مذكرة رقم: 03

الأستاذة: صبرينة رياح

ثانوية : لخضر ميرود	المستوى : السنة الثانية رياضيات
السنة الدراسية : 2022 — 2023	ميدان التعلم : تحليل
يوم : سبتمبر 2022	المحور : الدوال العددية
المدة : ساعتان	موضوع الحصة : العمليات على الدوال $f \circ g$

المكتسبات القبلية : مفاهيم حول الدوال العددية

الكفاءات المستهدفة : التعرف على تركيب الدوال، تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية .

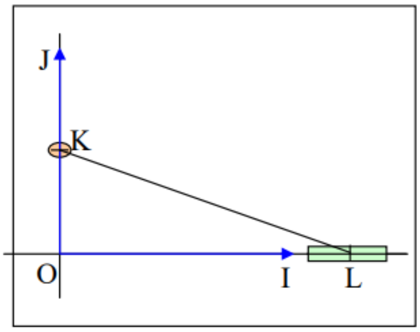
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، المنهاج، التدرج السنوي،السبورة، الانترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط 5 ص 09

نشاط خامس



في الشكل المقابل، المعلم $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ متعامد ومتجانس

(وحدة الطول هي : $1km$).

النقطة $K\left(0,\frac{1}{2}\right)$ تمثل صومعة تبعد عن النقطة O بـنصف كيلومتر.

تتحرك عربة L على سكة حديدية ممثلة بمحور الفواصل.

لتكن f الدالة التي ترفق بالزمن t العدد x فاصلة النقطة L حيث:

$x=f(t)=25t$ (في اللحظة $t=0$ تكون L في O).

1. أحسب بدلالة x المسافة KL.
2. نضع: $y=KL=g(x)$. تحقق أن: $y=\sqrt{0.25+x^2}$.
3. بما أن لدينا x بدلالة t و y بدلالة x ، يكون المرور من t إلى y بواسطة الدالة h المحصل عليها بإتباع المخطط التالي:

$$t \xrightarrow{f} x \xrightarrow{g} y$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{h}$$

بين أن: $h(t)=\frac{1}{2}\sqrt{1+2500t^2}$

2 مناقشة النشاط :

في الشكل المقابل المعلم $(O;I,J)$ متعامد ومتجانس. لدينا النقطة $K(o,\frac{1}{2})$ و $x=f(t)=25t$.

1. حساب بدلالة x المسافة KL :

لدينا المثلث KOL قائم في O، بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد :

$$\begin{aligned} KL^2 &= KO^2 + OL^2 \\ &= X^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ومنه : $KL = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$

2. نضع : $y = KL = g(x)$، التحقق أنّ : $y = \sqrt{x^2 + 0.25}$:

لدينا : $KL = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 + 0.25}$

و $y = KL$.

ومنه : $y = \sqrt{x^2 + 0.25}$.

3. تبيان أنّ : $h(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2500t^2}$:

لدينا: $y = \sqrt{x^2 + 0.25}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(25t)^2 + 0.25} \\ &= \sqrt{625t^2 + 0.25} \\ &= \sqrt{4 \times \frac{1}{4}625t^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(4 \times 625t^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2500t^2 + 1} \end{aligned}$$

ومنه : $h(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2500t^2 + 1}$.

نتيجة: نقول أن h هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة g و نرمز إليها بالرمز $g \circ f$ ونكتب $h = g \circ f$ حيث:
$h(t) = g\left(f(t)\right)$

1. تركيب الدوال

تعريف :

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ والمعرفة على :

$$D_{g \circ f} = \{x / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

بـ : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

معناه : $(g \circ f) : x \mapsto f(x) \mapsto g[f(x)]$

مثال 01:

بناء المعارف

f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x^2$ و $g(x)=3x-1$

- الدالة $g\circ f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= 3(x^2)-1\\ &= 3x^2-1\end{aligned}$$

- الدالة $f\circ g$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= (3x-1)^2\\ &= 9x^2-6x+1\end{aligned}$$

** من المثال السابق نستنتج أنّ $f\circ g\neq g\circ f$

مثال 02:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+2$

ولتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\sqrt{x}$.

** نعرف الدالة $g\circ f$:

$$\begin{aligned}D_{g\circ f} &= \{x/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } -x+2\in[0;+\infty[\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } -x+2\geq 0\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R} \text{ و } x\leq 2\}\end{aligned}$$

ومنه مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي : $D_{g\circ f}=]-\infty;0]$

ولدينا : $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(-x+2)=\sqrt{-x+2}$

ملاحظة

مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي : $D_{f\circ g}=\{x/x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\}$

حل تمرين 35 ص 28

f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}-\{-1\}$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب كمايلي : $f(x)=\frac{-1}{x+1}$ و $g(x)=2x$

** نعرف الدالة $g\circ f$:

$$\begin{aligned}D_{g\circ f} &= \{x/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R}-\{-1\} \text{ و } \frac{-1}{x+1}\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R}-\{-1\} \text{ و } x+1\neq 0\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R}-\{-1\} \text{ و } x\neq -1\}\\ &= \{x/x\in\mathbb{R}-\{-1\} \text{ و } x\in\mathbb{R}-\{-1\}\}\\ &= \mathbb{R}-\{-1\}\end{aligned}$$

