مذكرة رقم : 04

الأستاذة: صبرينة رياح

ثانوية : لخضر ميرود	المستوى : السنة الثانية رياضيات
السنة الدراسية : 2023 − 2022	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : الاشتقاقية
المدة : ساعتين	موضوع الحصة : العمليات على الدوال المشتقة.

المكتسبات القبلية : تعريف العدد المشتق، مشتقات الدوال المألوفة.

الكفاءات المستهدفة : حساب مشتقات الدوال $u+v$، $u\times v$، $\frac{u}{v}$، $\frac{1}{v}$، $x\mapsto u(ax+b)$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي ،المنهاج، التدرجات السنوية، دليل الاستاذ،السبورة، الانترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التهيئة النفسية التذكير بمشتقات الدوال المألوفة

العمليات على الدوال المشتقة

بناء المعارف

1. مشتقة مجموع دالتين :

تعريف :

u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$، الدالة $u+v$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي :
$(u+v)' = u'+v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 .لدينا:

$$\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=\frac{u(x_0+h)+v(x_0+h)-u(x_0)-v(x_0)}{h}$$
$$=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$.

بما أن u و v قابلتان للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D $\lim\limits_{h\to 0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim\limits_{h\to 0} g_2(h)=v'(x_0)$

و منه $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(u+v)(x_0+h)-(u+v)(x_0)}{h}=u'(x_0)+v'(x_0)$ و منه صحة المبرهنة.

مثال :

* لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+x$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :
$f'(x)=2x+1$.

2. مشتقة جداء دالتين :

تعريف :

u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ (D مجال أو اتحاد مجالات من $\mathbb{R}$). الدالة $u \times v$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $(u \times v)' = u'.v + u.v'$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا:

$$\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h} = \frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)}{h}$$
$$= \frac{u(x_0+h).v(x_0+h)-u(x_0).v(x_0)+v(x_0+h).u(x_0)-v(x_0+h).u(x_0)}{h}$$
$$= \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0+h)+\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}u(x_0)$$

نضع $g_1(h)=\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$ و $g_2(h)=\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}$ بما أن u و v قابلتان للاشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D : $\lim_{h\to 0} g_1(h)=u'(x_0)$ و $\lim_{h\to 0} g_2(h)=v'(x_0)$ و $\lim_{h\to 0} v(x_0+h)=v(x_0)$

ومنه $\lim_{h\to 0}\frac{(u.v)(x_0+h)-(u.v)(x_0)}{h}=u'(x_0).v(x_0)+u(x_0).v'(x_0)$ إذن صحة المبرهنة.

مثال :

* لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+2)(x^4-x^2)$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1(x^4+x^2)+(4x^3+2x)(x+2) \\ &= x^4+x^2+4x^4+8x^3+2x^2+4x \\ &= 5x^4+8x^3+3x^2+4x \end{aligned}$$

ملاحظة : إذا كانت u ق.إ على D و λ عدد حقيقي فإن: $(\lambda u)'=\lambda u'$

3. مشتقة مقلوب دالة :

تعريف :

v دالة قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ ولاتنعدم عليه.

الدالة $\frac{1}{v}$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$.

برهان: من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h}=\frac{\left(\frac{1}{v(x_0+h)}\right)-\left(\frac{1}{v(x_0)}\right)}{h}$$
$$=\left(\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h).v(x_0).h}\right)$$
$$=\frac{1}{v(x_0+h).v(x_0)}\left(-\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\right)$$

بما أن v قابلة للإشتقاق على D لدينا من أجل كل x_0 من D و $\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h}=-\frac{v'(x_0)}{\left(v(x_0)\right)^2}$

ومنه صحة المبرهنة.

4. مشتقة نسبة دالتين :

تعريف :

u و v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ (D مجال أو اتحاد مجالات من $\mathbb{R}$) و $v \neq 0$، الدالة $\frac{u}{v}$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$.

برهان: نلاحظ أن $\frac{u}{v}$ يكتب $u \times \frac{1}{v}$ و نطبق مبرهنة مشتقة مقلوب دالة و مبرهنة مشتقة جداء دالتين .

مثال :

* لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x+1}$ إذن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(2x+1) - 2(x^2+2x+1)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)(2x+1) - 2(x+1)^2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

5. مشتقة الدالة $f : x \mapsto u(ax+b)$:

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $(ax+b)$ ينتمي إلى D مع a و b عددان حقيقيان فان الدالة $f : \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على E ودالتها المشتقة هي : $f' : x \mapsto au'(ax+b)$ حيث u' مشتقة الدالة u على D.

ملاحظة:

* الدالة f هي دالة مركبة من الدالة $k(x) = ax+b$ متبوعة بالدالة u بمعنى : $f = u \circ k$.

تطبيق : عين الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة :

- $f(x) = \sqrt{2x^2+2}$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
- $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \pi)$
- $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$
- $f(x) = 3x\sin(-x + \frac{\pi}{5})$
- $f(x) = (x^2+1)(x-2)$
- $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2x}$
- $f(x) = (x-8)\cos(x)$
- $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $f(x) = (2x^2+5x-2)^8$

حل التطبيق :

cc

4

الاستثمار و التقويم	حل التمرين 73ص 87 حل التمرين 75ص 87 عمل منزلي : 64، 65، 66، 67، 68،69، 70، 71 ص 87	

ملاحظات عن سير الحصة:

5