نعتبر الدّالة h المعرّفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x)=f(|x|)$$

ونسمّي (C_h) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

انطلاقا من (C_f) أنشئ (C_h).

التمرين السادس

اضغط للذهاب إلى حل التمرين السادس ←

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-2\ln(x)-xe+1$.

1- ادرس تغيّرات الدّالة g.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0.5;1[$.

3- عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln(x)+xe}{x^{2}}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

ب- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

4- احسب: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

5- بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0.3<\beta<0.4$.

6- احسب $f(2)$، ثمّ مثّل بيانيّا (C_f).

7- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $f(x)=e^{-m}$.

التمرين السابع

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين السابع

(I) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- أ- بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$.

ب- فسّر النتيجتين هندسيا.

2- ادرس إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3- أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f''(x)=\dfrac{2\left((\ln x)^2-3\ln x+1\right)}{x}$.

ب- بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

4- بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يمرّان بالمبدأ. يطلب كتابة معادلتيهما.

5- مثّل بيانيا (T_1) و (T_2)، ثمّ (C_f).

(II) نعتبر الدّالة h المعرّفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=-f(|x|)$

ونسمّي (C_h) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1- بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

2- اشرح كيف يتم إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f)، ثمّ أنشئه.

التمرين الثامن

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الثامن

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=(\ln x)^3+1$.

1 - ادرس تغيرات الدالة g.

2 - حل المعادلة $g(x)=0$.

3 - استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}$

ونُسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1 - أ - احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب - بين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون : $f'(x)=2\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج - استنتج إشارة $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2 - نعتبر الدالة h العرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=(\ln x)^2+1$.

ونُسمّي (C_h) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

3 - ادرس تغيرات الدالة h.

4 - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$، ثمّ فسر النتيجة هندسيا.
5 - ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h).
6 - بين أن (C_h) يقبل A نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.
7 - اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_h) في النقطة A.
8 - احسب $f(e)$، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f)؟
9 مثّل بيانيّا المنحنيين (C_f) و (C_h) مع المستقيم (T).
10 - m وسيط حقيقي. ناقش بيانيًا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-(\ln x)-2e^m=0$.

التمرين التاسع

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين التاسع

(I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-2+\ln x$.
1- ادرس تغيّرات الدّالة g.
2- أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.
ب- تحقّق من أنّ: $1.3<\alpha<1.32$.
3- عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
4- برهن أنّ: $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

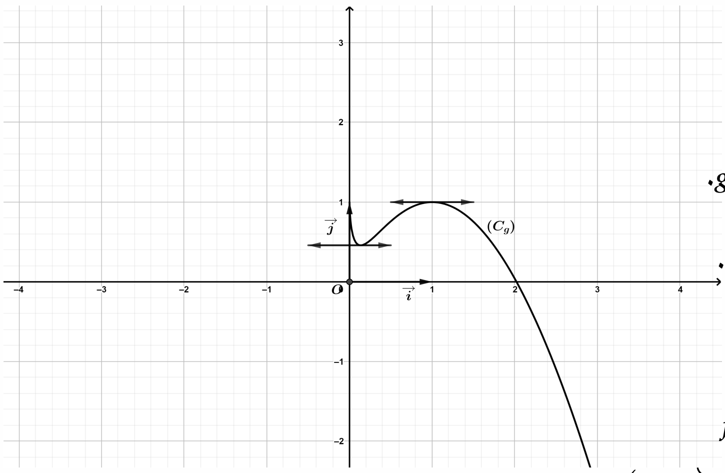
(II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$
ونسمّي (C_f) منحنيها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$.
2- بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
3- شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.
4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=\alpha^2(1+\alpha^2)$.
5- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(III) ● نسمّي (Γ) التمثيل البياني للدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\ln x$.
● النقطة A ذات الاحداثيات $(0;2)$.
● M نقطة من المنحنى (Γ) فاصلتها x.
1- بيّن أنّ المسافة AM تعطى بـ: $AM=\sqrt{f(x)}$.
2- نعتبر الدّالة k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.
أ- برهن أنّ للدالتين f و k نفس اتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.
ب- برهن أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يطلب تعيين إحداثييها.
ج- برهن أنّ $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
3- هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحنى (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك.

تمارين دوال لوغاريتمية

التمرين العاشر

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين العاشر



I. نعتبر الدّالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$.
ونسمّي (C_g) منحنيها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ كما في الشكل المقابل :

1- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = -(2+\ln x)\ln x$.

2- استنتج إتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0;+\infty[$.

3- أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $2 < \alpha < 2.1$.

4- عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

II. نعتبر الدّالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{-1+\ln x}{\ln x} - x + e$$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1- أ- أثبت أنّ: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$، احسب $f'(x)$، ثمّ تحقّق من أنّ: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج- استنتج إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2- أ- أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقطع (xx') في نقطتين إحداهما فاصلتها e، والأخرى فاصلتها x_0 حيث: $1.6 \prec x_0 \prec 1.7$.

ب- تحقّق من أنّ: $f(x) = \dfrac{-1}{\ln x} - x + e + 1$، ثمّ أثبت أنّ لـ (C_f) مقارباً مائلًا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ج- ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

3- أ- اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e.

ب- مثّل بيانيّا (T) و (C_f).

ج- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيّا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $f(x) = \dfrac{1-e}{e}x + m$.

التمرين الحادي عشر

← اضغط للذهاب إلى حل التمرين الحادي عشر

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = xe^x - x + 1$

1 - ادرس تغيّرات الدّالة g' .

2 - احسب $g'(0)$ ثمّ استنتج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$.

3 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \succeq 0$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \ln(xe^x - x + 1)$

ونسمّي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 - بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

3 - شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

4 - احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

5 - احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

6 - نعتبر الدّالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $u(x) = e^x + x - 2$.

أ - بيّن أنّ المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث : $-1 \prec \alpha \prec 0$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ α سعته 10^{-1} .
ب - استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$.
7 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها .
ب - أوجد حصرًا للعدد $\alpha - f(\alpha)$ (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .
ج - اكتب معادلة المماس (δ) .
د - احسب $f(1)$ و $f(-2)$.
8 - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.
9 - اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
10 - أنشئ : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f) .
11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=\left(2-e^{-1}\right)x+a$.
11 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+l$.
12 - (T_n) مستقيم ذو المعادلة $y=\left(2e^n-e^{n-1}\right)x-\left(e^n-e^{n-1}\right)$.
أ - برهن أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها .
ب - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$f(x)=\left(2e^n-e^{n-1}\right)x-\left(e^n-e^{n-1}\right)$$

(III) h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{xe^{x-1}-xe^{-1}+e^{-1}}\right)$$

ونسمّي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.
1 - بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x)=-f(x)+1$.
2 - أ - بيّن أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما .
ب - أنشئ المنحنى (C_h) .
3 - نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية : $x\left(e^x-1\right)-m=0 \ldots\ldots(E)$ حيث $m\neq -1$.
- باستعمال المنحنى (C_h) . ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

(IV) نعتبر الدّالة k المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=h(2x-2)+f(\alpha)$. - عبارة $k(x)$ غير مطلوبة - .
1 - ادرس تغيّرات الدّالة k .
2 - تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=1$ ثمّ بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-2f'(\alpha)$.
3 - استنتج معادلة المماس (D) لمنحني الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$.
4 - تحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D) .
5 - احسب $k(-1)$.

(V) p الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي:

$$p(x)=f(|x|)$$

ونسمّي (C_p) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.
1 - أ - احسب : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{p(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟
ب - فسّــر النتيجة هندسيا .
2 - أ - من أجل كل x عدد حقيقي ، احسب $p(x)-p(-x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدّالة p ؟
ب - فسّــر النتيجة هندسيا .
3 - اكتب $p(x)$ دون رمـز القيـمة المطلقة .
4 - باستعمال المنحنى (C_f) ، أنشئ المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء .

(VI) نعتبر الدّالة q المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ كمايلي :

$$q(x)=k(\tan x)$$

ونسمّي (C_q) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.
1 - احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا .

2 - أ - ادرس بطرقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q .
ب - شكّل جدول تغيّراتها .
3 - حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x = -1$.
4 - اكتب معادلة المماس (L) للمنحني (C_q) عند النقطة ذات الترتيبة (α) $f(-4) + f(\alpha) - 1$.

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

⋆ وتُفقدُ إن جهلتَ وأنتَ باقٍ ⋆ ⋆ وتُوجدُ إن علمتَ ولَو فُقِدتَا ⋆
⋆ أبو إسحاق الألبيري ⋆

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الأول

I.

1 دراسة تغيّرات الدّالّة g

1-النّهايات

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\left(2-\frac{(x^2+1)}{x^2}\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(x^2\left(2-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(2-\frac{(x^2+1)}{x^2}\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(2-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln(x^2+1)\right)\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\end{cases}$$

2-المشتقة

الدّالّة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 4x-\left(2x\ln(x^2+1)+\frac{2x}{x^2+1}(x^2+1)\right)\\ &= 4x-2x\ln(x^2+1)-2x\\ &= 2x-2x\ln(x^2+1)\\ &= 2x\left(1-\ln(x^2+1)\right)\end{aligned}$$

2-إشارة المشتقة

$g'(x)=0$ يكافئ:

$$2x\left(1-\ln(x^2+1)\right)=0$$

يكافئ:

$$\begin{cases}2x=0\\ \text{أو}\\ 1-\ln(x^2+1)=0\end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln\left(x^2+1\right) = 1 \end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x^2+1 = e \end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 = e-1 \end{cases}$$

يكافئ:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ |x| = \sqrt{e-1} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \sqrt{e-1} \text{ أو } x = -\sqrt{e-1} \end{cases}$$

- لمّا $-\sqrt{e-1} \leq x \leq \sqrt{e-1}$ يكافئ:

$$|x| \leq \sqrt{e-1}$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$x^2 \leq e-1$$

يكافئ:

$$x^2+1 \leq e$$

يكافئ:

$$\ln\left(x^2+1\right) \leq 1$$

يكافئ:

$$0 \leq 1-\ln\left(x^2+1\right)$$

- لمّا $\sqrt{e-1} \leq x$

بتربيع الطرفين نجد:

$$e-1 \leq x^2$$

يكافئ:

$$1 \leq \ln\left(x^2+1\right)$$

يكافئ:

$$1-\ln\left(x^2+1\right) \leq 0$$

- لمّا $x \leq -\sqrt{e-1}$

بتربيع الطرفين نجد:

$$x^2 \geq e-1$$

يكافئ:

$$1-\ln\left(x^2+1\right) \leq 0$$

لنلخّص ذلك في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln\left(x^2+1\right)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3- إتجاه التغيّر

- لمّا $x \in \left]-\infty;-\sqrt{e-1}\right] \cup \left[0;\sqrt{e-1}\right]$، لدينا: $g'(x) \geq 0$ ومنه الدّالة g متزايدة.
- لمّا $x \in \left[-\sqrt{e-1};0\right] \cup \left[\sqrt{e-1};+\infty\right[$، لدينا $g'(x) \leq 0$ ومنه الدّالة g متناقصة.

4- جدول التغيّرات

x	$-\infty$		$-\sqrt{e-1}$		0		$\sqrt{e-1}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(-\sqrt{e-1}\right)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g\left(\sqrt{e-1}\right)$	$\searrow$	$+\infty$

حيث: $g\left(-\sqrt{e-1}\right)=-2+e$، $g\left(\sqrt{e-1}\right)=-2+e$ و $g(0)=0$.

2 **تبيين أنّ الدّالة g زوجية**

لدينا كل من x و $-x$ من $\mathbb{R}$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)^2-\left((-x)^2+1\right)\ln\left((-x)^2+1\right) \\ &= 2x^2-\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدّالة g زوجية.

3 **تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$**

لدينا: $g\left(\sqrt{e-1}\right)=-2+e \succ 0$ و $g\left(\sqrt{e^2-1}\right)=-2 \prec 0$، إذن:

من جدول التغيّرات الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$ ولدينا: $g\left(\sqrt{e-1}\right)\times g\left(\sqrt{e^2-1}\right) \prec 0$، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدًا α في المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$.

استنتاج أنّ $g(-\alpha)=0$

لدينا الدّالة g زوجية معناه إذا كان α ينتمي إلى المجال $\left]\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right[$ فإنّ: $-\alpha$ من المجال $\left]-\sqrt{e^2-1};-\sqrt{e-1}\right[$.

وكذلك:

$$\begin{aligned} g(-\alpha) &= g(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 **تعيين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$** من جدول تغيّرات الدّالة g تكون إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ كمايلي:

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

.II

1 أ- تبيين أنّ: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x^2+1)}{x}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\end{aligned}$$

الآن بوضع $t=x^2$ نجد:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}\\&=k'(0)\\&=\frac{1}{0+1}\\&=1\end{aligned}$$

حيث k هي الدّالة المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $k(t)=\ln(t+1)$، ثمّ نحسب النّهاية باستعمال العدد المشتق على الدّالة k.

الاستنتاج بالنسبة للدّالة f

بما أنّ: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ و $f(0)=0$ فإنّ الدّالة f تقبل الاشتقاق في 0.

ب- تفسير النّتيجة هندسيا

لدينا: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسا في النقطة ذات الفاصلة 0 ميله هو 1. معادلته هي: $y=x$.

2 حساب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(x^2)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(-2\frac{\ln(-x)}{-x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln(x)}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

التفسير الهندسي

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) في جوار $-\infty$ و $+\infty$ موازٍ لحامل محور الفواصل.

3 **تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x^2+1)}$**

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2+1}\times x-\ln(x^2+1)}{x^2} \\
&= \frac{2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} \\
&= \frac{g(x)}{x^2(x^2+1)}
\end{aligned}$$

4 **أ- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f**

x	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ب- الاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)

لدينا $f'(x)$ انعدمت لمّا $x=0$ ولم تغيّر من إشارتها وبالتالي فإنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $O(0;0)$.

