الأستاذ بحار عاشور

البَّحار في
الأعـداد و الحســاب

3 M TM

الشعب : رياضيات
تقني رياضي

- درس شامل لكل من " القسمة في $\mathbb{Z}$ - الموافقات في $\mathbb{Z}$ - التعداد - الأعداد الأولية "
و مدعم بتطبيقات محلولة لكل عنصر
- تمارين نموذجية بالحل المفصل
- تمارين من بكالوريات سابقة بالحل المفصل

الفهرس

مقدمــــــــــــــــــــــة

الحمد لله الذي علم بالقلم ، و الصلاة و السلام على خير المعلمين ، سيدنا محمد صلى الله عليه و على آله الطيبين و بعد :

❂ في بداية الزمن و قبل إختراع الإنسان للكتابة ، كان العدد هو مفتاح كل شيء ، تأمل الإنسان السماء و راقب حركة الأفلاك و من هذه الحركة تعلم الأعداد و الحساب و القياس ، في رحلتنا في هذا الكتاب أسألك أن نبحر معا في عالم الأعداد و الحساب ، أطلب الإذن بالصحبة ، في فصولنا الأربعة سنكتشف معا :

- الفصل الأول : القسمة في $\mathbb{Z}$.
- الفصل الثاني : الموافقات في $\mathbb{Z}$.
- الفصل الثالث : التعداد .
- الفصل الرابع : الأعداد الأولية .

❂ و في كل فصل من فصول هذا الكتاب يوجد الكثير من التطبيقات المحلولة لترسيخ الأفكار الأساسية ، بالإضافة إلى التمارين المرفقة بالحلول في كل فصل .

❂ أتمنى أن أكون قد أسهمت بمجهودي المتواضع في إعداد هذا الكتاب لخدمة طلاب البكالوريا في الشعب العلمية و أسأل الله عز و جل أن يوفقنا لما فيه الخير و يجعل هذا العمل خالصا لوجهه الكريم و الله الموفق و المستعان .

بحار عاشور

1 القسمة في $\mathbb{Z}$

I القسمة في $\mathbb{Z}$

تعريف

* نقول عن عدد صحيح غير معدوم a يقسم العدد الصحيح b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = ka$.

* نقول كذلك a قاسم للعدد b أو نقول b مضاعف للعدد a ونكتب $a \mid b$ ونقرأ a يقسم b.

أمثلة :

- 2 يقسم 2024 لأن $2024 = 2 \times 1012$ ، و نكتب $2 \mid 2024$ و أيضا : $1012 \mid 2024$.
- -3 يقسم 1962 لأن $1962 = (-3) \times (-654)$ ، و نكتب $-3 \mid 1962$ و أيضا : $-654 \mid 1962$.

خواص

1. a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة، إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c
2. a و b عددان صحيحان و a غير معدوم، إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m ، a يقسم mb
3. a و b عددان صحيحان و a غير معدوم، إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m ، ma يقسم mb
4. a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم، إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n ، a يقسم $mb + nc$

تطبيق 1

- عين في كل حالة الأعداد الصحيحة n حيث :

1/ 13 يقسم $n+2$ 2/ $n+1$ يقسم 4   3/ $3n+8$ يقسم $n+6$

الحل

1/ لدينا 13 يقسم $n+2$ معناه يوجد عدد صحيح k حيث : $n+2=13k$ أي $n=13k-2$

2/ لدينا $n+1$ يقسم 4 معناه : $n+1\in\{4;2;1;-1;-2;-4\}$ و منه : $n\in\{3;1;0;-2;-3;-5\}$

3/ لدينا $3n+8$ يقسم $n+6$ ، فحسب الخاصية "2" فإن : $3n+8$ يقسم $3(n+6)=3n+18$ ،
و حسب الخاصية "4" فإن: $3n+8$ يقسم $(3n+18)-(3n+8)=10$ معناه :
$3n+8\in\{10;5;2;1;-1;-2;-5;-10\}$ إذن : $n\in\{-1;-2;-3;-6\}$

II القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

مبرهنة

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم، توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\leq r<b$

نسمي عملية البحث عن الثنائية (q,r) بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b ويسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الاقليدية للعدد a على العدد b.

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين $PGCD$

a و b عددان طبيعيان غير معدومان، D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب

$D_a\cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a\cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ونرمز له بـ $PGCD(a,b)$

ملاحظات :

* $PGCD(a,a)=a$ و $PGCD(1,a)=1$
* $PGCD(0,a)=a$ و a غير معدوم.

خوارزمية إقليدس :

a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a>b$ ، بقسمة a على b نحصل على $a=bq_1+r_1$ و $0\leq r_1<b$ حيث q_1 و r_1 عددان طبيعيان

- إذا كان $r_1=0$ (أي b يقسم a) فإن $PGCD(a,b)=b$
- إذا كان $r_1\neq 0$ فإن $PGCD(a,b)=PGCD(b,r_1)$

نقسم b على r_1 نحصل على $b=r_1q_2+r_2$ و $0\leq r_2<r_1$ حيث q_2 و r_2 عددان طبيعيان

- إذا كان $r_2=0$ (أي r_1 يقسم b) فإن $PGCD(a,b)=PGCD(b,r_1)=r_1$
- إذا كان $r_2\neq 0$ فإن $PGCD(a,b)=PGCD(b,r_1)=PGCD(r_1,r_2)$

نقسم r_1 على r_2 نحصل على $r_1=r_2q_3+r_3$ و $0\leq r_3<r_2$ حيث r_3 و q_3 عددان طبيعيان

- نواصل هكذا حتى نجد باقيا معدوما، ونسمي r_n آخر باقي غير معدوم وعليه :

$$PGCD(a,b)=PGCD(b,r_1)=PGCD(r_1,r_2)=...=PGCD(r_n,0)$$

- هذه الطريقة لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين تسمى خوارزمية إقليدس

خواص

1. a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a\geq b$ ، r باقي قسمة a على b

$$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$$

2. القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس
3. a و b عددان طبيعيان غير معدومين، k عدد طبيعي غير معدوم، لدينا

$$PGCD(ka,kb)=kPGCD(a,b)$$

4. إذا كان $PGCD(a;b)=d$ ، فإن : $d\mid a$ و $d\mid b$ أيضا : $\begin{cases} a=da' \\ b=db' \\ PGCD(a';b')=1 \end{cases}$

تطبيق 2

1. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 82 و 1399 ، ماذا تستنتج ؟
2. عين مجموعة القواسم المشتركة للعددين 150 و 108 .
3. عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية الغير معدومة التي تحقق : $\begin{cases} a+b=54 \\ PGCD(a;b)=9 \end{cases}$

الحل

1. بإستعمال خوارزمية إقليدس :

$$1399=82\times 17+5$$
$$82=5\times 16+2$$
$$5=2\times 2+1$$
$$2=2\times 1+0$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 1 ، و منه $PGCD(82;1399)=1$

- نستنتج أن العددين 82 و 1399 أوليان فيما بينهما

2. بإستعمال خوارزمية إقليدس :

$$\begin{aligned}
150 &= 108\times 1+42\\
108 &= 42\times 2+24\\
42 &= 24\times 1+18\\
24 &= 18\times 1+6\\
18 &= 6\times 3+0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 6 ، و منه $PGCD(150;108)=6$

إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين 150 و 108 هي مجموعة قواسم العدد 6 و هي : $D_6=\{1;2;3;6\}$

3. لدينا $PGCD(a;b)=9$ و منه : $\begin{cases}9\mid a\\ 9\mid b\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}a=9a'\\ b=9b'\end{cases}$ حيث $PGCD(a';b')=1$

و لدينا : $a+b=54$ ، تكافئ : $9a'+9b'=54$ ، تكافئ : $a'+b'=6$

إذن : $(a';b')=\{(1;5),(5;1)\}$ "تذكر أن a' و b' أوليان فيما بينهما"

و بالتالي : $(a;b)=\{(9;45),(45;9)\}$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

a و b عددان صحيحان غير معدومان، القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث :

$$d=PGCD(|a|,|b|)$$

ملاحظة :

a و b عددان صحيحان غير معدومان، إذا كان b يقسم a فإن : $PGCD(a,b)=|b|$

2 الموافقات في $\mathbb{Z}$

I تعاريف و خواص

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم

القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n

ونرمز $a \equiv b[a]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

" أو نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان $a-b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ "

أمثلة :

- لدينا $10 \equiv 6[4]$
  لأن $10 = 4 \times 2 + 2$ و $6 = 4 \times 1 + 2$ ، إذن لهما نفس الباقي 2
- أيضا : $24 \equiv 3[7]$ ، $-20 \equiv 1[7]$ ، $13 \equiv -11[8]$

خواص

1. n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$ ، كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n
2. n عدد طبيعي غير معدوم. من أجل كل عدد صحيح a لدينا : $a \equiv a[n]$
3. n عدد طبيعي غير معدوم، a و b عددان صحيحان ، إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن: $b \equiv a[n]$
4. n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن $a \equiv c[n]$
5. n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن: $a + c \equiv b + d[n]$
6. n عدد طبيعي غير معدوم، a، b و c أعداد صحيحة ، إذا كان $(a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n])$ فإن: $ac \equiv bd[n]$
7. n عدد طبيعي غير معدوم a و b عددان صحيحان ، من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن: $ka \equiv kb[n]$
8. n عدد طبيعي غير معدوم a و b عددان صحيحان.
   من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $ka \equiv kb[n]$ و $PGCD(k,n) = 1$ فإن: $a \equiv b[n]$

9. n و p عددان طبيعيين غير معدومين a و b عددان صحيحان
إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^p \equiv b^p[n]$

تطبيق 3

1. عين باقي قسمة 5817 على 251 ، ثم استنتج باقي قسمة -5817 على 251
2. عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $n-5 \equiv 2[11]$
3. عين العدد الصحيح x الذي يحقق : $4x+1 \equiv 4[11]$

الحل

1. لدينا : $5817 = 251 \times 23 + 44$ ، ومنه العدد 44 هو باقي قسمة 5817 على 251 .
لدينا : $5817 \equiv 44[251]$ نضرب في -1 نجد $-5817 \equiv -44[251]$ "الخاصية 7 "
و نعلم أن $251 \equiv 0[251]$ و منه: $0 \equiv 251[251]$ "الخاصية 3 "
إذن لدينا : $\begin{cases} -5817 \equiv -44[251] \\ 0 \equiv 251[251] \end{cases}$ ، و منه حسب "الخاصية 5" نحصل على : $-5817 \equiv 207[251]$

2. لدينا : $n-5 \equiv 2[11]$ ، ومنه : $n \equiv 2+5[11]$ "الخاصية 2 ثم 5 "
ومنه : $n \equiv 7[11]$ ، إذن : $n = 11k+7$ مع $k \in \mathbb{N}$

3. لدينا : $4x+1 \equiv 4[11]$ ومنه : $4x \equiv 4-1[11]$ ومنه : $4x \equiv 3[11]$ ، نضرب الطرفين في 3 نجد :
$12x \equiv 9[11]$ ، و بما أن $12 \equiv 1[11]$ فإن : $x \equiv 9[11]$ ، إذن : $x = 11k+9$ مع $k \in \mathbb{Z}$
أو بطريقة آخرى : x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 11 ،بتطبيق "الخاصية 7 "
نلخص الحالات في الجدول :

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[11]
$4x \equiv$	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7	[11]

مما سبق لدينا : $4x \equiv 3[11]$ و من الجدول الحالة التي تحقق هي : $x \equiv 9[11]$
إذن : $x = 11k+9$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

تطبيق 4

1. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5
2. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5

الحل

1. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 :

$n=0$	$3^0\equiv 1[5]$
$n=1$	$3^1\equiv 3[5]$
$n=2$	$3^2\equiv 4[5]$
$n=3$	$3^3\equiv 2[5]$
$n=4$	$3^4\equiv 1[5]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 4
" أي دور القسمة هو من الشكل $4k$ مع $k\in\mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$3^n\equiv$	1	3	4	2	$[5]$

2. إستنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5 :
لدينا : $4039=4\times 1009+3$ هي من الشكل $4k+3$ إذن من الجدول $3^n\equiv 2[5]$
و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{4039} على 5 هو 2 .

II حل معادلات من الشكل $ax+by=c$

مبرهنة

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $ax+by=c$ ذات المجهول (x,y) ، حيث a ، b و c أعداد طبيعية
المعادلة تقبل حلول إذا وفقط إذا كان a و b أوليين فيما بينهما أو c يقبل القسمة على $PGCD(a,b)$

تطبيق 5

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x-8y=3$ ذات المجهول (x,y)

1. تأكد أن $(7,4)$ حل للمعادلة .
2. أثبت أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة فإن $5x\equiv 3[8]$.
3. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $5x\equiv 3[8]$.
4. أثبت أن كل حلول المعادلة هي من الشكل $(8k+7,5k+4)$ ، حيث k عدد صحيح .

الحل

1. المعادلة تقبل حلول لأن : $PGCD(7,4)=1$ أي 7 و 4 أوليين فيما بينهما .

• التأكد أن $(7,4)$ حل للمعادلة :

لدينا : $5\times 7-8\times 4=3$ و بالتالي $(7,4)$ حل للمعادلة .

2. (x,y) حلا للمعادلة معناه $5x-8y=3$ و منه : $5x=8y+3$

إذن : $5x\equiv 3[8]$.

3. لدينا : $5x\equiv 3[8]$ ، و x عدد صحيح يمكن أن يوافق كل بواقي القسمة على 8

نلخص الحالات في الجدول :

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	$[8]$
$5x\equiv$	0	5	2	7	4	1	6	3	$[8]$

و من الجدول الحالة التي تحقق $5x\equiv 3[8]$ هي : $x\equiv 7[8]$

إذن : $x=8k+7$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4. وجدنا من السؤال السابق أن : $x=8k+7$ ، نبحث الآن عن y :

(x,y) حلا للمعادلة معناه: $5x-8y=3$ ، و منه :

$$8y=5x-3=5(8k+7)-3=40k+35-3=40k+32$$

بالقسمة على 8 نجد : $y=5k+4$ ، إذن حلول المعادلة هي من الشكل $(8k+7,5k+4)$

حيث k عدد صحيح .

III التعداد

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 ، كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل

$$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+\ldots+r_ix^i+\ldots+r_2x^2+r_1x+r_0$$

حيث :

$0<q<x$ و $0\le r_i<x$ مع $i\in\{0;1;2;\ldots;n-1\}$

أمثلة :

- إذا كان : $x=2$ و $a=29$ فإن :

$$29=16+8+4+1=1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1$$

حيث :

$$q=1، \quad r_3=1، \quad r_2=1، \quad r_0=1، \quad n=4$$

- أيضا إذا كان : $x=4$ و $a=43$ فإن : $a=2\times 4^2+2\times 4^1+3$.

التعداد ذو الأساس x قاعدة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 ، يعتمد التعداد ذو الأساس x على الإصطلاحين التاليين :

1. إذا كان $a<x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما .
2. إذا كان $a\geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x:

$$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+....+r_2x^2+r_1x+r_0$$

حيث $0<q<x$ و $0\leq r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;...;n-1\}$.

- يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{qr_{n-1}r_{n-2}....r_1r_0}$
- الكتابة $a=\overline{qr_{n-1}r_{n-2}....r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x . إذا كان $x=10$ ، نكتب $a=qr_{n-1}r_{n-2}....r_1r_0$ ويسمى النظام العشري.

أمثلة :

- النظام العشري : هو النظام الذي أساسه 10 و أرقامه هي : 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9
- النظام الثنائي : هو النظام الذي أساسه 2 و أرقامه هي : 0، 1

فمثلا :

$$\begin{aligned}29&=16+8+4+1\\&=1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\end{aligned}$$

إذن العدد 29 يكتب $\overline{11101}$ في النظام ذو الأساس 2

تطبيق 6

1. a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8 ، أكتب a في النظام العشري .
2. b عدد طبيعي يكتب $\overline{1723}^4$ في النظام ذو الأساس 4 ، أكتب b في النظام العشري .

الحل

1. لدينا : $a = 6\times 8^2 + 4\times 8 + 3\times 8^0 = 419$ ، و منه a يكتب 419 في النظام العشري .
2. لدينا : $b = 1\times 4^3 + 3\times 4^2 + 0\times 4^1 + 2\times 4^0 = 114$ ، و منه b يكتب 114 في النظام العشري .

طريقة: الإنتقال من الأساس x إلى الأساس y

N عدد طبيعي مكتوب في نظام أساسه x لكتابته في نظام أساسه y

1- نحول N من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري

2- نحول N من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه y

تطبيق 7

a عدد طبيعي يكتب $\overline{643}^8$ في النظام ذو الأساس 8

1. أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين :

أ/ بالمرور بالنظام العشري .

ب/ مباشرة .

2. أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل

1.

أ/ <u>بالمرور بالنظام العشري :</u>

من التطبيق السابق a يكتب 419 في النظام العشري .

لكتابة 419 في النظام ذي الأساس 2 :

- نقوم بعملية القسمة الإقليدية التكرارية حتى يصبح حاصل القسمة معدوم
- نقوم بترتيب بواقي القسمة الناتجة من آخر باقي تحصلنا عليه إلى أول باقي

فينتج في الأخير : $a = 419 = \overline{110100011}^2$

	419	2
$\boxed{1}$	209	2
$\boxed{1}$	104	2
$\boxed{0}$	52	2
$\boxed{0}$	26	2
$\boxed{0}$	13	2
$\boxed{1}$	6	2
$\boxed{0}$	3	2
$\boxed{1}$	1	2
$\boxed{1}$	0	

ب/ مباشرة : لدينا :

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6\times 8^2 + 4\times 8 + 3 \\ &= 3\times 2\times \left(2^3\right)^2 + 2^2\times 2^3 + 3 \\ &= 3\times 2^7 + 2^5 + 3 \\ &= (2+1)\times 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2 + 1 \end{aligned}$$

ومنه :

$$a = 1\times 2^8 + 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2 + 0\times 2 + 0\times 2 + 1\times 2 + 1$$

إذن a يكتب $a = \overline{110100011}^2$ في النظام ذي الأساس 2 .

.2 كتابة a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة : لدينا :

$$\begin{aligned} a = \overline{643}^8 &= 6\times 8^2 + 4\times 8 + 3 \\ &= 6\times (2\times 4)^2 + 4\times 4\times 2 + 3 \\ &= (2+4)\times 4^3 + 4^2\times 2 + 3 \\ &= 4^4 + 2\times 4^3 + 2\times 4^2 + 3 \end{aligned}$$

ومنه :

$$a = 1\times 4^4 + 2\times 4^3 + 2\times 4^2 + 0\times 4 + 3$$

إذن a يكتب $a = \overline{12203}^4$ في النظام ذي الأساس 4 .

3 الأعداد الأولية

I الأعداد الأولية

تعريف

نقول عن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$: 1 و n نفسه .

ملاحظات :

- العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
- العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد فقط هو 1 .
- العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي .
- $2,5,7,11,13,17,19$ هي الأعداد الأولية الأصغر من 20

خواص

1. كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
2. كل عدد طبيعي n غير أولي وأكبر تماما من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$.
3. مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

طريقة : لمعرفة إذا ما كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 أوليا أم لا ، نقوم بحساب $\sqrt{n}$.

- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي .
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب .
  - إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف و نقرّ أنّ n غير أولي .
  - إذا كانت كل البواقي غير معدومة نقرّ أنّ n أولي .

تطبيق 8

- في كل حالة أذكر إن كان العدد أوليا أم لا :

1. 961
2. 149
3. 341

الحل

1. لدينا : $\sqrt{961} = 31$ و منه : 961 مربع تام و بالتالي 961 غير أولي .
2. لدينا : $\sqrt{149} \simeq 12.20$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{149}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 149 لا يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و منه 149 عدد أولي .
3. لدينا : $\sqrt{341} \simeq 18.46$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{341}$ هي : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 و لكن $341 = 11 \times 31$ أي 341 يقبل القسمة على 11 و بالتالي 341 غير أولي .

II المضاعف المشترك الأصغر لعددين $PPCM$

تعريف

a و b عددان طبيعيين غير معدومين M_a مجموعة مضاعفات a ، M_b مجموعة مضاعفات b ، $M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b
يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ : $PPCM(a;b)$.

أمثلة :

- مجموعة مضاعفات 3 هي : $M_3 = \{0;3;6;9;12;15;18;21;...\}$.
- مجموعة مضاعفات 6 هي : $M_6 = \{0;6;12;18;24;30;36;42;...\}$.

إذن : $M_3 \cap M_6 = \{0;6;12;18;24;...\}$ ، و بالتالي : $PPCM(3;6) = 6$.

خواص

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و k عدد صحيح غير معدوم ، لدينا :

1. $PPCM(a;a)=a$ ، $PPCM(1;a)=a$ ، $PPCM(0;a)=0$.
2. إذا كان b يقسم a فإن $PPCM(a,b)=a$.
3. $PPCM(ka;kb)=k\times PPCM(a;b)$
4. إذا كان a يقسم c و b يقسم c فإن : $PPCM(a;b)$ يقسم c .

نتيجة مهمة : " تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين "

a و b عددان صحيحان غير معدومين

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث: $m=PPCM(|a|,|b|)$.

حساب القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر و العلاقة بينهما :

- لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 .

نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة مرة واحدة و بأصغر أس و نحسب جداءها .

- لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 .

نقوم بتحليل العددين a و b إلى جداء عوامل أولية ثم نأخذ العوامل المشتركة و غير المشتركة مرة واحدة و بأكبر أس و نحسب جداءها .

- a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 ، إذن : $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$

تطبيق 9

-أوجد القاسم المشترك الأكبر ثم المضاعف المشترك الأصغر للعددين : 154 و 48 .

الحل

أولا نقوم بتحليل العددين : 154 و 48 إلى جداء عوامل أولية :

طريقة : لتحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية نتبع ما يلي :

1. نقسم العددالمعطى على أصغر عدد أولي يكون قاسما له.

2. نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له .

3. نكرّر عمليات القسمة حتى يكون الحاصل يساوي 1 .

4. نكتب جداء كلّ هذه القواسم و باستعمال خواص القوى نبسط هذا الجداء .

لدينا : $\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ ومنه: $48 = 2^4 \times 3$ و أيضا : $\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ ومنه: $154 = 2 \times 7 \times 11$

- القاسم المشترك الأكبر للعددين 48 و 154 هو: $PGCD(154;48) = 2$.
- المضاعف المشترك الأصغر للعددين 48 و 154 هو: $PGCD(154;48) = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11 = 3696$.

تطبيق 10

-عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية و التي تحقق : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 60 \\ 2PPCM(a;b) = a \times b \end{cases}$

الحل

لدينا : $2PPCM(a;b) = a \times b$ ومنه : $PGCD(a;b) = 2$

إذن : $\begin{cases} 2 \mid a \\ 2 \mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 2a' \\ b = 2b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a';b') = 1$

لدينا $a^2 - b^2 = 60$ و منه : $4a'^2 - 4b'^2 = 60$ و منه : $a'^2 - b'^2 = 15$ أي : $(a'+b')(a'-b') = 1\times 15 = 3\times 5$

و بما أن : a' و b' عددين طبيعيين فإن : $a'+b' > a'-b'$

إذن : $\begin{cases} a'+b' = 15 \\ a'-b' = 1 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a' = 16$ أي : $a' = 8$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد : $b' = 7$.

أو : $\begin{cases} a'+b' = 5 \\ a'-b' = 3 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a' = 8$ أي : $a' = 4$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد : $b' = 1$.

إذن : $(a';b') \in \{(8;7),(4;1)\}$ و بالتالي : $(a;b) \in \{(16;14),(8;2)\}$.

III مبرهنة بيزو

مبرهنة

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v بحيث: $au+bv=1$.

أمثلة :

من أجل $a=3$ و $b=2$ ، $PGCD(a,b)=1$ لدينا :

$$3\times 1+2\times(-1)=1 \quad ، \quad 3\times(-1)+2\times 2=1$$

نلاحظ أن الثنائية (u,v) ليست وحيدة .

خواص

1. إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث: $au+bv=d$.
2. إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .
3. إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جداءهما $b\times c$.
4. إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن : $PGCD(a;b^n)=1$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.
5. إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن : $PGCD(a^n;b^n)=1$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

تطبيق 11

ليكن n عددا طبيعيا . (السؤالين مستقلين عن بعضهما)

1. أثبت أن العددين $A=2n+1$ و $B=9n+4$ أوليان فيما بينهما .
2. برهن أن العددين $n+2$ و $2n^2+5n+3$ أوليان فيما بينهما .

الأعداد الأولية

الحل

1. لدينا : $A=2n+1$ و منه : $9A=18n+9\cdots(1)$

أيضا : $B=9n+4$ و منه : $2B=18n+8\cdots(2)$

بطرح (2) من (1) نجد : $9A-2B=1$، إذن حسب مبرهنة بيزو فإن A و B عددان أوليان فيما بينهما .

2. لدينا : $2n^2+5n+3=(2n+3)(n+1)$

- بما أن $2(n+2)-(2n+3)=1$ فإن حسب مبرهنة بيزو العددين $n+2$ و $2n+3$ أوليين فيما بينهما
- بما أن $(n+2)-(n+1)=1$ فإن حسب مبرهنة بيزو العددين $n+2$ و $n+1$ أوليين فيما بينهما

في الأخير : بما أن $n+2$ أولي مع العددين $2n+3$ و $n+1$ فإن $n+2$ أولي مع $(2n+3)(n+1)$

و بالتالي $n+2$ و $2n^2+5n+3$ أوليان فيما بينهما .

IV مبرهنة غوص

مبرهنة

a ، b و c أعداد صحيحة غير معدومة

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

خواص

1. a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي
إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

2. a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة
إذا كان a مضاعف لـ b و c وكان b و c أوليان فيما بينهما فإن a مضاعف للجداء bc .

تطبيق 12

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 342 و 258 .
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $57x = 43y$ ذات المجهول $(x;y)$.
3. تحقق أن الثنائية $(-3;-4)$ حل للمعادلة $57x - 43y = 1$ ذات المجهول $(x;y)$.
4. استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة $342x - 258y = 6$ ذات المجهول $(x;y)$.

الحل

1. لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$342 = 258 \times 1 + 84$$
$$258 = 84 \times 3 + 6$$
$$84 = 6 \times 14 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 6 إذن : $PGCD(342;258) = 6$

2. لدينا : $57x = 43y$ و بما أن x و y عددين صحيحين فإن 43 يقسم $57x$ و كون 43 أولي مع 57 ، فحسب غوص 43 يقسم x و منه : $x = 43k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ثم بتعويض $x = 43k$ في المعادلة $57x = 43y$ نجد : $y = 57k$
إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{(43k;57k)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

3. لدينا : $57(-3) - 43(-4) = -171 + 172 = 1$ و منه : $(-3;-4)$ حل للمعادلة $57x - 43y = 1$.

