I تذكير حول الدوال

1 مجموعة تعريف دالة

تعريف

مجموعة تعريف الدالة f هي مجموعة القيم المتغير الحقيقي x التي لها صورة بالدالة f، و نرمز لها بالرمز D_f

ملاحظة

- نسمي x سابقة $f(x)$ بالدالة f.
- نسمي $f(x)$ صورة x بالدالة f حيث $f(x) = y$.
- يجب التمييز بين الدالة f و العدد الحقيقي $f(x)$.

مثال تطبيقي

عين مجموعة تعريف الدوال التالية :

❶ $f_1 : x \longrightarrow \dfrac{5x-1}{x-1}$ ❷ $f_2 : x \longrightarrow \sqrt{1-x}$ ❸ $f_3 : x \longrightarrow \sin(x)$

❹ $f_4 : x \longrightarrow \cos(x)$ ❺ $f_5 : x \longrightarrow 3x^2 - 3x + 7$ ❻ $f_6 : x \longrightarrow \tan(x)$

2 إتجاه تغير دالة على مجال

تعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

★ f دالة متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$

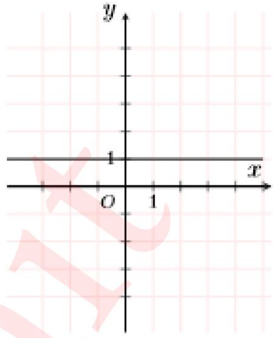
★ f دالة متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$

★ f دالة ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) = f(x_2)$

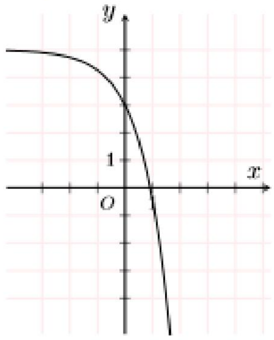
ملاحظة

❖ إذا كانت الدالة f متزايدة تماما أو متناقصة تماما على مجال I نقول أنها رتيبة تماما على I.

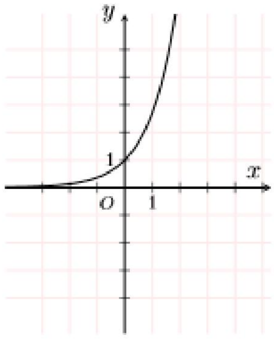
دالة ثابتة



دالة متناقصة تماما



دالة متزايدة تماما



3 التمثيل البياني لدالة

تعريف

f دالة و D هي مجموعة تعريفها.

✍ التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) لدالة f في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث :

$$x \in D \text{ و } y = f(x)$$

✍ إذا رمزنا إلى منحنى f بالرمز (C) فإن $y = f(x)$ هي معادلة (C) في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

تمرين تطبيقي

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 + 4x + 3$

❶ أوجد صور الأعداد $0; -1; 2-$

❷ أحسب سوابق العددين 3 و $1-$

❸ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = (x+a)^2 - 1$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه .

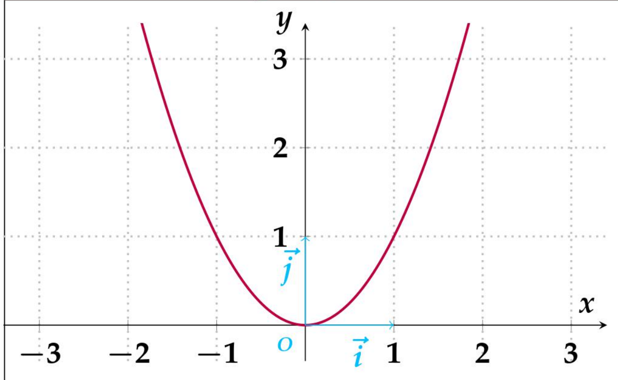
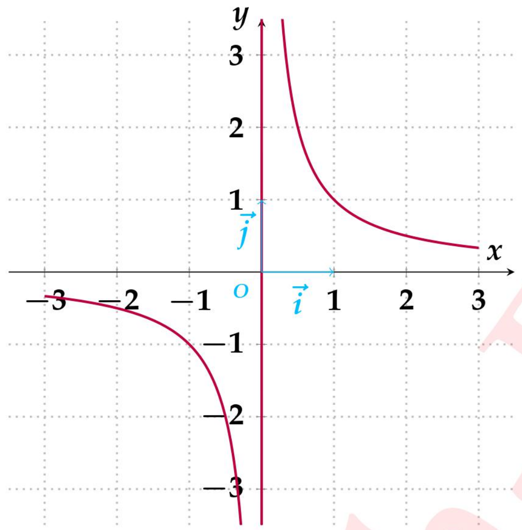
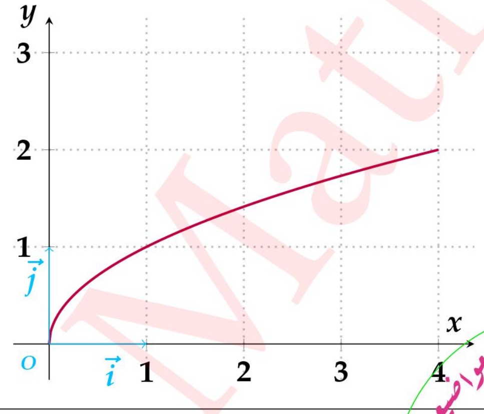
❹ هل يقبل العدد $2-$ سوابق بالدالة f ؟

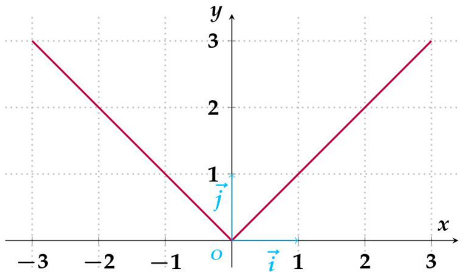
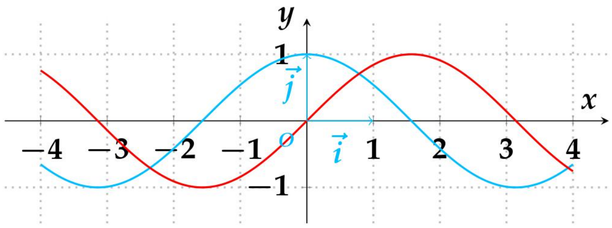
❺ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

❻ أحسب $f(7)$ و تأكد أن $f(-2) \leq f(x) \leq f(7)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2,7]$

4 الدوال المرجعية

نلخص في الجدول الموالي تذكيرا ببعض الدوال المرجعية التي درست في السنة الأولى :

الدالة	اتجاه التغير	التمثيل البياني
الدالة مربع $f: x \mapsto x^2$	❖ f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ إذا كان $x_1 < x_2 \leq 0$ فإن $x_1^2 > x_2^2$ ❖ f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ إذا كان $0 \leq x_1 < x_2$ فإن $x_1^2 < x_2^2$	
الدالة مقلوب $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ إذا كان $x_1 < x_2 < 0$ فإن $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ ❖ f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ إذا كان $0 < x_1 < x_2$ فإن $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ ❖ f متناقصة تماما على المجال	
الدالة الجذر التربيعي $f: x \mapsto \sqrt{x}$	❖ f متناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ إذا كان $0 \leq x_1 < x_2$ فإن $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$	

الدالة القيمة المطلقة $f : x \mapsto \lvert x \rvert$	❖ f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ إذا كان $x_1 < x_2 < 0$ فإن $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$ ❖ f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذا كان $0 < x_1 < x_2$ فإن $\lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert$	
الدالتان جيب و جيب تمام $f : x \mapsto \cos x$ $g : x \mapsto \sin x$	❖ الدالتان $f : x \mapsto \cos x$ و $g : x \mapsto \sin x$ دوريتان دورهما 2π	
الدالة التآلفية $f : x \mapsto ax+b$	✍ إذا كان $a < 0$ فإن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ✍ إذا كان $a > 0$ فإن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ✍ إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة تماما على $\mathbb{R}$	التمثيل البياني للدالة التآلفية في معلم هو مستقيم معامل توجيهه a

تمرين تطبيقي

f دالة معرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$

❶ ما مجموعة تعريف الدالة f.

❷ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن -1 فإن : $f(x) = \dfrac{-3}{x+1} + 4$

❸ أدرس إتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها.

❹ عين صورة المجال $[0;5]$ بالدالة f .

II عمليات على الدوال

1 تساوي دالتين

تعريف

القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x) = g(x)$ و نكتب $f = g$

2 العمليات الجبرية على الدوال

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب، λ و k عددان حقيقيان.

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
حاصل قسمة f على g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ و $g(x) \neq 0$:

3 مركب دالتين

تعريف

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز $g \circ f$ و المعرفة على $D_{g\circ f} = \{x; f(x) \in D_g \text{ و } x \in D_f\}$ بـ : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x+3$ و لتكن g الدالة الجذر التربيعي $(x \mapsto \sqrt{x})$

❖ الدالة $g \circ f$ معرفة إذا كان : $f(x) \in D_g$ أي يكون $-x+3 \geq 0$ ومنه $x \leq 3$

❖ إذا مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$ هي : $D =]-\infty;3]$ ولدينا : $(g \circ f) = \sqrt{-x+3}$

تمرين تطبيقي 01

نعتبر الدالتين f و g حيث $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$ و $g(x) = x+1$

1 أوجد D_f و D_g مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g على الترتيب .

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $(x+2)(x+1) = x^2+3x+2$

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f فإن : $f(x) = x+1$

4 أحسب $g(-2)$ ، هل يمكن حساب صورة -2 بالدالة f (برر جوابك)؟

5 هل الدالتين f و g متساويتان ؟

6 نعتبر الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 و f_4 المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي :

$f_1(x) = f(x)+3$ ، $f_2(x) = -2f(x)$ ، $f_3(x) = f(x)\times g(x)$ و $f_4(x) = f(x)+g(x)$

★ عين بدلالة x عبارة كل من $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $f_3(x)$ و $f_4(x)$.

تمرين تطبيقي 02

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $[4;+\infty[$ على الترتيب بـ : $f(x) = 3x^2+2$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$

1 أكتب كلا من f و g على شكل مركب دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما.

2 عرف الدالتين $g\circ f$ و $f\circ g$.

III إتجاه تغير الدوال $f+k$ ، λf ، $f\circ g$:

1 إتجاه تغير $f+k$

مبرهنة

f دالة رتيبة تماما على مجال I (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) و k عدد حقيقي.
للدالتين f و g نفس إتجاه التغير على المجال I .

مثال تطبيقي

h و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $h(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = h(x) - 3$

❖ أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

2 إتجاه تغير λf

مبرهنة

✍ f دالة رتيبة تماما على مجال I و λ عدد حقيقي غير معدوم.

❖ إذا كان $\lambda > 0$ يكون للدالتين f و λf نفس إتجاه التغير على المجال I .

❖ إذا كان $\lambda < 0$ يكون إتجاها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I .

مثال تطبيقي

✍ g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -3x^2$

❖ ادرس إتجاه تغير الدالة g.

3 إتجاه تغير $f \circ g$:

مبرهنة

f دالة رتيبة تماما على مجال I و g دالة رتيبة تماما على مجال J حيث من أجل كل x من I، $f(x)$ ينتمي إلى J.

❖ إذا كان للدالتين f و g نفس إتجاه التغير تكون الدالة $f \circ g$ متزايدة تماما على I.

❖ إذا كان إتجاها تغير الدالتين f و g متعاكسين تكون الدالة $f \circ g$ متناقصة تماما على I.

مثال تطبيقي

✍ ادرس إتجاه تغير كل من الدالتين الأتيتين :

① f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;1]$ بـ : $f(x) = \sqrt{-x+1}$

② هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x+1}$

IV التمثيل البياني لدالة إنطلاقا من تمثيل بياني أخر

1 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto f(x+a)+b$

مبرهنة

لتكن f و g دالتين معرفتين على D حيث من أجل كل x من D لدينا : $g(x) = f(x+a)+b$ و a و b عددان حقيقيان معلومان نرمز بـ (C_f) و (C_g) إلى تمثيليهما البيانيين على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}+b\vec{j}$

حالات خاصة

❶ إذا كان $a=0$ فإن (C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$

❷ إذا كان $b=0$ فإن (C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$

مثال تطبيقي

نعتبر الدوال f ، g ، h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

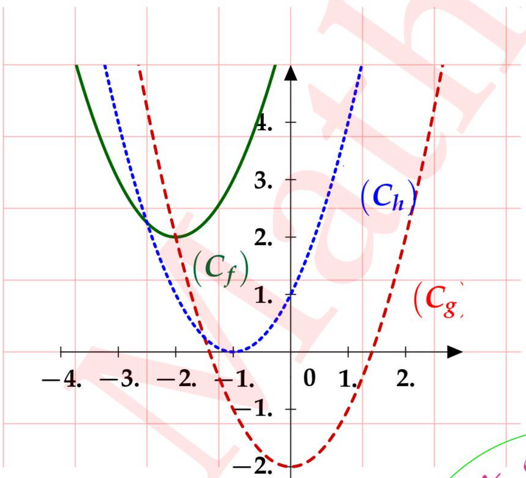
$f(x) = (x+2)^2+2$ ،

$g(x) = x^2-2$ ، $h(x) = (x+1)^2$

(C_f) هو صورة الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}+2\vec{j}$

(C_g) هو صورة الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{j}$

(C_h) هو صورة الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $-\vec{i}$



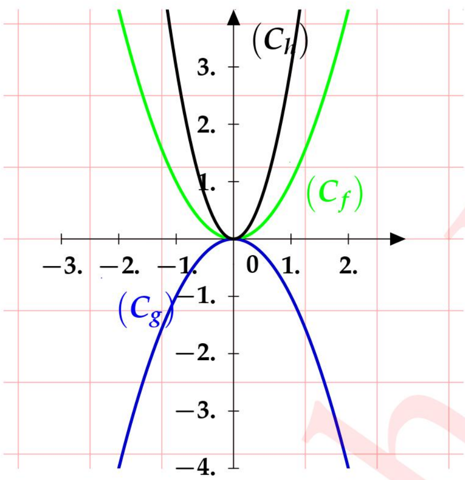
2 التمثيل البياني للدالة λf

مبرهنة

✍ ليكن (C_f) و $(C_{\lambda f})$ التمثيلين البيانيين في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ للدالتين f و λf على الترتيب حيث λ عدد حقيقي غير معدوم. ولتكن M نقطة من (C_f) فاصلتها x. نحصل على نقطة من $(C_{\lambda f})$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ .

مثال تطبيقي

نعتبر الدوال f و g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالأتي
$f(x)=x^2$ و $g(x)=-x^2$ و $h(x)=2x^2$.
ولتكن (C_f) و (C_g) و (C_h) تمثيلاتها البيانية في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$
لدينا $g=-f$ و $h=2f$



ملاحظة

إذا كان $\lambda=-1$ يكون المنحنيان (C_f) و (C_{-f}) متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل .

3 التمثيل البياني للدالة $|f|$

مبرهنة

✍ ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ولتكن g دالة معرفة بالشكل $g(x)=|f(x)|$

❖ إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f(x)\geq 0$ فإن التمثيل البياني لـ g هو نفسه (C_f).

❖ إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I : $f(x)\leq 0$ فإن التمثيليين البيانيين لـ f و g يكونا متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل .

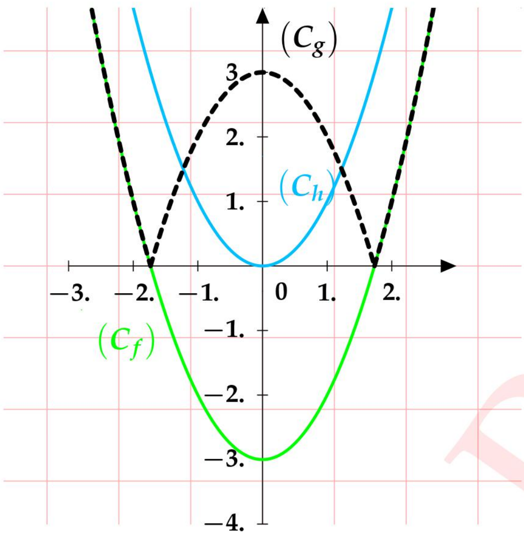
مثال تطبيقي

✍ نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-3$، و $g(x)=|f|$.

❶ أرسم التمثيل البياني (C_f) للدالة f في مستوي منسوب إلى م.م $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$

❷ استنتج التمثيل البياني (C_g) للدالة g. (C_f)

الحـــــل



❶ (C_f) هو صورة (C_h) التمثيل البياني للدالة $h: \mapsto x^2$ بالإنسحاب الذي شعاعه $-3\overrightarrow{j}$

❷ إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن $g(x)=f(x)$

و إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $g(x)=-f(x)$

إذن بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f)

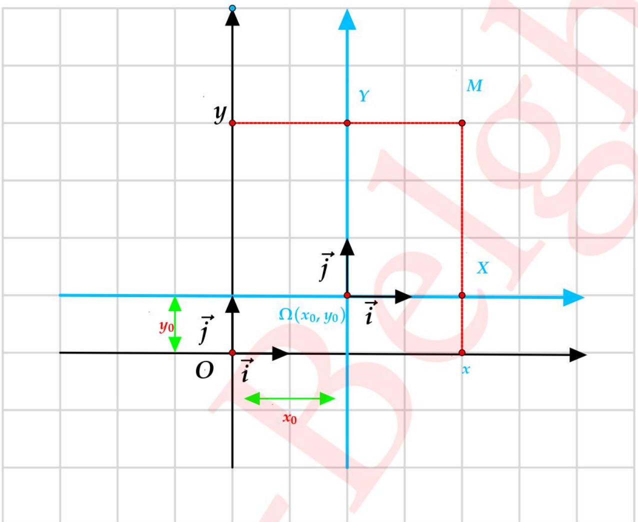
و بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

خلاصــــــــــة: لتكن f وg دالتين معرفتين على D وD' على الترتيب، و ليكن (C_f) و(C_g) تمثيلهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ على الترتيب، وa وb أعداد حقيقية.

الــــــدوال	شـرط الوجـود	الــــــــتحويـــــــل
$g(x)=f(x)+b$	$x\in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة إنسحاب شعاعه $b\vec{j}$
$g(x)=f(x+a)$	$x+a\in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة إنسحاب شعاعه $-a\vec{i}$
$g(x)=f(x+a)+b$	$x+a\in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة إنسحاب شعاعه $-a\vec{i}+b\vec{j}$
$g(x)=-f(x)$	$x\in D$	(C_g) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$g(x)=\|f(x)\|$	$x\in D$	• (C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $f(x)\geq 0$ • (C_g) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل إذا كان $f(x)\leq 0$
$g(x)=f(\|x\|)$	$\|x\|\in D$	نبين أن g دالة زوجية • (C_g) منطبق على (C_f) إذا كان $x\in D\cap\mathbb{R}^+$ • (C_g) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب إذا كان $x\in D\cap\mathbb{R}^-$

V دساتيـــــــــر تغيير معلم

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي و Ω نقطة من المستوي حيث $(x_0;y_0)$ هي إحداثياها بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$
وليكن $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ معلم جديد جديد للمستوي .
M نقطة من المستوي حيث $(x;y)$ هي إحداثياها بالنسبة إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ و $(X;Y)$
هي إحداثياها بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$



لدينا $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ تسمى تغيير دساتر معلم

مثال تطبيقي

في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ إحداثيا النقطةΩهما$(-3,2)$واحداثيا النقطةMهما$(5,2)$
فماهما إحداثيا النقطةMبالنسبة للمعلم$(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.