5 ✍ تبيين أنّ الدّالة f فردية

لدينا كل من x و $-x$ من $\mathbb{R}$ ولدينا كذلك:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\ln\left((-x)^2+1\right)}{-x} \\ &= -\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ومنه الدّالة f فردية.

6 ✍ تبيين أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} &= \frac{\ln\left(\alpha^2+1\right)}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \\ &= \frac{\left(\alpha^2+1\right)\ln\left(\alpha^2+1\right) - 2\alpha^2}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{-\left(2\alpha^2 - \left(\alpha^2+1\right)\ln\left(\alpha^2+1\right)\right)}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{-g(\alpha)}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \frac{0}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

✍ استنتاج عبارة $f(-\alpha)$

لدينا الدّالة f فردية ومنه:

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= -f(\alpha) \\ &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{f(-\alpha) = -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}$$

7 ✍ تبيين أنّ: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\alpha\left(\alpha f(x)-2\right)+f(x)}{(x-\alpha)\left(\alpha^2+1\right)} = 0$

لدينا مايلي:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha\left(\alpha f(x)-2\right)+f(x)}{(x-\alpha)\left(\alpha^2+1\right)} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha^2 f(x) - 2\alpha + f(x)}{(x-\alpha)\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{\left(\alpha^2+1\right) f(x) - 2\alpha}{(x-\alpha)\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}}{x-\alpha} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} \\ &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

8 التمثيل البياني

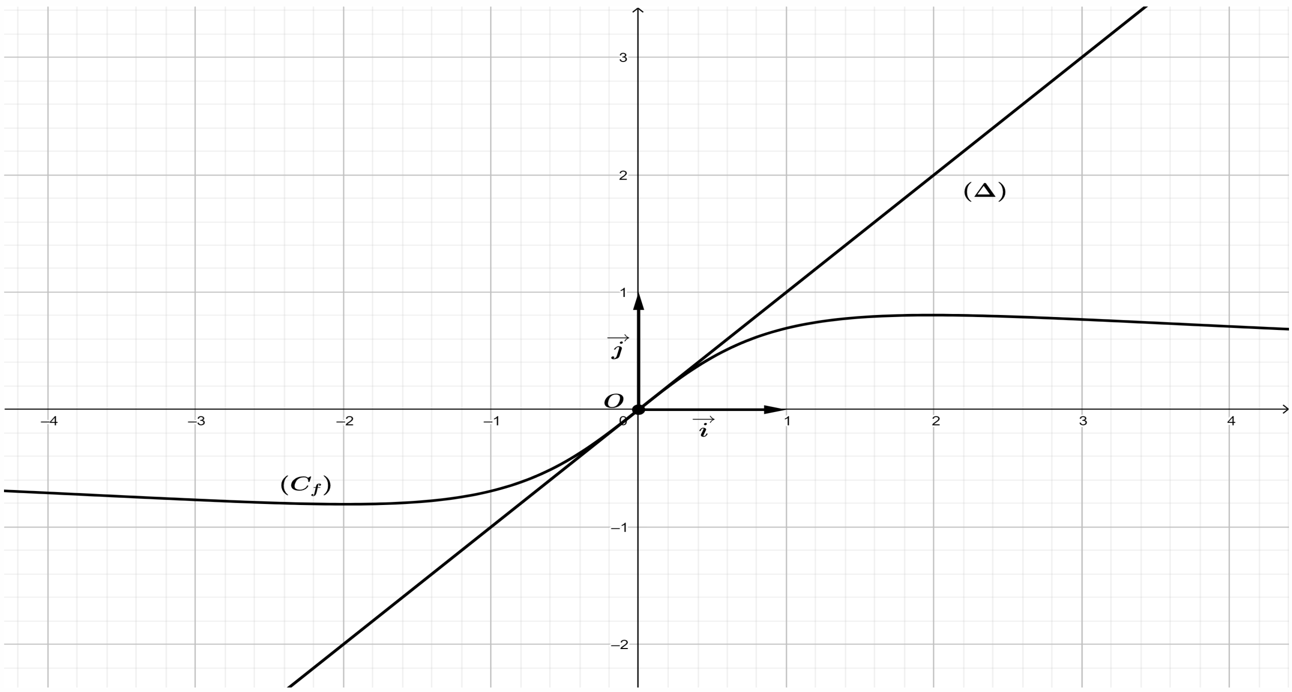
خطوات التمثيل:

1- نرسم المستقيمات المقاربة.

2- نعيّن نقط التقاطع مع حاملي محوري الإحداثيات.

3- نعيّن النقط الحدية.

4- وفي الأخير نستند إلى جدول التغيّرات.



حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الثاني

I

1 دراسة إتجاه تغيّر الدّالة g

المشتقة:

الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي: $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

إشارة $g'(x)$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- لمّا $x \in]0;2]$: الدّالة g متناقصة.
- لمّا $x \in [2;+\infty[$: الدّالة g متزايدة.

جدول تغيّرات الدّالة g

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x - 2\ln x) = +\infty \ / \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2\ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty \ / \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

وعليه جدول تغيّرات الدّالة f يكون كالتالي:

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$2-\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2 استنتاج أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ: $g(x) > 0$ من جدول التغيّرات واضح أنّ $g(x) > g(2)$ و $g(2) > 0$ وبالتالي: $g(x) > 0$.

II

1 حساب نهاية f على يمين الصفر

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x - (\ln x)^2\right) = -\infty \ / \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)^2 = +\infty$

ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته هي: $x = 0$.

2 إثبات أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

نضع $x = t^2$ لمّا $x \to +\infty$ فإنّ: $t \to +\infty$. إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = 4 \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$.

حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - (\ln x)^2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)\right) = +\infty$

3 التحقق أنّه من أجل $x > 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة كمايلي:

$$f'(x) = 1 - 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) = 1 - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

بما أنّ: $x>0$ و $g(x)>0$ فإنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. جدول تغيّراتها يكون كالتالي:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\qquad$ $+$
$f(x)$	‖ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T = f'(1)(x-1)+f(1) = g(1)(x-1)+1 = 1(x-1)+ = x-1+1 = x$$

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (T) لدينا: $f(x)-x=-(\ln x)^2\le 0$ وعليه المنحنى (C_f) تحت (T) على المجال $]0;+\infty[$.

5 إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$

لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

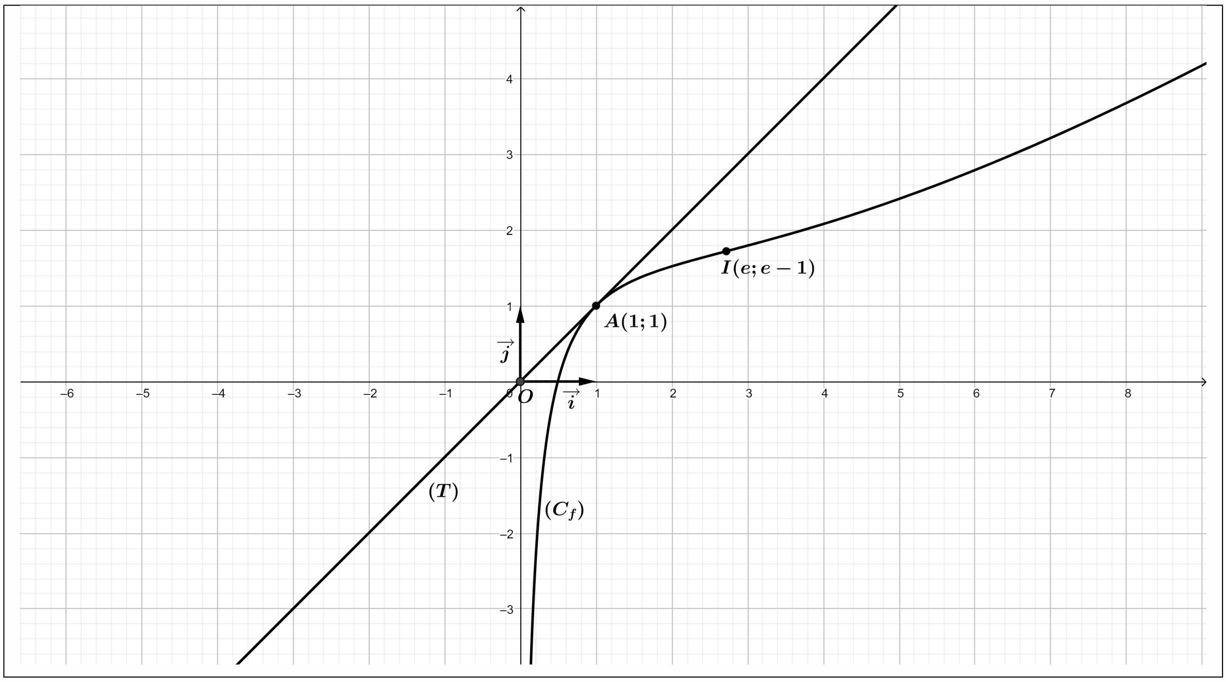
التحقق:

$\left]\frac{1}{e};\frac{1}{2}\right[\subset]0;+\infty[$ (ماينطبق على الكل ينطبق على الجزء) ولدينا أيضا:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = -0.63 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 0.019 \end{cases}$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

6 إنشاء المنحنى (C_f) و (T)



7 المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $m=(\ln x)^2$ $m=(\ln x)^2$ يكافئ: $m+x=(\ln x)^2+x$ يكافئ: $x-(\ln x)^2=x-m$

يكافئ: $f(x)=x-m$.........$(*)$.

حلول المعادلة بيانيّا $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y = x - m$، وعليه تكون المناقشة كمايلي:

- لمّا: $-m < 0$ أي: $m > 0$ المعادلة $(*)$ تقبل حلّان موجبان.
- لمّا: $-m = 0$ أي: $m = 0$ المعادلة $(*)$ تقبل حلّا موجبا هو $x = 1$.
- لمّا: $-m > 0$ أي: $m < 0$ المعادلة $(*)$ لاتقبل حلولا.

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الثالث

I

1 دراسة تغيرات الدالة g

حساب النهايات

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{x}\left(x^2 - 1 - 2x\ln x\right)\right) = -\infty \;/\; \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty \;;\; \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\left(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)\right) = +\infty \;/\; \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \;;\; \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

دراسة إتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2} \end{aligned}$$

<u>إشارة $g'(x)$</u>

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$+$	

<u>اتجاه تغير g</u> الدّالة g متزايدة على المجال $]0;+\infty[$.

<u>جدول التغيّرات</u> :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

2 إستنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

لدينا : $g(1) = 0$ ومنه إشارة $g(x)$ كالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

3 حساب $h'(x)$ و تبيان أن الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

الدالة h قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة h' حيث : $h'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2\ln x = (1 + \ln x)^2$

ومنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $h'(x) \geq 0$ ومنه الدالة h متزايدة على $]0;+\infty[$

✍ تبيان أن العدد 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x)=0$ ، ثم إستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

لدينا : $h(1)=0$ و لدينا كذلك الدالة h مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]e^{-1};+\infty[$ و بالتالي العدد 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $h(x)=0$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1+x(\ln x)^2)=+\infty$ ولدينا : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(x-1+x(\ln x)^2)=-1$

ومنه إشارة $h(x)$ كالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II

1 ✍ إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

✍ حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-1)=\lim_{x\to+\infty}x(\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{1}{x})=+\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}(x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-1)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{x^2+1-x(\ln x)^2-x}{x}=+\infty$$

✍ تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{1}{x}\times g(x)$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)=\dfrac{1}{x}\times g(x)$

✍ إستنتاج إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها .

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $\dfrac{1}{x}>0$ و بالتالي إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$

إذن من أجل $x\in]0;1]$ الدالة f متناقصة تماما و من أجل $x\in]1;+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2 ✍ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ على المجال $[1:+\infty[$

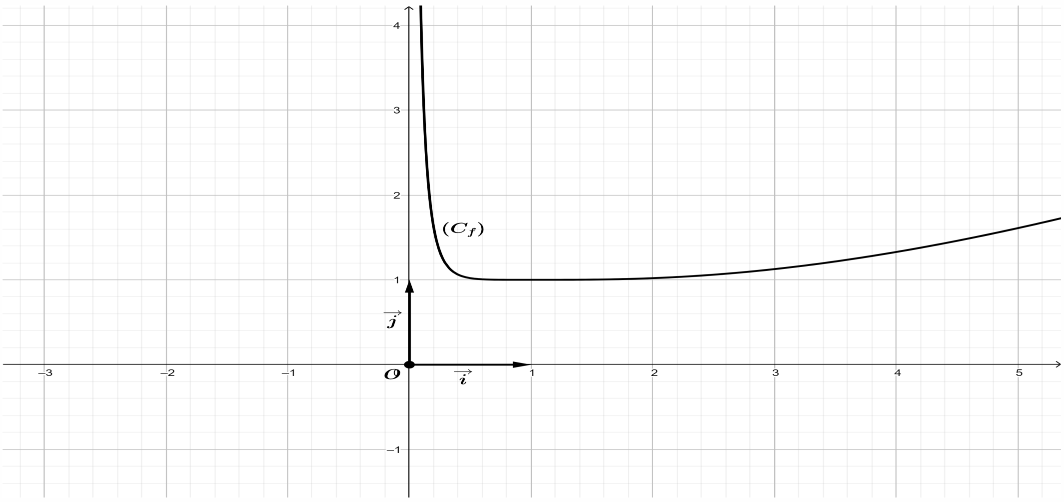
لدينا : $f(x)-x=\dfrac{1}{x}-(\ln x)^2-1=\dfrac{1-x-x(\ln x)^2}{x}=-\dfrac{h(x)}{x}$

و بالتالي الوضع النسبي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $\Omega(1;1)$	(C_f) تحت (Δ)	

3 إنشاء (C_f)

لدينا : $f(4) \approx 1,33$ ، $f(6) \approx 1,95$



4 مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(e^m)$

لدينا من أجل $f(e^m) = 1$ يوجد حل أي من أجل $e^m = 1$ أي $m = 0$

من أجل $f(e^m) \in]1;+\infty[$ يوجد حلين مختلفين أي من أجل $e^m \in]0;1[\cup]1+\infty[$ أي $m \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الرابع

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النهايات : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (1 + x^2 + \ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^2 + \ln x) = +\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه الدّالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2 تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$

لدينا $g(0.32) = -0.037$ و $g(0.33) = 0.00023$.