4. لدينا : $342x - 258y = 6$ نقسم الطرفين على 6 نجد : $57x - 43y = 1$

إذن : $\begin{cases} 57x - 43y = 1 \\ 57(-3) - 43(-4) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد $57(x+3) - 43(y+4) = 0$

و منه : $57(x+3) = 43(y+4)$

لدينا : $\begin{cases} 43 \mid 57(x+3) \\ PGCD(57;43) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $43 \mid (x+3)$ و منه $x+3 = 43k$ أي $x = 43k - 3$

و لدينا : $\begin{cases} 57 \mid 43(y+4) \\ PGCD(57;43) = 1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $57 \mid (y+4)$ و منه $y+4 = 57k$ أي $y = 57k - 4$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\{(43k-3;57k-4)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

4 تمارين محلولة

I التمارين

التمرين 1:
إضغط على "1" للإنتقال للحل

1. أحسب $PGCD(182;126)$.
2. باستعمال خوارزمية إقليدس ، جد عددين صحيحين α و β يحققان : $182\alpha+126\beta=14$.
3. عين في كل حالة من الحالات التالية الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق :

/1 $\begin{cases} a+b=96 \\ PGCD(a;b)=12 \end{cases}$ /2 $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$ /3 $\begin{cases} a^2-b^2=1575 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$

التمرين 2:
إضغط على "2" للإنتقال للحل

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .
نضع : $x=7a-5b$ و $y=4a-3b$.

1. برهن أن : $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(a;b)$.
2. عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ التي تحقق :

$$\begin{cases} (7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300 \\ PGCD(\alpha;\beta)=5 \end{cases}$$

التمرين 3:
إضغط على "3" للإنتقال للحل

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 9 .
2. ماهو باقي قسمة العدد $6568^{1962}+16^{1445}-5\times 8^{2024}$ على 9 ؟
3. عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $25^{3n}+25^n-5\equiv 0\,[9]$.

التمرين 4: إضغط على "4" للإنتقال للحل

في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{1271x}^{9}$.

1. عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8.
2. عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11.
3. عين عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n=27x85y$ ، المكتوب في النظام العشري ، قابلا للقسمة على 3 و 11 .

التمرين 5: إضغط على "5" للإنتقال للحل

1. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x\equiv -19\,[9]$.
2. استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة : $7x-9y=-19\cdots(1)$ ذات المجهول $(x;y)$.
3. من بين حلول المعادلة (1) عين تلك التي تحقق : $x\equiv 0\,[y]$.
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{2\alpha 5}^{7}$ في النظام العد ذي الأساس 7 ، و يكتب $\overline{1\beta 3}^{9}$ في نظام العد ذي الأساس 9.
   - عين α و β ، ثم أكتب العدد n في نظام العشري .

التمرين 6: إضغط على "6" للإنتقال للحل

بكالوريا 2012 تقني رياضي

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11 .
2. ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11
4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $(2011^{2012}+2n+2)$ مضاعفا للعدد 11 .

التمرين 7:

إضغط على "7" للإنتقال للحل

بكالوريا 2009 رياضيات

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعدد ذي الأساس x بالشكل : $A=\overline{5566}^{x}$

1. أ/ أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $A=(5x^2+6)(2+2y)$

   ب/ أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في النظام العشري .

2. أ/ عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 .

   ب/ عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

التمرين 8:

إضغط على "8" للإنتقال للحل

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-3y=2\cdots(1)$

1. بين أن المعادلة (1) تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$.
2. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x\equiv 1\,[3]$.
3. استنتج حلول المعادلة (1) .
4. أ/ بين إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن : $PGCD(x;y)=PGCD(x;2)$.

   ب/ استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$.

   جـ/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x;y)=2$

التمرين 9:

إضغط على "9" للإنتقال للحل

بكالوريا 2010 تقني رياضي

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n=\overline{11\alpha00}^{7}$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$

1. عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .
2. عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 .

3. استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15 .

4. نأخذ $\alpha = 4$. أكتب العدد n في النظام العشري .

التمرين 10:

إضغط على "10" للإنتقال للحل

بكالوريا 2008 رياضيات

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$

1. أ/ بين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$

جـ/ استنتج حلول المعادلة (E) .

2. أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب/ عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق : $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

التمرين 11:

إضغط على "11" للإنتقال للحل

بكالوريا 2013 رياضيات

1. n عدد طبيعي . نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث : $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ/ بين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$.

ب/ ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$ ؟

جـ/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.

2. أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .

ب/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\,[11] \\ n \equiv 2\,[10] \end{cases}$

التمرين 12:

إضغط على "12" للإنتقال للحل

بكالوريا 2011 تقني رياضي

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقق أن $4 \equiv -3\,[7]$ ثم بين أن $A_3 \equiv 6\,[7]$.

2. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 2^n و 3^n على 7 .

3. بين أنه إذا كان n فرديا فإن A_n+1 يقبل القسمة على 7 ثم إستنتج باقي القسمة للعدد A_{2011} على 7 .

4. ماهو باقي الفسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

التمرين 13: إضغط على "13" للإنتقال للحل

1. أ/ أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n\in\mathbb{N}$.

إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا للقسمة على $n+3$

ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2. لتكن a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة . بين أن $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$.

3. بين أن $PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 .

4. أ/ عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .

ب/ إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

التمرين 14: إضغط على "14" للإنتقال للحل

بكالوريا 2013 رياضيات

1. أ/ عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n+27\equiv 0\,[n+1]$

ب/ عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $(b-a)(a+b)=24$

جـ/ إستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس 5 على الشكل : $\alpha=\overline{10141}^5$ و $\beta=\overline{3403}^5$.

أ/ أكتب العددين α و β في النظام العشري .

ب/ عين الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$

3. أ/ عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478 .

ب/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2013x-1434y=27$.

التمرين 15:

إضغط على "15" للإنتقال للحل

بكالوريا 2015 تقني رياضي

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 .
2. إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42\times 138^{2015}+2014^{2037}-3$ على 13 .
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1)\times 64^n-5^{2n-3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.
4. عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى تكون $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13]$.

التمرين 16:

إضغط على "16" للإنتقال للحل

بكالوريا 2012 تقني رياضي

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases} x\equiv 3\,[15] \\ x\equiv 6\,[7] \end{cases}$ ، حيث x عدد صحيح .

1. بيّن أن العدد 153 حل للجملة (S) .
2. إذا كان x_0 حل لـ (S) ، بيّن أن : $(x$ حل لـ (S) $)$ يكافئ $\left(\begin{cases} x-x_0\equiv 3\,[15] \\ x-x_0\equiv 6\,[7] \end{cases}\right)$
3. حل الجملة (S) .
4. يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب ، و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب .

إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و 600 كتابا ، ما عدد هذه الكتب ؟

التمرين 17:

إضغط على "17" للإنتقال للحل

بكالوريا 2012 رياضيات

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2011x-1432y=31\cdots(1)$.

1. أ/ بيّن أن العدد 2011 أولي .

ب/ باستعمال خوارزمية إقليدس ، عيّن حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1) .

2. أ/ عيّن تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n و التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0\,[7]$.

3. N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\beta\gamma}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) .

عيّن α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين 18:

إضغط على "18" للإنتقال للحل

بكالوريا 2016 تقني رياضي

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $6x-7y=19$ ، حيث x و y عددان صحيحان .

1. جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0=y_0$ ، ثم حل المعادلة (E) .

2. استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24\,[7] \\ \lambda \equiv 5\,[6] \end{cases}$ ، ثم عيّن باقي قسمة العدد λ على 42 .

3. عيّن جميع الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث : $|x+y-1| \le 13$.

4. أ/ أدرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب/ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة : $\begin{cases} n-5^n \equiv 2020\,[7] \\ n \equiv 1437\,[6] \end{cases}$.

التمرين 19:

إضغط على "19" للإنتقال للحل

بكالوريا 2014 رياضيات

نعتبر المعادلة (E) : $2013x-1962y=54$ ، حيث x و y عددان صحيحان .

1. أ/ أحسب $PGCD(2013;1962)$

ب/ استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا .

جـ/ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0\,[6]$.

د/ استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ، ثم حل المعادلة (E) .

2. نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

أ/ ماهي القيم الممكنة للعدد d .

ب/ عيّن قيم العددين الطبيعيين a و b حيث : $\begin{cases} 671a-654b=18 \\ PGCD(a;b)=18 \end{cases}$.

التمرين 20:

إضغط على "20" للإنتقال للحل

بكالوريا 2019 تقني رياضي

1. نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $5x-3y=1\cdots(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان .

أ/ تحقق أن الثنائية $(6n+2;10n+3)$ حل للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي .

ب/ - استنتج أن العددين $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما .

2. نضع : $a=10n+3$ و $b=6n+2$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

أ/ بين أن $d=1$ أو $d=41$.

ب/ بيّن أنه إذا كان $d=41$ فإن : $n\equiv 12\,[41]$.

3. ليكن العددان الطبيعيان : $A=20n^2+36n+9$ و $B=6n^2+19n+15$.

أ/ بيّن أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n+3$.

ب/ جد بدلالة n و حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 21:

إضغط على "21" للإنتقال للحل

بكالوريا 2015 رياضيات

1. أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ب/ إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد : $1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}$ على 7 .

2. أ/ بيّن أن العدد 89 أولي .

ب/ عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .

ج/ بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3. x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2 .

عين x و y علما أن : $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8\,[22] \end{cases}$

4. a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

أ/ - باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب/ باستعمال الإستدلال بالتراجع ،أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، $PGCD(a;b^n)=1$.

ج/ استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين 22:

إضغط على "22" للإنتقال للحل

بكالوريا 2023 تقني رياضي

1. أ/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 .

ب/ إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1444^{2023} على 7 .

جـ/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $1962n+1444^{3n+1} \equiv 0\,[7]$

2. نعتبر المعادلة $(E)\cdots 7x-6y=4$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

تحقق أن الثنائية $(4;4)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها .

3. عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) و التي تحقق $2^{3x}+2^y \equiv 3\,[7]$.

التمرين 23:

إضغط على "23" للإنتقال للحل

بكالوريا 2023 رياضيات

1. نعتبر المعادلة $(E)\cdots 16x+361y=818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ/ تحقق أن الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج مجموعة حلولها .

ب/ عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) التي تحقق $|x+23y| \leq 4$.

2. P عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha\beta0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 و يكتب $\overline{\beta\alpha87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 ، حيث α و β عددان طبيعيان .
عين α و β ثم اكتب P في النظام العشري .

3. أ/ حلل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية ثم عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023

ب/ نضع : $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^2+3d^2=2023$

II حلول التمارين

حل التمرين 1:

إضغط على "1" للعودة إلى التمرين

1. لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$182 = 126 \times 1 + 56$$
$$126 = 56 \times 2 + 14$$
$$56 = 14 \times 4 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 14 إذن : $PGCD(182;126) = 14$

2. من خوارزمية إقليدس لدينا : $182 = 126 \times 1 + 56$ و منه : $(1)\cdots 182 - 126 = 56$

و $126 = 56 \times 2 + 14$ و منه : $(2)\cdots 126 - 56 = 14$

و بتعويض (1) في (2) نجد :

$$126 - 2(182 - 126) = 14$$

تكافئ $126 - 2 \times 182 + 2 \times 126 = 14$

تكافئ $182(-2) + 126(3) = 14$

بالمطابقة مع $182\alpha + 126\beta = 14$ ، نجد : $\alpha = -2$ و $\beta = 3$.

3. 1/ في الحالة : $\begin{cases} a + b = 96 \\ PGCD(a;b) = 12 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b) = 12$ و منه : $\begin{cases} 12 \mid a \\ 12 \mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a';b') = 1$

و لدينا : $a + b = 96$ تكافئ : $12a' + 12b' = 96$ أي : $a' + b' = 8$.

إذن : $(a';b') \in \{(1;7),(3;5),(5;3),(7;1)\}$

و بالتالي : $(a;b) \in \{(12;84),(36;60),(60;36),(84;12)\}$.

2/ في الحالة : $\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a;b) = 6 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b) = 6$ و منه : $\begin{cases} 6 \mid a \\ 6 \mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 6a' \\ b = 6b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a';b') = 1$

و لدينا : $a \times b = 360$ تكافئ : $36a' \times b' = 360$ أي : $a' \times b' = 10$.

إذن : $(a';b') \in \{(1;10),(10;1),(2;5),(5;2)\}$

و بالتالي : $(a;b) \in \{(6;60),(60;6),(12;30),(30;12)\}$.

3/ في الحالة : $\begin{cases} a^2-b^2=1575 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b)=5$ و منه : $\begin{cases} 5\mid a \\ 5\mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=5a' \\ b=5b' \end{cases}$ حيث : $PGCD(a';b')=1$

و لدينا : $a^2-b^2=1575$ تكافئ : $36a'\times b'=360$ تكافئ : $25a'^2-25b'^2=1575$

تكافئ : $a'^2-b'^2=63$ تكافئ : $(a'-b')(a'+b')=1\times 63=7\times 9$ ، حيث $a'+b'>a'-b'$.

إذن $\begin{cases} a'+b'=63 \\ a'-b'=1 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a'=64$ أي $a'=32$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد $b'=31$

أو $\begin{cases} a'+b'=9 \\ a'-b'=7 \end{cases}$ بالجمع نجد $2a'=16$ أي $a'=8$ ثم نعوض في إحدى المعادلتين فنجد $b'=1$

إذن : $(a';b')\in\{(32;31),(8;1)\}$ و بالتالي : $(a;b)\in\{(160;155),(40;5)\}$.

حل التمرين 2:

إضغط على "2" للعودة إلى التمرين

.1 لنبرهن أن : $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(a;b)$.

- ليكن d القاسم المشترك للعددين a و b

و منه : $\begin{cases} d\mid a \\ d\mid b \end{cases}$ و $\begin{cases} d\mid 7a \\ d\mid 5b \end{cases}$ و $\begin{cases} d\mid 4a \\ d\mid 3b \end{cases}$ و حسب خواص القسمة لدينا :

$\begin{cases} d\mid 7a-5b \\ d\mid 5b-7a \end{cases}$ و $\begin{cases} d\mid 4a-3b \\ d\mid 3b-4a \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} d\mid |x| \\ d\mid |y| \end{cases}$

- ليكن d القاسم المشترك للعددين x و y " لاحظ أن $a=4x-7y$ و $b=3x-5y$ "

و منه : $\begin{cases} d\mid x \\ d\mid y \end{cases}$ و $\begin{cases} d\mid 4x \\ d\mid 7y \end{cases}$ و $\begin{cases} d\mid 3x \\ d\mid 5y \end{cases}$ و حسب خواص القسمة لدينا :

إذن : $\begin{cases} d\mid 4x-7y \\ d\mid 3x-5y \end{cases}$ و بالتالي : $\begin{cases} d\mid a \\ d\mid b \end{cases}$

إذن القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها القواسم المشتركة للعددين $|x|$ و $|y|$

إذن : $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(x;y)=PGCD(a;b)$.

.2 لدينا : $\begin{cases} (7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300 \\ PGCD(\alpha;\beta)=5 \end{cases}\cdots(*)$ نضع : $x=7\alpha-5\beta$ و $y=4\alpha-3\beta$

و حسب السؤال الأول لدينا : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(x;y)=5$

و منه الجملة $(*)$ تصبح : $\begin{cases} xy=1300 \\ PGCD(x;y)=5 \end{cases}$

لدينا : $PGCD(x;y)=5$ و منه : $\begin{cases} 5\mid x \\ 5\mid y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=5x' \\ y=5y' \end{cases}$ حيث : $PGCD(x';y')=1$

و $x',y'\in\mathbb{Z}^*$

و لدينا: $xy=1300$ تكافئ : $25x'y'=1300$ تكافئ :

$$xy=52=1\times 52=(-1)\times(-52)=(4)\times(13)=(-4)\times(-13)$$

إذن : $(x';y')\in\{(1;52),(52;1),(-1;-52),(-52;-1),(4;13),(13;4),(-4;-13),(-13;-4)\}$

و بالتالي : $(x;y)\in\{(5;260),(260;5),(-5;-260),(-260;-5),(20;65),(65;20),(-20;-65),(-65;-20)\}$

و بما أن α و β عددين طبيعيين فإن : $(\alpha;\beta)\in\{(755;1005),(1285;1800),(95;120),(265;375)\}$

حل التمرين 3:

إضغط على "3" للعودة إلى التمرين

1. تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3k$ مع $k\in\mathbb{N}$ "

$n=0$	$7^0\equiv 1[9]$
$n=1$	$7^1\equiv 7[9]$
$n=2$	$7^2\equiv 4[9]$
$n=3$	$7^3\equiv 1[9]$

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$3^n\equiv$	1	7	4	$[9]$

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $6568^{1962}+16^{1445}-5\times 8^{2024}$ على 9 :

لدينا : $6568\equiv 7[9]$ و $16\equiv 7[9]$ و $8\equiv -1[9]$

ومنه :

$$\begin{aligned}6568^{1962}+16^{1445}-5\times 8^{2024} &\equiv 7^{1962}+7^{1445}-5(-1)^{2024}[9]\\ &\equiv 7^{3\times 654}+7^{3\times 481+2}-5[9]\\ &\equiv 1+4-5[9]\\ &\equiv 0[9]\end{aligned}$$

3. لدينا : $25^{3n}+25^n-5\equiv 0[9]$ تكافئ : $7^{3n}+7^n-5\equiv 0[9]$ ، لأن : $25\equiv 7[9]$

تكافئ: $1+7^n-5\equiv 0[9]$ و منه : $7^n\equiv 4[9]$

إذن : $n=3k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$.

تمارين محلولة

حل التمرين 4:

إضغط على "4" للعودة إلى التمرين

لدينا : $n=\overline{1271x}^{9}=1\times 9^{4}+2\times 9^{3}+7\times 9^{2}+1\times 9^{1}+x\times 9^{0}$ حيث : $0\leq x\leq 8$

و منه : $n=6561+1458+567+9+x$ أي : $n=8595+x$

1. n يقبل القسمة على 8 معناه $8595+x\equiv 0\,[8]$ و منه $3+x\equiv 0\,[8]$ أي : $x\equiv 5\,[8]$

و بما أن : $0\leq x\leq 8$ فإن : $x=5$.

2. n يقبل القسمة على 11 معناه $8595+x\equiv 0\,[11]$ و منه $4+x\equiv 0\,[11]$ أي : $x\equiv 7\,[11]$

و بما أن : $0\leq x\leq 8$ فإن : $x=7$.

3. لدينا : $n=27x85y$ في النظام العشري أي : $0\leq x\leq 9$ و $0\leq y\leq 9$

و منه : $n=2\times 10^{5}+7\times 10^{4}+x\times 10^{3}+8\times 10^{2}+5\times 10^{1}+y\times 10^{0}$

و منه : $n=200000+70000+1000x+800+50+y$ أي : $n=270850+1000x+y$

n يقبل القسمة على 3 معناه $270850+1000x+y\equiv 0\,[3]$ و منه $1+x+y\equiv 0\,[3]$

أي : $x+y\equiv 2\,[3]$ و بالتالي : $(x;y)\in\{(1;4),(4;1),(4;7),(7;4),(8;0),(0;8)\}\cdots(1)$

n يقبل القسمة على 11 معناه $270850+1000x+y\equiv 0\,[11]$ و منه $8+10x+y\equiv 0\,[11]$

أي : $x-y\equiv 8\,[11]$ و بالتالي : $(x;y)\in\{(8;0),(0;3),(1;4),(2;5),(3;6),(4;7)\}\cdots(2)$

من (1) و (2) يتبين أن : $(x;y)\in\{(1;4),(4;7),(8;0)\}$

حل التمرين 5:

إضغط على "5" للعودة إلى التمرين

1. لدينا : $7x\equiv -19\,[9]$ و منه : $7x\equiv 8\,[9]$ نضرب الطرفين في 4 نجد : $28x\equiv 32\,[9]$

و منه : $x\equiv 5\,[9]$ ، أي : $x=9k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2. لدينا : $7x-9y=-19$ و منه $7x=9y-19$ و منه $7x\equiv -19\,[9]$

و منه حسب السؤال السابق ينتج : $x=9k+5$ ، و بتعويض x في المعادلة (1) نحصل على : $y=7k+6$.

ومنه حلول المعادلة (1) هي : $(x;y)\in\{(9k+5;7k+6)\}$ مع : $k\in\mathbb{Z}$.

3. لدينا : $x \equiv 0\,[y]$ معناه : $x \mid y$ أي : $7k+6 \mid 9k+5$ و منه : $7k+6 \mid 9(7k+6)-7(9k+5)$

إذن : $7k+6 \mid 19$ و منه : $7k+6 \in \{-19;-1;1;19\}$ و منه : $7k \in \{-25;-7;-5;13\}$

أي $k=-1$ و بالتالي : $(x;y) \in \{(-4;-1)\}$

4. لدينا : $n = \overline{2\alpha 5}^{7} = \overline{1\beta 3}^{9}$ و منه : $2\times 7^2+\alpha\times 7+5 = 1\times 9^2+\beta\times 9+3$ و بالتالي : $7\alpha-9\beta=-19$

و حسب الأسئلة السابقة فإن : $(\alpha;\beta)=(9k+5;7k+6)$ مع : $\begin{cases} 0\le \alpha<7 \\ 0\le \beta<9 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 0\le 9k+5<7 \\ 0\le 7k+6<9 \end{cases}$

و منه : $k=0$ إذن : $\alpha=5$ و $\beta=6$ و أيضا : $n=138$.

حل التمرين 6:

إضغط على "6" للعودة إلى التمرين

1. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 5

" أي دور القسمة هو من الشكل $5k$ مع $k\in\mathbb{N}$ "

$n=0$	$9^0\equiv 1[11]$
$n=1$	$9^1\equiv 9[11]$
$n=2$	$9^2\equiv 4[11]$
$n=3$	$9^3\equiv 3[11]$
$n=4$	$9^4\equiv 5[11]$
$n=5$	$9^5\equiv 1[11]$

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$9^n\equiv$	1	9	4	3	5	[11]

2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2011^{2012} على 11 :

لدينا : $2011\equiv 9\,[11]$ و منه : $2011^{2012}\equiv 9^{2012}\,[11]$ أي : $2011^{2012}\equiv 9^{5\times 402+2}\,[11]$

و حسب الجدول نجد : $2011^{2012}\equiv 4\,[11]$ إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2011^{2012} على 11 هو 4 .

3. لنبرهن أن العدد $2011^{2012}+4\times 2011^{10n}+4\times 9^{15n+1}$ يقبل القسمة على 11 :

لدينا : $9^{15n+1}=9^{5\times(3n)}\times 9\equiv 9\,[11]$ و منه : $4\times 9^{15n+1}\equiv 36\,[11]$ أي : $4\times 9^{15n+1}\equiv 3\,[11]$

و $2011\equiv 9\,[11]$ و منه :

$$\begin{aligned} 2011^{10n} &\equiv 9^{10n}\,[11] \\ &\equiv 9^{5\times(2n)}\,[11] \\ &\equiv 1\,[11] \end{aligned}$$

أي : $4\times 2011^{10n}\equiv 4\,[11]$ إذن :

$$4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}\equiv 3+4+4\,[11]\equiv 11\,[11]\equiv 0\,[11]$$

و بالتالي العدد $4\times 9^{15n+1}+4\times 2011^{10n}+2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11 .

4. نفرض أن $(2011^{2012}+2n+2)$ مضاعفا للعدد 11 أي :

$$2011^{2012}+2n+2\equiv 0\,[11]$$

تكافئ $4+2n+2\equiv 0\,[11]$

تكافئ $2(n+3)\equiv 0\,[11]$

حسب غوص $n+3\equiv 0\,[11]$

تكافئ $n\equiv -3\,[11]$

و منه : $n\equiv 8\,[11]$ أي : $n=11k+8$ مع $\mathbb{N}$.

حل التمرين 7:

إضغط على "7" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ نشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم إيجاد العلاقة بين x و y :

لدينا : $(5x^2+6)(x+1)=5x^3+5x^2+6x+6=A$

لدينا : $A=(5x^2+6)(2+2y)$ و منه : $5x^3+5x^2+6x+6=(5x^2+6)(2+2y)$

و منه : $(5x^2+6)(x+1)=(5x^2+6)(2+2y)$ أي : $x+1=2+2y$ إذن : $x=2y+1$.

ب/ حساب x و y :

لدينا : $x=2y+1$ و منه $x\equiv 1\,[2]$ و كون $x>6$ و x عدد أولي أقل من 12 فإن : $x\in\{7;11\}$

و بالتالي : $(x;y)=(7;3)$ أو $(x;y)=(11;5)$

- من أجل : $x=7$ فإن : $A=5\times 7^3+5\times 7^2+6\times 7+6=2008$
- من أجل : $x=11$ فإن : $A=5\times 11^3+5\times 11^2+6\times 11+6=7332$

2.

أ/ تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 :

نحلل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية :

لدينا :
$$\begin{array}{r|l} 584 & 2 \\ 292 & 2 \\ 146 & 2 \\ 73 & 73 \\ 1 & \end{array}$$
ومنه: $584 = 2^3 \times 73$ و منه الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584 هي 1 و 2 .

ب/ لدينا : $(*)\cdots\begin{cases} a+b=32\cdots(1) \\ a^2+b^2=584\cdots(2) \end{cases}$

بتربيع طرفي المعادلة (1) نجد : $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 1024\cdots(3)$

و بتعويض (2) في (3) نحصل على : $584+2ab=1024$ أي : $ab=220$

و منه الجملة $(*)$ تصبح مكافئة لـ : $\begin{cases} a+b=32 \\ ab=220 \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} b=32-a \\ a(32-a)=220 \end{cases}$

تكافئ : $\begin{cases} b=32-a \\ a^2-32a+220=0 \end{cases}$ ،$\Delta=144$ إذن : $\begin{cases} a_1=10 \\ a_2=22 \end{cases}$ و $\begin{cases} b_1=22 \\ b_2=10 \end{cases}$

و بما أن : $a>b$ فإن : $(a;b)=(22;10)$

حل التمرين 8:

إضغط على "8" للعودة إلى التمرين

1. لدينا : $PGCD(5;3)=1$ أي 5 و 3 أوليان فيما بينهما ، و منه المعادلة (1)

تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$. " أنظر إلى حل معادلات من الشكل $ax+by=c$ "

2. لدينا : $(x;y)$ حل للمعادلة أي : $5x-3y=2$ و منه : $2x-2=3y-3x$ و منه : $2(x-1)=3(y-x)$

أي : $\begin{cases} 3\mid 2(x-1) \\ PGCD(3;2)=1 \end{cases}$ و منه حسب مبرهنة غوص فإن : $3\mid(x-1)$ أي : $x-1\equiv 0\,[3]$ إذن :

$x\equiv 1\,[3]$

3. لدينا من السؤال السابق $x\equiv 1\,[3]$ إذن : $x=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ثم بتعويض x في المعادلة (1) نجد : $5x-3y=5(3k+1)-3y=15k+5-3y=2$

أي : $y=5k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

و منه حلول المعادلة (1) هي : $S=\{(3k+1;5k+1)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4. أ/ نضع : $PGCD(x;y)=d$ و $PGCD(x;2)=d'$

إذن : $\begin{cases} d\mid x \\ d\mid y \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} d\mid x \\ d\mid 5x-3y \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} d\mid x \\ d\mid 2 \end{cases}$

إذن : $d\mid PGCD(x;2)$ و منه : $d\mid d'$

و من جهة : $\begin{cases} d'\mid x \\ d'\mid 2 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} d'\mid x \\ d'\mid x+2k \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} d'\mid x \\ d'\mid y \end{cases}$

تمارين محلولة

إذن : $d' \mid PGCD(x;y)$ و منه : $d' \mid d$

إذن بما أن : $d \mid d'$ و $d' \mid d$ فإن : $d = d'$

ب/ من السؤال السابق : $d \mid 2$ و منه القيم الممكنة لـ: $PGCD(x;y) = d$ هي: $\{1;2\}$.

جـ/ لدينا : $PGCD(x;y) = 2$ و منه : $\begin{cases} x \equiv 0\,[2] \\ y \equiv 0\,[2] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 3k+1 \equiv 0\,[2] \\ 5k+1 \equiv 0\,[2] \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} k \equiv 1\,[2] \\ k \equiv 1\,[2] \end{cases}$ و منه : $k = 2l+1$

و بالتالي حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x;y) = 12$

هي : $S = \{(6l+4; 10l+6)\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

حل التمرين 9:

إضغط على "9" للعودة إلى التمرين

لدينا : $n = \overline{11\alpha00}^{7} = 1 \times 7^4 + 1 \times 7^3 + \alpha \times 7^2$ و منه: $n = 2744 + 49\alpha$ حيث : $0 \le \alpha \le 6$

1. تعيين قيمة α :

بما أن n يقبل القسمة على 3 فإن : $n \equiv 0\,[3]$ تكافئ : $2744 + 49\alpha \equiv 0\,[3]$

تكافئ : $2 + \alpha \equiv 0\,[3]$ تكافئ : $\alpha \equiv -2\,[3]$ تكافئ : $\alpha \equiv 1\,[3]$ أي : $\alpha \in \{1;\ 4\}$.

2. تعيين قيمة α :

بما أن n يقبل القسمة على 5 فإن : $n \equiv 0\,[5]$ تكافئ : $2744 + 49\alpha \equiv 0\,[5]$

تكافئ : $4 + 4\alpha \equiv 0\,[5]$ تكافئ : $4(1+\alpha) \equiv 0\,[5]$ تكافئ : $1 + \alpha \equiv 0\,[5]$ تكافئ : $\alpha \equiv -1\,[5]$

تكافئ : $\alpha \equiv 4\,[5]$ أي : $\alpha = 4$.

3. من السؤال الأول و الثاني نستنتج أن n يقبل القسمة على 15 إذا وفقط إذا كان : $\alpha = 4$.

4. كتابة العدد n في النظام العشري :

من أجل $\alpha = 4$ نجد : $n = 2744 + 49 \times 4$ إذن : $n = 2940$.

إضغط على "10" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 10:

.1

أ/ لدينا : $PGCD(21;3)=3$ و $78=26\times 3$ أي : $PGCD(21;3)$ يقسم العدد 78 .

إذن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ لدينا : $(x;y)$ حل للمعادلة (E) أي : $3x-21y=78$ تكافئ : $3x=21y+78$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $x=7y+26$

أي : $x\equiv 26[7]$ و بما أن : $26\equiv 5[7]$ فإن : $x\equiv 5[7]$

جـ/ $x\equiv 5[7]$ و منه : $x=7k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ثم بتعويض x في المعادلة (E) نجد :

$$3x-21=3(7k+5)-21y=21k+15-21y=78$$

و منه : $y=k-3$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(7k+5;k-3)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

.2

$n=0$	$5^0\equiv 1[7]$
$n=1$	$5^1\equiv 5[7]$
$n=2$	$5^2\equiv 4[7]$
$n=3$	$5^3\equiv 6[7]$
$n=4$	$5^4\equiv 2[7]$
$n=5$	$5^5\equiv 3[7]$
$n=6$	$5^6\equiv 1[7]$

أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6

" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m\in\mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

ب/ تعيين الثنائيات $(x;y)$:

نعلم أن حلول المعادلة (E) هي : $(x;y)=(7k+5;k-3)$.

و حتى تكون هذه الحلول أعداد طبيعية يكفي وضع $k\geq 3$

و بوضع $k'=k-3$ مع $k'\in\mathbb{N}$ نجد : $k=k'+3$ و بالتالي : $(x;y)=(7k'+26;k')$

بتعويض x و y في : $5^x+5^y\equiv 3\,[7]$ نجد : $5^{7k'}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$ تكافئ :

$$5^{6k'+24+2+k'}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$$
$$5^{6(k'+4)+2+k'}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$$
$$5^{6(k'+4)+2}\times 5^{k'}+5^{k'}\equiv 3\,[7] \quad \text{حيث: } 5^{6(k'+4)+2}\equiv 4\,[7]$$
$$4\times 5^{k'}+5^{k'}\equiv 3\,[7]$$
$$5\times 5^{k'}\equiv 3\,[7]$$
$$5^{k'+1}\equiv 3\,[7]$$

و حسب الجدول نجد : $k'+1=6m+5$ أي : $k'=6m+4$

إذن الثنائيات المطلوبة هي : $(x;y)=(42m+54;6m+4)$ مع $m\in\mathbb{Z}$.

حل التمرين 11:

إضغط على "11" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ لنبين أن : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

لدينا : $\alpha=(2n^2-6n+4)(n+3)-10$ " إستعمل القسمة الإقليدية للتحقق من ذلك "

و منه : $\alpha=(2n^2-6n+4)\beta-10$ ، نضع : $PGCD(\alpha;\beta)=d$ و $PGCD(\beta;10)=d'$.

لدينا : $\begin{cases} d\mid\alpha \\ d\mid\beta \end{cases}$ و منه $\begin{cases} d\mid\alpha \\ d\mid(2n^2-6n+4)\beta \end{cases}$ بالطرح نجد $d\mid 10$ و منه : $d\mid d'$

لدينا : $\begin{cases} d'\mid 10 \\ d'\mid\beta \end{cases}$ و منه $\begin{cases} d'\mid 10 \\ d'\mid(2n^2-6n+4)\beta \end{cases}$ بالطرح نجد $d'\mid\alpha$ و منه : $d'\mid d$

في الأخير : d يقسم d' و d' يقسم d معناه : $d=d'$ أي : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;10)$

ب/ لدينا : $PGCD(\beta;10)=10$ و منه d يقسم 10 إذن : $PGCD(\alpha;\beta)\in\{1;2;5;10\}$

جـ/ تعيين قيم العدد الطبيعي n :

لدينا : $PGCD(\alpha;\beta)=5$ أي : $PGCD(\beta;10)=5$ و منه $5\mid\beta$ أي : $\beta=5k$ مع $k\in\mathbb{N}$

من جهة نلاحظ أن k و 2 أوليان فيما بينهما لأن :

$$PGCD(\beta;10)=5$$
$$PGCD(5k;10)=5$$
$$5PGCD(k;2)=5$$
$$PGCD(k;2)=1$$

معناه k عدد فردي ، أي : $k=2k'+1$

إذن : $\beta = 5k$ و منه $n+3=5k$ و منه $n=5k-3$ أي : $n=5(2k'+1)-3$

إذن : $n=10k'+2$ مع $k' \in \mathbb{N}$

.2

أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 :

$n=0$ $4^0 \equiv 1[11]$

$n=1$ $4^1 \equiv 4[11]$

$n=2$ $4^2 \equiv 5[11]$

$n=3$ $4^3 \equiv 9[11]$

$n=4$ $4^4 \equiv 3[11]$

$n=5$ $4^5 \equiv 1[11]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 5

" أي دور القسمة هو من الشكل $5m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$5m$	$5m+1$	$5m+2$	$5m+3$	$5m+4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	$[11]$

ب/ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n

لدينا : $\begin{cases} 4^{5n}+4^n+n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 1+4^n+n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p+2 ، p \in \mathbb{N} \end{cases}$

و منه : $1+4^{10p+2}+10p+2 \equiv 0[11]$ تكافئ :

$$1+4^{5\times(2p)+2}+10p+2 \equiv 0[11]$$
$$1+5+10p+2 \equiv 0[11]$$
$$2(5p+4) \equiv 0[11]$$
$$5p+4 \equiv 0[11]$$
$$5p \equiv -4[11]$$
$$5p \equiv 7[11]$$
$$10p \equiv 14[11]$$
$$-p \equiv 3[11]$$

و منه $p \equiv -3[11]$ تكافئ $p \equiv 8[11]$ أي : $p=11p'+8$ مع $p' \in \mathbb{N}$.

إذن : $n \equiv 10(11p'+8)+2$ و بالتالي : $n=110p'+82$.

إضغط على "12" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 12:

1. تحقق أن $4 \equiv -3\,[7]$:

لدينا : $4-(-3)=7\equiv 0\,[7]$ و منه : $4\equiv -3\,[7]$.

نبين أن $A_3 \equiv 6\,[7]$:

من أجل $n=3$ لدينا : $A_3 = 2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$

و منه $A_3 \equiv 2^3+3^3+(-3)^3+(-2)^3+(-1)^3\,[7]$ و منه: $A_3 \equiv 2^3+3^3-3^3-2^3-1^3\,[7]$

أي : $A_3\equiv -1\,[7]$ و بالتالي : $A_3\equiv 6\,[7]$.

2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3k$ مع $k\in\mathbb{N}$ "

$n=0$ $\quad 2^0\equiv 1[7]$

$n=1$ $\quad 2^1\equiv 2[7]$

$n=2$ $\quad 2^2\equiv 4[7]$

$n=3$ $\quad 2^3\equiv 1[7]$

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]

-دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6

" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m\in\mathbb{N}$ "

$n=0$ $\quad 3^0\equiv 1[7]$

$n=1$ $\quad 3^1\equiv 3[7]$

$n=2$ $\quad 3^2\equiv 2[7]$

$n=3$ $\quad 3^3\equiv 6[7]$

$n=4$ $\quad 3^4\equiv 4[7]$

$n=5$ $\quad 3^5\equiv 5[7]$

$n=6$ $\quad 3^6\equiv 1[7]$

نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]

-نبين أن A_n+1 يقبل القسمة 7 :

لدينا : $A_n+1=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+1$ و منه $A_n+1\equiv 2^n+3^n+(-3)^n+(-2)^n+(-1)^n+1\,[7]$

بما أن n عدد فردي فإن : $n=2p+1$ مع $p\in\mathbb{N}$.

إذن : $A_{2p+1}+1\equiv 2^{2p+1}+3^{2p+1}+(-3)^{2p+1}+(-2)^{2p+1}+(-1)^{2p+1}+1\,[7]$ و منه : $A_{2p+1}+1\equiv 0\,[7]$

إذن A_n+1 يقبل القسمة 7 .

- بما أن 2011 عدد فردي فإن $A_{2011}+1\equiv 0\,[7]$ و منه : $A_{2011}\equiv -1\,[7]$

أي $A_{2011}\equiv 6\,[7]$ ، إذن باقي قسمة العدد A_{2011} على 7 هو 6 .

3. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 :

لدينا : $A_{1432}\equiv 2^{1432}+3^{1432}+(-3)^{1432}+(-2)^{1432}+(-1)^{1432}\,[7]$

و منه $A_{1432}\equiv 2^{1432}+3^{1432}+3^{1432}+2^{1432}+1^{1432}\,[7]$ و منه $A_{1432}\equiv 2\times 2^{1432}+2\times 3^{1432}+1\,[7]$

أي : $A_{1432}\equiv 2\times 2^{3\times 477+1}+2\times 3^{6\times 238+4}+1\,[7]$ إذن : $A_{1432}\equiv 4+8+1\,[7]$

و بالتالي : $A_{1432}\equiv 6\,[7]$.

حل التمرين 13:

إضغط على "13" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ لدينا :

$$(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)=3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48=3n^3-11n+48$$

بما أن $\left(3n^2-9n+16\right)\in\mathbb{Z}$ فإن $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب/ نبين أن $3n^2-9n+16$ عدد طبيعي غير معدوم :

نقوم بحل المعادلة $3x^2-9x+16=0$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.

لدينا مميز المعادلة : $\Delta=(-9)^2-4(3)(16)=-111<0$ وهذا يعني أن المعادلة ليس لها حلول

و المعامل $a=3>0$ و بالتالي من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $3x^2-9x+16>0$ ، و منه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ العدد $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

.2 نبين أن $PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$:

- ليكن d قاسما للعددين a و b ومنه : $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$ أي : $d \mid bc-a$

إذن d قاسم مشترك للعددين b و $bc-a$.

- نفرض أن d قاسما للعددين b و $bc-a$ ومنه : $\begin{cases} d \mid bc-a \\ d \mid b \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d \mid bc-a \\ d \mid bc \end{cases}$

بالطرح نجد $d \mid a$ إذن d قاسم مشترك للعددين a و b .

في الأخير : مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc-a$

و بالتالي : $PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$.

.2 نبين أن $PGCD(3n^3-11n;n+3) = PGCD(48;n+3)$:

نعوض بـ $a=48$ و $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$ في : $PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$

نجد : $PGCD(3n^3-11n;n+3) = PGCD(48;n+3)$.

.4

أ/ مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي : $\{1;2;3;4;8;12;16;24;48\}$

ب/ لدينا :

$$A = \frac{3n^3-11n}{n+3} = \frac{3n^3-11n+48-48}{n+3} = \frac{(n+3)\left(3n^2-9n+16\right)-48}{n+3} = 3n^2-9n+16-\frac{48}{n+3}$$

و منه يكون A عددا طبيعيا إذا وفقط إذا كان $\frac{48}{n+3}$ عددا طبيعيا و $3n^2-9n+16 \geq \frac{48}{n+3}$

- يكون $\frac{48}{n+3}$ عددا طبيعيا إذا كان $n+3 \mid 48$

و منه : $(n+3) \in \{1;2;3;4;8;12;16;24;48\}$ أي : $n \in \{0;1;3;5;9;13;21;45\}$

نلاحظ أن من أجل $n=1$ يكون $A=-2 \notin \mathbb{N}$ إذن قيم n هي : $\{0;3;5;9;13;21;45\}$.

حل التمرين 14:

إضغط على "14" للعودة إلى التمرين

.1

أ/ لدينا : $2n+27 \equiv 0[n+1]$ ومنه $2n+2+25 \equiv 0[n+1]$ و منه $2(n+1)+25 \equiv 0[n+1]$

أي $25 \equiv 0[n+1]$ معناه $n+1 \mid 25$ أي : $(n+1) \in \{1;5;25\}$ إذن : $n \in \{0;4;24\}$.

ب/ لدينا: $(b-a)(a+b) = 1\times 24 = 2\times 12 = 3\times 8 = 4\times 6$ و بما أن a و b عددان طبيعيان فإن $a+b > b-a$

إذن : $\begin{cases} a+b=24 \\ b-a=1 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=25$ أي $b=\dfrac{25}{2}\notin\mathbb{N}$ "مرفوض"

أو : $\begin{cases} a+b=12 \\ b-a=2 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=14$ أي $b=7$ ، نعوض في إحدى المعادلتين نجد $a=5$

أو : $\begin{cases} a+b=8 \\ b-a=3 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=11$ أي $b=\dfrac{11}{2}\notin\mathbb{N}$ "مرفوض"

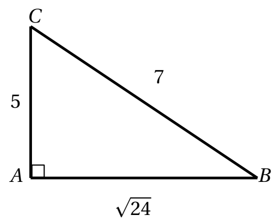
أو : $\begin{cases} a+b=6 \\ b-a=4 \end{cases}$ بالجمع نجد $2b=10$ أي $b=5$ ، نعوض في إحدى المعادلتين نجد $a=1$

إذن : $(a;b)\in\{(5;7),(1;5)\}$

جـ/ لدينا : $(b-a)(a+b)=24$ تكافئ $b^2-a^2=24$ تكافئ $b^2=24+a^2$

أي $b^2=\sqrt{24}^2+a^2$ و منه حسب السؤال السابق $7^2=\sqrt{24}^2+5^2$ أو $5^2=\sqrt{24}^2+1^2$.

- إذن حسب نظرية فيثاغورث فإنه يوجد مثلث قائم طول وتره 7 أو 5 و طول أحد ضلعيه القائمين 5 أو 1 على الترتيب و طول الضلع الآخر $\sqrt{24}$.



$\boxed{7^2=\sqrt{24}^2+5^2}$

.2

أ/ <u>كتابة α و β في النظام العشري :</u>

لدينا : $\alpha=\overline{10141}^5=1\times5^4+0\times5^3+1\times5^2+4\times5^1+1\times5^0$ و منه : $\alpha=671$.

لدينا : $\beta=\overline{3403}^5=3\times5^3+4\times5^2+0\times5^1+3\times5^0$ و منه : $\beta=478$.

ب/ <u>تعيين الثنائيات $(a;b)$:</u>

لدينا : $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} b^2-a^2=24\cdots(1) \\ 671a-478b=9\cdots(2) \end{cases}$ و نعلم أن حلول المعادلة (1) هي : $\{(5;7),(1;5)\}$

و بالتعويض في المعادلة (2) فإن الثنائية الوحيدة التي تحقق هي : $(a;b)=(5;7)$

.3

أ/ لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$\begin{aligned} 2013 &= 1434\times1+579 \\ 1434 &= 579\times2+276 \\ 579 &= 276\times2+27 \\ 276 &= 27\times10+6 \\ 27 &= 6\times4+3 \\ 6 &= 3\times2+0 \end{aligned}$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 3 إذن : $PGCD(2013;1434)=3$

من جهة لدينا : $2013=3\times 671$ و $1434=3\times 478$ فإن : $PGCD(3\times 671;3\times 478)=3$

و بالتالي : $3PGCD(671;478)=3$ إذن : $PGCD(671;478)=1$.

ب/ حل المعادلة :

لدينا : $2013x-1434y=27$ تكافئ : $671x-478y=9$ و حسب ما سبق نعلم أن $(x;y)=(5;7)$ حل خاص للمعادلة .

إذن : $\begin{cases} 671x-478y=9 \\ 671(5)-478(7)=9 \end{cases}$ بالطرح نجد : $671(x-5)-478(y-7)=0$

تكافئ : $671(x-5)=478(y-7)$

- إذن 478 يقسم $671(x-5)$ و $PGCD(671;478)=1$ فإن حسب غوص نجد 478 يقسم $(x-5)$

أي : $x-5=478k$ و منه : $x=478k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

- و 671 يقسم $478(y-7)$ و $PGCD(671;478)=1$ فإن حسب غوص نجد 671 يقسم $(y-7)$

أي : $y-7=671k$ و منه : $y=671k+7$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

إذن حلول المعادلة هي : $(x;y)=(478k+5;671k+7)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

حل التمرين 15:

إضغط على "15" للعودة إلى التمرين

1. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13 :

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 4

" أي دور القسمة هو من الشكل $4k$ مع $k\in\mathbb{N}$ "

$n=0$ $\quad 8^0\equiv 1[13]$

$n=1$ $\quad 8^1\equiv 8[13]$

$n=2$ $\quad 8^2\equiv 12[13]$

$n=3$ $\quad 8^3\equiv 5[13]$

$n=4$ $\quad 8^4\equiv 1[13]$

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$8^n\equiv$	1	8	12	5	[13]

2. لدينا : $138 \equiv 8\,[13]$ و $42 \equiv 3\,[13]$ و $2014 \equiv -1\,[13]$ و بالتالي :

$$\begin{aligned}42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 &\equiv 3 \times 8^{2015} + (-1)^{2037} - 3\,[13]\\ &\equiv 3 \times 8^{4\times 503+3} - 1 - 3\,[13]\\ &\equiv 3 \times 5 - 4\,[13]\\ &\equiv 11\,[13]\end{aligned}$$

و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 هو 11 .

3. لدينا $5 \equiv -8\,[13]$ و بالتالي :

و منه : $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1) \times \left(8^2\right)^n - (-8)^{2n+3}\,[13]$

$\equiv (5n+1) \times 8^{2n} - (-1)^{2n+3} \times 8^{2n+3}\,[13]$ ، "$(-1)^{2n+3} = 1$"

$\equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 8^{2n} \times 8^3\,[13]$

$\equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 8^{2n} \times 5\,[13]$ ، "$8^3 \equiv 5\,[13]$"

$\equiv (5n+1+5) \times 8^{2n}\,[13]$

إذن : $\equiv (5n+6) \times 8^{2n}\,[13]$

4. <u>تعيين قيم n :</u>

لدينا من السؤال السابق $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n}\,[13]$

و لدينا : $PGCD(13;8) = 1$ و منه : $PGCD\left(13;8^{2n}\right) = 1$

إذن : $(5n+6) \times 8^{2n} \equiv 0\,[13]$ يكافئ : $5n+6 \equiv 0\,[13]$ و منه : $5n \equiv -6\,[13]$ و منه : $5n \equiv 7\,[13]$

نضرب الطرفين في 5 نجد : $25n \equiv 35\,[13]$ و منه $-n \equiv -4\,[13]$ إذن : $n \equiv 4\,[13]$

و منه قيم n هي : $n = 13k+4$ مع $k \in \mathbb{N}$.

حل التمرين 16:

إضغط على "16" للعودة إلى التمرين

1. <u>نبين أن العدد 153 حل للجملة (S) :</u>

$\begin{cases}153 = 15 \times 10 + 3\\ 153 = 7 \times 21 + 6\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}153 \equiv 3\,[15]\\ 153 \equiv 6\,[7]\end{cases}$ و بالتالي العدد 153 حل للجملة (S) .

2. لدينا : x حل للجملة (S) معناه $\begin{cases}x \equiv 3\,[15]\\ x \equiv 6\,[7]\end{cases}$ و x_0 حل للجملة (S) معناه $\begin{cases}x_0 \equiv 3\,[15]\\ x_0 \equiv 6\,[7]\end{cases}$

بالطرح نجد : $\begin{cases}x - x_0 \equiv 0\,[15]\\ x - x_0 \equiv 0\,[7]\end{cases}$

تمارين محلولة

3. حل الجملة (S) :

بما أن 153 حل للجملة (S) فحسب السؤال السابق فإن : $\begin{cases} x-153 \equiv 0\,[15] \\ x-153 \equiv 0\,[7] \end{cases}$

و منه : $x-153 \equiv 0\,[15\times 7]$ تكافئ $x \equiv 153\,[105]$ تكافئ $x \equiv 48\,[105]$ إذن: $x = 105k+48$ مع $k \in \mathbb{Z}$

4. تعيين عدد الكتب :

ليكن x هو عدد الكتب .

- إذا إستعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي له 3 كتب ، أي : $x \equiv 3\,[15]$

- إذا إستعمل علبا تتسع لـ 7 كتابا بقي له 6 كتب ، أي : $x \equiv 6\,[7]$

إذن نحصل على $\begin{cases} x \equiv 3\,[15] \\ x \equiv 6\,[7] \end{cases}$ و حسب السؤال السابق فإن : $x = 105k+48$

و بما أن عدد الكتب محصورة بين 500 و 600 فإن : $500 \le 105k+48 \le 600$ مع $k \in \mathbb{N}$

و منه $452 \le 105k \le 552$ أي $4.3 \le k \le 5.25$ إذن : $k=5$

إذن عدد الكتب هو : $x = 105\times 5+48 = 573$.

إضغط على "17" للعودة إلى التمرين

حل التمرين 17:

1.

أ/ لدينا : $\sqrt{2011} \simeq 44.84$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2011}$
هي : 2،3،5،7،11،13،17،19،23،29،31،37،41،43

و بما أن 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد الأولية فإن 2011 عدد أولي .

ب/ تعيين الحل الخاص :

من خوارزمية إقليدس لدينا : $\begin{cases} 2011 = 1432\times 1+569 \\ 1432 = 569\times 2+274 \\ 569 = 274\times 2+31 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} 569 = 2011-1432 \cdots\cdots (1) \\ 274 = 1432-569\times 2 \cdots (2) \\ 31 = 569-274\times 2 \cdots\cdots (3) \end{cases}$

نعوض (1) في (2) نجد : $274 = 1432-(2011-1432)\times 2 = -2\times 2011+3\times 1432 \cdots (4)$

ثم نعوض (1) و (4) في (3) نجد :

$$31 = (2011-1432)-(-2\times 2011+3\times 1432)\times 2 = 2011\times 5-1432\times 7$$

و منه : $2011\times5-1432\times7=31$ إذن الثنائية $(x_0;y_0)=(5;7)$ حل خاص للمعادلة (1) .

حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases}2011x-1432y=31\\2011\times5-1432\times7=31\end{cases}$ بالطرح نجد : $2011(x-5)-1432(y-7)=0$

تكافئ : $2011(x-5)=1432(y-7)$ " لاحظ أن : $PGCD(2011;1432)=1$ "

- لدينا : $\begin{cases}1432\mid2011(x-5)\\PGCD(2011;1432)=1\end{cases}$ حسب غوص نجد $1432\mid(x-5)$ و منه : $x=1432k+5$

- لدينا : $\begin{cases}2011\mid1432(y-7)\\PGCD(2011;1432)=1\end{cases}$ حسب غوص نجد $2011\mid(y-7)$ و منه : $y=2011k+7$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S=\{(1432k+5;2011k+7)\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

.2

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$n=0$	$2^0\equiv1[7]$
$n=1$	$2^1\equiv2[7]$
$n=2$	$2^2\equiv4[7]$
$n=3$	$2^3\equiv1[7]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m\in\mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]

إيجاد باقي قسمة $2011^{1432^{2012}}$ على 7 :

لدينا : $2011\equiv2[7]$ و $1432\equiv1[3]$ و منه : $2011^{1432^{2012}}\equiv2^{1^{2012}}[7]$

و منه : $2011^{1432^{2012}}\equiv2^1[7]\equiv2[7]$ إذن باقي قسمة $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب/ لدينا : $\begin{cases}2010\equiv1[7]\\2011\equiv2[7]\\1432\equiv4[7]\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}2010^n\equiv1[7]\\2011^n\equiv2^n[7]\\1432^n\equiv4^n[7]\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}2010^n\equiv1[7]\\2011^n\equiv2^n[7]\\1432^n\equiv2^{2n}[7]\end{cases}$

بالجمع نجد : $2010^n+2011^n+1432^n\equiv1+2^n+2^{2n}[7]$ و بالتالي :

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]
$2^{2n}\equiv$	1	4	2	[7]
$2^n+2^{2n}\equiv$	2	6	6	[7]
$1+2^n+2^{2n}\equiv$	3	0	0	[7]

إذن من الجدول لدينا : $n\equiv1[3]$ أو $n\equiv2[3]$ أي : $n=3p+1$ أو $n=3p+2$ مع $p\in\mathbb{N}$.

