الاشتقاقية و تطبيقاتها

الإشتقاقية وتطبيقات الإشتقاقية

شعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

الإشتقاقية

دالة قابلة للإشتقاق عند عدد:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$، a عدد من D_f. القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد a معناه:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$$

يسمى $f'(a)$ العدد المشتق للدالة f في العدد a.

ملاحظة:

يمكن تعريف العدد المشتق للدالة f عند a بالعلاقة:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$$

معادلة مماس لمنحنى عند نقطة:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ ، a عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند a و $f'(a)$ العدد المشتق عند العدد a . ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$. مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(a)$ معادلته هي :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

التقريب التآلفي لدالة عند قيمة :

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ ، a عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند a و $f'(a)$ العدد المشتق عند العدد a التقريب التآلفي للدالة عند يعطى

بالعلاقة: $\boxed{f(a+h)\approx f'(a)h+f(a)}$

أو بالعلاقة: $\boxed{f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)}$

مشتقات بعض الدوال المألوفة :

مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة	الدالة
$\mathbb{R}$	0	a
$\mathbb{R}$	a	$ax+b$
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	x^n
$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

عمليات على الدوال المشتقة :

مجالات ق الإشتقاق	الدالة المشتقة	الدالة
\	$f'(x)+g'(x)$	$(f+g)(x)$
\	$f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$	$(f\times g)(x)$
\	$\lambda\times f'(x)$	$(\lambda\times g)(x)$
$g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
$f(x)\neq 0$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$	$\left(\frac{1}{f}\right)(x)$

مشتقات بعض الدوال المركبة المألوفة :

مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة	الدالة
\	$n.f'.f^{n-1}$	f^n
$f(x)\neq 0$	$\frac{-n.f'}{f^{n+1}}$	$\frac{1}{f^n}$
$f(x)>0$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$\mathbb{R}$	$-a.\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a.\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

تطبيقات الإشتقاقية :

إتجاه تغير دالة :

مبرهنة :

لتكن f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

1. إذا كانت $\boxed{f'(x)>0}$ موجبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على D_f.
2. إذا كانت $\boxed{f'(x)<0}$ موجبة تماما (يمكن أن

تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f.

3 إذا كانت $\boxed{f'(x)=0}$ معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f.

ملاحظة :

إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما و إما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f .

القيم الحدية المحلية :

مبرهنة :

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة a من D_f مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f يشمل a تقبل فيه f قيمة حدية $f(a)$، تسمى $f(a)$ قيمة حدية محلية .

حصر دالة :

نتائج :

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a;b]$.

1 إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$$\boxed{f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)}$$

2 إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$$\boxed{f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)}$$

نقطة الإنعطاف :

تعريف :

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من يشمل a وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f و (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a . نقول أنّ النقطة $A(a;f(a))$ هي : **نقطة إنعطاف للمنحنى** (C_f) إذا كان **المماس** (T) **يخترق المنحنى** (C_f).

مبرهنة:

f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على المجال I من يشمل a

- **إذا إنعدمت المشتقة الثانية** f'' **عند** a **مغيرة إشارتها** فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة إنعطاف هي: $A(a;f(a))$.

مبرهنة:

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من يشمل a

- **إذا إنعدمت المشتقة الأولى** f' **عند** a **ولم تغيّر إشارتها** فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة إنعطاف هي: $A(a;f(a))$.

مبرهنة القيم المتوسطة : (غير مكتملة)

مبرهنة:

لإثبات أن المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ تقبل حلا وحيدا α على مجال $[a;b]$.

1 نبين أن الدالة f رتيبة على المجال $[a;b]$.

2 نبين أن: $f(a)\times f(b)<0$

التمرين الأول :

أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة:

1) $f(x)=3x+1$، $x_0=0$
2) $f(x)=x^2-2$،$x_0=2$
3) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$،$x_0=-1$
4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$، $x_0=2$
5) $f(x)=\sqrt{2x}$، $x_0=2$
6) $f(x)=\sqrt{-x-1}$،$x_0=-1$

التمرين الثاني :

1) لتكن الدالة f المعرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)^2$. و h عدد حقيقي غير معدوم.

أ) أحسب النسبة $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ، ثم بسطها.

ب) هل الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1 ؟. إذا كانت كذلك حدد $f'(1)$.

2) لتكن الدالة g المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=\sqrt{x+2}$. و h عدد حقيقي غير معدوم.

أ) أحسب النسبة $\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$ ، ثم بسطها.

ب) هل الدالة g تقبل الإشتقاق عند -2 ؟. إذا كانت كذلك حدد $g'(-2)$.