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.32;0.33[$ و $g(0.32) \times g(0.33) \prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$.

3 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

.II

1 حساب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = -\infty$$ لأنّ : $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \frac{2 + \ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$$ لأنّ : $\left\{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0\right\}$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$، ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$f'(x) = -1 + \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln x)}{x^2}\right) = -1 + \frac{-\ln x - 1}{x^2} = \frac{-x^2 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

جدول تغيّرات الدّالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3 تبيين أنّ : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$ ثمّ تعيين حصراً للعدد $f(\alpha)$

لدينا : $f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \cdots (1)$ ولدينا : $g(\alpha) = 0$ أي : $1 + \alpha^2 + \ln \alpha = 0$ ومنه $\ln \alpha = -(1 + \alpha^2)$ بالتعويض في (1) نجد :

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} = -\alpha + \frac{2 - (1 + \alpha^2)}{\alpha} = -\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} = -\alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$$

الحصر:

لدينا: $0.32 < \alpha < 0.33$.............(1)

يكافي: $0.64 < 2\alpha < 0.66$

يكافئ: $\frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64}$...........(2).

بضرب أطراف المتراجحة (1) في العدد -1 نجد: $-0.33 < -\alpha < -0.32$.............(3).

بجمع (2) مع (3) نجد: $-0.33+\frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha}-\alpha < -0.32+\frac{1}{0.64}$

يكافئ: $2.37 < f(\alpha) < 2.48$.

4 حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، واستنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2+\ln x}{x}+x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$.

دراسة الوضع النّسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

لدينا : $f(x)-y=f(x)+x=\frac{2+\ln x}{x}$

إشارة $f(x)+x$ من إشارة $2+\ln x=0$ لأنّ $x\succ 0$.

لدينا : $f(x)+x=0$ معناه $\frac{2+\ln x}{x}=0$ أي $2+\ln x=0$ معناه $\ln x=-2$ ومنه $x=e^{-2}$.

- لمّا $x\succ e^{-2}$ معناه $\ln x\succ -2$ أي $2+\ln x\succ 0$ ومنه $f(x)-y\succ 0$ ومنه (C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-2};+\infty[$.

- لمّا $x\prec e^{-2}$ معناه $\ln x\prec -2$ أي $2+\ln x\prec 0$ ومنه $f(x)-y\prec 0$ ومنه (C_f) تحت (Δ) على المجال $]0;e^{-2}[$.

- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(e^{-2};-e^{-2})$ ، $((C_f)\cap(\Delta)=\{(e^{-2};-e^{-2})\})$.

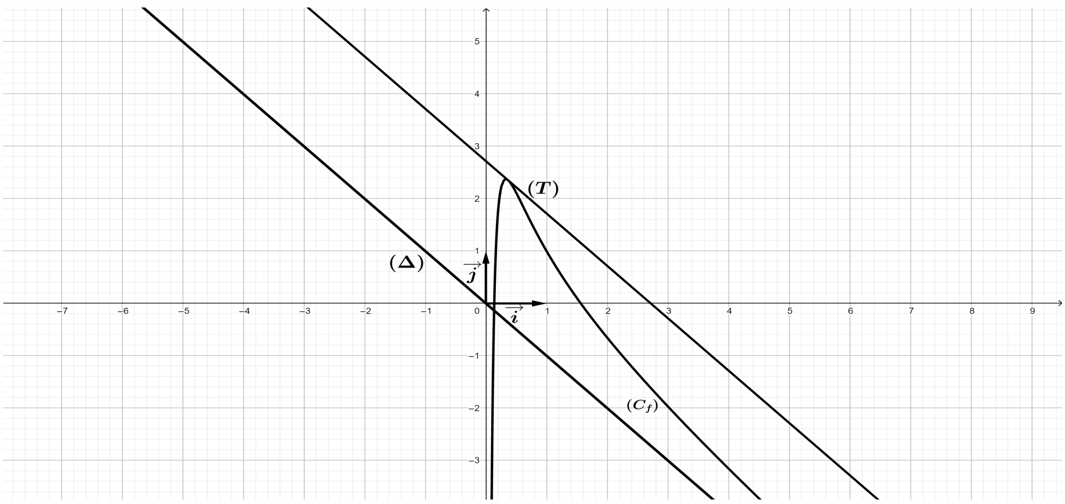
5 اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها . كتابة معادلة المماس (T)

نعتبر النقطة $A(x_0;f(x_0))$.

المماس (T) عند النقطة A يوازي المستقيم (Δ) معناه $f'(x_0)=-1$ معناه $-\frac{g(x_0)}{x_0^2}=-1$ أي $g(x_0)=x_0^2$ أي $1+x_0^2+\ln x_0=x_0^2$ ومنه $x_0=e^{-1}$ وعليه إحداثيات النقطة A التي يكون عندها المماس (T) يوازي المستقيم (Δ) هي $A(e^{-1};e-e^{-1})$.

معادلة المماس (T) : $(T): y_T=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})=-x+e^{-1}+e-e^{-1}=-x+e$

6 إنشاء المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f)



حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الخامس

.I

1 التحقق من أنّ الدّالة $f : x \mapsto e^{-2x}\ln(2e^x+1)$ حل لـ (E)

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\ln(2e^x+1) + \left(\frac{2e^x}{2e^x+1}\right)e^{-2x} \\ &= -2e^{-2x}\ln(2e^x+1) + \frac{2e^x \cdot e^{-2x}}{2e^x+1} \\ &= -2e^{-2x}\ln(2e^x+1) + \frac{2e^{-x}}{2e^x+1} \end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned} y'+2y &= -2e^{-2x}\ln(2e^x+1) + \frac{2e^{-x}}{2e^x+1} + 2\left(e^{-2x}\ln(2e^x+1)\right) \\ &= -2e^{-2x}\ln(2e^x+1) + \frac{2e^{-x}}{2e^x+1} + 2e^{-2x}\ln(2e^x+1) \\ &= \frac{2e^{-x}}{2e^x+1} \end{aligned}$$

ومنه الدّالة f حل لـ (E).

2 برهان أنّ الدّالة k حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت $f-k$ حل للمعادلة (E') .... $y'+2y=0$

بما أنّ الدّالة f حل لـ (E). نفرض أنّ الدّالة $f-k$ حل للمعادلة (E'). معناه:

$(k-f)'+2(k-f)=0$

يكافئ: $k'-f'+2k-2f=0$

يكافئ: $k'+2k-f'-2f=0$

يكافئ: $k'+2k-(f'+2f)=0$

يكافئ: $k'+2k-\dfrac{2e^{-x}}{2e^x+1}=0$

يكافئ: $k'+2k=\dfrac{2e^{-x}}{2e^x+1}$.

يكافئ: k حل لـ (E).

3 إيجاد مجموعة حلول المعادلة (E')، ثمّ استنتاج حلول (E)

إيجاد مجموعة حلول المعادلة (E') مجموعة حلول المعادلة (E') هي: $y=ce^{-2x}$ حيث $c\in\mathbb{R}$.

استنتاج حلول (E) بما أنّ f حل لـ (E) و $f-k$ حل لـ (E') فإنّ: $(k-f)(x)=ce^{-2x}$

يكافئ: $k(x)-f(x)=ce^{-2x}$

يكافئ: $k(x)=f(x)+ce^{-2x}$

يكافئ: $k(x)=e^{-2x}\ln(2e^x+1)+ce^{-2x}$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدّوال $k : x\mapsto e^{-2x}\ln(2e^x+1)+ce^{-2x}$ حيث $c\in\mathbb{R}$.

4 هل توجد دالة k حل لـ (E) بحيث تمثيلها البياني في معلم معطى يشمل النقطة $O(0;0)$؟ مع التّبرير

التمثيل البياني لـ k يشمل النقطة $O(0;0)$ معناه $k(0)=0$ ومنه: $e^{-2(0)}\ln(2e^0+1)+ce^{-2(0)}=0$

يكافئ: $\ln(3)+c=0$

ومنه: $c=-\ln 3$.

ومنه توجد دالة k حل لـ (E) بحيث تمثيلها البياني في معلم معطى يشمل النقطة $O(0;0)$ هي: $k : x\mapsto e^{-2x}\ln(2e^x+1)-\ln(3)e^{-2x}$.

.II

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النّهايات

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{2e^x+1} - \ln(2e^x+1)\right) = 0 \ / \ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \ ; \ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(2e^x+1) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{e^x\left(2+\dfrac{1}{e^x}\right)} - \ln(2e^x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\left(2+\dfrac{1}{e^x}\right)} - \ln(2e^x+1)\right) = -\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \ ; \ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2e^x+1) = +\infty$

المشتقة الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x(2e^x+1) - 2e^x(e^x)}{(2e^x+1)^2} - \frac{2e^x}{2e^x+1} \\ &= \frac{2e^{2x}+e^x-2e^{2x}}{(2e^x+1)^2} - \frac{2e^x(2e^x+1)}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x-4e^{2x}-2e^x}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{-4e^{2x}-e^x}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{-e^x(e^x+1)}{(2e^x+1)^2} \end{aligned}$$

إشارة المشتقة واضح أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ: $g'(x) < 0$

إتجاه التغيّر: الدّالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

2 إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

.III

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-2x}\ln(2e^x+1)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\cdot e^{-x}\ln(2e^x+1)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^{-x}\cdot\frac{\ln(2e^x+1)}{2e^x}\right) = +\infty$$

لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(2e^x+1)}{2e^x} = 1 \end{cases}$

2 أ- تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f(x)=\frac{x}{e^{2x}}+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x}\ln\left(2e^{x}+1\right) \\ &= e^{-2x}\ln\left(e^{x}\left(2+\frac{1}{e^{x}}\right)\right) \\ &= e^{-2x}\left(\ln e^{x}+\ln\left(2+e^{-x}\right)\right) \\ &= e^{-2x}\cdot x+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right) \\ &= \frac{x}{e^{2x}}+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right) \end{aligned}$$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{2x}}+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\cdot\frac{x}{e^{x}}+e^{-2x}\ln\left(e^{-x}+2\right)\right)=0$$

لأنّ:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{-x}+2\right)=\ln 2 \end{cases}$$

3 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$

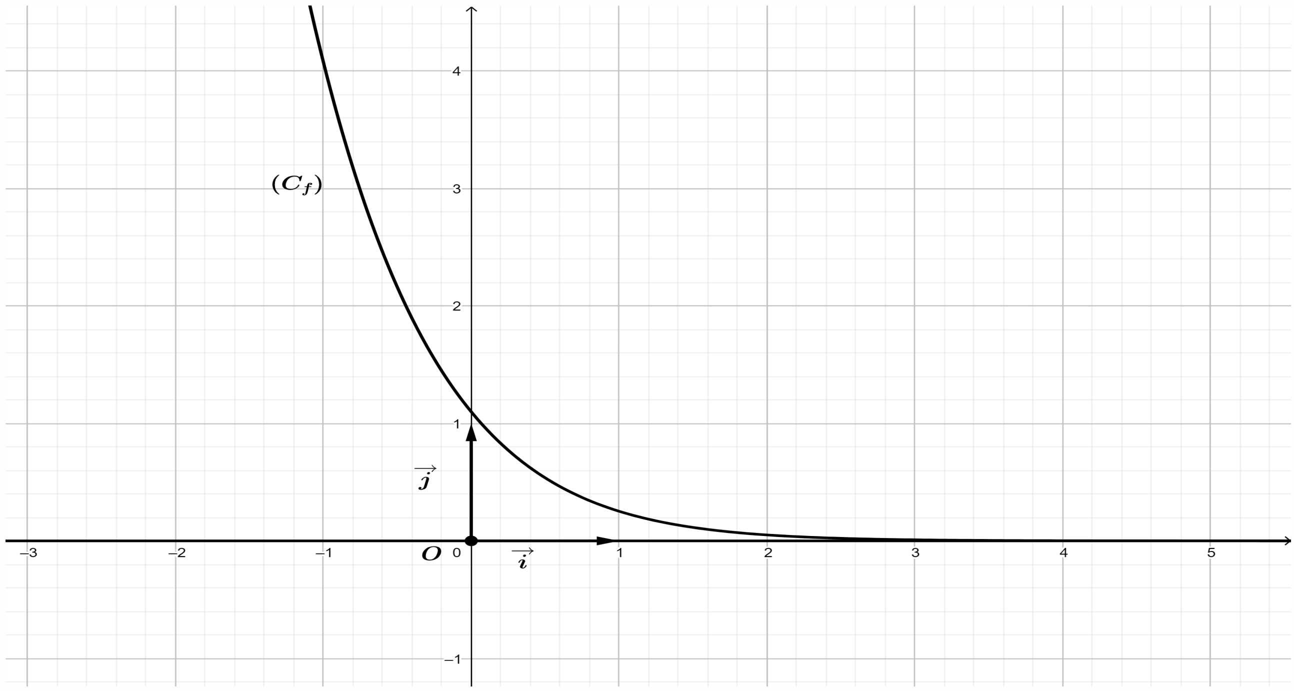
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\ln\left(2e^{x}+1\right)+\left(\frac{2e^{x}}{2e^{x}+1}\right)e^{-2x} \\ &= -2e^{-2x}\ln\left(2e^{x}+1\right)+\frac{2e^{x}\cdot e^{-2x}}{2e^{x}+1} \\ &= -2e^{-2x}\ln\left(2e^{x}+1\right)+\frac{2e^{-x}}{2e^{x}+1} \\ &= 2e^{-2x}\left(\frac{2e^{-x}}{2e^{x}+1}-\ln\left(2e^{x}+1\right)\right) \\ &= 2e^{-2x}g(x) \end{aligned}$$

4 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ: $2e^{-2x}>0$ ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

5 حساب $f(0)$ و $f(-1)$، ثم تمثيل (C_f)

$$f(0)=e^{-2(0)}\ln\left(2e^{0}+1\right)=\ln(3)$$
$$f(-1)=e^{-2(-1)}\ln\left(2e^{-1}+1\right)=e^{2}\ln\left(2e^{-1}+1\right)$$



.III

6 ✍ تبيين أنّ الدّالة h زوجية

بما أنّ $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة للصفر فإنّ x و $-x$ من $\mathbb{R}$

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

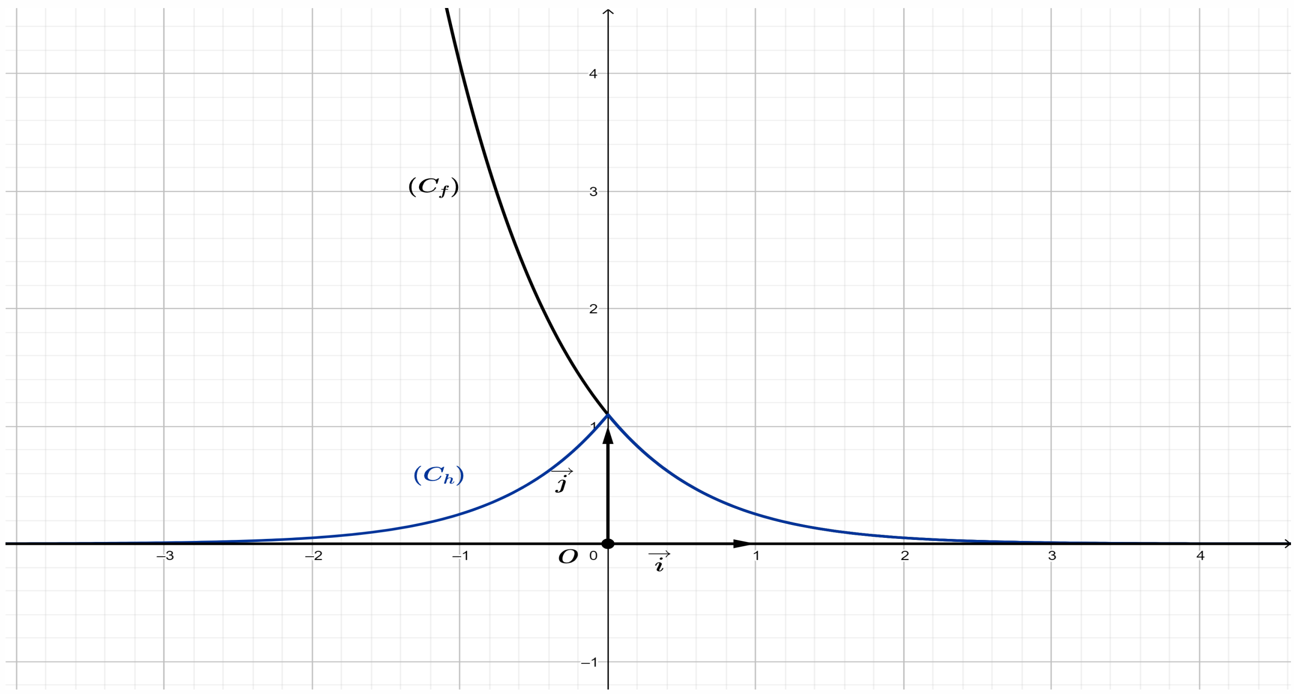
ومنه الدّالة h زوجية.

7 ✍ شرح كيف يتم إنشاء (C_h) وإنشاؤه لدينا:

$$h(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; x \geq 0 \\ f(-x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لمّا $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، ولمّا $x \leq 0$، بما أنّ الدّالة h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

<u>إنشاء (C_h)</u>



حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين السادس

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النهايات : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-2\ln(x) - xe + 1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2\ln(x) - xe + 1) = -\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$g'(x) = -\frac{2}{x} - 1 = -\left(\frac{2}{x} + 1\right)$$

.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g(x) < 0$ ومنه الدّالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

2 تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$

لدينا $g(0.5) = 1.027$ و $g(0.1) = 1 - e$.

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0.5;1[$ و $g(0.5) \times g(1) \prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0.5;1[$.

3 تعيين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

.II

1 حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ تفسير النتيجتين هندسيا

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{\ln(x) + xe}{x^2}\right) = -\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x) + xe}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{xe}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{x}\right) = 0$$

لأنّ : $\left\{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0\right\}$

- $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب.
- $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

2 أ- تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

الدّالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}+e\right)x^2-2x\left(\ln(x)+xe\right)}{\left(x^2\right)^2} \\
&= \frac{x\left(\left(\frac{1}{x}+e\right)x-2\left(\ln(x)+xe\right)\right)}{x^4} \\
&= \frac{1+xe-2\ln(x)-2xe}{x^3} \\
&= \frac{-2\ln(x)-xe+1}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

3 ب- تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4 تبيين أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2} &= \frac{\ln(\alpha)+\alpha e}{\alpha^2}-\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2} \\
&= \frac{2\ln(\alpha)+2\alpha e}{2\alpha^2}-\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2} \\
&= \frac{2\ln(\alpha)+2\alpha e-1-\alpha e}{2\alpha^2} \\
&= \frac{2\ln(\alpha)+\alpha e-1}{2\alpha^2} \\
&= \frac{-\left(-2\ln(\alpha)-\alpha e+1\right)}{2\alpha^2} \\
&= \frac{-g(\alpha)}{2\alpha^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

أي: $f(\alpha)-\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}=0$ ومنه: $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

5 حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ بما أنّ f قابلة للاشتقاق عند α فإنّ:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} &= f'(\alpha) \\
&= \frac{g(\alpha)}{\alpha^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

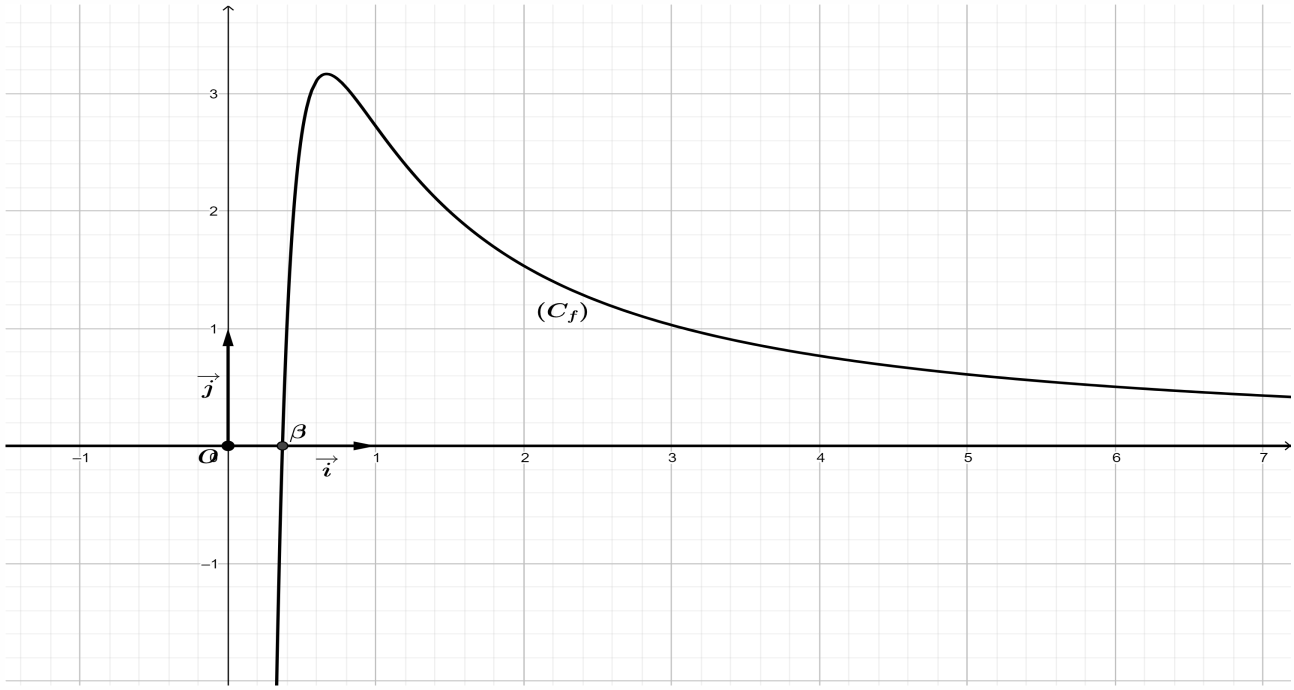
التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة α موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$.

6 تبيين أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.3<\beta<0.4$ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل معناه $f(x)=0$.
$f(0.3)=-4.31$ $f(0.4)=1.068$ من جدول التغيرات لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.3;4[$ و $g(0.3)\times g(0.4)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0.3;0.4[$.

7 ✍ حساب $f\left(2\right)$، ثم تمثيل $\left(C_f\right)$

$$f\left(2\right)=\frac{\ln\left(2\right)+2e}{4}$$



8 ✍ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=e^{-m}$

حلول المعادلة $f(x)=e^{-m}$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات ذات المعادلة $y=e^{-m}$.

- لمّا $e^{-m}<f\left(\alpha\right)$ أي $-m<\ln f\left(\alpha\right)$ معناه $m>-\ln f\left(\alpha\right)$ المعادلة تقبل حلين متمايزين.
- لمّا $e^{-m}=f\left(\alpha\right)$ أي $-m=\ln f\left(\alpha\right)$ معناه $m=-\ln f\left(\alpha\right)$ المعادلة تقبل حلّا هو $x=\alpha$.
- لمّا $e^{-m}>f\left(\alpha\right)$ أي $-m>\ln f\left(\alpha\right)$ معناه $m<-\ln f\left(\alpha\right)$ المعادلة لا تقبل حلولا.

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين السابع

I.

1 أ- تبيين أنّ: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ حساب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$$

$$\bullet \lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{(\ln x)^2}{x}=-\infty \quad / \lim_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty\ ;\ \lim_{x\overset{>}{\to}0}(\ln x)^2=+\infty$$

ب- تفسير النتيجتين هندسيا

- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$ موازٍ لحامل محور الفواصل.
- المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_f) موازٍ لحامل محور التراتيب.

2 دراسة إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها

المشتقة: الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$f'(x)=\frac{\left(2\left(\frac{1}{x}\right)\ln x\right)x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة بسطه لأنّ المقام موجب ونلخّص ذلك في الجدول التالي:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

- لمّا: $x\in]0;1]\cup[e^2;+\infty[$ الدّالة f متزايدة.
- لمّا: $x\in[1;e^2]$ الدّالة f متناقصة.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$f(e^2)$	↘	$+\infty$

حيث: $f(1)=0$ و $f(e^2)=\frac{4}{e^2}=4e^{-2}$.

3 أ- تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f''(x)=\dfrac{2\left((\ln x)^2-3\ln x+1\right)}{x}$ الدّالة f' معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(\left(\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)+\left(-\frac{1}{x}(\ln x)\right)\right)x^2-2x(\ln x)(2-\ln x)}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x(2-\ln x)-x\ln x-4x\ln x+2x(\ln x)^2}{x^4} \\ &= \frac{x\left(2-\ln x-\ln x-4\ln x+2(\ln x)^2\right)}{x^4} \\ &= \frac{2\left((\ln x)^2-3\ln x+1\right)}{x^3} \end{aligned}$$

ب- تبيين أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف مع تعيينهما إشارة $f''(x)$ من إشارة $2\left((\ln x)^2-3\ln x+1\right)$ لأنّ $x^3>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$. لدينا: $\Delta=b^2-4ac=5$ إذن: $\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\ \ln x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}x_1=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\\ x_2=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\end{cases}$ إشارة $f''(x)$ تكون كما يلي:

x	0		$e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

بماأنّ $f''(x)$ انعدمت عند $x_1=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ و $x_2=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ وغيّرت إشارتها في الحالتين فإنّ (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف هما: $A\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};f\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)$ ، $B\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};f\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)\right)$.

4 تبيين أنّ (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يمرّان بالمبدأ مع إعطاء معادلتيهما

(C_f) يقبل مماس يمر من المبدأ معناه: $-af'(a)+f(a)=0$.

$-af'(a)+f(a)=0$ يكافئ: $-a\left(\dfrac{(\ln a)(2-\ln a)}{a^2}\right)+\dfrac{(\ln a)^2}{a}=0$

يكافئ: $-\dfrac{2\ln a-(\ln a)^2}{a}+\dfrac{(\ln a)^2}{a}=0$

يكافئ: $\dfrac{2(\ln a)^2-2\ln a}{a}=0$

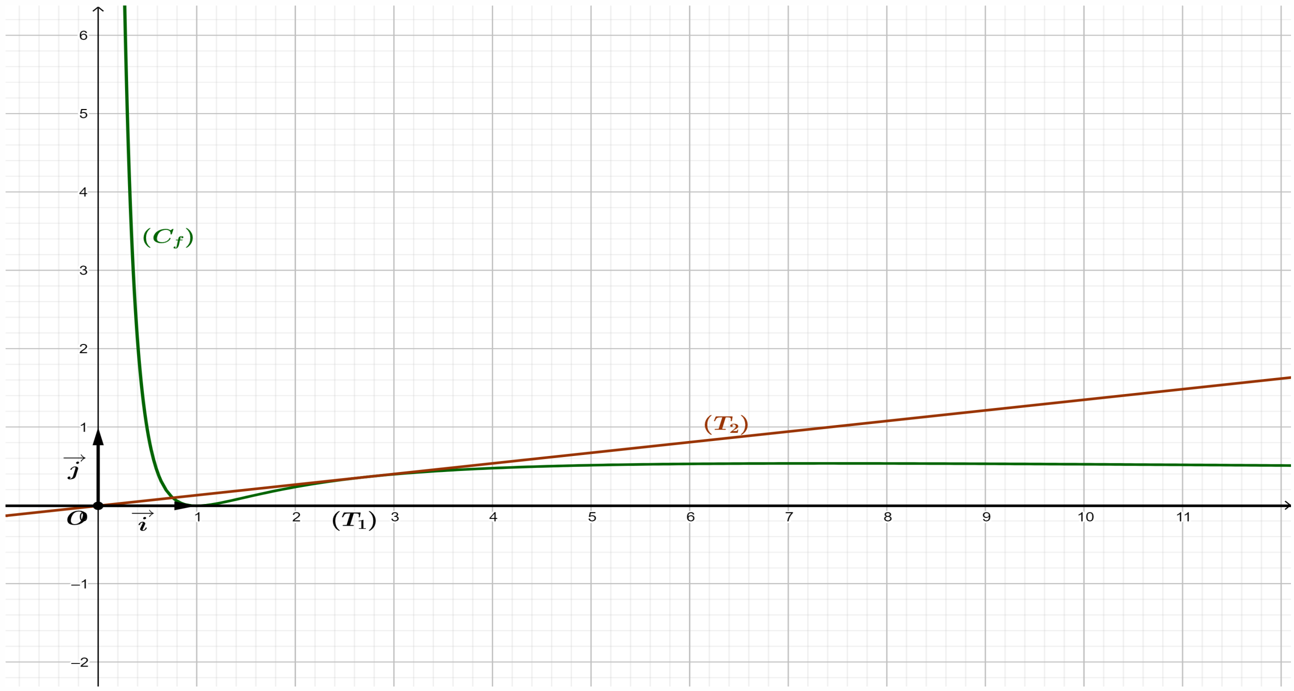
ومنه: $2\ln a(1-\ln a)=0$

وعليه: $\ln a=0$ أو $1-\ln a=0$ إذن $a=1$ أو $a=e^1$.

إذن يوجد مماسان (T_1) و (T_2) لـ (C_f) يمران من المبدأ معادلتيهما من الشكل:

$$y_{T_1}=f'(1)(x-1)+f(1)=0$$
$$y_{T_2}=f'(e)(x-e)+f(e)=\frac{1}{e^2}(x-e)+=e^{-2}x-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=e^{-2}x$$

5 تمثيل (T_1) و (T_2)، ثم (C_f)



.III

6 تبيين أنّ الدّالة h زوجية

بما أنّ $\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة للصفر فإنّ x و $-x$ من $\mathbb{R}^*$

$$h(-x) = -f(|-x|) = -f(|x|) = h(x)$$

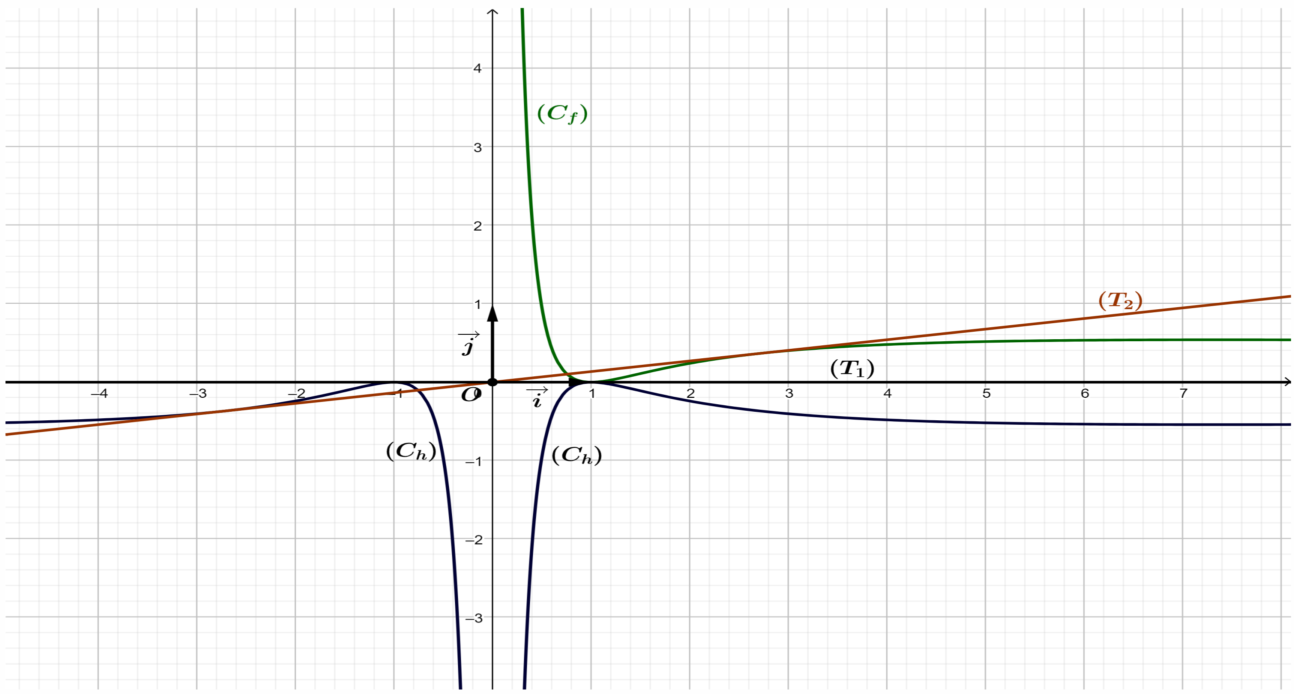
ومنه الدّالة h زوجية.

7 شرح كيف يتم إنشاء (C_h) وإنشاؤه لدينا:

$$h(x) = -f(|x|) = \begin{cases} -f(x) & ;x > 0 \\ -f(-x) & ;x < 0 \end{cases}$$

لمّا $x > 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل، ولمّا $x < 0$، بما أنّ الدّالة h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

<u>إنشاء (C_h)</u>



حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الثامن

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النهايات : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left((\ln x)^3 + 1\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((\ln x)^3 + 1\right) = +\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

إشارة $g'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

اتجاه تغير g الدّالة g متزايدة على المجال $]0; +\infty[$.

جدول التغيّرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

2 حل المعادلة $g(x) = 0$

$g(x) = 0$ يكافئ: $(\ln x)^3 + 1 = 0$ يكافئ: $(\ln x) = -1$ يكافئ: $\ln x = -1$ يكافئ: $x = e^{-1}$.

3 استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

.II

1 أ- حساب نهايات الدّالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left((\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$ / $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{\ln x} = 0$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left((\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$ / $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \ln x = 0^-$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-2}{\ln x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left((\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = -\infty$ / $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = 0^+$; $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-2}{\ln x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = +\infty$ / $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=2\dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة بـ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(\frac{1}{x}\right)\ln x-\left(-\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}\right)\\ &= \frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x(\ln x)^2}\\ &= \frac{2(\ln x)^3+2}{x(\ln x)^2}\\ &= 2\frac{(\ln x)^3+1}{x(\ln x)^2}\\ &= 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

3 استنتاج إشارة $f'(x)$، ثمّ تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ: $x(\ln x)^2>0$ ومنه:

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	

جدول التغيّرات

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

حيث: $f(e^{-1})=(\ln e^{-1})^2+1-\dfrac{2}{\ln e^{-1}}=1+1-\dfrac{2}{-1}=4$

4 دراسة تغيّرات الدّالة h

النهايات: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} h(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left((\ln x)^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\ln x)^2+1\right)=+\infty$.

المشتقة: الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $h'(x)=2\left(\dfrac{1}{x}\right)(\ln x)=\dfrac{(\ln x)}{x}$.

إشارة $h'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	

اتجاه تغير h الدّالة h متزايدة على المجال $]0;+1]$ ومتناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-h(x))$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-h(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\ln x}\right)=0$$

التفسير الهندسي

المنحنيان (C_f) و (C_h) متقاربان في جوار $+\infty$.

6 دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (C_h)

لدينا: $f(x)-h(x)=-\dfrac{2}{\ln x}$ ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)-h(x)$	||	$+$	||	$-$	

- لمّا $x\in]0;1[$: (C_f) فوق (C_h) .
- لمّا $x\in]1;+\infty[$: (C_f) تحت (C_h) .

7 تبيين أنّ (C_h) يقبل نقطة إنعطاف مع تعيين إحداثييها

الدّالة h' معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $x\in]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$h''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$h''(x)=0$ يكافئ: $2-2\ln x=0$ يكافئ: $x=e$ وعليه:

x	0		e		$+\infty$
$h''(x)$	||	$+$	0	$-$	

بما أنّ $h''(x)$ انعدمت عند $x=e$ وغيّرت إشارتها فإنّ: (C_h) يقبل نقطة إنعطاف هي: $A(e;h(e))$ أي: $A(e,2)$.

8 كتابة معادلة المماس (T)

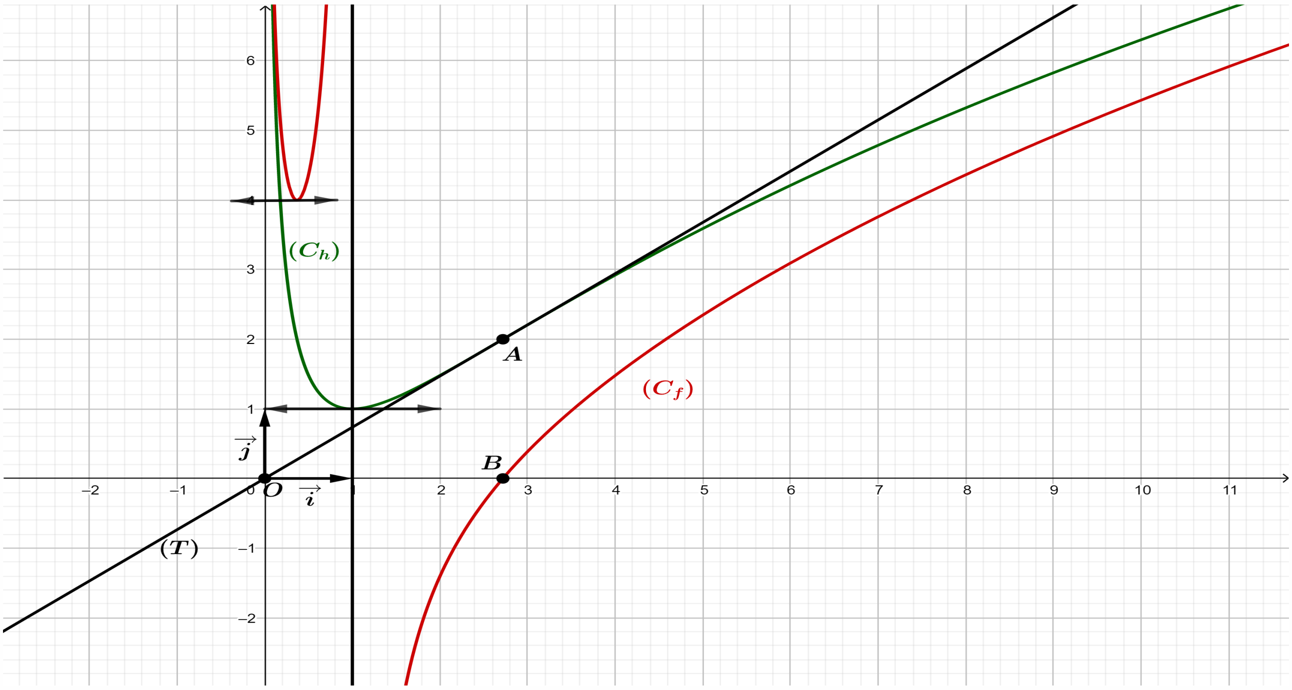
$$y_T=h'(e)(x-e)+h(e)$$
$$=\frac{2}{e}(x-e)+2$$
$$=2e^{-1}x$$

9 حساب $f(e)$، والاستنتاج

$$f(e)=1+1-2=0$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $B(e;0)$.

10 تمثيل (T)، (C_f) و (C_h)



11 المناقشة البيانية

لدينا من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-(\ln x)-2e^m=0$ يكافئ: $e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-2e^m=\ln x$

يكافئ: $e^m\left((\ln x)^3+\ln x-2\right)=\ln x$

يكافئ: $e^m\left((\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}\right)=1$

يكافئ: $(\ln x)^2+1-\dfrac{2}{\ln x}=\dfrac{1}{e^m}$

يكافئ: $f(x)=e^{-m}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=e^{-m}$، وعليه:

لمّا $e^{-m}<4$ أي: $-m<\ln 4$ أي: $m>-\ln 4$ المعادلة تقبل حلّا واحدا.

لمّا $e^{-m}=4$ أي: $-m=\ln 4$ أي: $m=-\ln 4$ المعادلة تقبل حلّان متمايزان.

لمّا $e^{-m}>4$ أي: $-m>\ln 4$ أي: $m<-\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول متمايزة مثنى مثنى.

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين التاسع

.I

1 دراسة تغيّرات الدّالة g

النهايات : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (x^2 - 2 + \ln x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2 + \ln x) = +\infty$.

المشتقة : الدّالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

نلاحظ أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $g(x) > 0$ ومنه الدّالة g متزايدة تماما .

جدول التغيّرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2 تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا α حيث : $0.32 \prec \alpha \prec 0.33$

من جدول التغيرات لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

التحّقق من أنّ: $1.31 < \alpha < 1.32$

لدينا: $]0;+\infty[\supset]1.31;1.31[$ (ما ينطبق على الكل ينطبق على الجزء) ولدينا:

$$\begin{cases} g(1.32) \simeq 0.02 \\ g(1.31) \simeq -0.13 \end{cases}$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ: $1.31 < \alpha < 1.32$.