3. تعيين : α ، β و γ

لدينا : $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = 2\times 9^3 + \gamma\times 9^2 + \alpha\times 9^1 + \beta\times 9^0$

و منه : $N = \overline{2\gamma\alpha\beta}^9 = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta$ مع $0 \le \alpha < 9$ و $0 \le \beta < 9$.

و $(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه : $(\beta;\gamma) = (1432k+5; 2011k+7)$

بما أن $0 \le \beta < 9$ فإن : $0 \le 1432k+5 < 9$ أي حتما $k=0$ إذن: $(\beta;\gamma) = (5;7)$

و كون α ، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $\alpha+\gamma = 2\beta$

إذن : $\alpha = 3$ ومنه القيم المطلوبة هي : $(\alpha;\beta;\gamma) = (3;5;7)$

و أيضا : $N = 1458 + 81\gamma + 9\alpha + \beta = 1458 + 81\times 7 + 9\times 3 + 5 = 2057$

حل التمرين 18:

إضغط على "18" للعودة إلى التمرين

1. إيجاد الحل الخاص $(x_0;y_0)$:

لدينا : $x_0 = y_0$ و بالتعويض في المعادلة (E) نجد : $6x_0 - 7x_0 = 19$ و منه : $x_0 = -19$.

إذن الحل الخاص هو : $(x_0;y_0) = (-19;-19)$.

حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6(-19) - 7(-19) = 19 \end{cases}$ بالطرح نجد : $6(x+19) - 7(y+19) = 0$

تكافئ : $6(x+19) = 7(y+19)$ " لاحظ أن : $PGCD(7;6) = 1$ "

- لدينا : $\begin{cases} 7 \mid 6(x+19) \\ PGCD(7;6) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $7 \mid (x+19)$ و منه : $x = 7k - 19$

- لدينا : $\begin{cases} 6 \mid 7(y+19) \\ PGCD(7;6) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $6 \mid (y+19)$ و منه : $y = 6k - 19$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $(x;y) = (7k-19; 6k-19)$.

2. لدينا : $\begin{cases} \lambda \equiv 24\,[7] \\ \lambda \equiv 5\,[6] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda \equiv 24\,[7] \\ \lambda \equiv 5\,[6] \end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases} \lambda = 7x + 24 \\ \lambda = 6y + 5 \end{cases}$

و منه : $6y + 5 = 7x + 24$ تكافئ : $6y - 7x = 19 \cdots (E)$ و حلولها : $(x;y) = (7k-19; 6k-19)$

و منه قيم λ هي : $\lambda = 6x + 5 = 6(7k-19) + 5 = 42k - 109$ مع $k \in \mathbb{Z}$

من جهة لدينا : $\lambda = 42k - 109$ ومنه : $\lambda \equiv -109\,[42]$ وبإضافة الترديد 3 مرات نجد : $\lambda \equiv 17\,[42]$

و منه باقي قسمة λ على 42 هو 17 .

3. بما أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه : $(x;y)=(7k-19;6k-19)$.

لدينا : $|x+y-1|\le 13$ و منه $|7k-19+6k-19-1|\le 13$ أي $|13k-39|\le 13$

و منه $-13\le 13k-39\le 13$ ومنه $26\le 13k\le 52$ و بالتالي : $2\le k\le 4$

و منه الثنائيات هي : $(x;y)\in\{(-5;-7),(2;-1),(9;5)\}$

4. أ/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 :

$n=0$ $5^0\equiv 1[7]$
$n=1$ $5^1\equiv 5[7]$
$n=2$ $5^2\equiv 4[7]$
$n=3$ $5^3\equiv 6[7]$
$n=4$ $5^4\equiv 2[7]$
$n=5$ $5^5\equiv 3[7]$
$n=6$ $5^6\equiv 1[7]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6

" أي دور القسمة هو من الشكل $6m$ مع $m\in\mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$6m$	$6m+1$	$6m+2$	$6m+3$	$6m+4$	$6m+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

ب/ لدينا $2020\equiv 4\,[7]$ و $1437\equiv 3\,[6]$

و منه : $\begin{cases} n-5^n\equiv 2020\,[7] \\ n\equiv 1437\,[6]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n-5^n\equiv 4\,[7] \\ n\equiv 3\,[6]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n-5^n\equiv 4\,[7] \\ n=6l+3 \text{ ، } l\in\mathbb{N}\end{cases}$

و منه : $\begin{cases} n-6\equiv 4\,[7] \\ n=6l+3\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n\equiv 10\,[7] \\ n\equiv 3\,[6]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n\equiv 3\,[7] \\ n\equiv 3\,[6]\end{cases}$

و منه : $n\equiv 3\,[42]$ و بالتالي مجموعة قيم n هي : $n=42p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 19:

إضغط على "19" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ حساب $PGCD(2013;1962)$:

لدينا باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$2013=1962\times 1+51$$
$$1962=51\times 38+24$$
$$51=24\times 2+3$$
$$24=3\times 8+0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 3 إذن : $PGCD(2013;1962)=3$

ب/ لدينا : $54 = 3 \times 18$ إذن بما أن $PGCD(2013;1962) = 3$ يقسم العدد 54

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

جـ/ الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه : $2013x - 1962y = 54$

تكافئ $2013x = 54 + 1962y$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $671x = 18 + 654y$

تكافئ $671x = 6(3+109y)$ معناه : $6 \mid 671x$ لكن 671 و 6 أوليان فيما بينهما

لأن باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$671 = 6 \times 111 + 5$$
$$6 = 5 \times 1 + 1$$
$$5 = 1 \times 5 + 0$$

فإن آخر باقي غير معدوم هو 1 إذن : $PGCD(671;6) = 1$

و بالتالي حسب غوص فإن : $6 \mid x$ و منه : $x \equiv 0\,[6]$.

د/ لدينا : $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) فحسب السؤال السابق $x_0 \equiv 0\,[6]$

ومنه : $x_0 = 6k$ مع $k \in \mathbb{N}$ حيث : $74 < x_0 < 80$ و منه $74 < 6k < 80$

بقسمة أطراف المتراجحة على 6 نجد : $12.33 < k < 13.33$ أي حتما : $k = 13$

و منه $x_0 = 6k = 6 \times 13 = 78$ ثم بتعويض x_0 في المعادلة (E) نجد : $y_0 = 80$

و منه الحل الخاص هو : $(x_0;y_0) = (78;80)$.

حل المعادلة :

لدينا : $\begin{cases} 2013x - 1962y = 54 \\ 2013(78) - 1962(80) = 54 \end{cases}$ بالطرح نجد : $2013(x-78) - 1962(y-80) = 0$

تكافئ : $2013(x-78) = 1962(y-80)$ بقسمة الطرفين على 3 نجد : $671(x-78) = 654(y-80)$

حيث : $PGCD(671;654) = 1$

- لدينا $\begin{cases} 654 \mid 671(x-78) \\ PGCD(671;654) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $654 \mid (x-78)$ و منه $x = 654k + 78$

- لدينا $\begin{cases} 671 \mid 654(y-80) \\ PGCD(671;654) = 1 \end{cases}$ حسب غوص نجد $671 \mid (y-80)$ و منه $y = 671k + 80$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $(x;y) = (654k+78;671k+80)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

.2

أ/ لدينا $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $2013x - 1962y = 54$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

نجد $671x - 654y = 18$ و $d = PGCD(x;y)$ معناه $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$ و منه $\begin{cases} d \mid 671x \\ d \mid 654y \end{cases}$

أي : $d \mid 671x - 654y$ إذن : $d \mid 18$ و بالتالي القيم الممكنة لـ d هي : $d \in \{1;2;3;6;9;18\}$.

ب/ لدينا : $PGCD(a;b)=18$ و منه : $\begin{cases}18 \mid a\\ 18 \mid b\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}a=18a'\\ b=18b'\end{cases}$ حيث : $PGCD(a';b')=1$

و لدينا : $671a-654b=18$ تكافئ : $671\times18a'-654\times18b'=18$ أي : $671a'-654b'=1\cdots(*)$.

بما أن 671 و 654 أوليان فيما بينهما ، فتوجد ثنائية $(a';b')$ تحقق $(*)$

من خوارزمية إقليدس لدينا : $\begin{cases}671=654\times1+17\\ 654=17\times38+8\\ 17=8\times2+1\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}17=671-654\cdots\cdot(1)\\ 8=654-17\times38\cdot\cdot(2)\\ 1=17-8\times2\cdots\cdots(3)\end{cases}$

نعوض (1) في (2) نجد : $8=654-(671-654)\times38=-38\times671+39\times654\cdots(4)$

ثم نعوض (1) و (4) في (3) نجد :

$$1=(671-654)-(-38\times671+39\times654)\times2=671\times77-654\times79$$

و منه : $1=671\times77-654\times79$ إذن الثنائية $(a'_0;b'_0)=(77;79)$ حل خاص للمعادلة $(*)$.

لدينا : $\begin{cases}671a'-654b'=1\\ 671\times77-654\times79=1\end{cases}$ بالطرح نجد : $671\times(a'-77)-654\times(b'-79)=0$

تكافئ : $671\times(a'-77)=654\times(b'-79)$ حيث : $PGCD(671;654)=1$

- لدينا $\begin{cases}654 \mid 671\times(a'-77)\\ PGCD(671;654)=1\end{cases}$ حسب غوص نجد $654 \mid (a'-77)$ و منه $a'=654k'+77$

- لدينا $\begin{cases}671 \mid 654\times(b'-79)\\ PGCD(671;654)=1\end{cases}$ حسب غوص نجد $671 \mid (b'-79)$ و منه $b'=671k'+79$

و بالتالي : $\begin{cases}a=18a'\\ b=18b'\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}a=11772k'+1386\\ b=12078k'+1422\end{cases}$

و منه قيم العددين الطبيعيين a و b هي : $(a;b)=(11772k'+1386;12078k'+1422)$ مع $k'\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 20:

إضغط على "20" للعودة إلى التمرين

1.

أ/ لدينا : $5(6n+2)-3(10n+3)=30n+10-30n-9=1$ و منه : $(6n+2;10n+3)$ حلا للمعادلة (E)

ب/ حسب السؤال السابق بما أنه توجد ثنائية $(5;-3)$ حيث $(6n+2)(5)+(10n+3)(-3)=1$

فحسب مبرهنة بيزو فإن $10n+3$ و $6n+2$ أوليان فيما بينهما .

2.

أ/ لدينا : $\begin{cases}d \mid a\\ d \mid b\end{cases}$ و منه $\begin{cases}d \mid 3a\\ d \mid 10b\end{cases}$ معناه $d \mid 10b-3a$

أي $d \mid 41$ و بما أن 41 عدد أولي فإن : $d=1$ أو $d=41$.

ب/ لدينا : $PGCD(a;b)=41$ و منه $\begin{cases} 41 \mid a \\ 41 \mid b \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} a\equiv 0\,[41] \\ b\equiv 0\,[41] \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 10n+3\equiv 0\,[41] \\ 3n+5\equiv 0\,[41] \end{cases}$ بالطرح نجد : $7n-2\equiv 0\,[41]$ أي : $7n\equiv 2\,[41]$

بالضرب في 6 نجد $6\times 7n\equiv 6\times 2\,[41]$ أي $42n\equiv 12\,[41]$ و منه : $n\equiv 12\,[41]$

.3

أ/ بالقسمة الإقليدية للعددين A و B على $2n+3$ نجد: $A=(2n+3)(10n+3)$ و $B=(2n+3)(3n+5)$

ب/ لدينا :

$$\begin{aligned} PGCD(A;B) &= PGCD((2n+3)(10n+3);(2n+3)(3n+5)) = (2n+3)\,PGCD((10n+3);(3n+5)) \\ &= (2n+3)\,PGCD(a;b) \end{aligned}$$

- إذا كان : $PGCD(a;b)=41$ أي : $PGCD(A;B)=41(2n+3)$ حيث $n\equiv 12\,[41]$

أي $n=41k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$.

- إذا كان : $PGCD(a;b)=1$ أي : $PGCD(A;B)=2n+3$ حيث $n\neq 41k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$.

حل التمرين 21:

إضغط على "21" للعودة إلى التمرين

.1

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$n=0$	$2^0\equiv 1[7]$
$n=1$	$2^1\equiv 2[7]$
$n=2$	$2^2\equiv 4[7]$
$n=3$	$2^3\equiv 1[7]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m\in\mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]

ب/ إيجاد باقي قسمة $1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}$ على 7 :

لدينا : $1962\equiv 2\,[7]$ و $1954\equiv 1\,[7]$ و $2015\equiv 6\,[7]$ و بالتالي :

$$\begin{aligned} 1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53} &\equiv 2^{1954}-1^{1962}+6^{53}\,[7] \\ &\equiv 2^{3\times 651+1}-1+(-1)^{53}\,[7] \\ &\equiv 2-1-1\,[7] \\ &\equiv 0\,[7] \end{aligned}$$

و منه باقي القسمة الإقليدية للعدد $2015^{53}+1954^{1962}-1962^{1954}$ على 7 هو 0 .

.2

أ/ لدينا : $\sqrt{89}\simeq 9.43$ و منه الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{89}$ هي : 2،3،5،7

و بما أن 89 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد الأولية فإن 89 عدد أولي .

ب/ نحلل العدد 7832 إلى جداء عوامل أولية :

لدينا : $\begin{array}{r|l} 7832 & 2 \\ 3916 & 2 \\ 1958 & 2 \\ 979 & 11 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$ ومنه: $7832=2^3\times 11\times 89$ و بالتالي عدد قواسم العدد 7832

هي : $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ و هي كالآتي :

$$D_{7832}=\{1;2;4;8;11;22;44;88;89;178;356;712;979;1958;3916;7832\}$$

جـ بإستعمال خوارزمية إقليدس :

$$\begin{cases} 981=977\times 1+4 \\ 977=244\times 4+1 \\ 4=4\times 1+0 \end{cases}$$

نلاحظ أن آخر باقي غير معدوم هو 1 ، و منه $PGCD(981;977)=1$

و بالتالي العددان 981 و 977 أوليان فيما بينهما .

.3 لدينا : $PGCD(x;y)=2$ و منه : $\begin{cases} 2\mid x \\ 2\mid y \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=2x' \\ y=2y' \end{cases}$ حيث : $PGCD(x';y')=1$

و لدينا : $\begin{cases} x^2-y^2=31328 \\ x-y\equiv 8\,[22] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 4x'^2-4y'^2=31328 \\ 2x'-2y'\equiv 8\,[22] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x'^2-y'^2=7832 \\ x'-y'\equiv 4\,[11] \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} (x'+y')(x'-y')=7832 \\ x'-y'\equiv 4\,[11] \end{cases}\cdots(*)$ و بما أن x' و y' عددان طبيعيان فإن : $x'+y'>x'-y'$

لدينا :

$$7832=7832\times 1=3916\times 2=1958\times 4=979\times 8=712\times 11=356\times 22=178\times 44=89\times 88$$

نلخص جميع الحالات في الجدول التالي :

$x'+y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	
$x'-y'$	1	2	4	8	11	22	44	88	
$x'-y'\equiv$	1	2	4	8	0	0	0	0	[11]

من الجدول نلاحظ أن الحالة الوحيدة التي تحقق الجملة $(*)$ هي لما : $\begin{cases} x'+y'=1958 \\ x'-y'=4 \end{cases}$

بالجمع نجد $2x'=1962$ أي : $x'=981$ ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد : $y'=977$

و منه في الأخير : $\begin{cases} x=2x'=1962 \\ y=2y'=1954 \end{cases}$ إذن : $(x;y)=(1962;1954)$.

.4

أ/ لدينا :

- a أولي مع b معناه يوجد عددين صحيحين α و β حيث $\alpha a+\beta b=1$

- a أولي مع c معناه يوجد عددين صحيحين α' و β' حيث $\alpha' a+\beta' c=1$.

و منه :

$$(\alpha a+\beta b)(\alpha' a+\beta' c)=\alpha\alpha' a^2+\alpha\beta' ac+\beta\alpha' ab+\beta\beta' bc=(\alpha\alpha' a+\alpha\beta' c+\beta\alpha' b)a+(\beta\beta')bc=1$$

و بالتالي حسب مبرهنة بيزو فإن a أولي مع $b\times c$.

ب/ نتحقق من الخاصية من أجل $n=1$ لدينا $PGCD(a;b^1)=PGCD(a;b)=1$
لأن a أولي مع b . و منه فهي محققة .

نفرض أن الخاصية محققة من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ و نبين صحتها من أجل $n+1$

أي نبين أن $PGCD(a;b^n)=1$

من الفرض لدينا a أولي مع b^n و a أولي مع b إذن حسب السؤال السابق a أولي مع $b^n\times b$
و بالتالي : $PGCD(a;b^{n+1})=1$ و منه المطلوب .

جـ/ لدينا :

$$1962^{1954}=(2\times 981)^{1954}=2^{1954}\times 981^{1954}$$
$$1954^{1962}=(2\times 977)^{1962}=2^{1962}\times 977^{1962}=2^{1954}\times 2^8\times 977^{1962}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}PGCD(1962^{1954};1954^{1962})&=PGCD(2^{1954}\times 981^{1954};2^{1954}\times 2^8\times 977^{1962})\\&=2^{1954}PGCD(981^{1954};2^8\times 977^{1962})\end{aligned}$$

و بالتالي حسب ما سبق $PGCD(981;977)=1$ فإن $PGCD(981^{1954};977^{1962})=1\cdots(1)$.

و كون 2 لايقسم 981 فإن $PGCD(981;2)=1$ و بالتالي : $PGCD(981^{1954};2^8)\cdots(2)$

في الأخير من (1) و (2) و حسب السؤال **.4**أ/ فإن : $PGCD(981^{1954};2^8\times 977^{1962})=1$

و بالتالي : $PGCD(1962^{1954};1954^{1962})=2^{1954}\times 1=2^{1954}$.

تمارين محلولة

حل التمرين 22:

1.

أ/ تعيين بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 :

$n=0$	$2^0 \equiv 1[7]$
$n=1$	$2^1 \equiv 2[7]$
$n=2$	$2^2 \equiv 4[7]$
$n=3$	$2^3 \equiv 1[7]$

نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3

" أي دور القسمة هو من الشكل $3m$ مع $m \in \mathbb{N}$ "

- نلخص هذه الموافقات في الجدول الآتي:

n	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	
$2^n \equiv$	1	2	4	[7]

ب/ إستنتاج باقي قسمة 1444^{2023} على 7 :

لدينا $1444 \equiv 2\,[7]$ و منه :

$$\begin{aligned}1444^{2023} &\equiv 2^{2023}\,[7]\\ &\equiv 2^{3\times 674+1}\,[7]\\ &\equiv 2\,[7]\end{aligned}$$

و منه باقي قسمة 1444^{2023} على 7 هو 2 .

جـ/ تعيين قيم n :

لدينا : $1444^{3n+1} \equiv 2^{3n+1}\,[7]$ و منه $1444^{3n+1} \equiv 2\,[7]$ و أيضا : $1962n \equiv 2n\,[7]$

ومنه $1444^{3n+1} + 1962n \equiv 0\,[7]$ تكافئ $2+2n \equiv 0\,[7]$ أي : $2(n+1) \equiv 0\,[7]$

و بالتالي : $n+1 \equiv 0\,[7]$ أي $n \equiv 6\,[7]$ و منه : $n = 7k+6$ مع $k \in \mathbb{N}$.

2. بما أن : $7\times 4 - 6\times 4 = 4$ فإن الثنائية $(4;4)$ حل للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases} 7x-6y=4 \\ 7\times(4)-6\times(4)=4 \end{cases}$ بالطرح نجد $7(x-4)-6(y-4)=0$ تكافئ $7(x-4)=6(y-4)$

- لدينا : $\begin{cases} 6 \mid 7(x-4) \\ PGCD(7;6)=1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $6 \mid (x-4)$ و منه $x=6p+4$

- لدينا : $\begin{cases} 7 \mid 6(y-4) \\ PGCD(7;6)=1 \end{cases}$ فحسب غوص نجد $7 \mid (y-4)$ و منه $y=7p+4$

و منه مجموعة الحلول هي : $S=\{(6p+4;7p+4)\}$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

3. تعيين الثنائيات $(x;y)$:

لدينا $(x;y)$ حلول المعادلة (E) معناه $\begin{cases} x=6p+4 \\ y=7p+4 \end{cases}$

لدينا : $2^{3x}+2^{y}\equiv 3\,[7]$ تكافئ : $1+2^{7p+4}\equiv 3\,[7]$ تكافئ : $2^{7p}\times 2^{4}\equiv 2\,[7]$ تكافئ : $(2^{7})^{p}\times 2\equiv 2\,[7]$

و منه : $(2)^{p}\equiv 1\,[7]$ و من جدول الموافقات نجد $p=3m$

بالتعويض في x و y نجد الثنائيات هي : $(x;y)=(18m+4;21m+4)$ مع $m\in\mathbb{Z}$.

حل التمرين 23:

إضغط على "23" للعودة إلى التمرين

.1

أ/ بما أن : $16\times 6+361\times 2=818$ فإن الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases}16x+361y=818\\ 16\times(6)+361\times(2)=818\end{cases}$ بالطرح نجد $16(x-6)+361(y-2)=0$

تكافئ $16(x-6)=361(2-y)$

- لدينا : $\begin{cases}361\mid 16(x-6)\\ PGCD(361;16)=1\end{cases}$ فحسب غوص نجد $361\mid(x-6)$ و منه $x=361p+6$

- لدينا : $\begin{cases}16\mid 361(2-y)\\ PGCD(361;16)=1\end{cases}$ فحسب غوص نجد $16\mid(2-y)$ و منه $y=2-16p$

و منه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(361p+6;2-16p)\}$ مع $p\in\mathbb{Z}$.

ب/ لدينا : $|x+23y|\le 4$ ومنه $|361p+6+23(2-16p)|\le 4$ تكافئ $|361p+6+46-368p|\le 4$

و منه $|52-7p|\le 4$ أي $-4\le 52-7p\le 4$ أي $-56\le -7p\le -48$ و منه $6.85\le p\le 8$

و بالتالي : $p\in\{7;8\}$

و منه من أجل $p=7$ نجد : $(x;y)=(2533;-110)$ و من أجل $p=8$ نجد : $(x;y)=(2894;-126)$

و منه الثنائيات هي : $(x;y)\in\{(2533;-110),(2894;-126)\}$.

.2 لدينا : $P=5\times 7^{3}+\alpha\times 7^{2}+\beta\times 7^{1}+0\times 7^{0}=1715+7\beta+49\alpha$

لدينا : $P=\beta\times 9^{3}+\alpha\times 9^{2}+8\times 9^{1}+7\times 9^{0}=79+729\beta+81\alpha$

لدينا :

$$79+729\beta+81\alpha=1715+7\beta+49\alpha$$
$$81\alpha-49\alpha+729\beta-7\beta=1715-79$$
$$32\alpha+722\beta=1636$$

بالقسمة على 2 نجد : $16\alpha+361\beta=818$

و منه حسب ما سبق : $\alpha=361p+6$ و $\beta=2-16p$ مع $p\in\mathbb{Z}$.

و لدينا : $\begin{cases}0\le\alpha\le 6\\ 0\le\beta\le 6\end{cases}$ أي $\begin{cases}0\le 361p+6\le 6\\ 0\le 2-16p\le 6\end{cases}$ أي حتما $p=0$

و عليه : $\alpha=6$ و $\beta=0$.

و بالتالي : $P=79+729\times 2+81\times 6=2023$

.3

أ/ <u>تحليل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية :</u>

لدينا : $\begin{array}{r|l} 2023 & 7 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ ومنه: $2023 = 7 \times 17^2$

إذن من المساواة $2023 = 7 \times 17^2$ نستنتج أنه يوجد عددان طبيعيان مربع كل منهما يقسم 2023 هما 1 و 17 .

ب/ لدينا : $m^2 + 3d^2 = 2023 \cdots (1)$

$PGCD(a;b) = d$ أي $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \end{cases}$ حيث $PGCD(a';b') = 1$

و لدينا : $d \times m = a \times b$ و بالتالي $d \times m = d \times a' \times d \times b'$ أي $m = d a' b' \cdots (2)$

بتعويض (2) في (1) نجد :

$$\begin{aligned} (d a' b')^2 + 3d^2 &= 2023 \\ d^2 (a' b')^2 + 3d^2 &= 2023 \\ d^2 \left[(a' b')^2 + 3 \right] &= 2023 \cdots (*) \end{aligned}$$

نستنتج أن d^2 يقسم 2023 و حسب السؤال السابق نستنتج أن $d \in \{1; 17\}$

- لما $d = 1$: المساواة $(*)$ تصبح $(a'b')^2 + 3 = 2023$ أي $(a'b') = \sqrt{2020} \notin \mathbb{N}$ " مرفوضة"

- لما $d = 17$: المساواة $(*)$ تصبح $(a'b')^2 + 3 = 7$ أي $(a'b')^2 = 4$

و منه $a'b' = 2$ و بالتالي : $(a';b') \in \{(1;2),(2;1)\}$

- و منه نستنتج أن : $(a;b) \in \{(17;34),(34;17)\}$.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيمِ

وَأَنفِقوا مِن ما رَزَقناكُم مِن قَبلِ أَن يَأتِيَ أَحَدَكُمُ المَوتُ فَيَقولَ رَبِّ لَولا أَخَّرتَني إِلىٰ أَجَلٍ قَريبٍ فَأَصَّدَّقَ وَأَكُن مِنَ الصّالِحينَ ﴿١٠﴾

"سورة المنافقون"

۞ الحمد لله الذي وفقنا لإتمام هذا الكتاب ۞