ولدينا : $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(\frac{-1}{x+1})=\frac{-2}{x+1}$

** نعرف الدالة $f \circ g$:

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x/x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } 2x \in \mathbb{R} - \{-1\}\} \\ &= \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } 2x \neq -1\} \\ &= \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \neq -\frac{1}{2}\} \\ &= \{x/x \in \mathbb{R} \text{ و } x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}\} \\ &= \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

ولدينا : $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x) = \frac{-1}{2x+1}$

2. تفكيك دالة باستعمال الدوال المرجعية

مثال «①»: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-1)^2$

❖ نفكك f إلى دالتين مرجعيتين :

لدينا : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} (x-1)^2$

ومنه: $f = v \circ u$ حيث : $u : x \mapsto x-1$ و $v : x \mapsto x^2$

مثال «②»: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+1}$

❖ نفكك f إلى دالتين مرجعيتين :

لدينا : $x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} \sqrt{x+1}$

ومنه: $f = v \circ u$ حيث : $u : x \mapsto x+1$ و $v : x \mapsto \sqrt{x}$

تمرين تطبيقي : فكك الدوال التالية إلى دالتين مرجعيتين يطلب تعيينهما:

1. $f(x) = (x-3)^2$
2. $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
3. $f(x) = \sqrt{x-3}$
4. $f(x) = \sqrt{x-5} + 1$
5. $f(x) = \sqrt{4x+8} + 2$
6. $f(x) = \frac{1}{x+3}$
7. $f(x) = \frac{3}{x+1} + 2$
8. $f(x) = sin(x+3)$
9. $f(x) = cos(x+1) + 2$
10. $f(x) = (x+2)^2 + 4$
11. $f(x) = 2x^2 + 1$
12. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 5$

الأستاذ: بن عيسى

تمرين تطبيقي : f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{2\}$ على الترتيب بـ :

$$g(x)=\frac{1}{x-2} \quad \text{و} \quad f(x)=x^2+1$$

① اكتب كلا من f و g على شكل دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما .

② عرّف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

حل التمرين التطبيقي :

①

لدينا : $\mathbf{x} \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbf{x^2} \xrightarrow{\quad v \quad} \mathbf{x^2+1}$

ومنه: $f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x^2$ و $v:x\mapsto x+1$

ولدينا : $\mathbf{x} \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbf{x-2} \xrightarrow{\quad v \quad} \mathbf{\frac{1}{x-2}}$

ومنه: $g=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x-2$ و $v:x\mapsto \frac{1}{x}$

②

✦ $f\circ g$ معرفة إذا كان $x\in D_g$ فإن $g(x)\in D_f$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ فإن : $\frac{1}{x-2}\in\mathbb{R}$ إذن : $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{2\}$

من أجل $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ فإن :

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=(g(x))^2+1=\frac{1}{(x-2)^2}+1=\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$$

✦ $g\circ f$ معرفة إذا كان $x\in D_f$ فإن $f(x)\in D_g$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $f(x)\in\mathbb{R}-\{2\}$ أي : $f(x)\neq 2$ ومنه : $x^2+1\neq 2$

ومنه : $x\neq 1$ و $x\neq -1$ إذن : $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

و بالتالي : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{-1;1\}=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

من أجل $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فإن : $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\frac{1}{f(x)-2}=\frac{1}{x^2-1}$

صورة مجال بدالة تآلفية :

مثال :

* لتكن الدالة $\boldsymbol{u}$ معرفة على $\boldsymbol{I=[-2;1]}$ بـ : $\boldsymbol{u(x)=2x+1}$

صورة المجال $\boldsymbol{I}$ بالدالة $\boldsymbol{u}$ هي :

بما أنّ الدالة $\boldsymbol{u}$ متزايدة تماما على $\boldsymbol{I}$ فإنّ : $\boldsymbol{u(I)=u([-2;1])=[u(-3);u(1)]=[-3,3]}$

* لتكن الدالة $\boldsymbol{v}$ معرفة على $\boldsymbol{J=[0;2]}$ بـ : $\boldsymbol{v(x)=-x+1}$

صورة المجال $\boldsymbol{J}$ بالدالة $\boldsymbol{v}$ هي :

بما أنّ الدالة $\boldsymbol{v}$ متناقصة تماما على $\boldsymbol{I}$ فإنّ : $\boldsymbol{v(J)=v([0;2])=[u(2);u(0)]=[-1,1]}$

قاعدة

لتكن u دالة تآلفية.

1. إذا كانت u متزايدة تماما على المجال $[a;b]$, فإنّ $u([a;b]) = [u(a);u(b)]$
2. إذا كانت u متناقصة تماما على المجال $[a;b]$, فإنّ $u([a;b]) = [u(b);u(a)]$

تطبيق :

* لتكن الدالة u المعرفة بـ : $u(x) = 2x - 4$

** ماهي صورة المجالين $I = [1;+\infty[$ و $J =]-\infty;4]$ بالدالة u؟

* لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x^2$

** ماهي صورة المجالين $I = [1;2]$ و $J =]-2;3]$ بالدالة f؟

عمل منزلي 32، 33، 34، 37 ص 28

الاستثمار و التقويم

ملاحظات عن سير الحصة:

6