التمرين الثالث:

لتكن الدالة f المعرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a من I. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a في كل حالة :

أ) $a=3$ و $f(3)=-2$ و $f'(3)=5$.

ب) $a=-7$ و $f(-7)=0$ و $f'(-7)=-\dfrac{2}{5}$.

2) لتكن دالة f قابلة للإشتقاق عند القيمة 4 والمعادلة المختصرة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة 4 هي : $y=5-\dfrac{2}{3}x$

عيّن $f(4)$ و $f'(4)$.

التمرين الرابع:

أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة:

1) $f(x)=3-\frac{7}{3}x$
2) $f(x)=x^2-2x$
3) $f(x)=2x^2-3x+5$
4) $f(x)=x^3-x^2+x-3$
5) $f(x)=2x^4-3x^3+x^{+}2$
6) $f(x)=x^3-4x+5$
7) $f(x)=(x^2-1)^3$
8) $f(x)=(3x+6)^3$
9) $f(x)=x^3-\sqrt{x}$
10) $f(x)=x\sqrt{x}$
11) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$
12) $f(x)=(x^2-3\sqrt{x})^3$
13) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
14) $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-1}$
15) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$
16) $f(x)=-x+\dfrac{1}{x+1}$
17) $f(x)=2x+1+\dfrac{3}{x-2}$
18) $f(x)=\dfrac{7}{(2x-1)^2}$
19) $f(x)=\dfrac{2x-1}{4x^2+1}$
20) $f(x)=\dfrac{4}{(2x+3)^3}$
21) $f(x)=\sqrt{-x-1}-3$
22) $f(x)=\sqrt{2x+5}+1$
23) $f(x)=2\sqrt{x}\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{x^2}\right)$
24) $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$
25) $f(x)=(x^2+x)\sqrt{x^2+1}$
26) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$
27) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$
28) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$
29) $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2}{(x+1)^2}$
30) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-1}$
31) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x-2)^2}$
32) $f(x)=\cos x-2\sin x$
33) $f(x)=\sin^2 x$
34) $f(x)=\tan x-2x^2$
35) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$
36) $f(x)=|x^2+4x-5|$

التمرين الخامس:

أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة:

1) $f(x)=(2x^2+3x+1)^5$
2) $f(x)=(4x+2)(3x^{6}2-5x+2)^2$
3) $f(x)=(2x+1)^2(-3x+2)^3+4x^2-3$
4) $f(x)=x(3x^2+2x)^2$
5) $f(x)=5(-2x^2+3x+1)^2$
6) $f(x)=\dfrac{2x-3}{(5x+2)^2}$
7) $f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$
8) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$
9) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$
10) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$
11) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$
12) $f(x)=\tan^3 x$

التمرين السادس:

1) أوجد تعريف تآلفي للعبارة $(3+h)^2$ عندما يؤول h إلى 0.

2) عيّن تقريبا تآلفيا لكل من الأعداد: $(3.02)^2$ ، $(2.98)^2$ و $(3.001)^2$.

3) ليكن منحنى (C_f) الدالة f يشمل النقطة $A(2;4)$ و (Δ) مستقيم معادلته: $y=3x+5$.

- أكتب معادلة المماس للمنحنى عند النقطة A والذي يوازي المستقيم (Δ)

التمرين السابع:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4+2x^2-1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=0$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f.

3) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

4) أوجد التقريب التآلفي للعدد: $f(0.099)$.

التمرين الثامن:

1) عيّن أحسن تقريب تآلفي لـ $\frac{1}{3+h}$ عندما يؤول h إلى 0.

2) بإستعمال هذا التقريب جد القيمة المقربة للأعداد: $\frac{1}{3.02}$ ، $\frac{1}{2.99}$.

التمرين التاسع:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ و a عدد حقيقي.

1) عيّن قيم العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f متزايدة تماما.

2) عيّن قيم العدد الحقيقي a حتى تقبل الدالة f قيمة حدية محلية على $\mathbb{R}$

التمرين العاشر:

a عدد حقيقي، f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}$.

1) عيّن قيم العدد a لكي تقبل الدالة f قيمة حدية محلية صغرى قيمة حدية محلية عظمى.

2) عيّن قيم العدد a كي لا تقبل الدالة f أية قيمة حدية.

التمرين الحادي عشر:

a عدد حقيقي، f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :

$f(x)=\frac{-x^2+ax+3}{x-1}$.

1) عيّن قيم العدد a كي لا تقبل الدالة f أية قيمة حدية.

2) عيّن عندئذ a من أجل أن يقبل التمثيل البياني للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 2 مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $2x+2y-3=0$.

التمرين الثاني عشر:

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) أحسب $f'(x)$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

4) أكتب معادلات المماس للمنحنى(C_f) عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 ، 2 و 3.

5) أنشئ المنحنى (C_f) على المجال $[-3;1[\cup]1;5]$.

التمرين الثالث عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+2x+1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2).

3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 3 ، عيّن إحداثي نقطة التماس و معادلة المماس عندها.

التمرين الرابع عشر:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = x^4 - 3x + 1$ و $g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.

ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) أدرس تغيرات الدالة h ، ثمّ إستنتج إشارة $h(x)$.

2) قارن بين $f(x)$ و $g(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا.

التمرين الخامس عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}\{-1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 1}$

حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب $f'(x)$.

2) عيّن a و b حتى يكون المستقيم ذو المعادلة : $y = 4x + 3$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

التمرين السادس عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = ax + b - \dfrac{6}{x}$

حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) عيّن a و b حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(2;0)$ ويقبل مماس عند A معادلته : $y = x - 2$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) عيّن القيم الحدية للدالة f.

4) إستنتج حصرا للدالة f على المجال $\left[\frac{3}{2};3\right]$.

التمرين السابع عشر:

1) لتكن f دالة زوجية معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

- أثبت أن دالتها المشتقة f' فردية.

2) لتكن g دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

- أكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1.
- إستنتج معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة (-1).

التمرين الثامن عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = ax^2 + bx + c$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية $(a \neq 0)$. . و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- عيّن العددين a ، b و c بحيث يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(0;3)$ ويقبل مماسا عند النقطة $B\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل.

التمرين التاسع عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 وإستنتج $f'(2)$.

2) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

التمرين العشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 2}$

حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

- عيّن العددين a و b بحيث يقبل المنحنى (C_f) مماسا معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ عند النقطة $A(1;-3)$.

التمرين الحادي والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بيّن أنّ f قابلة الإشتقاق على مجموعة تعريفها.

2) بيّن أنّ المنحنى يقبل مماسين كل منهما -4 ، ثمّ عيّن النقطتين الموافقتين لذلك ولتكن A و B.

3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند كل من النقطتين A و B.

IMANE MATHS

التمرين الثاني والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+2}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f.
2) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) معامل توجيهها $\frac{1}{4}$

التمرين الثالث والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2-3x-2$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.
2) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;0]$.
3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x-2$.
4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

التمرين الرابع والعشرون:

f و g دالتان معرفتان كما يلي :
$g(x)=x^3+3x-2$ و $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+3}$.
و (C_f) و (C_g) تمثيليهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن مجموعة تعريف كلا من f و g.
2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة g عند 0.
1) أدرس إتجاه تغير كل من الدالتين f و g، ثم شكّل جدولي تغيراتهما.
2) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-1).
3) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[-3;-1]$ بحيث: $g(c)=0$.
4) عيّن حصرا للعدد $f\left(\frac{3}{16}\right)$ على المجال $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ و حصرا للعدد $g\left(\frac{1}{4}\right)$ على المجال $[0;1]$.

التمرين الخامس والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $f(1)$ ، ثمّ أكتب $f(x)$ على الشكل:
$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x)\geqslant 0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
5) عيّن نقط من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس معامل توجيهه 3.
6) ليكن (Δ) مستقيم معادلته : $y=mx+d$ حيث m و d عددان حقيقيان.
   - ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحنى (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (Δ).

التمرين السادس والعشرون:

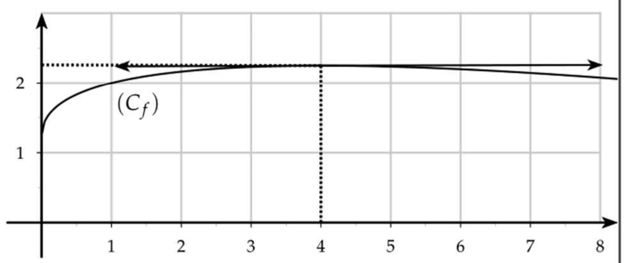
دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4-2x^2-3$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا.
2) بيّن أنّ الدالة f دالة زوجية.
3) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
4) علما أن: $0\leqslant x\leqslant 2$ جد حصرا للعدد $f(x)$.
5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما.
6) جد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{3}$ ، ثم عيّن $f(\sqrt{3}+0.01)$.
7) أنشئ المنحنى (C_f).

التمرين السابع والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax+b+\sqrt{x}$
و a، b عددان حقيقيان.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. كما في الشكل:



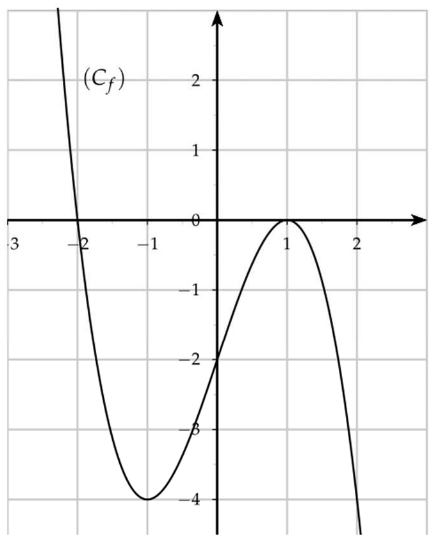
1) عيّن بيانيا قيم $f(4)$ ، $f'(4)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$.

2) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و b ، ثمّ عيّن قيمتي a و b.

3) عيّن بيانيا إشارة $f'(x)$ ، ثمّ تأكد من صحة النتيجة حسابيا.

التمرين الثامن والعشرون:

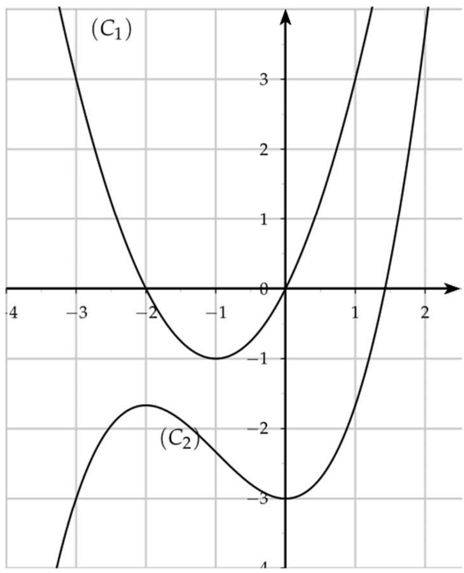
لتكن الدالة f المعرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]-3;3[$.



• بقراءة بيانية أوجد : $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f'(-1)$.

التمرين التاسع والعشرون:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ مثلنا منحنى الدالة f و منحنى دالتها المشتقة f' كما هو مبين في الشكل.



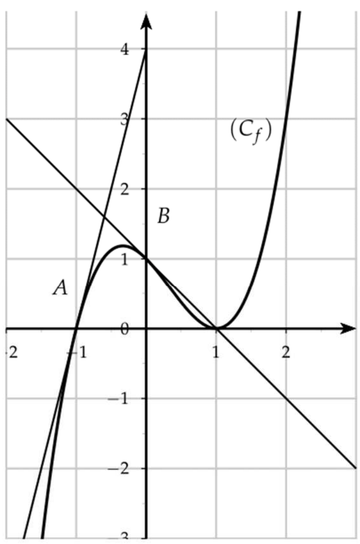
1) أرفق كل منحنى بدالته المناسبة، مبررا إجابتك بتشكيل جدول إشارة $f'(x)$ وجدول تغيرات الدالة f

2) بقراءة بيانية : عيّن $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(-3)$ و $f'(-3)$.

3) أكتب معادلتي المماسين (T_A) و (T_B) للمنحنى (C_f) عند النقطتين A و B ذات الفاصلتين 0 و (-3) على الترتيب .

التمرين الثلاثون:

في الشكل التالي، هو (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.
وليكن المماسين (T_A) و (T_B) للمنحنى (C_f) عند النقطتين A و B ذات الفاصلتين (-1) و 0 على الترتيب .



1) بقراءة بيانية: عيّن قيم $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$

2) أ) حل بيانيا على المجال $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$ المعادلتين : $f(x)=0$ ، $f'(x)=-1$.

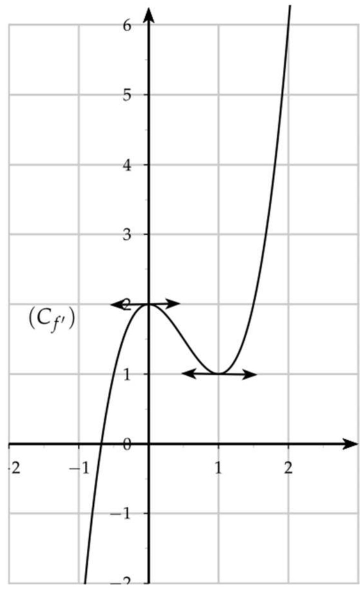
ب) حل بيانيا على المجال $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$ المتراجحة : $f'(x)\geqslant 0$

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f موضحا إشارة $f'(x)$

5) أوجد عبارة $f(x)$ إذا علمت أن f كثير حدود من الدرجة الثالثة.

التمرين الحادي والثلاثون :

هو التمثيل البياني للدلة الدالة المشتقة للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.



1) حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f.

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f'(x)=m$.

4) ليكن a و b عددان حقيقيان من المجال $[-2;-1]$ بحيث: $a<b$.

– قارن بين العددين $f(a)$ و $f(b)$

التمرين الثاني والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة $[-4;4]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل x كل من $[-4;4]$: $f'(x)=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

ب) عيّن إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات f.

2) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيد معامل توجيهه 4.

3) بيّن انّ النقطة $\Omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

4) أ) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة Ω.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=4x+1$ ، ماذا تستنتج؟.

5) بيّن أنّ النقطة Ω هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6) أ) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) أنشئ (C_f) والمستقيم (T).

التمرين الثالث والثلاثون:

I. لتكن الدالة g المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

– عيّن العددين a و b بحيث يمر المنحنى (C_g) بالنقطتين $A(0;2)$ و $B(1;3)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) عيّن عبارة f' الدالة المشتقة للدالة f.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;3]$.

ج) عيّن حصرا للدالة f على المجال $[-1;3]$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$f(2-x)+f(x)=6$ ماذا تستنتج؟.

3) أ) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) تأكد أن : $f(x)-(3x+2)=x^2(x-3)$ ، ثمّ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

ج) عيّن قيمة تقريبية للعدد: $f(0.005)$.

4) هل توجد نقط من المنحنى (C_f) يكون فيها توجيه المماس يساوي 3 ؟ إذا كان جوابك بنعم عيّن تلك النقط.

III. لتكن الدالة h المعرفة على المجال $[-1;3]$ بـ :
$$h(x)=f(-2x+2)$$

1) بيّن أنّ الدالة h هي مركب دالتين يطلب تعيينهما.

2) إعتمادا على إتجاه تغير مركب دالتين بيّن أن h متناقصة تماما على المجال $[-1;3]$.

التمرين الرابع والثلاثون:

1) نعتبر كثير الحدود المعرف بـ : $P(x)=x^3+3x+4$.

أ) أحسب $P(-1)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

ب) أدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$.

2) دالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $[-2;2]$:
$$f'(x)=\frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

ج) إستنتج حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $[-2;2]$.

د) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

هـ) أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T).

3) دالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $g(x)=|x|-\dfrac{|x|+2}{x^2+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

أ) أدرس شفعية الدالة g.

ب) بإستعمال المنحنى (C_f) أذكر كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_g).

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثمّ أنشىء (C_g).

4) دالة معرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ : $h(x)=\dfrac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x+1}$.

أ) بيّن أنّ الدالة h هي مركب دالتين يطلب تعيينهما.

ب) أحسب الدالة $h'(x)$ حيث h' المشتقة للدالة h ، إستنتج إتجاه تغير الدالة h.

التمرين الخامس والثلاثون:

I. دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

- عيّن العددين a و b حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطتين $A(2;0)$ و $B(0;2)$.

II. نضع في كل ما يلي: $a=-4$ و $b=4$.

1) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}.$$

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}.$$

3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) عيّن حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $[-1;3]$.

5) بيّن أنّ النقطة $\Omega(1;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة Ω.

7) بإستعمال التقريب التآلفي للدالة f أعط قيمة تقريبية للعددين : $f(1.0003)$ و $f(0.9993)$.

III. نعرف الدالة g على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-2)^2}$.

- أحسب $f(x)\times g(x)$ ، إستنتج إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;2[$ دون حساب $g'(x)$.

التمرين السادس والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2;4]$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-2		-1		0		1		2		3		4
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-3	↗	0	↗	‖	↘	1	↗	2	↘	0	↘	-1

1) حدد إشارة $f(x)$.

2) نعرّف الدالة g بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) إستنتج D_g مجموعة تعريف الدالة g.

ب) أكتب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إشارة $g'(x)$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمرين السابع والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3;-2[\cup]-2;1[\cup]1;5]$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-3		-2		0		1		5
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	‖	↘	0	↘	‖	↘	0

1) حدد إشارة $f(x)$.

2) نعرّف الدالة g على المجال $[-3;-2[\cup]-2;1[\cup]1;5]$ بـ :

$$g(x)=[f(x)]^2$$

أ) أكتب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إشارة $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g.