3 استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4 برهان أنّ $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ وعليه: $\alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$ ومنه: $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$

.II

1 حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) &= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(x^2 + (2 - \ln x)^2\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأنّ:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} (2 - \ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + (2-\ln x)^2\right)$$
$$= +\infty$$

لأنّ

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2-\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

2 تبيين أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

الدّالّة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x) \\ &= 2x - \frac{2}{x}(2-\ln x) \\ &= \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} \\ &= \frac{2\left(x^2 - 2 + \ln x\right)}{x} \\ &= \frac{2}{x}\cdot g(x) \end{aligned}$$

بما أنّ $\frac{2}{x} > 0$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالّة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	

4 تبيين أنّ $f(\alpha) = \alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$

لدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2-\ln\alpha)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ومما سبق وجدنا:

$$\ln\alpha = 2 - \alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بتعويض (2) في (1) نجد:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 + \left(2 - \left(2-\alpha^2\right)\right)^2 \\ &= \alpha^2 + \left(2 - 2 + \alpha^2\right)^2 \\ &= \alpha^2 + \alpha^4 \\ &= \alpha^2\left(1+\alpha^2\right) \end{aligned}$$

5 استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

من جدول تغيّرات الدّالّة f لدينا:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$

.II

1 تبيين أنّ المسافة AM تعطى بـ: $AM=\sqrt{f(x)}$

لدينا M نقطة من (Γ) معناها إحداثياتها هما: $M(x;\ln x)$ ومنه المسافة تعطى بما يلي:

$$\begin{aligned}AM&=\sqrt{(x-0)^2+(\ln(x)-2)^2}\\&=\sqrt{x^2+(-(2-\ln x))^2}\\&=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}\\&=\sqrt{f(x)}\end{aligned}$$

2 أ- برهان أنّ للدّالتين f و k نفس إتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$

الدّالة k معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرّفة بـ:

$$k'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

بما أنّ $2\sqrt{f(x)}>0$ فإنّ إشارة $k'(x)$ من إشارة $f'(x)$ وعليه لـ f و k نفس اتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$.

ب- برهان أنّ المسافة AM أصغرية في نقطة P من (Γ)، يطلب تعين إحداثييها

بما أنّ لـ f و k نفس اتجاه التغيّر على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ لـ k قيمة حدية صغرى عند $x=\alpha$ وبالتالي المسافة أصغرية لمّا $x\alpha$ وعليه:

$$P(\alpha;\ln\alpha)$$

يكافئ:

$$P\left(\alpha;2-\alpha^2\right)$$

ج- برهان أنّ: $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$

$$\begin{aligned}AP&=\sqrt{(\alpha-0)^2+(2-\alpha^2-2)^2}\\&=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}\\&=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}\\&=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2}\\&=|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2}\\&=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\end{aligned}$$

3 هل المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (Γ) في النقطة P؟ برّر إجابتك

لنبدأ أوّلا بميل المستقيم المماس لـ (Γ) في النقطة P والذي يساوي:

$$h'(\alpha)=\ln'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AP) هو:

$$\begin{aligned}a&=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}\\&=\frac{2-\alpha^2-2}{\alpha-0}\\&=\frac{-\alpha^2}{\alpha}\\&=-\alpha\end{aligned}$$

نذكر أنّه: يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1.

لدينا:

$$-\alpha\times\frac{1}{\alpha}=-1$$

وبالتالي المستقيم (AP) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (Γ) في النقطة P.

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين العاشر

I

1 تبيين أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = -(2+\ln x)\ln x$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(\ln x)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)\,x \\ &= -\left((\ln x)^2 + 2\ln x\right) \\ &= -(2+\ln x)\ln x \end{aligned}$$

2 استنتاج إتجاه تغيّر الدّالة g على المجال: $]0;+\infty[$

لدينا: $g'(x)=0$ معناه: $-(\ln x+2)\ln x = 0$ معناه: $\begin{cases} \ln x = 0 \\ \text{أو} \\ \ln x + 2 = 0 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = e^{-2} \end{cases}$ وعليه تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$-(\ln x+2)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

– الدّالة g متناقصة على كل من: $]0;e^{-2}]$ و $[1;+\infty[$.
– الدّالة g متزايدة على المجال: $[e^{-2};1]$.

3 إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $2 \prec \alpha \prec 2.1$

الدّالة g مستمرة على المجال $]2;2.1[$ ولدينا: $g(2)\times g(2.1) \prec 0$ وبما أنّ الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]2;2.1[$ فإنّه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $2 \prec \alpha \prec 2.1$ ونكتب: $g(\alpha)=0$.

4 تعيين إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II

1 أ- إثبات أنّ: $\lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x) = -\infty$، وحساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ لدينا:

x	1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$+$	

و $\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (-1+\ln x) = -1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (\ln x) = 0^+ \end{cases}$ أي: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \dfrac{-1+\ln x}{\ln x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (-x+e) = -1+e$ إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty -1 + e = -\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x} - x + e \right) \\ &= 0 + 1 - \infty + e = -\infty\end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$، والتّحقّق أنّ: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كمايلي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) - \left(\frac{1}{x}\right)(-1+\ln x)}{(\ln x)^2} - 1 = \frac{\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}}{(\ln x)^2} - 1 \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} - 1 = \frac{1}{x(\ln x)^2} - 1 = \frac{1 - x(\ln x)^2}{x(\ln x)^2} \end{aligned}$$

ومنه من أجل كل x من المجال: $]1;+\infty[$ فإنّ: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(\ln x)^2}$.

ج- استنتاج إتجاه تغيّر الدّالة f، ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ: $x(\ln x)^2 \succ 0$. إذن إشارة $f'(x)$ تكون كالتالي:

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- الدّالة f متزايدة على المجال $]1;\alpha]$ ومتناقصة على المجال $[\alpha;+\infty[$. وجدول تغيّراتها يكون كمايلي:

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2 أ- إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقطع (xx') في نقطتين إحداهما فاصلتها e، والأخرى فاصلتها x_0 حيث: $1.6 \prec x_0 \prec 1.7$

المنحنى (C_f) يقطع (xx') معناه: $f(x) = 0$. لدينا:

$$f(e) = \frac{-1+\ln e}{\ln e} - e + e = \frac{-1+1}{1} = 0$$

ولدينا f مستمرة ومتزايدة على تماما على المجال $]1.6;1.7[$ و $f(1.6) \times f(1.7) \prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدًا x_0 حيث: $1.6 \prec x_0 \prec 1.7$.

ب- التّحقّق من أنّ: $f(x) = \dfrac{-1}{\ln x} - x + e + 1$، وإثبات أنّ لـ (C_f) مقاربًا مائلًا (Δ) مع إعطاء معادلته

$$f(x) = \frac{-1+\ln x}{\ln x} - x + e = \frac{-1}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x} - x + e = \frac{-1}{\ln x} + 1 - x + e = \frac{-1}{\ln x} - x + e + 1$$

ولدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-x+e+1)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{\ln x} \right) = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+e+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ج- دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

لدراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة: $f(x)-(-x+e+1)=\dfrac{-1}{\ln x}$.

من أجل كل $x \succ 1$ فإنّ: $\ln x \succ 0$ وبالتالي $\dfrac{-1}{\ln x} \prec 0$.

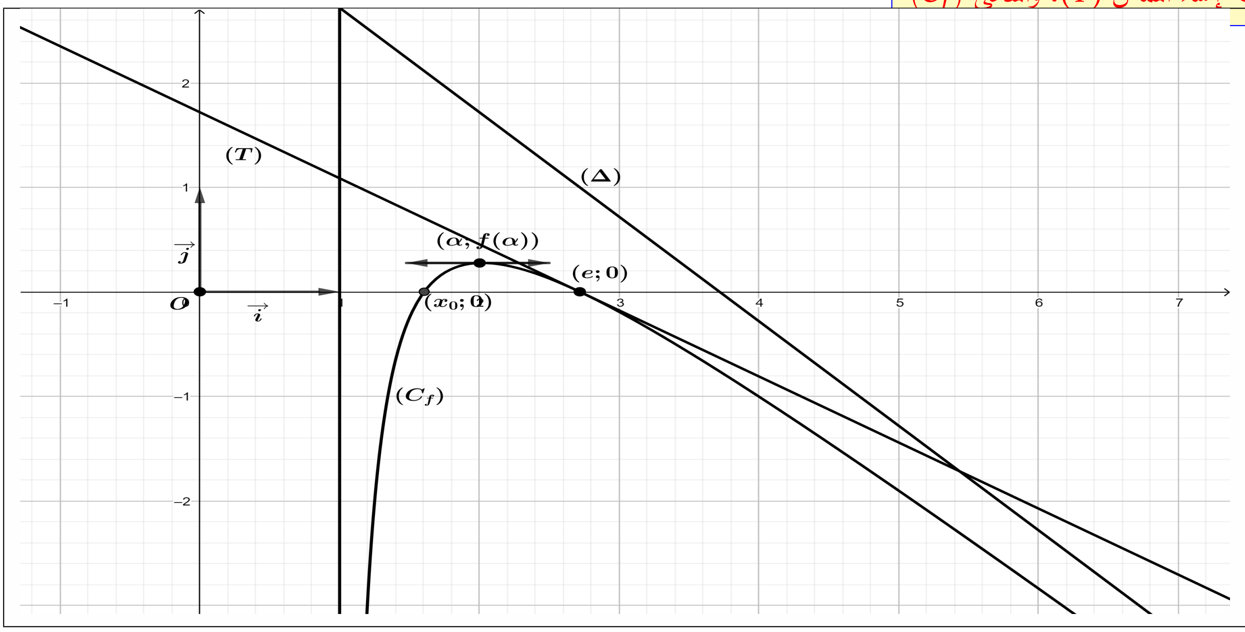
وعليه المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $]1;+\infty[$.

3 **أ- تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f)**

لدينا: $f'(e)=\dfrac{g(e)}{e(\ln e)^2}=\dfrac{1-e(\ln e)^2}{e(1)}=\dfrac{1-e}{e}$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} y &= f'(e)(x-e)+f(e) \\ &= \frac{1-e}{e}(x-e)+0=\frac{1-e}{e}x-\left(\frac{1-e}{e}\right)e=\frac{1-e}{e}x-1+e \end{aligned}$$

ب- إنشاء المماس (T)، والمنحنى (C_f)



ج- المناقشة البيانية

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=\dfrac{1-e}{e}x+m$ وعليه نلخص عدد حلول المعادلة في الجدول التالي:

m	$-\infty$	$-1+e$	$+\infty$
عدد الحلول	2	1	لا توجد حلول

حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية

حل التمرين الحادي عشر

الجـزء الأول

1 دراسة تغيّرات الدّالة g'

حساب المشتقة الأولى g'

الدّالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x) = e^x + xe^x - 1$.

حساب نهايات الدّالة g'

$\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + xe^x - 1) = -1$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + xe^x - 1) = +\infty$ لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

حساب المشتقة الثانية g''

الدالة g' معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(x+2)$.

جدول إشارة $g''(x)$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $x+2$ لأنّ $e^x \succ 0$ ومنه إشارة $g''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

إتجاه تغير الدّالة g'

- لمّا : $x \in]-\infty; -2]$ لدينا : $g''(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة g' متناقصة .
- لمّا : $x \in [-2; +\infty[$ لدينا : $g''(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة g' متزايدة .

جدول تغيّرات الدّالة g'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	-1	$\searrow$	$-1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 حساب $g'(0)$ ثمّ استنتاج إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $g'(0) = e^0 + (0)e^0 - 1 = 0$ ومنه من جدول التغيرات تكون إشارة $g'(x)$ كمايلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

3 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) - 1 \succeq 0$

حساب نهايات الدّالة g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - x + 1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$

جدول تغيّرات الدّالة g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول تغيّرات الدّالة g لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \succeq 1$ ومنه : $g(x) - 1 \succeq 0$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(xe^x - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x(e^x - 1) + 1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(xe^x - x + 1) = +\infty$$ لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

2 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

الدّالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{e^x + xe^x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3 تشكيل جدول تغيّرات الدّالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ لأنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة f يكون كالتالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4 حساب : $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \ln(-x))$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty} (\ln(xe^x - x + 1) - \ln(-x)) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{xe^x - x + 1}{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(-e^x + 1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

لأنّ : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

التفسيـــر الهندسي

المنحنى (C_f) ومنحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ متقاربان في جوار $(-\infty)$.

5 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ والاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(xe^x - x + 1) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(xe^x\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right) - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(xe^x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + \ln(e^x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right) - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + x + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)\right) = +\infty$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

6 تبيين أنّ المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث : $0 \prec \alpha \prec 1$

الدّالة u معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $u'(x) = e^x + 1$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u'(x) \succ 0$.

وكذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + x - 2) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + x - 2) = +\infty$

جدول تغيّرات الدّالة u

x	$-\infty$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

لدينا : $u(0) = -2$ و $u(1) = e - 1$

الدّالة u مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$ و $u(0) \times u(1) \prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $u(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0 \prec \alpha \prec 1$.

تعيين حصرا لـ α سعته 10^{-1}

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u(x)$	-2	-0.79	-0.57	-0.35	-0.10	0.14

إذن : $0.4 \prec \alpha \prec 0.5$.

استنتاج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$u(x)$	$-$ 0 $+$

7 تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (δ) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثيها

(δ) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الفاصلة x_0 معناه : $f'(x_0) = 1$ أي : $\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)} = 1$ يكافئ : $\dfrac{e^{x_0} + x_0e^{x_0} - 1}{x_0e^{x_0} - x_0 + 1} - 1 = 0$ يكافئ :

$\dfrac{e^{x_0} + x_0e^{x_0} - 1 - x_0e^{x_0} + x_0 - 1}{x_0e^{x_0} - x_0 + 1} = 0$ يكافئ : $\dfrac{u(x_0)}{g(x_0)} = 0$ وبما أنّ : $g(x_0) \succ 0$ فإنّ : $u(x_0) = 0$ ومنه : $x_0 = \alpha$.

إذن (δ) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$.

إيجاد حصراً للعدد $f(\alpha) - \alpha$

لدينا : $u(\alpha) = 0$ يكافئ : $e^\alpha + \alpha - 2 = 0$ ومنه : $e^\alpha = 2 - \alpha$

ولدينا : $f(\alpha) = \ln(\alpha e^\alpha - \alpha + 1) = \ln(\alpha(2-\alpha) - \alpha + 1)$ ومنه : $f(\alpha) = \ln(-\alpha^2 + \alpha + 1)$

لدينا : $0.4 \prec \alpha \prec 0.5 \cdots (1)$ ، بتربيع الطرفين نجد : $(0.4)^2 \prec \alpha^2 \prec (0.5)^2 \cdots (2)$.

بضرب كل من المتراجحتين (1) و (2) في العدد -1 نجد : $-0.5 \prec -\alpha \prec -0.4 \cdots (3)$ و $-(0.5)^2 \prec -\alpha^2 \prec -(0.4)^2 \cdots (4)$.

بجمع (1) مع (4) طرف بطرف نجد : $-(0.5)^2 + 0.4 \prec -\alpha^2 + \alpha \prec -(0.4)^2 + 0.5 \cdots (5)$.

بإضافة العدد 1 للمتراجحة (5) نجد $-(0.5)^2 + 0.4 + 1 \prec -\alpha^2 + \alpha + 1 \prec -(0.4)^2 + 0.5 + 1$.

بما أنّ الدّالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $\ln\left(-(0.5)^2 + 0.4 + 1\right) \prec \ln\left(-\alpha^2 + \alpha + 1\right) \prec \ln\left(-(0.4)^2 + 0.5 + 1\right) \cdots (6)$

بجمع (6) مع (3) طرف بطرف نجد : $\ln\left(-(0.5)^2 + 0.4 + 1\right) - 0.5 \prec \ln\left(-\alpha^2 + \alpha + 1\right) - \alpha \prec \ln\left(-(0.4)^2 + 0.5 + 1\right) - 0.4$

ومنه : $-0.36 \prec f(\alpha) - \alpha \prec -0.11$

كتابة معادلة المماس (δ)

$$y_\delta = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha) = 1(x-\alpha) + f(\alpha) = x + f(\alpha) - \alpha$$

حساب $f(1)$ و $f(-2)$

- $f(1) = \ln\left(1e^1 - 1 + 1\right) = 1$
- $f(-2) = \ln\left(-2e^{-2} + 2 + 1\right) \simeq 1$

8 دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

لدينا : $f(x) - x = \ln\left(xe^x - x + 1\right) - x$.

نضع : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $s(x) = \ln\left(xe^x - x + 1\right) - x$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} s(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = +\infty$ و $s(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$.

الدّالة s معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$s'(x) = f'(x) - 1 = \frac{g'(x)}{g(x)} - 1 = \frac{g'(x) - g(x)}{g(x)} = \frac{e^x + xe^x - 1 - xe^x + x - 1}{xe^x - x + 1} = \frac{e^x + x - 2}{xe^x - x + 1} = \frac{u(x)}{g(x)}$$

إشارة $s'(x)$ من إشارة $u(x)$ لأنّ : $g(x) \succ 0$ ومنه جدول تغيّرات الدّالة s يكون كالتالي :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$s'(x)$		$-$	0	$+$	
$s(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$s(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا ممّا سبق : $f(1) = 1$ يكافي : $f(1) - 1 = 0$ يكافئ : $s(1) = 0$ وكذلك : $g(0) = 1$ يكافئ : $\ln g(0) = \ln 1$ يكافئ : $f(0) - 0 = 0$

ومنه : $s(0) = 0$.

وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) تلخّص في الدول التالي :

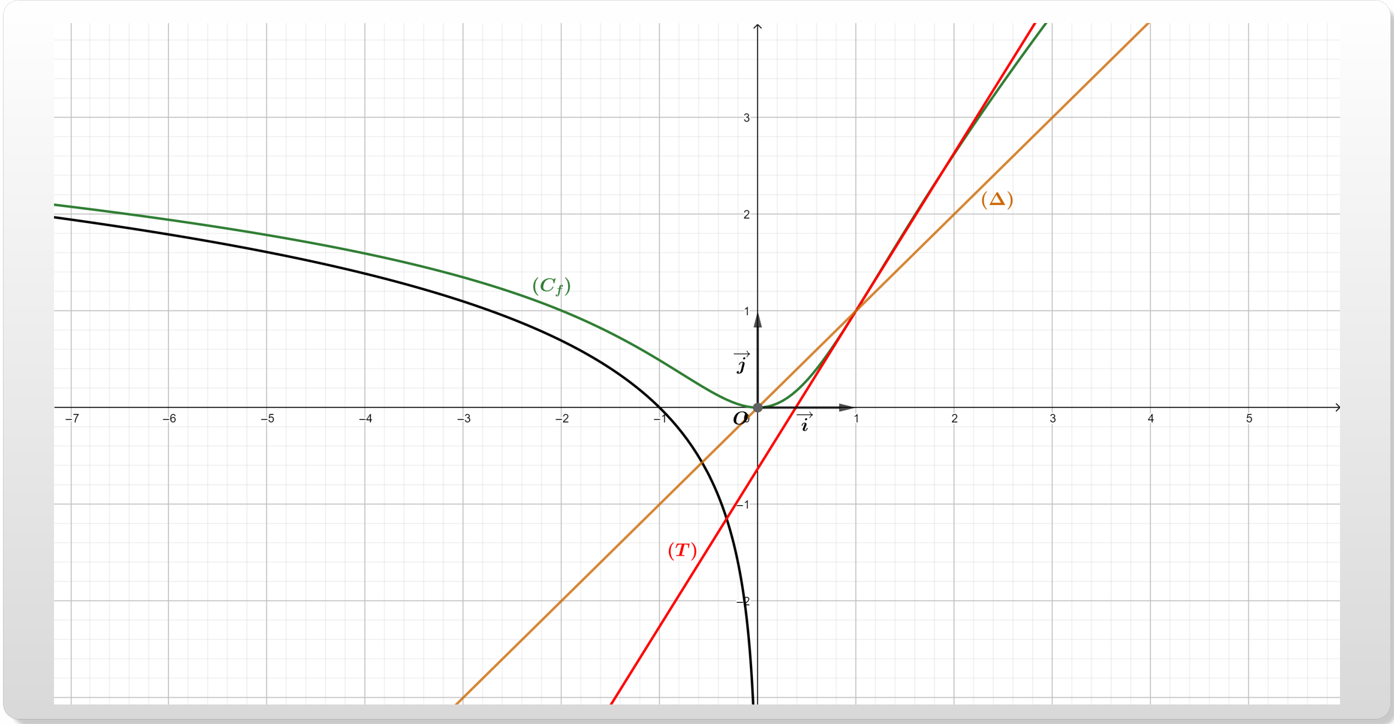
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$s(x) = f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(0;0)\}$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(1;1)\}$

9 ✍ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y_T = f'(1)(x-1)+f(1) = \left(2-e^{-1}\right)x+\left(e^{-1}-1\right)$$

10 ✍ إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x\mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_f)

11 ✍ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي a عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=(2-e^{-1})x+a$

حلول المعادلة $f(x)=(2-e^{-1})x+a$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $(2-e^{-1})x+a$. ومنه :

- لمّا $a \prec e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلاّ واحدا .
- لمّا $a = e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلاّ مضاعفا هو : $x=1$.
- لمّا $a \succ e^{-1}-1$ المعادلة تقبل حلاّ واحدا .

12 ✍ المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي l عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=x+l$

حلول المعادلة $f(x)=x+l$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $x+l$. ومنه :

- لمّا $l \prec f(\alpha)-\alpha$ المعادلة لاتقبل حلول .
- لمّا $l = f(\alpha)-\alpha$ المعادلة تقبل حلاّ مضاعفا هو : $x=\alpha$.
- لمّا $f(\alpha)-\alpha \prec l \prec 0$ المعادلة تقبل حلين موجبين تماما .
- لمّا $l=0$ المعادلة تقبل حلّين هما : $x=0$ و $x=1$.
- لمّا $l \succ 0$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

13 ✍ البرهان أنّ جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعين إحداثييها

نفرض أنّ المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A(x_1;y_1)$ معناه : $y_1=(2e^n-e^{n-1})x_1-(e^n-e^{n-1})$ يكافئ :
$y_1=(e^n(2-e^{-1}))x_1-(e^n(1-e^{-1}))$ يكافئ : $e^n\left[(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})\right]-y_1=0$ ، المتغيّر في هذه المعادلة الأخيرة هو e^n .

نعلم أنّه ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي : $\begin{cases}(2-e^{-1})x_1-(1-e^{-1})=0\\ -y_1=0\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x_1=\dfrac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}}\\ y_1=0\end{cases}$

ومنه جميع المستقيمات (T_n) تشمل نقطة ثابتة $A\left(\dfrac{1-e^{-1}}{2-e^{-1}};0\right)$.

المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي n عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x)=\left(2e^{n}-e^{n-1}\right)x-\left(e^{n}-e^{n-1}\right)$

أوّلا وقبل البدأ في هذه المناقشة يجب إيجاد قيمة n حتى يكون المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) .

المستقيم (T_n) يوازي المستقيم (Δ) معناه : $e^{n}\left(2-e^{-1}\right)=1$ ومنه قيمة n حتى يتوازى المستقيمان (T_n) و (Δ) هي : $n=\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right)$ إذن :

- لمّا $0\prec e^{n}\preceq\dfrac{1}{2-e^{-1}}$ أي $n\in\left]-\infty;\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right)\right]$ المعادلة لا تقبل حلولا .
- لمّا $\dfrac{1}{2-e^{-1}}\prec e^{n}\prec 1$ أي $n\in\left]\ln\left(\dfrac{1}{2-e^{-1}}\right);0\right[$ المعادلة تقبل حلّا واحدا موجبا .
- لمّا $e^{n}=1$ أي $n=0$ المعادلة تقبل حلّا مضاعفا هو $x=1$.
- لمّا $e^{n}\succ 1$ المعادلة تقبل حلّا واحدا موجبا .

الجزء الثالث

1 تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x)=-f(x)+1$

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{xe^{x-1}-xe^{-1}+e^{-1}}\right)=\ln\left(\frac{1}{e^{-1}\left(xe^{x}-x+1\right)}\right)=\ln\left(\frac{e}{xe^{x}-x+1}\right)=\ln(e)-\ln\left(xe^{x}-x+1\right)=-f(x)+1$$

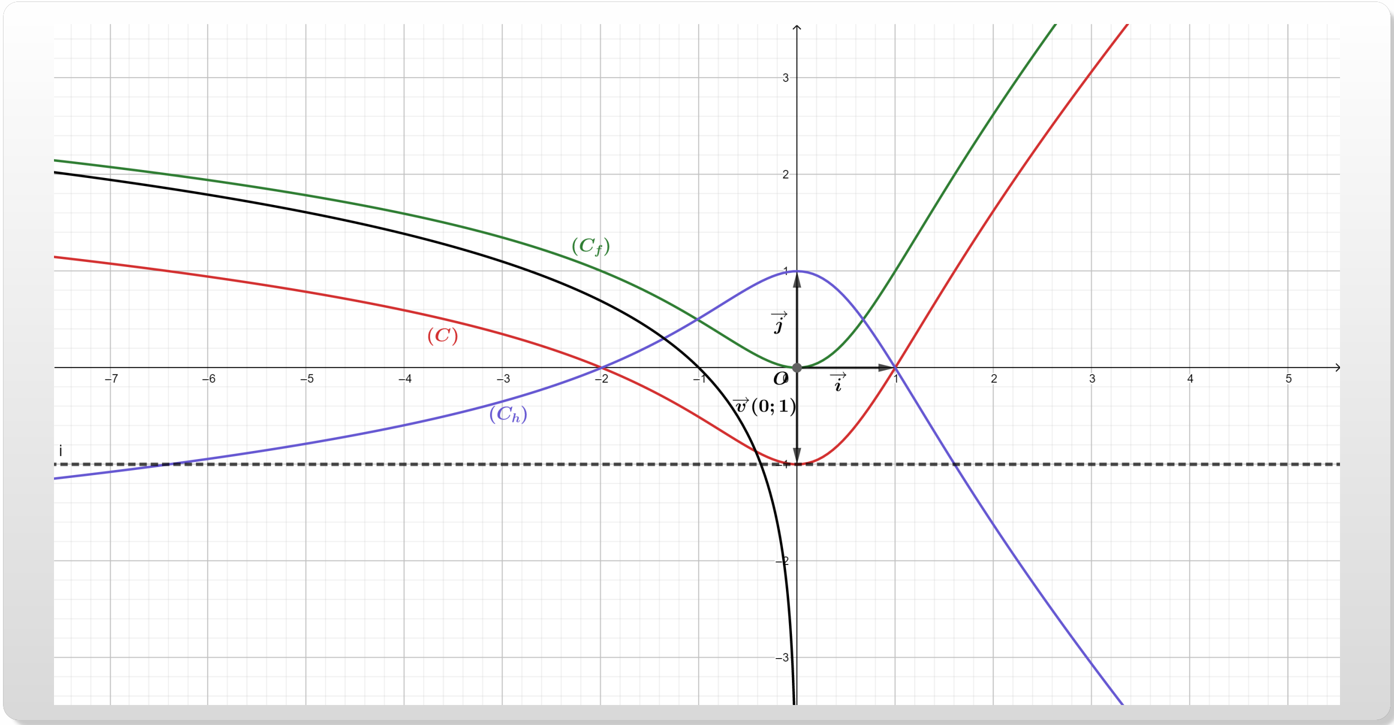
2 تبيين أنّ المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بتركيب تحويلين نقطيين بسيطين يطلب تعيينهما

لدينا : $h(x)=-f(x)+1=-\left(f(x)-1\right)$ ومنه :

- منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ هو صورة المنحنى (C_f) بانسحاب شعاعه $\overrightarrow{v}\,(0;-1)$.
- ومنحني الدّالة $x\mapsto-\left(f(x)-1\right)$ هو نظير منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ بالنسبة لمحور التراتيب .

إنشاء المنحنى (C_h)

نسمّي (C) منحنى الدّالة $x\mapsto f(x)-1$ في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.



إنشاء المنحنى (C_h)

3 المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E)

من أجل $m\in\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا : $x\left(e^{x}-1\right)-m=0$ يكافئ : $xe^{x}-x=m$ يكافئ : $xe^{x}-x+1=m+1$ يكافئ : $\ln\left(xe^{x}-x+1\right)=\ln|m+1|$ يكافئ : $-\ln\left(xe^{x}-x+1\right)=-\ln|m+1|$ يكافئ : $-f(x)+1=\ln\left(\dfrac{1}{|m+1|}\right)+1$

يكافئ : $h(x)=\ln\left(\dfrac{e}{|m+1|}\right)$.

حلول المعادلة (E) بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_h) مع المستقيم ذو المعادلة : $y=\ln\left(\dfrac{e}{|m+1|}\right)$.

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec 0$ أي : $\frac{e}{|m+1|} \prec e^{0}$ يكافئ : $\frac{|m+1|}{e} \succ 1$ يكافئ : $|m+1| \succ e$ يكافي : $m+1 \succ e$ أو $m+1 \prec -e$
يكافئ : $m \succ e-1$ أو $m \prec -e-1$ أي : $m \in]-\infty;-e-1[\cup]e-1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 0$ أي : $\frac{e}{|m+1|} = e^{0}$ يكافي : $|m+1| = e$ يكافئ : $m = e-1$ أو $m = -e-1$ المعادلة (E) تقبل حلّين هما $x=1$ و $x=-2$.

- لمّا $0 \prec \ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \prec 1$ يكافئ : $1 \prec \frac{e}{|m+1|} \prec e$ يكافئ : $1 \prec |m+1| \prec e$ يكافئ : $(m+1) \in]-e;-1[\cup]1;e[$ أي : $m \in]-e-1;-2[\cup]0;e-1[$ المعادلة (E) تقبل حلّين مختلفين في الإشارة .

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) = 1$ يكافي : $\frac{e}{|m+1|} = e$ يكافئ : $|m+1| = 1$ أي : $m = 0$ أو $m = -2$ المعادلة (E) تقبل حلّا مضاعفا هو $x = 0$.

- لمّا $\ln\left(\frac{e}{|m+1|}\right) \succ 1$ يكافي : $\frac{e}{|m+1|} \succ e$ يكافئ : $|m+1| \prec 1$ يكافئ : $-1 \prec m+1 \prec 1$ يكافئ : $-2 \prec m \prec 0$ أي : $m \in]-2;0[-\{-1\}$ المعادلة (E) لا تقبل حلولا .

الجزء الرابع

1 ادرس تغيّرات الدّالة k

النّهايات

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$.

المشتقة

الدّالة k معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$k'(x) = 2h'(2x-2) = 2\left(-f'(2x-2)\right) = -2f'(2x-2)$$

إشارة المشتقة

- لمّا : $(2x-2) \in]-\infty;0]$ أي : $x \in]-\infty;1]$ يكون : $k'(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة k متزايدة .
- لمّا : $(2x-2) \in [0;+\infty[$ أي : $x \in [1;+\infty[$ يكون : $k'(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة k متناقصة .

جدول التغيّرات

لدينا : $k(1) = h(2(1)-2) + f(\alpha) = h(0) + f(\alpha) = 1 - f(0) + f(\alpha) = f(\alpha)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2 تحقّق من أنّ $k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = 1$ ثم بيّن أنّ : $k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)$

$$\bullet k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) + f(\alpha) = h\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right) + f(\alpha) = h(\alpha+2-2) + f(\alpha) = h(\alpha) = 1 - f(\alpha) + f(\alpha) = 1$$

$$\bullet k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'\left(2\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-2\right) = -2f'(\alpha+2-2) = -2f'(\alpha)$$

3 استنتاج معادلة المماس (D) لمنحنى الدّالة k عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{2}$

$$y_D = k'\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(x-\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + k\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) = -2f'(\alpha)\left(x-\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\right) + 1 = f'(\alpha)(\alpha+2-2x) + 1$$

4 التّحقّق من أنّ : $y=-2x+\alpha+3$ معادلة للمستقيم (D)

$$y=f'(\alpha)(\alpha+2-2x)+1=\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}(\alpha+2-2x)+1=\frac{e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1$$
$$=\frac{2-\alpha+\alpha(2-\alpha)-1}{\alpha(2-\alpha)-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=\frac{-\alpha^2+\alpha-1}{-\alpha^2-\alpha-1}(\alpha+2-2x)+1=-2x+\alpha+3$$

5 حساب $k(-1)$

$$k(-1)=h(2(-1)-2)+f(\alpha)=h(-4)+f(\alpha)=1-f(-4)+f(\alpha)$$

الجـزء الخامس

1 حساب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة p

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(xe^x-x+1)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(x(e^x-1)+1)}{x(e^x-1)}\cdot(e^x-1)=0$
- $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(|x|)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\ln(-xe^{-x}+x+1)}{x}=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{\ln(x(-e^{-x}+1)+1)}{x(-e^{-x}+1)}\cdot(-e^{-x}+1)=0$

لأنّ : $\lim\limits_{x\to0}x(e^x-1)=\lim\limits_{x\to0}x(-e^{-x}+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

بما أنّ : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{p(x)}{x}=0$ نستنتج أنّ الدّالة p قابلة للاشتقاق في الصفر .

تفسير النتيجة هندسيا

نفسّر النّتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل مماسا موازٍ لحامل محور الفواصل معادلته هي : $y=f(0)=0$.

حساب $p(x)-p(-x)$ ، والاستنتاج بالنسبة للدّالة p

من أجل كل x و $-x$ ينتميان إلى $\mathbb{R}$ لدينا : $p(x)-p(-x)=f(|x|)-f(|-x|)=f(|x|)-f(|x|)=0$

نستنتج أنّ الدّالة p زوجية .

تفسير النتيجة هندسيا

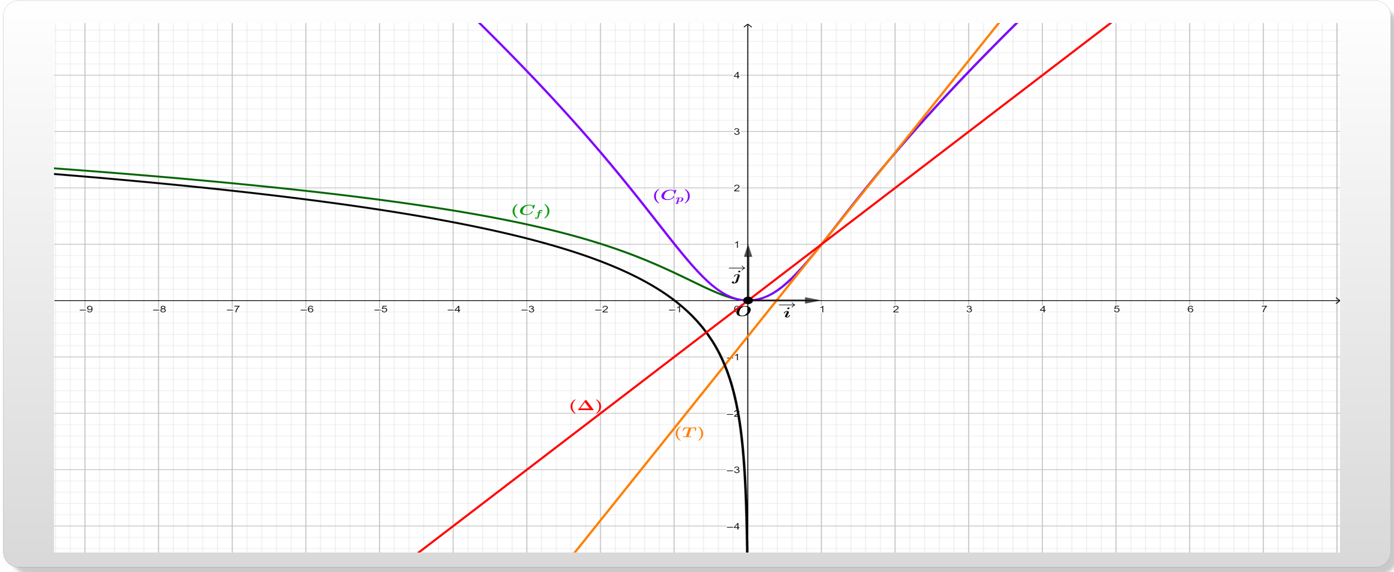
نفسّر النّتيجة السابقة هندسيا بأنّ المنحنى (C_p) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) محور تناظر .

2 كتابة $p(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$p(x)=f(|x|)=\begin{cases}f(x);x\succeq0\\ f(-x);x\preceq0\end{cases}$$

3 باستعمال المنحنى (C_f) ، إنشاء المنحنى (C_p) مبيّنا طريقة الإنشاء

لمّا $x\succeq0$: (C_p) ينطبق على (C_f) . لمّا $x\preceq0$: (C_p) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .



إنشاء : المستقيمين (Δ) و (T) ، منحنى الدّالة $x \mapsto \ln(-x)$ والمنحنى (C_p)

الجزء السادس

1 ✍ حساب $\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} q(x)$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} q(x)$ ثمّ تفسير النتيجتين هندسيا

تذكّر أنّ : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

لدينا : $\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ لأنّ : $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$ ومنه : $\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$

لدينا : $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} k(x) = -\infty$ لأنّ : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ و $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^-$ ومنه : $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} q(x) = -\infty$.

التفسير الهندسي

$x = -\frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_q) .

$x = \frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_q) .

2 ✍ دراسة بطريقتين مختلفتين اتجاه تغيّر الدّالة q

الطريــقة 1 هنا نستعمل فقط مشتقة الدّالة k وإشارتها .

الدّالة q معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة هي : $q'(x) = \tan' x \cdot k'(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot k'(\tan x)$

لدينا : $k'(\tan x) = 0$ أي : $\tan x = 1$ يكافئ : $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$ يكافئ : $\sin x = \cos x$ يكافئ : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$ وبما أنّ مجال الدّراسة هو $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $x = \frac{\pi}{4}$

- لمّا $\tan x \in]-\infty;1]$ أي : $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ لدينا : $k'(\tan x) \succeq 0$ معناه : $q'(x) \succeq 0$ ومنه الدّالة q متزايدة .
- لمّا $\tan x \in [1;+\infty[$ أي : $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا : $k'(\tan x) \preceq 0$ معناه : $q'(x) \preceq 0$ ومنه الدّالة q متناقصة .

الطريــقة 2 هنا نستعمل إتجاه تغيّر دالة مركبة .

لدينا : $q = k \circ v$ حيث v دالة معرّفة كالآتي : $v : x \mapsto \tan x$.

- الدّالة k متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و $\tan x \preceq 1$ لمّا $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ (لأنّ $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدّالة q متزايدة على المجال $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$.
- الدّالة k متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ و $\tan x \succeq 1$ لمّا $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ والدّالة $\tan$ متزايدة على المجال $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ (لأنّ $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$) ومنه الدّالة q متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$.

✍ جدول التغيّرات

لدينا : $q\left(\frac{\pi}{4}\right) = k\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = k(1) = f(\alpha)$ ومنه :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$q'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
$q(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$

3 حل في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $\tan x=-1$

لدينا : $\tan x=-1$ يكافئ : $-\sin x=\cos x$ يكافئ : $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos(\pi+x)$ يكافئ : $\frac{\pi}{2}-x=\pi+x+2k\pi$ حيث : $k\in\mathbb{Z}$ أي : $x=-\frac{\pi}{4}-k\pi$ ومنه حل المعادلة $\tan x=-1$ في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ هو $x=-\frac{\pi}{4}$.

4 كتابة معادلة المماس (L)

نفرض أنّ (L) مماس لـ (C_q) في النقطة $(x_2;1-f(-4)+f(\alpha))$ وكذلك : $\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

$q(x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ يكافئ : $k(\tan x_2)=1-f(-4)+f(\alpha)$ يكافئ : $\tan x_2=-1$ إذن : $x_2=-\frac{\pi}{4}$ ومنه :

$$y_L=q'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+q\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1-f(-4)+f(\alpha)=2x+\frac{\pi}{4}+1-f(-4)+f(\alpha)$$

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريا

قال العلامة عبد الرحمن ناصر السعدي رحمه الله تعالى :

اِنْهَضْ إِلَى الْعِلْمِ فِي جِدٍّ بِلا كَسَلٍ *** نُهُوضَ عَبْدٍ إِلَى الْخَيْراتِ يَبْتَدِرُ

وَاصْبِرْ عَلَى نَيْلِهِ صَبْرَ الْمُجِدِّ لَهُ *** فَلَيْسَ يُدْرِكُهُ مَنْ لَيْسَ يَصْطَبِرُ

يَكْفِيكَ بِالْعِلْمِ فَضْلاً أَنَّ صَاحِبَهُ *** بِالْعِزِّ نَالَ الْعُلاَ وَالْخَيْرَ يَنْتَظِرُ

وَآهًا لَهُ رَجُلًا فَرْدًا مَحَاسِنُهُ *** بِالْحَزْمِ وَالْعَزْمِ هَانَ الصَّعْبُ وَالْعَسِرُ