الأستاذة: طرابلسي نرجس هبة

مذكرة رقم : 03

ثانوية : الصادق مخلوف	المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية
السنة الدراسية : $2022 - 2023$	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الاشتقاقية.
المدة : ساعتان	موضوع الحصة : مشتقات الدوال المألوفة.

المكتسبات القبلية : تعريف العدد المشتق .

الكفاءات المستهدفة : تعيين مشتقات الدوال المألوفة.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ،المنهاج، التدرجات السنوية، السبورة، الانترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية **1 نشاط :** أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f من أجل كل x_0 من D_f في كل حالة من الحالات الآتية: 1. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ax + b$. 2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$. 3. f دالة معرفة على $]-\infty; 0[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x}$. 4. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x}$. **2 مناقشة النشاط:** 1. ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $h \neq 0$ لدينا : $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a$$ وعليه f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x_0) = a$. 2. ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $h \neq 0$ لدينا :	

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+h^2+2x_0h-x_0^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2x_0h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(h+2x_0)\\
&= 2x_0
\end{aligned}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x_0)=2x_0$.

3. ليكن $x_0<0$ و $h\neq 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0-x_0-h}{x_0(x_0+h)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx_0(x_0+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+h)}\\
&= -\frac{1}{x_0^2}
\end{aligned}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $]-\infty;0[$ أو من $]0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$.

4. ليكن $x_0>0$ و $h\neq 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند كل x_0 من $]-\infty;0[$ أو من $]0;+\infty[$ ولدينا : $f'(x_0)=-\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

مشتقات الدوال المألوفة

1. مشتقة الدالة التآلفية :

مبرهنة :

كل دالة تآلفية معرفة بـ : $f : x \mapsto ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto a$.

ملاحظات :

1. إذا كان $a = 1$ و $b = 0$ فإن $f : x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f' : x \mapsto 1$
2. إذا كان $a = 0$ و $b = 1$ فإن $f : x \mapsto b$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f' : x \mapsto 0$

مثال :

* f معرفة بـ : $f(x) = 3x + 2$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = 3$.
* f معرفة بـ : $f(x) = -\frac{3}{2}x$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = -\frac{3}{2}$.

2. مشتقة دالة قوة :

مبرهنة :

كل دالة معرفة بـ : $f : x \mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

مثال :

* f معرفة بـ : $f(x) = x^4$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي $f'(x) = 4x^3$.

3. مشتقة دالة مقلوب :

مبرهنة :

الدالة : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

4. مشتقة دالة جذر تربيعي :

مبرهنة :

الدالة : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto -\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. مشتقة الدالة sin والدالة cos :

مبرهنة تقبل دون برهان:

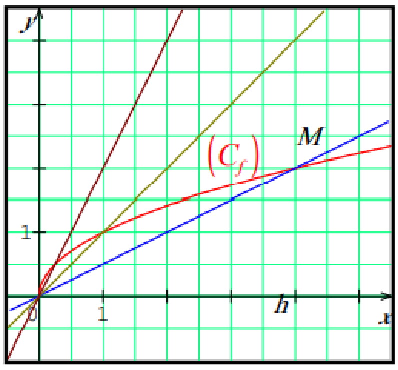
* الدالة : $f : x \mapsto \sin(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto \cos(x)$.

* الدالة : $f : x \mapsto \cos(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقةهي : $f' : x \mapsto -\sin(x)$.

: ملاحظة

نلاحظ أن مجموعة اشتقاق كل دالة مرجعية من الدوال التي رأيناها مطابقة لمجموعة تعريفها ما عدا الدالة الجذر تربيعي.

تمرين محلول 6



الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{x}$. قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة f' معرفة من أجل كل x من $]0,+\infty[$ كما يلي: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

نريد دراسة قابلية إشتقاق f عند 0. ليكن (C_f) الرسم البياني لـــ f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل) M نقطة من (C_f) فاصلتها h. معامل توجيه المستقيم (OM) هو $\dfrac{f(h)}{h}$ أي $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$. كلما اقترب h من الصفر اقتربت النقطة M من النقطة O و عليه يأخذ $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ قيما كبيرة أكثر فأكثر

نقر عندئذ أن الوضعية النهاية للمستقيم (OM) هي حامل محور التراتيب .

نقول أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 و المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لحامل محور التراتيب .

تطبيق :

دون استعمال تعريف العدد المشتق، احسب $f'(3)$ في كل حالة :

$f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^5$

عمل منزلي : 58 ص 86 و 59 ص 86

سير الدرس

الاستثمار و التقويم

4