1 محور تناظر

الطريـقة الأولى

❶ تغيير المعلم من$(o;\vec{i};\vec{j})$إلى $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$حيث فاصلةΩ هي a.
❷ كتابة معادلة(C_f)في المعلم الجديد $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$.
❶ اثبات أن الدالة المحصل عليها زوجية.
عندئذ نقول أن (C_f) يقبل محور تناظر وهو المستقيم ذو المعادلة $x = a$

طرق أخرى

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f

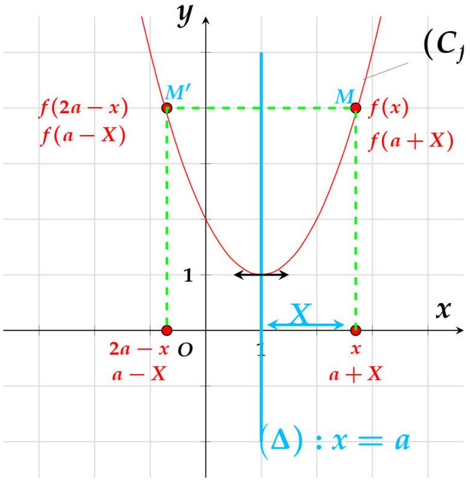
طريقة 1

$M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتين من (C_f) متناظرتين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $x = a$ أي النقطة $A(a.b)$ تقع منتصف قطعة المستقيم $[M'M]$ إذن $a = \dfrac{x'+x}{2}$ ومنه $x' = 2a - x$

من أجل $(a+X) \in D_f$ و $(a-X) \in D_f$ إذا كان $f(a+X) = f(a-X)$ فإن (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $x = a$

طريقة 2

من أجل $x \in D_f$ و $(2a-x) \in D_f$ إذا كان :
$f(2a-x) = f(x)$ فإن (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $x = a$



مثال تطبيقي

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$

✍ أثبت بطريقتين أن المستقيم ذي المعادلة $x = -3$ هو محور تناظر لمنحنى الدالة f.

2 محور تناظر

الطريقة الأولى

❶ تغيير المعلم من $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ إلى $\left(\Omega; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

❷ كتابة معادلة (C_f) في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

❸ اثبات أن الدالة المحصل عليها فردية.

عندئذ نقول أن (C_f) يقبل مركز تناظر وهي النقطة Ω

طرق أخرى

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f

طريقة 1

$M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتين من (C_f) متناظرتين بالنسبةإلى النقطة $\Omega(a.b)$

إذن النقطة $\Omega(a.b)$ تقع منتصف قطعة المستقيم $[M'M]$ إذن

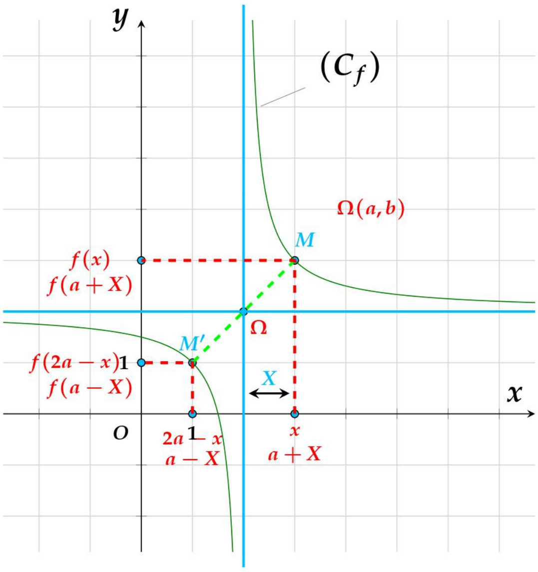
$b = \dfrac{y'+y}{2}$ ومنه $2b = y'+y$ أي $f(x') + f(x) = 2b$

ولدينا مما سبق $x' = 2a - x$

من أجل $x \in D_f$ و $(2a-x) \in D_f$ إذا كان $f(2a-x) + f(x) = 2b$ فإن (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(a,b)$

طريقة 2

من أجل $(x-a) \in D_f$ و $(X+a) \in D_f$ إذا كان $f(a+X) + f(a-X) = 2b$ فإن (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(a,b)$



مثال تطبيقي

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{4\}$ بـ: $g(x) = \dfrac{1}{x-4} + 2$

✍ أثبت بطريقتين أن النقطة $a(4,2)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة g.

تمرين تطبيقي

❶ لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ ولتكن A نقطة من المستوي إحداثياتها $a(2;3)$ في المعلم $\left(o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

✍ بين أن $a\,(2;3)$ مركز تناظر المنحنى (C_f).

❷ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x) = (x-2)^2 + 1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$

✍ أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x = 2$ هو محور تناظر للدالة g