ثانوية : لخضر ميرود	المستوى : السنة الثانية رياضيات
السنة الدراسية : 2023 − 2022	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الاشتقاقية
المدة : ساعة	موضوع الحصة : القيم الحدية المحلية لدالة.

المكتسبات القبلية : حساب المشتقات، اتجاه تغير دالة .

الكفاءات المستهدفة : تعيين القيم الحدية لدالة، حصر دالة على مجال .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ،السبورة، الانترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**1 نشاط مقترح1:** نعتبر الدالة المعرفة على $[-2;2]$ بـ: $f(x)=x^2+2x+3$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس. 1. أوجد قيمة العدد a التي من أجلها تنعدم الدالة f'، ثم ادرس إشارتها. 2. هــــل غيرت الدالة f' إشارتها عند القيمة a. 3. شكل جدول تغيرات الدالة f. 4. ماذا تمثل النقطة $M(a,f(a))$ بالنسبة للمنحنى (C_f)، ماذا تستنتج؟ 5. أوجد معامل توجيه المـــــاس عند النقطة M، ماذا تستنتج؟ **2 مناقشة النشاط** 1.قيمة العدد a التي من أجلها تنعدم الدالة f'، ثم دراسة إشارتها: الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-2;2]$ ودالتها المشتقةهي : $f'(x)=2x+2$ من أجل كل x من $[-2;2]$: $f'(x)=0$ أي $2x+2=0$ وبالتالي: $x=-1$. <table><tr><td>x</td><td>-2 -1 2</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr></table> 2. نعم المشتقة تغير من اشارتها بجوار a . 3. جدول تغيرات الدالة f :	

x	-2		-1		2
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	11

4. تمثل النقطة $M(a; f(a))$ قيمة حدية محلية للدالة f. نستنتج أنّ المشتقة لما تنعدم وتغير من إشارتها بجوار نقطة معينة فإنّ تلك النقطة تمثل قيمة حدية محلية للدالة f.

5. عامل توجيه المماس عند النقطة:

لدينا : $f'(-1) = 0$ ومنه المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1 موازٍ لمحور الفواصل.

2. القيم الحدية المحلية لدالة :

مبرهنة (تقبل دون برهان)

دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة. إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فانه يوجد مجال I' محتوى في I يشمل c تقبل فيه f قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية.

ملاحظات:

** نسمي النقطة ذات الإحداثيتين $(c, f(c))$. نقطة حدية محلية لمنحنى f، (ذروة للمنحنى (C_f)).

** يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I.

** إذا إنعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I فإن التمثيل البياني يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها c.

مثال:

الدالة $f(x) = x^2 - 4x$ قابلة للاشتقاق على $[1; 3]$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x) = 2x - 4$.

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

نلاحظ أن $f'(x)$ تنعدم عند 2 و تغير إشارتها إذن $f(2)$ أي -4 قيمة حدية محلية صغرى للدالة f من أجل $x = 2$ مثلا.

تنبيه : انعدام f' عند القيمة x_0 غير كاف للقول بأن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f.

مثال:

الدالة $f(x) = x^3 + 2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f'(x) = 3x^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	

نلاحظ أن $f'(x)$ تنعدم عند 0 و لا تغير إشارتها إذن $f(0)$ أي 2 ليست قيمة حدية محلية للدالة f .

ملاحظة هامة

إذا كانت الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم من أجل x_0 و لاتغير الإشارة عندها فإن النقطة $I(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطـــــــــــاف للمنحنى (C_f).

التفسير الهندسي : إذا كانت النقطة $I(x_0, f(x_0))$ نقطة إنعطاف للمنحى (C_f) فإن منحنى الدالة يخترق مماس عند النقطة I مغيرا وضعيته.

تطبيق : f الدالة المعرفة على $[-2; 2]$ بـ : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.

** ادرس اتجاه تغير الدالة f.ثم شكل جدول تغيراتها.

** عيـن القيـم الحديـة المحلية للدالة f إن وجدت.

3 نشاط 02 :

نعتبر نفس الدالة f المعرفة على المجال $[-2, 2]$ في النشاط الأول.

1. بين أنّه من أجل كل x من $[-2, 2]$: $f(x) = (x + 1)^2 + 2$
2. باستعمال خواص المتباينات عين حصرا للعدد $f(x)$
3. استنتج حصرا لـ $f(x)$ على المجال $[-2; 2]$ اعتمادا على جدول التغيرات.
4. قارن بين نتائج الطريقتين

4 مناقشة النشاط

1. تبيان أنّه من أجل كل x من $[-2, 2]$: $f(x) = (x + 1)^2 + 2$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 + 2 \\ &= (x + 1)^2 + 2 \end{aligned}$$

2. إيجاد حصر لـ $f(x)$:

3

لدينا :

$-2 \leq x \leq 2$

ومنه $-1 \leq x+1 \leq 3$

إذن: $0 \leq x+1 \leq 3$ وعليه : $2 \leq (x+1)^2+2 \leq 11$ أي : $2 \leq f(x) \leq 11$

أو $-1 \leq x+1 \leq 0$ وعليه : $2 \leq (x+1)^2+2 \leq 3$ أي : $2 \leq f(x) \leq 3$

أي $f(x) \in [2;3] \cup [3;11]$ ومنه $f(x) \in [2;11]$ أي $2 \leq f(x) \leq 11$.

3. حصر $f(x)$ من جدول التغيرات :

من جدول التغيرات الدالة f نجد: $2 \leq f(x) \leq 11$

4. المقارنة : تحصل على نفس النتائج .

3. حصر دالة :

نتائج

لتكن الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال $[a;b]$ و f' دالتها المشتقة.

* إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

* إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

مثال :

الدالة $f : x \mapsto x^2$ متزايدة تماما على المجال $[2;5]$ ومنه من أجل كل $x \in [2;5]$: $f(2) \leq f(x) \leq f(5)$ أي :

$4 \leq x^2 \leq 25$

والدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1;0]$ ومنه من أجل كل $x \in [-1;0]$: $f(-1) \geq f(x) \geq f(0)$ أي :

$1 \geq x^2 \geq 0$

4. العنصر الحاد من الأعلى من الأسفل :

تعريف :

لتكن الدالة f معرفة على مجال D_f.

* نقول عن عدد حقيقي أنّه عنصر حادا من الأعلى (Majorant) للدالة f إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f : $f(x) \leq k$.

* نقول عن عدد حقيقي أنّه عنصر حادا من الأسفل (Minorant) للدالة f إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f : $f(x) \geq k$.

ملاحظات

* القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأعلى وهو أصغر العناصر الحادة من الأعلى

4

بناء المعارف

* القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f إن وجدت هي العنصر الحاد من الأسفل وهو أكبر العناصر الحادة من الأسفل.

تطبيق :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 - 6x + 3$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2. بين أنّه من أجل كل x من $[-1;1]$: $-1 \leq f(x) \leq 7$.

تمرين :

لتكن الدالة f المعرفة على $[-5,0]$ بـ: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 100$.

- **أدرس تغيرات الدالة f على المجال** $[-5,0]$.
- **عين عنصرا حادا من الأعلى و عنصرا حادا من الأسفل للدالة f على المجال** $[-5,0]$.

حـــل: • الدالة f دالة كثير حدود فهي معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. لتكن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$.
من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ و هي ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه المختصر $\Delta' = 9$. 1 و 2 هما جذرا ثلاثي الحدود ، فهما لا ينتميان إلى مجال الدراسة $[-5,0]$. ونستنتج أن على المجال $[-5,0]$ الدالة المشتقة f' للدالة f موجبة تماما ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-5,0]$. و منه جدول التغيرات:

x	-5	0
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-635 ↗	-100

• من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5;0]$ فإن $f(x) \leq -100$.
إذن -100 هو عنصرا حادا من الأعلى و هو أصغر القيم الحادة من الأعلى للدالة f على المجال $[-5,0]$.
و منه -100 هو القيمة الحدية الكبرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.
• من جدول التغيرات يتبين : من أجل كل قيمة x من المجال $[-5,0]$ فإن $f(x) \geq -635$.
إذن -635 هي قيمة حادة من الأسفل و هي أكبر القيم الحادة من الأسفل للدالة f على المجال $[-5,0]$.
و منه -635 هو القيمة الحدية الصغرى للدالة f على المجال $[-5,0]$.

الاستثمار و التقويم

عمل منزلي 42 و 45 ص 106

ملاحظات عن سير الحصة: